

## TP différences finies 1D

### Compte rendu 2

UE-PL6017ME

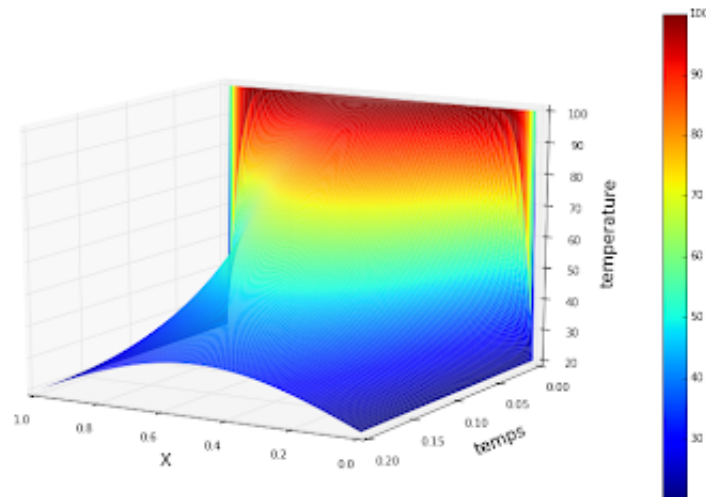


FIGURE 1 – Simulation numérique de l'équation de la chaleur 1D

Jérémy Archier  
3A MECA  
p2019441

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Présentation des problèmes</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1      | Étude de la précision spatiale et temporelle . . . . .                       | 2         |
| 2.1.1    | Précision spatiale . . . . .   | 2         |
| 2.1.2    | Précision temporelle . . . . .   | 2         |
| 2.2      | Application : Mise en contact de deux barreaux . . . . .                     | 2         |
| <b>3</b> | <b>Présentation des résultats</b>  | <b>3</b>  |
| 3.1      | Étude de la précision spatiale . . . . .                                     | 3         |
| 3.2      | Étude de la précision temporelle . . . . .                                   | 6         |
| 3.3      | Application : Mise en contact de deux barreaux . . . . .                     | 9         |
| 3.3.1    | Cas 1 : Température fixées aux extrémités . . . . .                          | 9         |
| 3.3.2    | Cas 2 : Flux de chaleur nul - condition adiabatique . . . . .                | 11        |
| 3.3.3    | Cas 3 : Température fixée à gauche et flux de chaleur nul à droite . . . . . | 14        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>17</b> |

# 1 Introduction

Nous allons continuer de nous intéresser à l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Dans un premier temps, nous allons faire l'étude de la précision spatiale et temporelle. Dans un second temps, nous allons faire une application de l'équation de la chaleur avec la mise en contact de deux barreaux en différenciant 3 cas avec des jeux de conditions aux limites différents.

## 2 Présentation des problèmes

### 2.1 Étude de la précision spatiale et temporelle

#### 2.1.1 Précision spatiale

En fixant le pas de temps sur une petite valeur ( $\Delta t = 10^{-3}$ ) et en choisissant un nombre de points de discrétisation croissant, nous allons représenter l'erreur de discrétisation  $\frac{||T_{ex}-T||}{||T_{ex}||}$  en fonction de  $\Delta x$  en échelle logarithmique pour l'équation de la chaleur avec les 3 différents schémas.

Nous pourrions donc par la suite déterminer l'ordre de l'erreur commise en temps et vérifier si elle est bien en accord avec la théorie.

#### 2.1.2 Précision temporelle

En fixant le pas d'espace sur une petite valeur ( $N = 100$ ) et en choisissant des pas de discrétisation en temps  $\Delta t$  décroissant, représenter l'erreur de discrétisation  $\frac{||T_{ex}-T||}{||T_{ex}||}$  en fonction de  $\Delta t$  en échelle logarithmique.

Nous pourrions donc par la suite déterminer l'ordre de l'erreur commise en espace et vérifier si elle est bien cohérente avec la théorie.

### 2.2 Application : Mise en contact de deux barreaux

On considère deux barres métalliques de longueur identique  $L = 1$ . Avant l'instant  $t = 0$ , l'une d'elles a une température uniforme  $T_c$  et la seconde a une température  $T_f$  inférieure à  $T_c$ . A l'instant  $t = 0$ , les deux barres sont mises en contact pour former une seule barre de longueur  $2L$ .

On considère trois cas pour les conditions aux limites :

- o Cas 1 : les deux extrémités sont maintenues aux températures  $T_c$  et  $T_f$  respectivement.
- o Cas 2 : un isolant est placé sur chaque extrémité (flux de chaleur nul - condition adiabatique).
- o Cas 3 : un isolant est placé sur l'extrémité de droite, alors que la température de l'extrémité de gauche reste fixée à  $T_c$ .

