

TP différences finies 1D

Compte rendu

UE-PL6017ME

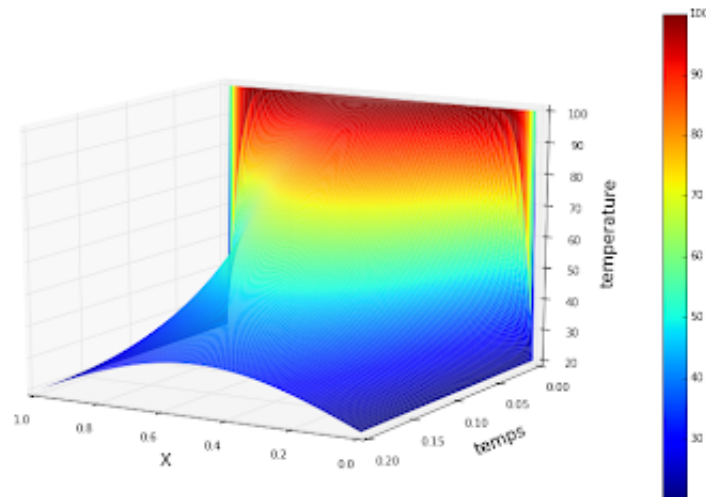


FIGURE 1 – Simulation numérique de l'équation de la chaleur 1D

Jérémy Archier
3A MECA
p2019441

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation du problème	2
3	Résolution analytique	2
4	Résolution numérique	3
4.1	Schéma explicite	3
4.1.1	Discrétisation	3
4.1.2	Conditions aux limites	4
4.1.3	Système à résoudre	4
4.2	Schéma implicite	5
4.2.1	Discrétisation	5
4.2.2	Conditions aux limites	5
4.2.3	Système à résoudre	6
4.3	Schéma de Crank-Nicholson	7
4.3.1	Discrétisation	7
4.3.2	Conditions aux limites	7
4.3.3	Système à résoudre	7
5	Présentation des résultats	9
5.1	Solution explicite	9
5.2	Solution implicite	10
5.3	Solution de Crank-Nicholson	11
6	conclusion	12

1 Introduction

Nous allons nous intéresser à l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Pour ce faire, dans un premier temps, il s'agira de résoudre analytiquement l'équation aux dérivées partielles à l'aide de la méthode de séparation des variables. Puis nous implémenterons les méthodes de différences finies selon 3 schémas différents. Enfin, nous analyseront les résultats en comparant les graphiques des 3 schémas par rapport à la solution analytique à un instant donné.

2 Présentation du problème

On considère l'équation de la chaleur instationnaire monodimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t) \quad \forall t > 0 \text{ et } \forall x \in [0, L] \quad (1)$$

$$\text{Conditions aux limites : } \begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}(x = 0, t) = \beta & \forall t > 0 \\ T(x = L, t) = \gamma \end{cases}$$

$$\text{Conditions initiales : } T(x, t = 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique qui décrit le phénomène physique de conduction thermique.

3 Résolution analytique

On va déterminer par la méthode de séparation des variables la solution exacte de l'équation de la chaleur dans le cas où $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

On cherche une solution au problème sous la forme :

$$T(x, t) = f(t)g(x)$$

On substitue cette relation dans l'équation de la chaleur, il vient :

$$f'(t)g(x) = \alpha^2 f(t)g''(x)$$

Cette équation peut se réécrire :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \alpha^2 \frac{g''(x)}{g(x)} = \text{cste}$$

Le membre de gauche est une fonction de t et celui de droite une fonction de x . Par conséquent chacun des deux membres doit être constant.

On peut donc écrire les deux équations différentielles suivantes en posant $\beta^2 = \frac{k}{\alpha^2}$:

$$f'(t) - kf(t) = 0 \quad (2)$$

$$g''(x) - \beta^2 g(x) = 0 \quad (3)$$

On suppose que $k = -\beta^2 \alpha^2 < 0$, on peut montrer quand prenant $k > 0$ les conditions aux limites conduisent à une solution identiquement nulle.

