

# Rapport de TP

Suivi d'une interface par méthode level-set

Écoulements Complexes Et Polyphasiques  
UE-PL9015ME

Jérémy Archier



POLYTECH  
LYON

# Rapport de TP

Suivi d'une interface par méthode level-set

par

**Jérémy Archier**

Nom de l'étudiant      numéro d'étudiant

Jérémy Archier      12019441

Professeur :      Pierre Trontin  
Date du projet :      Décembre, 2022  
Département :      Mécanique, Polytech Lyon

Couverture : Bâtiment Polytech, 15 Bd Latarjet 69100 Villeurbanne  
Style :      EPFL Report Style, avec modifications par Jérémy Archier



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>2</b>
2.1	Théorie . . . . .	2
2.2	Cas-test du serpentin . . . . .	2
2.3	Cas-test du serpentin . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Étude des schémas en espace et en temps</b>	<b>3</b>
3.1	Schémas en espace . . . . .	3
3.1.1	Schéma Décentré amont (ou upwind) d'ordre 1 . . . . .	3
3.1.2	Schéma centré Lax-Wendroff d'ordre 2 . . . . .	3
3.1.3	Schéma WENO d'ordre 5 . . . . .	4
3.2	Schémas en temps . . . . .	5
3.2.1	Schéma d'Euler explicite d'ordre 1 . . . . .	5
3.2.2	Schéma Runge-Kutta ordre 2 . . . . .	5
3.2.3	Schéma Runge-Kutta ordre 4 . . . . .	6
3.3	Couplage des schémas temporels et spatiaux . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Simulation numérique</b>	<b>8</b>
4.1	Cas-test du serpentin . . . . .	8
4.1.1	Résultats . . . . .	8
4.1.2	Perte de masse . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
	<b>Références</b>	<b>11</b>

# 1

## Introduction

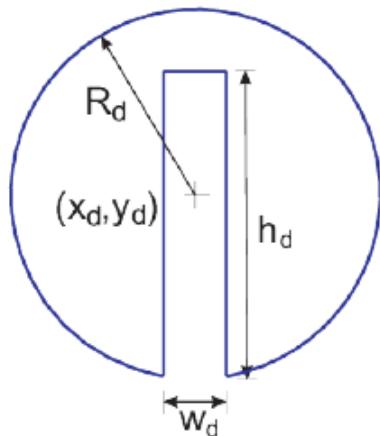


Figure 1.1 – Configuration initiale du disque de Zalesak

Le TP suivant a pour objectif d'étudier la méthode level-set pour le suivi d'une interface. Cette méthode, décrite de manière détaillée dans les ouvrages de J.A. Sethian [4, 5] et de R. Malladi, J.A. Sethian, B.C. Vemuri [2], est utilisée pour suivre l'évolution d'une surface dans un champ de vitesses. Elle est largement utilisée dans les domaines de la physique et de l'ingénierie pour modéliser l'évolution de surfaces dans des champs de vitesses, afin de simuler des phénomènes tels que la déformation de solides, la diffusion de substances chimiques, et la propagation d'ondes.

Dans ce TP, nous allons appliquer la méthode level-set aux cas-tests du serpentin et du disque de Zalesak. Le cas-test du serpentin consiste en une déformation d'un disque par un tourbillon, tandis que le cas-test du disque de Zalesak consiste en l'advection d'un disque dans un champ de vitesses.

Nous allons étudier différents schémas en espace et en temps, ainsi que leur couplage, et caractériser leur performance sur les deux cas-tests. Nous allons également montrer l'erreur de convergence en espace (numérique) pour chacun des schémas en espace.