### 3 Présentation des résultats

#### 3.1 Étude de la précision spatiale

On trace l'erreur de discrétisation spatiale en échelle logarithmique pour le schéma explicite :

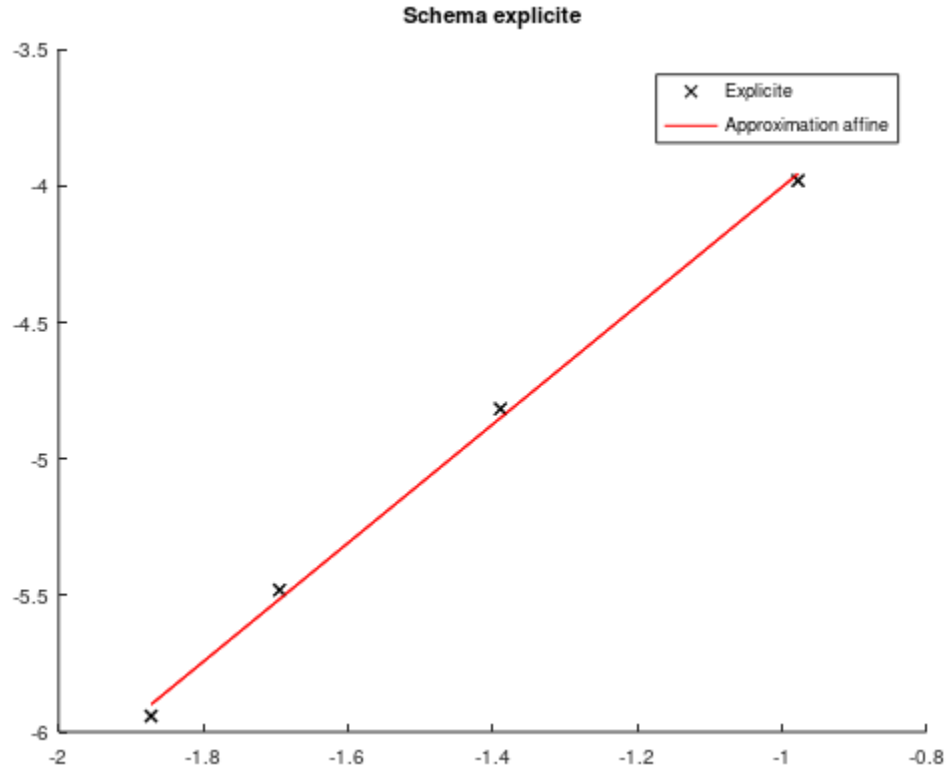


FIGURE 2 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta x$  du schéma explicite

La pente de la droite étant de 2, on en déduit que la précision spatiale du schéma explicite est d'ordre 2, ceci est bien ce à quoi l'on s'attendait.

On trace l'erreur de discrétisation spatiale en échelle logarithmique pour le schéma implicite :

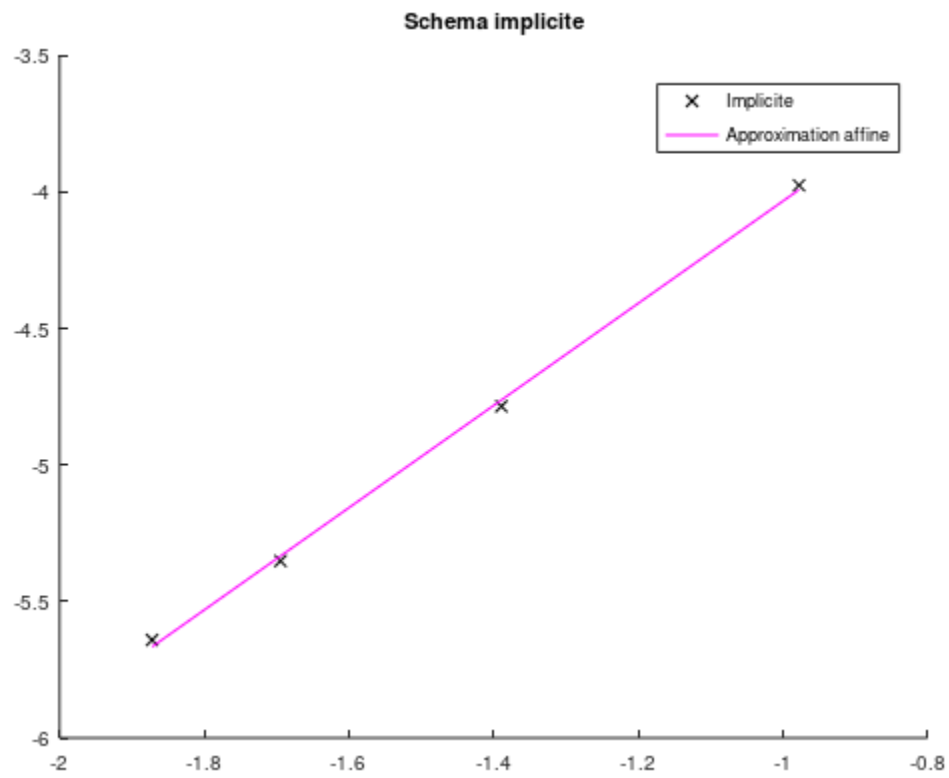


FIGURE 3 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta x$  du schéma implicite

La pente de la droite est également de 2, on en déduit que la précision spatiale du schéma explicite est d'ordre 2 ce qui est en accord avec la théorie.