En intégrant les équations (2) et (3), il vient :

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 e^{-\beta^2 \alpha^2 t} \\ g(x) &= C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sin(\beta x) \end{aligned}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$T(x, t) = e^{-\beta^2 \alpha^2 t} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)] \quad (4)$$

La première condition aux limites en $x = 0$ s'écrit :

$$e^{-\beta^2 \alpha^2 t} [0 + \beta B] = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

L'équation (4) devient :

$$T(x, t) = A e^{-\beta^2 \alpha^2 t} \cos(\beta x)$$

L'application de la deuxième condition aux limites donne :

$$\begin{aligned} T(x = L, t) &= A e^{-\beta^2 \alpha^2 t} \cos(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta L = \frac{n\pi}{2} \\ \text{d'où} \quad \beta &= \frac{\pi}{2L} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale s'écrit :

$$T_n(x, t) = A_n e^{-\alpha^2 \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

Or, la condition initiale énonce :

$$T(x, t = 0) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad \Rightarrow \quad n = 1 \text{ et } A_1 = 1$$

On en déduit la solution exacte du problème dans le cas où $\beta = 0$ et $\gamma = 0$:

$$\boxed{T_{ex}(x, t) = e^{-\alpha^2 \frac{\pi^2}{4L^2} t} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \quad (5)$$

4 Résolution numérique

Nous allons résoudre l'équation de la chaleur à l'aide de différents schémas Numériques : d'ordre 1 pour les schémas explicite et implicite, d'ordre 2 pour le schéma de Crank-Nicholson.

Pour ce faire nous allons réaliser les différentes méthode de résolution à l'aide d'un code matlab, puis nous tracerons chacune des évolutions de la température à un instant donné que nous comparerons à la solution exacte.

Tout d'abord, il faut s'assurer de la stabilité des schémas. Selon le cours de M. Hamda Ben Hadid, les schéma implicite centré et de Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

En ce qui concerne le schéma explicite, la condition de stabilité s'écrit :

$$\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (6)$$

4.1 Schéma explicite

4.1.1 Discrétisation

Le schéma explicite avancé d'ordre 1 s'écrit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (7)$$

Le schéma centré d'ordre 2 en espace s'écrit lui :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (8)$$

On remplace les équations (7) et (8) dans l'équation de la chaleur (1) :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + F(x_i, t^n)$$

On pose $r = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$, il vient :

$$\boxed{T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n + \Delta t F(x_i, t^n)} \quad (9)$$

4.1.2 Conditions aux limites

La première condition, de type Dirichlet, s'écrit $\forall t > 0, T(x = L, t) = \gamma \Rightarrow T_N^n = \gamma$
On écrit le schéma au point juste avant (N-1) pour tenir compte de cette condition limite :

$$\boxed{T_{N-1}^{n+1} = rT_{N-1}^n + (1 - 2r)T_{N-1}^n + r\gamma + \Delta t F(x_1, t^n)} \quad (10)$$

La deuxième condition, de type Neumann, s'écrit $\forall t > 0, \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t)$
On va écrire la dérivée première centrée d'ordre 2 :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On l'écrit au nœud $i = 1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1^n &\approx \frac{T_2^n - T_0^n}{\Delta x} = \beta \\ \Rightarrow T_0^n &= T_2^n - 2\beta\Delta x \end{aligned}$$

On peut donc réécrire (10) en $i=1$, on obtient :

$$\boxed{T_1^{n+1} = (1 - 2r)T_1^n + 2rT_2^n - 2r\beta\Delta x + \Delta t F(x_{N-1}, t^n)} \quad (11)$$

4.1.3 Système à résoudre

Il nous reste donc juste à résoudre le système algébrique de (N-1) équations à (N-1) inconnues qui suit :

$$\begin{cases} T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n + \Delta t F(x_i, t^n) & \forall i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^{n+1} = (1 - 2r)T_1^n + 2rT_2^n - 2r\beta\Delta x + \Delta t F(x_1, t^n) \\ T_{N-1}^{n+1} = rT_{N-1}^n + (1 - 2r)T_{N-1}^n + r\gamma + \Delta t F(x_{N-1}, t^n) \end{cases}$$

On peut réécrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & r & 1-2r & r & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & r & 1-2r & r & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} -2r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r\gamma \end{bmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$T^{n+1} = AT^n + B$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & r & 1-2r & r & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & r & 1-2r & r & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r\gamma \end{bmatrix}$$

