Méthodes Numériques pour la Mécanique 1

Équation de la chaleur instationnaire monodimensionnelle:

Méthode des différences finies

I. *Exercice préliminaire*

Écrire sous MATLAB la fonction qui crée, en fonction de n, la matrice pentadiagonale A telle que:

$$A_{ij}=\begin{cases} 4 & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad i+1 = j \\ -1 & \text{si} \quad i-1 = j \\ 2 & \text{si} \quad i-n = j \\ 2 & \text{si} \quad i+n = j \end{cases} \quad \text{avec } i=1..n^2,\ j=1..n^2 \text{ .}$$

On prendra n = 3. (On utilisera la fonction "diag".)

II. *Résolution de l'équation modèle*

Mise en équation du problème:

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t) \qquad \forall t>0 \quad \text{et} \quad \forall x\in[0,L]$$

Conditions aux limites:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}(x=0,t)=\beta \\ T(x=L,t)=\gamma \end{cases} \qquad \forall t>0$$

Conditions initiales:

$$T(x,t=0)=\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \qquad \forall x\in[0,L]$$

1) Résolution analytique:

Montrer que, par la méthode de séparation de variables, la solution exacte de l'équation du problème ci dessus dans le cas où $\beta=0$ et $\gamma=0$ s'écrit:

$$T_{ex}(x,t)=e^{-\alpha^2\frac{\pi^2}{4L^2}t}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \text{ .}$$

(On pourra faire des recherches sur cette méthode si on ne sait pas l’utiliser.)

2) Questions théoriques:

a. Quelle est la nature mathématique de cette équation?

On utilisera pour la résolution les schémas de discrétisation centré d'ordre 2 en espace. Pour la discrétisation en temps, on comparera le schéma explicite d'ordre 1, implicite d'ordre 1 et Crank Nicholson (ordre 2).

b. Selon les résultats du cours, que peut-on dire sur la stabilité des trois schémas proposés pour la résolution de l'équation de la chaleur?

3) Discrétisation:

On utilisera une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0,L]$ telle que $x_i=x_1+(i-1)\Delta x$ avec $i=1\ldots N$ où $\Delta x=\frac{L}{N-1}$ et N représente le nombre de points de discrétisation. Pour la discrétisation en temps, on choisira un pas de temps Δt.
Écrire les équations discrètes par les trois méthodes de discrétisation.

4) Traitement des conditions aux limites:

a. Conditions de type Dirichlet:

Exprimer la condition aux limites de type Dirichlet en $x=L$ sous forme discrète. Dans quelle équation du système algébrique cette condition intervient-elle? Donner l'expression de cette équation discrète.

b. Conditions de type Neumann:

Grâce au schéma centré en espace à l'ordre 2, exprimer la condition aux limites de type Neumann en $x=0$ sous forme discrète. Dans quelle équation du système algébrique cette condition intervient-elle? Donner l'expression de cette équation discrète.

5) Écriture sous forme matricielle

a. Pour le schéma explicite en temps:

Montrer que le système algébrique avec les conditions aux limites peut s'écrire sous la forme

$$T^{n+1}=AT^n+B$$

où T^{n+1} est le vecteur des inconnues à l'instant $(n+1)\Delta t$.
On donnera les expressions de la matrice A et du vecteur B en étant particulièrement attentif à l'implémentation des conditions aux limites. Quelle est la taille de ce système?

b. Pour le schéma implicite en temps:

Montrer que le système algébrique avec les conditions aux limites peut s'écrire sous la forme

$$AT^{n+1}=T^n+B$$

On donnera les expressions de la matrice A et du vecteur B.

c. Pour le schéma de Crank Nicholson:

Montrer que le système algébrique avec les conditions aux limites peut s'écrire sous la forme

$$AT^{n+1}=BT^n+C$$

où T^{n+1} est le vecteur des inconnues à l'instant $(n+1)\Delta t$.
On donnera les expressions des matrices A et B et du vecteur C.

6) Implémentation:

On considère $\alpha=0.1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $L=2$ et $F(x,t)=0$ (pas de source de chaleur). Implémenter les trois méthodes au moyen de Matlab. On rappelle que T^1 est le vecteur des valeurs correspondant à la condition initiale et lorsque c'est nécessaire, le système linéaire à résoudre peut être résolu par la commande Matlab "\" ou, encore mieux, en programmant l'algorithme de Thomas au lieu d'utiliser une inversion de matrice.

7) Validation:

Comparer, à un instant jugé pertinent, les solutions obtenues numériquement par la méthode des différences finies avec la solution analytique obtenue en 2).

8) Étude de la précision spatiale et temporelle:

On appliquera systématiquement ces approches aux trois schémas étudiés:

a. En fixant le pas de temps sur une petite valeur ($\Delta t=10^{-3}$) et en choisissant un nombre de points de discrétisation croissant, représenter l'erreur de discrétisation $\frac{\|T_{ex} - T\|}{\|T_{ex}\|}$ en fonction de Δx en échelle logarithmique.

b. En fixant le pas d'espace sur une petite valeur ($N=100$) et en choisissant des pas de discrétisation en temps Δt décroissant, représenter l'erreur de discrétisation $\frac{\|T_{ex} - T\|}{\|T_{ex}\|}$ en fonction de Δt en échelle logarithmique.

Dans chaque cas et pour chacun des schéma, conclure sur l'ordre de précision de la méthode. Pourquoi la détermination de l'ordre de précision temporelle du schéma explicite est-elle plus difficile ?

III. <u>Application: Mise en contact de deux barreaux</u>

On considère deux barres métalliques de longueur identique $L=1$. Avant l'instant $t=0$, l'une d'elles a une température uniforme T_c et la seconde a une température T_f inférieure à T_c . A l'instant $t=0$, les deux barres sont mises en contact pour former une seule barre de longueur $2L$.

On considère trois cas pour les conditions aux limites:
- <u>Cas 1:</u> les deux extrémités sont maintenues aux températures T_c et T_f respectivement,
- <u>Cas 2:</u> un isolant est placé sur chaque extrémité (flux de chaleur nul - condition adiabatique).
- <u>Cas 3:</u> un isolant est placé sur l'extrémité de droite, alors que la température de l'extrémité de gauche reste fixée à T_c .

a. Traduire l'énoncé sous forme de problème mathématique dans chacun des cas.

b. Représenter les solutions obtenues à 4 instants significatifs de l'évolution de la solution.
On prendra $T_f=50, T_c=100, L=1, \alpha=0.1, N=20$. Commenter la cohérence des résultats avec la physique modélisée dans chaque cas.