On trace l'erreur de discrétisation spatiale en échelle logarithmique pour le schéma de Crank-Nicholson :

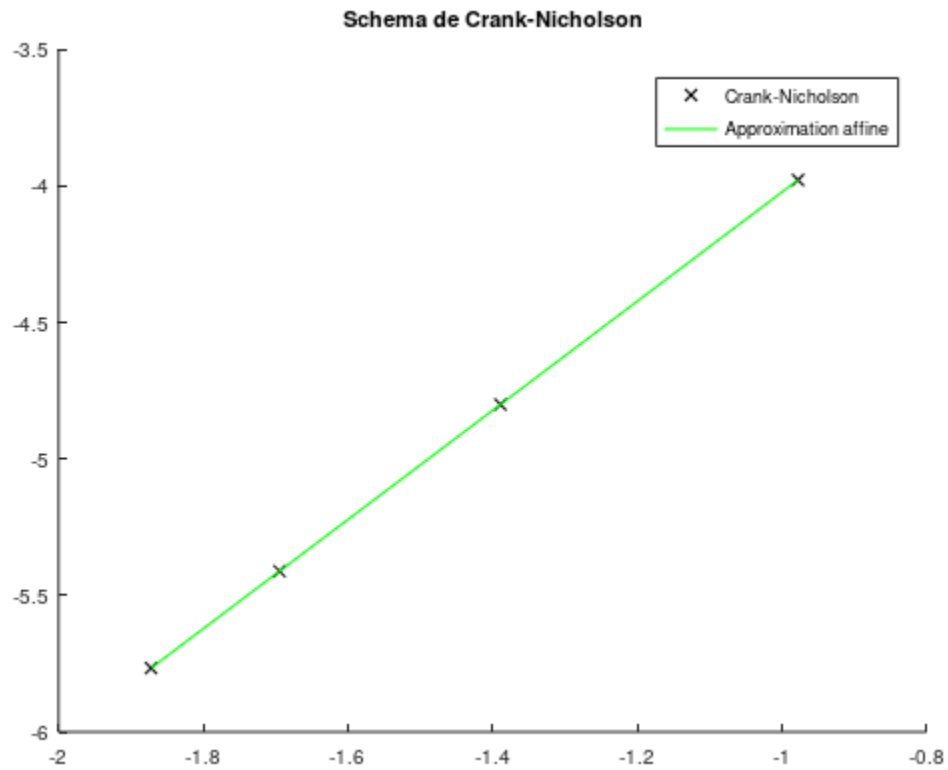


FIGURE 4 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta x$  du schéma de Crank-Nicholson

La pente de la droite est de 2 donc la précision spatiale du schéma explicite est d'ordre 2 comme l'on peut le voir dans la partie où l'on avait fait la discrétisation de l'équation de la chaleur.

### 3.2 Étude de la précision temporelle

On trace l'erreur de discrétisation temporelle en échelle logarithmique pour le schéma explicite :

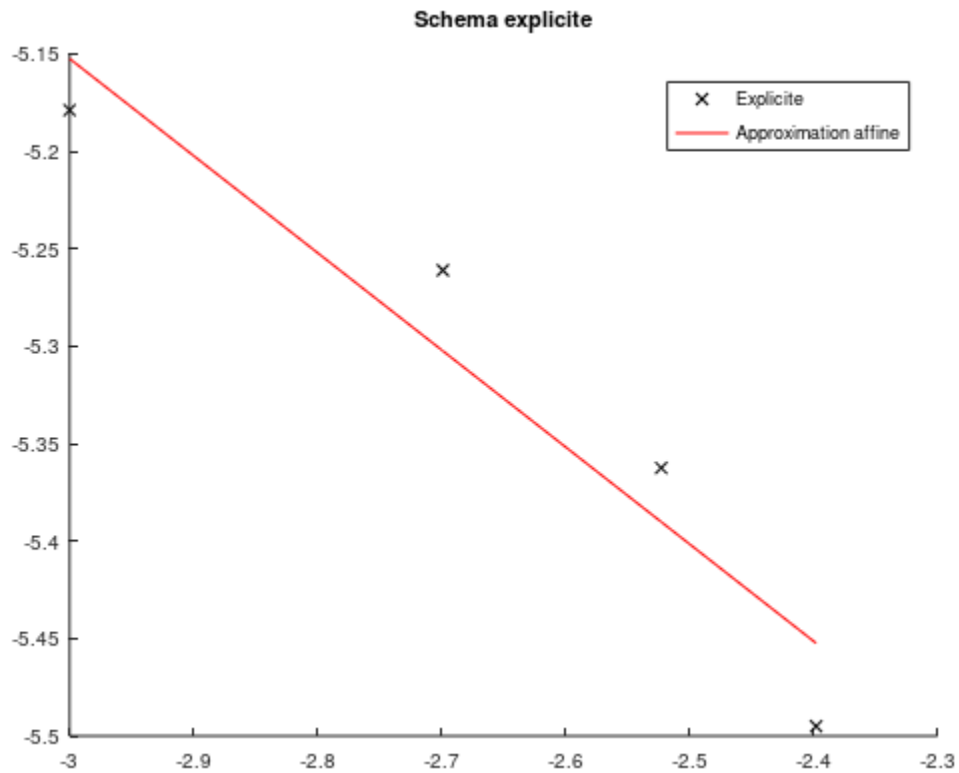


FIGURE 5 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta t$  du schéma explicite

La pente est négative ce qui n'a pas vraiment de sens et elle serait de plus ou moins 1. Néanmoins l'ordre de précision temporelle de ce schéma devrait être d'ordre 1.