4.2 Schéma implicite

4.2.1 Discrétisation

Le schéma explicite avancé d'ordre 1 s'écrit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i^n = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (12)$$

Le schéma centré d'ordre 2 en espace s'écrit lui :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right|_i^n = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (13)$$

On remplace les équations (12) et (13) dans l'équation de la chaleur (1) :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + F(x_i, t^n)$$

On pose $r = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$, il vient :

$$\boxed{-rT_{i-1}^{n+1} + (1+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = T_i^n + \Delta t F(x_i, t^n)} \quad (14)$$

4.2.2 Conditions aux limites

La première condition, de type Dirichlet, s'écrit $\forall t > 0, T(x=L, t) = \gamma \Rightarrow T_N^n = \gamma$

On écrit le schéma au point juste avant (N-1) pour tenir compte de cette condition limite :

$$\boxed{T_{N-1}^n = -rT_{N-1}^{n+1} + (1+2r)T_{N-1}^{n+1} + r\gamma + \Delta t F(x_1, t^n)} \quad (15)$$

La deuxième condition, de type Neumann, s'écrit $\forall t > 0, \frac{\partial T}{\partial x}(x=0, t)$

On va écrire la dérivée première centrée d'ordre 2 :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On l'écrit au nœud $i=1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1^n &\approx \frac{T_2^n - T_0^n}{\Delta x} = \beta \\ \Rightarrow T_0^n &= T_2^n - 2\beta\Delta x \end{aligned}$$

On peut donc réécrire (15) en $i=1$, on obtient :

$$\boxed{T_1^n = (1+2r)T_1^{n+1} - 2rT_2^{n+1} + 2r\beta\Delta x + \Delta t F(x_{N-1}, t^n)} \quad (16)$$

4.2.3 Système à résoudre

Il nous reste donc juste à résoudre le système algébrique de (N-1) équations à (N-1) inconnues qui suit :

$$\begin{cases} T_i^n = -rT_{i-1}^{n+1} + (1+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} + \Delta t F(x_i, t^n) & \forall i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^n = (1+2r)T_1^{n+1} - 2rT_2^{n+1} + 2r\beta\Delta x + \Delta t F(x_1, t^n) \\ T_{N-1}^n = -rT_{N-1}^{n+1} + (1+2r)T_{N-1}^{n+1} - r\gamma + \Delta t F(x_1, t^n) \end{cases}$$

On peut réécrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} -2r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r\gamma \end{bmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$AT^{n+1} = T^n + B$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -2r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ r\gamma \end{bmatrix}$$

4.3 Schéma de Crank-Nicholson

4.3.1 Discrétisation

On écrit le θ -schéma en prenant $\theta = \frac{1}{2}$:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \left[\frac{1}{2}(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \right] + F(x_i, t^{n+1})$$

On pose $r = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$, il vient :

$$\boxed{-\frac{r}{2}T_{i+1}^{n+1} + (1+r)T_i^{n+1} - \frac{r}{2}T_{i-1}^{n+1} = \frac{r}{2}T_{i+1}^n + (1-r)T_i^n + \frac{r}{2}T_{i-1}^n + \Delta t F(x_i, t^{n+1})} \quad (17)$$

4.3.2 Conditions aux limites

La première condition, de type Dirichlet, s'écrit $\forall t > 0, T(x = L, t) = \gamma \Rightarrow T_N^n = \gamma$
On écrit le schéma au point juste avant (N-1) pour tenir compte de cette condition limite :

$$\boxed{-\frac{r}{2}\gamma + (1+r)T_{N-1}^{n+1} - \frac{r}{2}T_{N-2}^{n+1} = \frac{r}{2}\gamma + (1-r)T_{N-1}^n + \frac{r}{2}T_{N-2}^n + \Delta t F(x_{N-1}, t^{n+1})} \quad (18)$$

La deuxième condition, de type Neumann, s'écrit $\forall t > 0, \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t)$

On va écrire la dérivée première centrée d'ordre 2 :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i^n = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

On l'écrit au nœud $i = 1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_1^n &\approx \frac{T_2^n - T_0^n}{\Delta x} = \beta \\ \Rightarrow T_0^n &= T_2^n - 2\beta \Delta x \end{aligned}$$