# 2

## Description du modèle

### 2.1. Théorie

L'interface entre deux milieux fluides (I) et (II) est décrite par la valeur de la fonction level-set  $\Phi(x, t)$  telle que  $\Phi(x, t) = 0$ . Cette interface est déplacée par un champ de vitesse connu,  $u$ . On cherche à résoudre l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi = 0 \quad (2.1)$$

### 2.2. Cas-test du serpentin

Le but de cet essai est de comprendre comment une méthode de suivi d'interface se comporte lorsque l'interface subit un cisaillement qui provoque sa déformation jusqu'à former un ligament. Nous allons mesurer l'effet de la sous-résolution sur ce cas d'étude. Nous considérons un domaine carré  $[0, 1]^2$  dans lequel un cercle de rayon 0.15 est placé à l'instant initial au point  $(0.5, 0.75)$ . Un champ de vitesse  $u$  circulaire est défini par la fonction courant suivante :

$$\psi = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \quad (2.2)$$

### 2.3. Cas-test du serpentin

Cet essai porte sur l'étude de la rotation d'un disque épuré possédant une fente dans un champ de vitesse tourbillonnant. Le but de cet essai est de vérifier la capacité de la méthode à capturer des structures fines avec une géométrie complexe (ici, des coins). Le domaine considéré est un carré  $[0, 100]^2$  et un disque privé d'une fente est advecté autour du centre du domaine par un champ de vitesse stationnaire défini par :

$$u(x, y) = \frac{\pi}{314}(50 - y) \quad (2.3)$$

$$v(x, y) = \frac{\pi}{314}(x - 50) \quad (2.4)$$

Le disque utilisé dans cet essai a un rayon de  $R_d = 15$  et est initialement centré en  $(x_d, y_d) = (50, 75)$ . La fente a une largeur de  $w_d = 5$ . Le disque fait un tour complet en 628 secondes et revient à sa position initiale. Vous pouvez voir l'illustration de ce disque dans la Figure 1.1.

# 3

## Étude des schémas en espace et en temps

### 3.1. Schémas en espace

#### 3.1.1. Schéma Décentré amont (ou upwind) d'ordre 1

Le schéma décentré amont (ou upwind) d'ordre 1 en 1D est un schéma de différence finie utilisé pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Il est particulièrement utile pour résoudre des équations de transport du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

où  $u(x, t)$  est la variable d'intérêt et  $c$  est une constante. Le schéma décentré amont d'ordre 1 peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.2)$$

Ce schéma est stable s'il est utilisé avec un pas de temps  $\Delta t$  qui satisfait la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|c|} \quad (3.3)$$

Pour vérifier la précision du schéma, on peut le comparer à la solution exacte de l'équation de transport en utilisant des tests de convergence. On peut également le comparer à d'autres schémas pour évaluer sa performance.

Il est important de noter que le schéma décentré amont d'ordre 1 en 1D n'est généralement pas très précis et qu'il existe de nombreux schémas plus précis qui peuvent être utilisés dans ce contexte. Cependant, il reste un choix populaire en raison de sa simplicité et de sa stabilité.

#### 3.1.2. Schéma centré Lax-Wendroff d'ordre 2

Le schéma centré Lax-Wendroff d'ordre 2 est un schéma de différence finie utilisé pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Il est particulièrement utile pour résoudre des équations de transport (eq 3.1).

Le schéma centré Lax-Wendroff d'ordre 2 peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c^2}{2} \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Pour vérifier la précision du schéma, on peut le comparer à la solution exacte de l'équation de transport en utilisant des tests de convergence. On peut également le comparer à d'autres schémas pour évaluer sa performance.

Il est important de noter que le schéma centré Lax-Wendroff d'ordre 2 nécessite un pas de temps  $\Delta t$  qui satisfait la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lowy (eq 3.3) pour être stable.

Il est important de choisir un schéma numérique adapté au problème que l'on cherche à résoudre. Les schémas de différences finies sont souvent utilisés pour résoudre des équations aux dérivées partielles, car ils sont relativement simples à mettre en œuvre et peu coûteux en temps de calcul. Cependant, ils peuvent présenter des erreurs d'approximation et des oscillations, en particulier dans les régions où les solutions ont des gradients importants. Pour réduire ces effets indésirables, on peut utiliser des schémas de différences finies de haut ordre, tels que le schéma WENO d'ordre 5 en espace 1D. Ces schémas sont généralement plus précis que les schémas de différences finies d'ordre inférieur, mais ils sont également plus complexes à mettre en œuvre. Il est donc important de trouver un bon compromis entre précision et complexité lors du choix d'un schéma numérique.