Pour le schéma explicite, il est difficile de représenter l'erreur spatiale étant donné que la valeur maximale de  $dt$  doit être réduite pour éviter l'instabilité et donc l'oscillation de l'erreur.

On trace l'erreur de discrétisation temporelle en échelle logarithmique pour le schéma implicite :

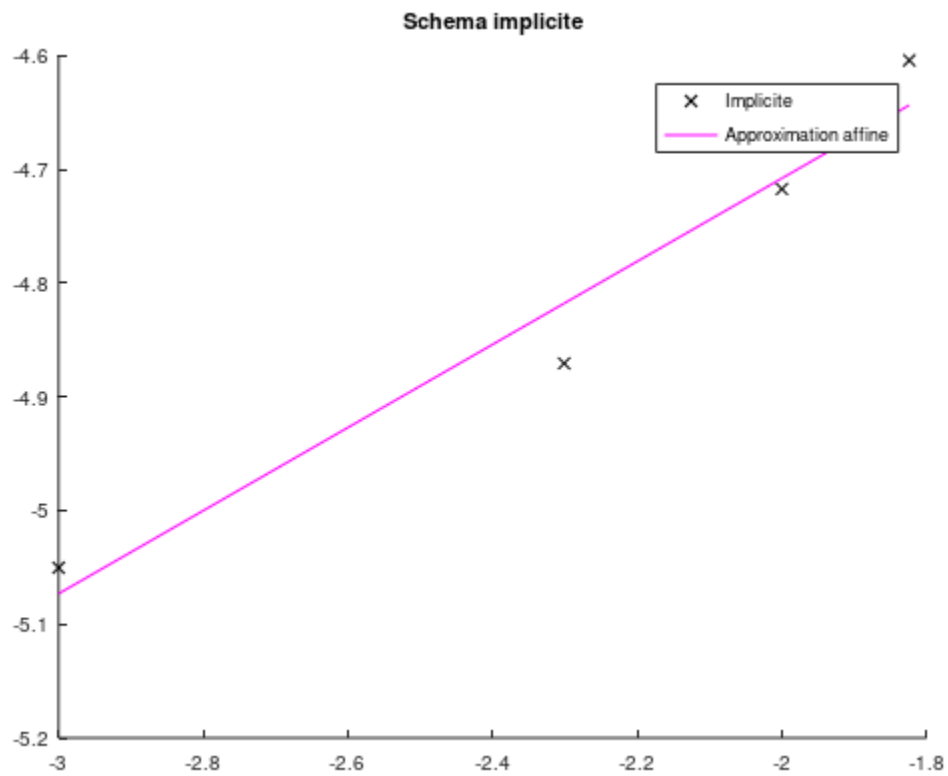


FIGURE 6 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta t$  du schéma implicite

La pente est environ de 0.5 ce qui voudrait dire que la précision temporelle est de 0.5 ce qui n'est pas vraiment cohérent. Néanmoins l'ordre de précision temporelle de ce schéma devrait être d'ordre 1.



On trace l'erreur de discrétisation temporelle en échelle logarithmique pour le schéma de Crank-Nicholson :

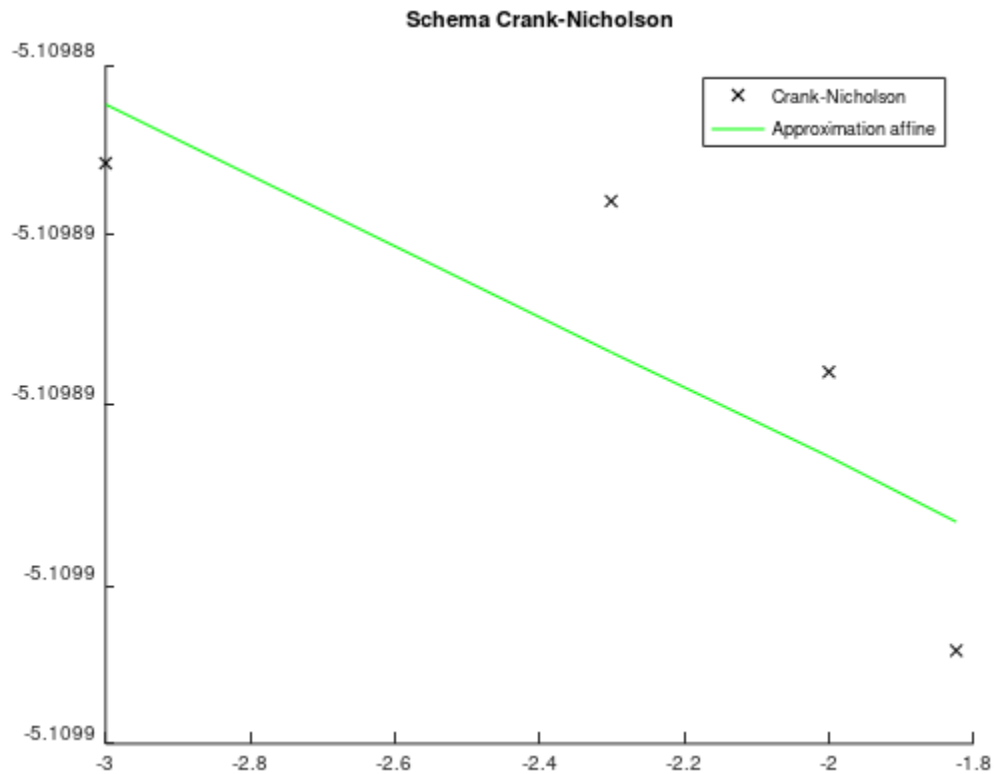


FIGURE 7 – Représentation de l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta t$  du schéma de Crank-Nicholson

La pente est négative ce qui n'a pas vraiment de sens et elle est quasi nulle donc on ne peut pas en déduire l'ordre de précision du schéma. Néanmoins l'ordre de précision temporelle de ce schéma devrait être d'ordre 2.