On peut donc réécrire (17) en $i=1$, on obtient :

$$\boxed{-\frac{r}{2}T_2^{n+1} + (1+r)T_1^{n+1} - \frac{r}{2}(T_2^{n+1} - 2\beta \Delta x) = \frac{r}{2}T_2^n + (1-r)T_1^n + \frac{r}{2}(T_2^n - 2\beta \Delta x) + \Delta t F(x_1, t^{n+1})} \quad (19)$$

4.3.3 Système à résoudre

Il nous reste donc juste à résoudre le système algébrique de (N-1) équations à (N-1) inconnues qui suit :

$$\begin{cases} -\frac{r}{2}T_{i+1}^{n+1} + (1+r)T_i^{n+1} - \frac{r}{2}T_{i-1}^{n+1} = \frac{r}{2}T_{i+1}^n + (1-r)T_i^n + \frac{r}{2}T_{i-1}^n + \Delta t F(x_i, t^{n+1}) & \forall i = 2, \dots, N-2 \\ -\frac{r}{2}\gamma + (1+r)T_{N-1}^{n+1} - \frac{r}{2}T_{N-2}^{n+1} = \frac{r}{2}\gamma + (1-r)T_{N-1}^n + \frac{r}{2}T_{N-2}^n + \Delta t F(x_{N-1}, t^{n+1}) \\ -\frac{r}{2}T_2^{n+1} + (1+r)T_1^{n+1} - \frac{r}{2}(T_2^{n+1} - 2\beta \Delta x) = \frac{r}{2}T_2^n + (1-r)T_1^n + \frac{r}{2}(T_2^n - 2\beta \Delta x) + \Delta t F(x_1, t^{n+1}) \end{cases}$$

On peut réécrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ \vdots \\ T_{N-3} \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} -r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r}{2}\gamma \end{bmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$AT^{n+1} = BT^n + C$$

avec $A = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -r\beta\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r}{2}\gamma \end{bmatrix}$$

5 Présentation des résultats

On a implémenté les 3 méthodes en considérant $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $L = 2$ et $F(x, t) = 0$ (pas de source de chaleur).

Pour déterminer le moment t_f où la solution peut être considérée comme stationnaire, on a défini la constante de temps τ qui caractérise le système tel que :

$$T_{ex}(x, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4L^2}{\pi^2 \alpha^2} \quad (20)$$

La température atteindra 99,3 % de sa valeur en régime permanent, qui n'est autre que 0°C , après 5τ . On en déduit la valeur de t_f :

$$t_f = 5\tau = \frac{20L^2}{\pi^2 \alpha^2} \approx 811 \text{ s}$$

5.1 Solution explicite

On trace la solution du schéma explicite que l'on compare avec la solution analytique au temps $t = \tau$:

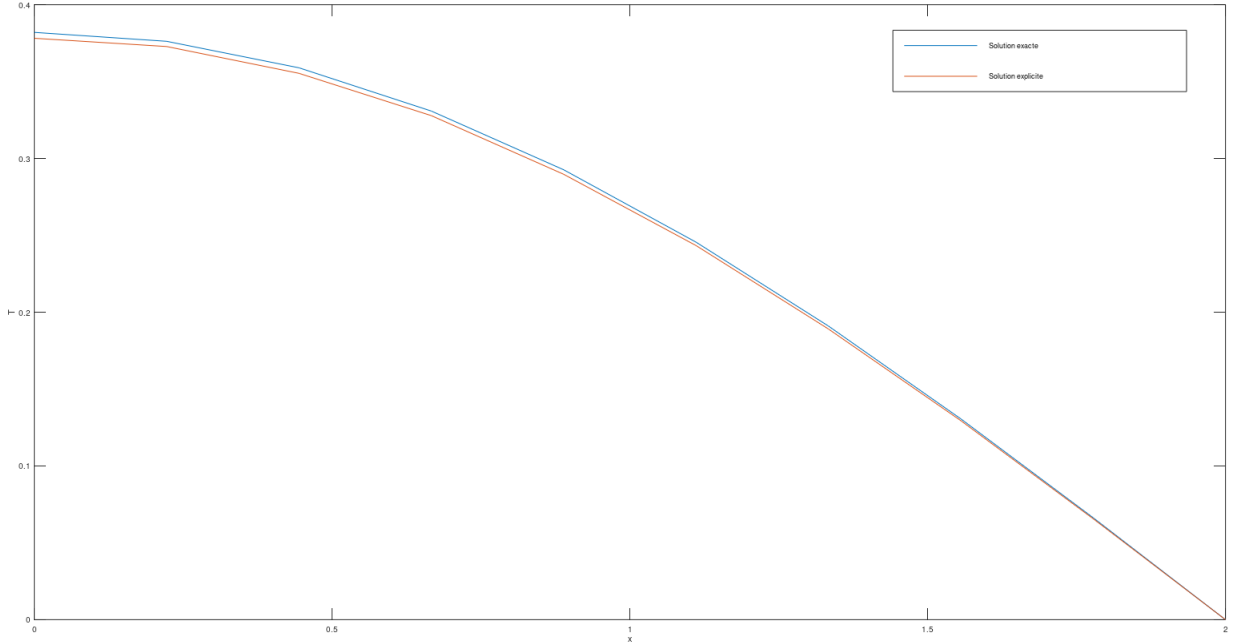


FIGURE 2 – Comparaison du schéma explicite avec la solution exacte à $t = \tau$

On remarque que le schéma explicite est en avance par rapport à la solution exacte, ceci est dû à sa construction même comme il calcule le terme $i + 1$ en fonction du terme i .

Tout de même, il y a une petite différence de température au début du barreau et elle va s'atténuer pour devenir quasi nulle en L .

5.2 Solution implicite

De même, on peut tracer la solution du schéma explicite au même instant et avec les mêmes paramètres de discrétisation :

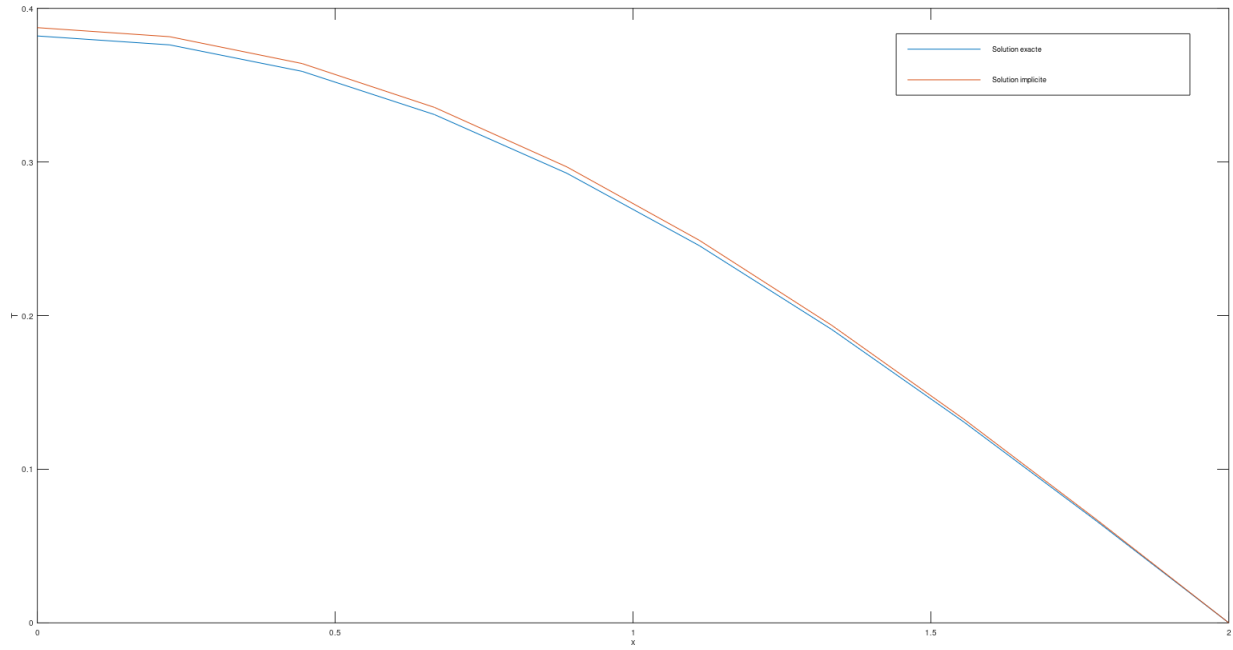


FIGURE 3 – Comparaison du schéma explicite avec la solution exacte à $t = \tau$

On peut noter que la solution du schéma implicite est en retard par rapport à la solution analytique. Le schéma implicite est construit en résolvant une équation avec la température en i et celle en $i - 1$, ceci explique le retard de la courbe du schéma implicite.