### 3.1.3. Schéma WENO d'ordre 5

Le schéma WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory) d'ordre 5 en espace 1D est un schéma de différence finie utilisé pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Il est aussi utilisé pour résoudre des équations de transport (eq 3.1).

Le schéma WENO d'ordre 5 en espace 1D est basé sur l'interpolation polynomiale et utilise un poids pondéré pour choisir le meilleur interpolant parmi un ensemble de candidats. Cela permet de réduire les oscillations présentes dans les schémas de différences finies traditionnels.

Le schéma WENO d'ordre 5 en espace 1D peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \left( \frac{\omega_{i-2}^n u_{i-2}^n + \omega_{i-1}^n u_{i-1}^n + \omega_i^n u_i^n + \omega_{i+1}^n u_{i+1}^n + \omega_{i+2}^n u_{i+2}^n}{\omega_{i-2}^n + \omega_{i-1}^n + \omega_i^n + \omega_{i+1}^n + \omega_{i+2}^n} \right) = 0 \quad (3.5)$$

où

- $u_i^n$  est la valeur approchée de la variable d'intérêt  $u(x, t)$  en un point de discréétisation  $x_i$  et à un instant de temps  $t_n$
- $\Delta t$  est le pas de temps
- $c$  est une constante
- $\omega_i^n$  est le poids associé à l'interpolant en  $x_i$  et à l'instant de temps  $t_n$ . Les poids sont calculés en fonction de la régularité de chaque interpolant et sont choisis de manière à minimiser les oscillations.

Pour vérifier la précision du schéma, on peut le comparer à la solution exacte de l'équation de transport en utilisant des tests de convergence. On peut également le comparer à d'autres schémas pour évaluer sa performance.

Pour être stable, le schéma WENO d'ordre 5 en espace 1D doit être utilisé avec un pas de temps  $\Delta t$  qui satisfait la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lowy (eq 3.3). Le schéma WENO d'ordre 5 en espace 1D est généralement plus précis que les schémas centrés Lax-Wendroff d'ordre 2 et décentrés amont d'ordre 1 en 1D, mais il est également plus complexe à utiliser.

## 3.2. Schémas en temps

### 3.2.1. Schéma d'Euler explicite d'ordre 1

Le schéma d'Euler explicite d'ordre 1 est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles du type :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t, \Phi) \quad (3.6)$$

Il s'agit d'une méthode de type "une étape", ce qui signifie qu'elle utilise une seule valeur de  $F(t, \Phi)$  pour calculer la valeur de  $\Phi$  à un pas de temps suivant.

Le schéma d'Euler explicite d'ordre 1 est défini par la formule suivante :

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) + h * F(t, \Phi) \quad (3.7)$$

où  $h$  est le pas de temps et  $t$  et  $\Phi$  sont les variables indépendantes et dépendantes, respectivement.

Pour utiliser cette méthode, vous devez définir une valeur initiale de  $\Phi$  et une valeur initiale de  $t$ . Vous pouvez alors utiliser la formule ci-dessus pour calculer la valeur de  $\Phi$  à des pas de temps successifs en avançant la valeur de  $t$  à chaque pas. Cette méthode est simple à mettre en œuvre, mais elle n'est pas très précise, en particulier pour les équations différentielles qui changent rapidement.

L'erreur du schéma d'Euler explicite d'ordre 1 est généralement de l'ordre de  $O(h)$ , ce qui signifie que l'erreur diminue proportionnellement à  $h$  lorsque  $h$  diminue. Cela signifie que si vous réduisez le pas de temps  $h$ , l'erreur sera proportionnellement réduite. Cependant, il est important de noter que le temps de calcul nécessaire pour résoudre l'équation différentielle augmentera également lorsque vous réduisez  $h$ , car il faut plus d'étapes pour couvrir la même plage de temps.