### 3.3 Application : Mise en contact de deux barreaux

On choisit le schéma de Crank-Nicholson pour tracer l'évolution de la température dans le barreau à plusieurs instants comme c'est le schéma le plus précis.

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$$T_f = 50, T_c = 100, L = 1, \alpha = 0.1, N = 20$$

#### 3.3.1 Cas 1 : Température fixées aux extrémités

Dans le premier cas, les conditions aux limite sont des conditions de Dirichlet :

$$T(x = 0, t) = T_c \quad \text{et} \quad T(x = 2L, t) = T_f$$

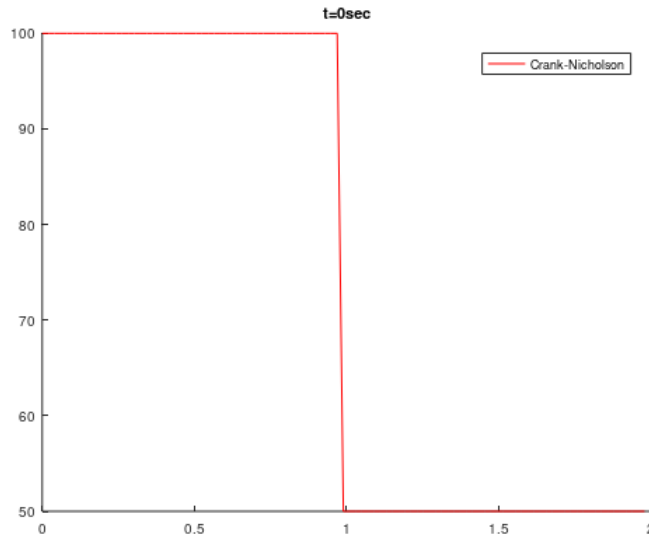


FIGURE 8 – Température dans le barreau à  $t = 0$  s

A l'instant initial, la température subit une discontinuité avec les deux extrémités maintenues à des températures différentes.

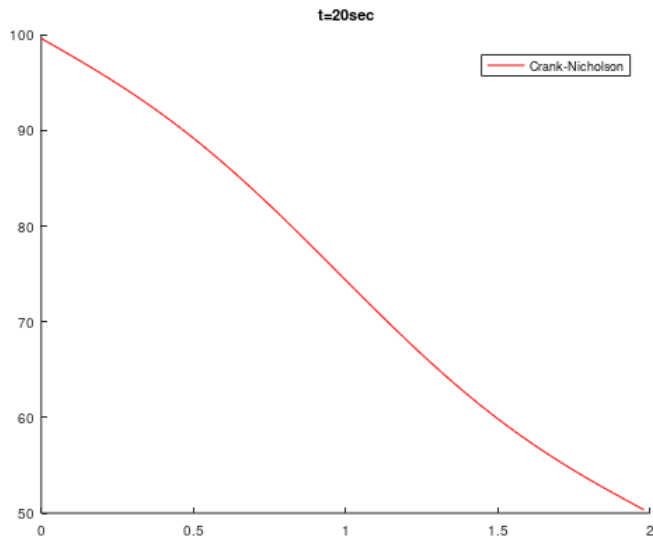


FIGURE 9 – Température dans le barreau à  $t = 20$  s

Ensuite après 20 s, la température va commencer à s'approcher d'un comportement linéaire et la discontinuité va commencer à se lisser.

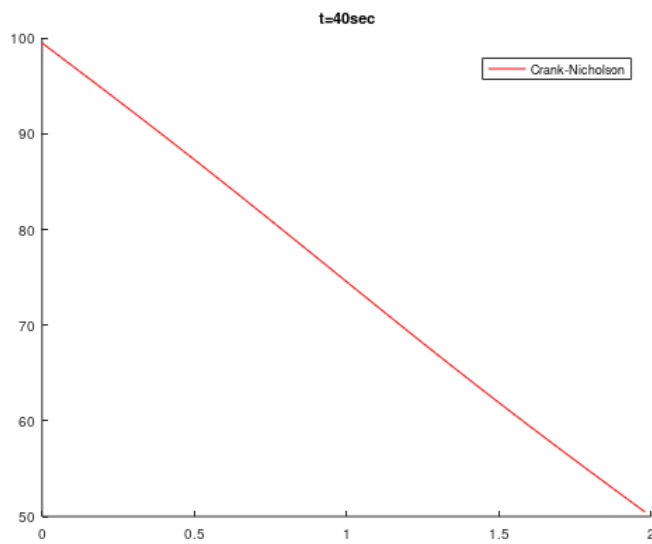


FIGURE 10 – Température dans le barreau à  $t = 40$  s

A 40 s, le comportement de la température décroît linéairement avec l'augmentation de la position  $x$ .