Le schéma étant d'ordre 1 la solution est un peu différente de la solution exacte au début de la discrétisation spatiale.

5.3 Solution de Crank-Nicholson

Enfin, on peut tracer la solution du schéma de Crank-Nicholson que l'on compare avec la solution exacte toujours en gardant les mêmes paramètres de discrétisation :

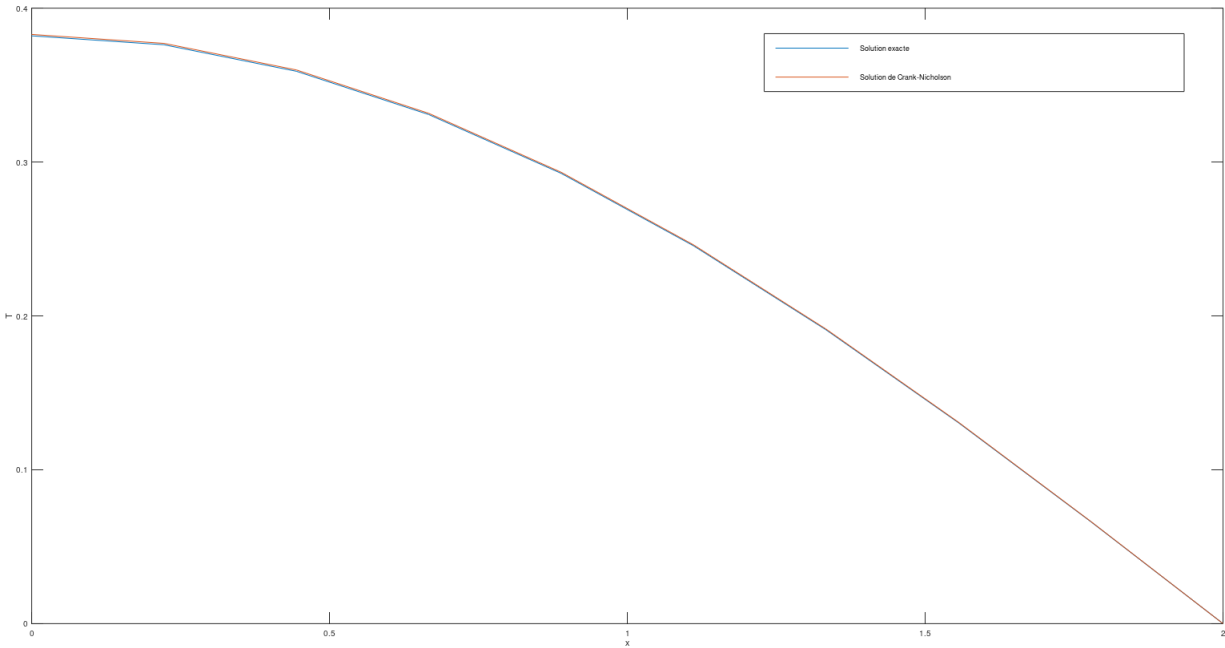


FIGURE 4 – Comparaison du schéma de Crank-Nicholson avec la solution exacte à $t = \tau$

On peut observer que la solution de Crank-Nicholson est légèrement en retard, voir même confondu avec la solution exacte.

Le schéma étant d'ordre 2, la solution est très proche de la solution exacte.

6 conclusion

Pour conclure, on voit bien que les schémas d'ordre 1 sont un peu moins performant que celui d'ordre 2. Selon le schéma utilisé, explicite ou implicite, la température a un instant donné est soit en avance soit en retard.

Remarque 1. Si l'on faisait la moyenne des schémas implicite et explicite, on aurait un résultat très près de la solution réelle. En effet comme chacun des schémas est soit en avance soit en retard, et qu'ils sont tous les deux d'ordre 1, les erreurs commises se compensent bien.