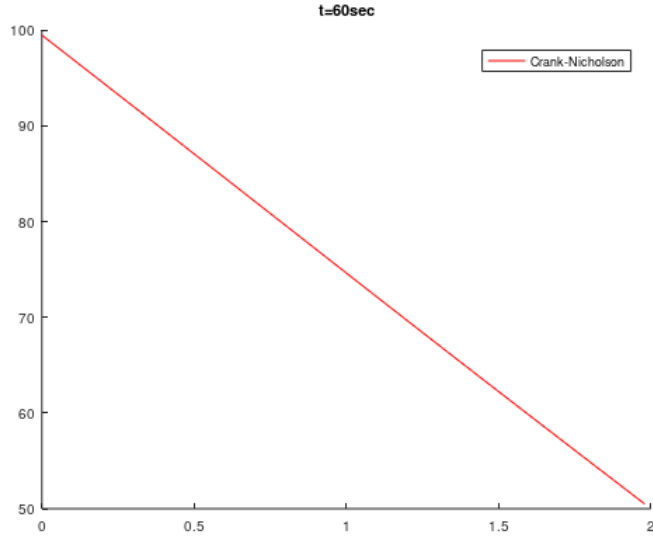


FIGURE 11 – Température dans le barreau à  $t = 60$  s

A 60 s, le comportement de la température n'évolue plus il reste linéaire comme à l'instant précédent  $t = 40$  s, on a atteint le régime permanent.

### 3.3.2 Cas 2 : Flux de chaleur nul - condition adiabatique

Dans le second cas, les conditions aux limites sont identiques et se sont des conditions de Neumann :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x = 2L, t) = 0$$

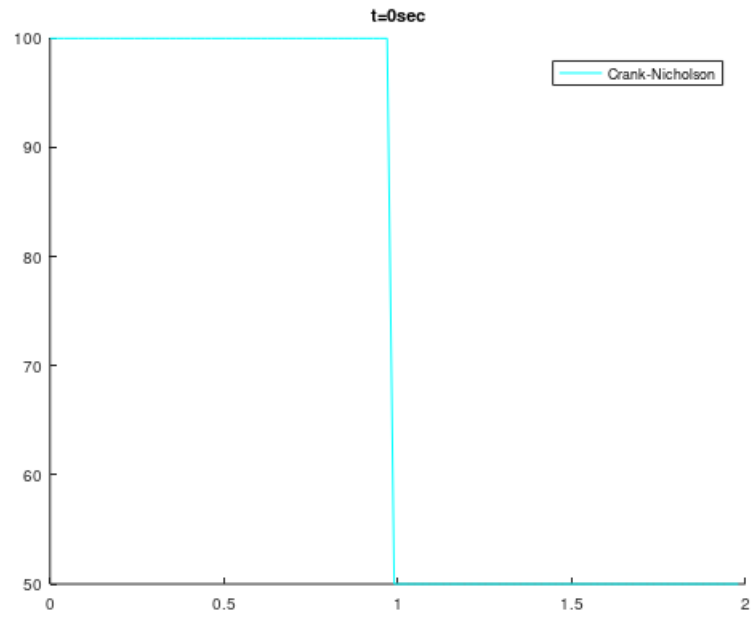


FIGURE 12 – Température dans le barreau à  $t = 0$  s

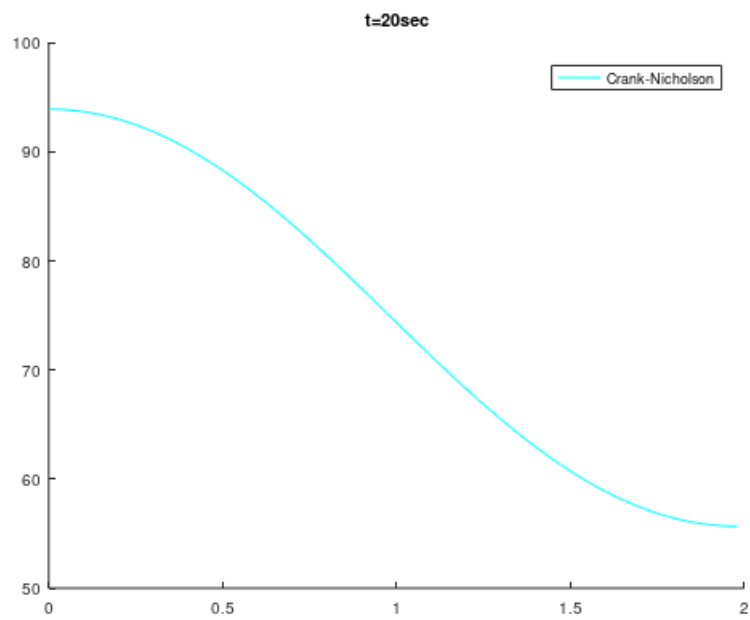


FIGURE 13 – Température dans le barreau à  $t = 20$  s

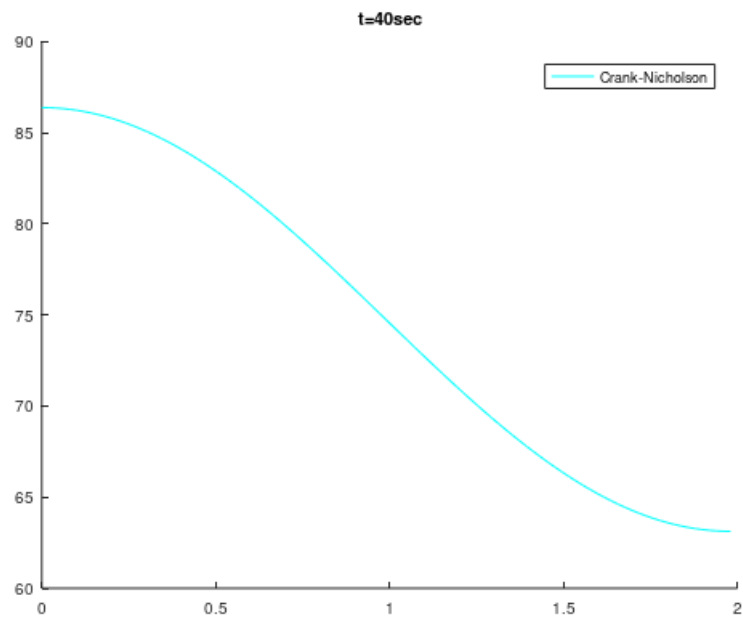


FIGURE 14 – Température dans le barreau à  $t = 40$  s

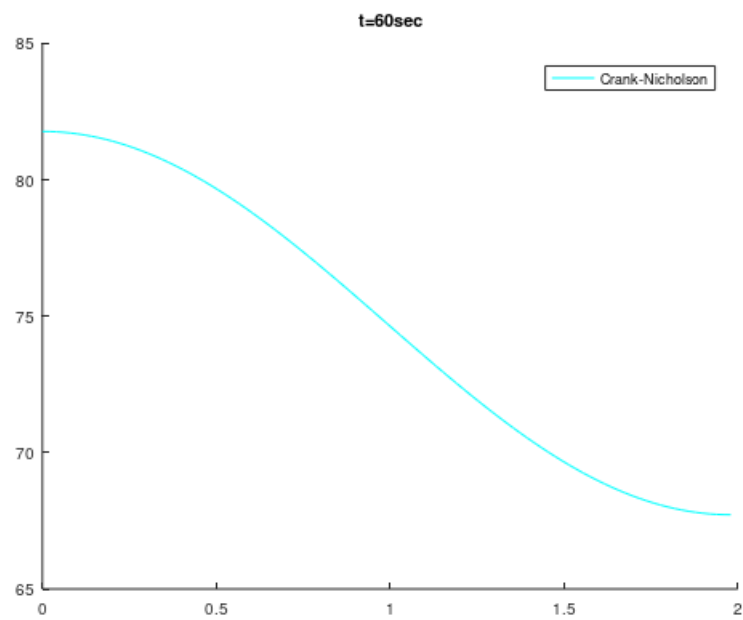


FIGURE 15 – Température dans le barreau à  $t = 60$  s

On a bien la même discontinuité à l'instant  $t = 0$  s, puis la courbe de la température ne va cesser de se lisser pour ressembler finalement à un polynôme d'ordre 3 qui change de convexité en  $x = L$  et qui a des tangentes nulles (dûes aux flux nulles) en 0 et  $2L$ .

### 3.3.3 Cas 3 : Température fixée à gauche et flux de chaleur nul à droite

Dans le second cas, les conditions aux limites sont une condition de Dirichlet en  $x = 0$  et une condition de Neumann en  $x = 2L$  :

$$T(x = 0, t) = T_c \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x = 2L, t) = 0$$

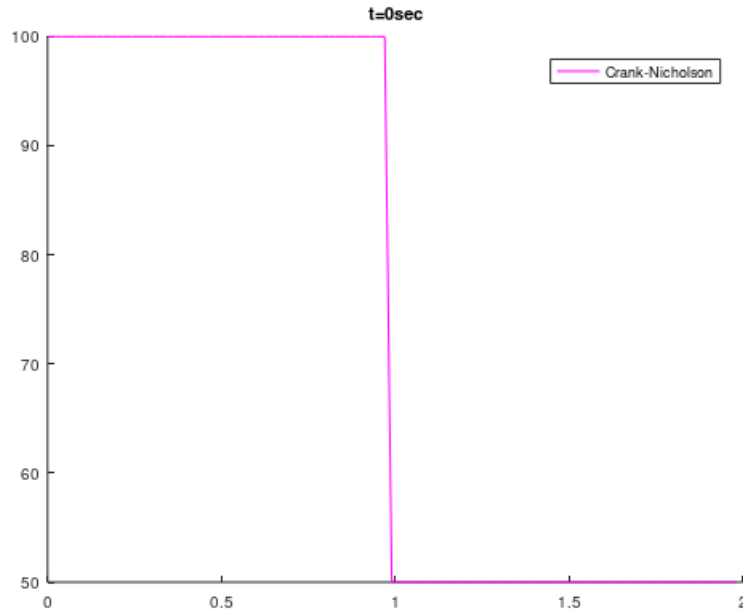


FIGURE 16 – Température dans le barreau à  $t = 0$  s

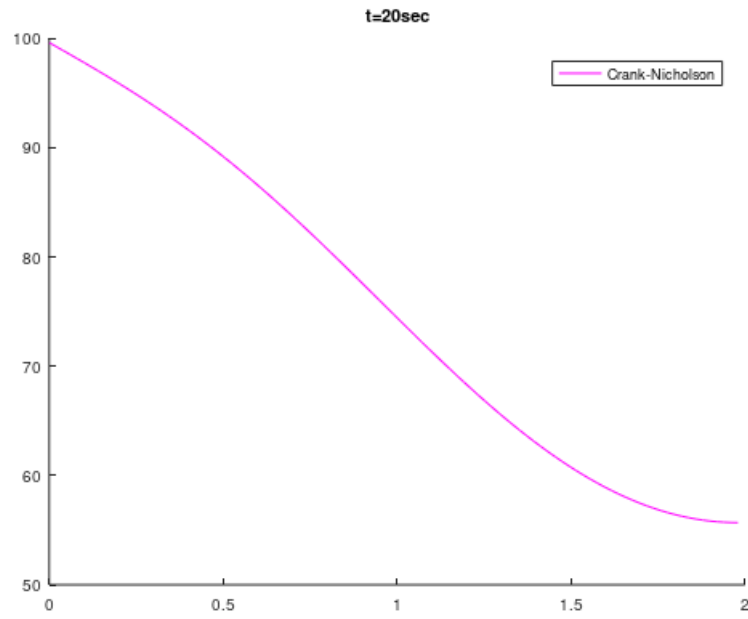


FIGURE 17 – Température dans le barreau à  $t = 20$  s

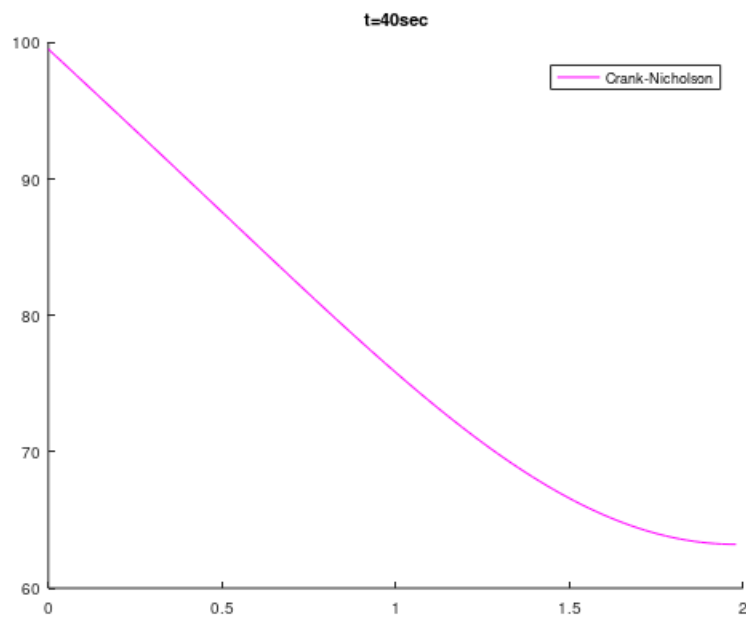


FIGURE 18 – Température dans le barreau à  $t = 40$  s



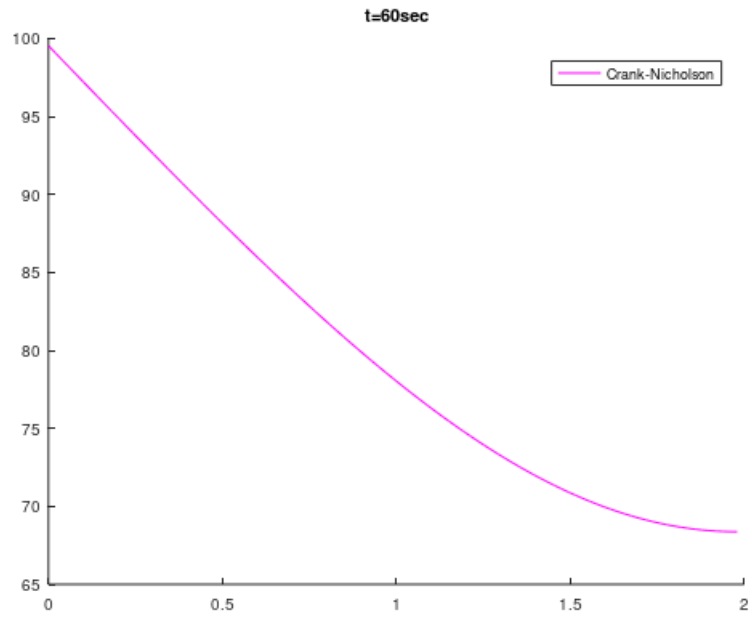


FIGURE 19 – Température dans le barreau à  $t = 60$  s

On remarque que sur la zone 0 à  $L$ , le comportement est linéaire du a la température imposée en 0 et sur la zone  $L$  à  $2L$ , la température évolue d'une façon exponentielle décroissante.

## 4 Conclusion

Pour conclure, les calculs d'erreur spatiales ont été concluant pour les 3 schémas et collaient avec la réalité mais pour l'erreur temporelle seul le calcul pour le schéma implicite a été réussi.

En ce qui concerne, l'application sur les différents cas on peut voir qu'imposer une température sur un bord fait varier la température dans le barreau de manière linéaire alors qu'un flux nul prédit un comportement exponentielle de la température sur la moitié du barreau.