### 3.2.2. Schéma Runge-Kutta ordre 2

Le schéma de Runge-Kutta (RK2) d'ordre 2 est une méthode numérique de type "deux étapes", ce qui signifie qu'elle utilise deux valeurs de  $F(t, \Phi)$  pour calculer la valeur de  $\Phi$  à un pas de temps suivant. Cela permet d'obtenir une solution plus précise que la méthode d'Euler explicite d'ordre 1, qui ne utilise qu'une seule valeur de  $F(t, \Phi)$ .

Le schéma RK2 d'ordre 2 est défini par la formule suivante :

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) + h * \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (3.8)$$

où  $h$  est le pas de temps et  $t$  et  $\Phi$  sont les variables indépendantes et dépendantes, respectivement. Les termes  $k_1$  et  $k_2$  sont définis par :

$$\begin{aligned} k_1 &= h * F(t, \Phi) \\ k_2 &= h * F(t + h, \Phi + k_1) \end{aligned}$$

Pour utiliser cette méthode, vous devez définir une valeur initiale de  $\Phi$  et une valeur initiale de  $t$ . Vous pouvez alors utiliser la formule ci-dessus pour calculer la valeur de  $\Phi$  à des pas de temps successifs en avançant la valeur de  $t$  à chaque étape. Le schéma RK2 d'ordre 2 est plus précis que le schéma d'Euler explicite d'ordre 1, mais il est également plus coûteux en termes de calculs, car il nécessite deux évaluations de  $F(t, \Phi)$  à chaque étape.

L'erreur du schéma RK2 d'ordre 2 est généralement de l'ordre de  $O(h^2)$ , ce qui signifie que l'erreur diminue proportionnellement à  $h^2$  lorsque  $h$  diminue. Cela signifie que si vous réduisez le pas de temps  $h$ , l'erreur sera proportionnellement réduite.

### 3.2.3. Schéma Runge-Kutta ordre 4

Le schéma de Runge-Kutta (RK4) d'ordre 4 est une méthode numérique de type "quatre étapes", ce qui signifie qu'elle utilise quatre valeurs de  $F(t, \Phi)$  pour calculer la valeur de  $\Phi$  à un pas de temps suivant. Cela permet d'obtenir une solution très précise, bien que le temps de calcul soit également plus élevé que pour les méthodes d'ordre inférieur.

Le schéma RK4 d'ordre 4 est défini par la formule suivante :

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) + h * \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (3.9)$$

où  $h$  est le pas de temps et  $t$  et  $\Phi$  sont les variables indépendantes et dépendantes, respectivement. Les termes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  et  $k_4$  sont définis par :

$$\begin{aligned} k_1 &= h * F(t, \Phi) \\ k_2 &= h * F\left(t + \frac{h}{2}, \Phi + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h * F\left(t + \frac{h}{2}, \Phi + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h * F(t + h, \Phi + k_3) \end{aligned}$$

Pour utiliser cette méthode, vous devez définir une valeur initiale de  $\Phi$  et une valeur initiale de  $t$ . Vous pouvez alors utiliser la formule ci-dessus pour calculer la valeur de  $\Phi$  à des pas de temps successifs en avançant la valeur de  $t$  à chaque étape.

L'erreur du schéma RK4 d'ordre 4 est généralement de l'ordre de  $O(h^4)$ , ce qui signifie que l'erreur diminue proportionnellement à  $h^4$  lorsque  $h$  diminue. Cela signifie que si vous réduisez le pas de temps  $h$ , l'erreur sera proportionnellement réduite.

## 3.3. Couplage des schémas temporels et spatiaux

Le couplage de schémas temporels et spatiaux consiste à utiliser une méthode numérique pour résoudre une équation aux dérivées partielles dans le temps (par exemple, une équation de diffusion) et une autre méthode pour résoudre l'équation dans l'espace (par exemple, un schéma de différences finies ou de volumes finis) [1, 3].

Voici quelques exemples de couplages de schémas temporels et spatiaux :

- Schéma Euler explicite dans le temps et schéma "upwind" d'ordre 1 dans l'espace : cette combinaison est souvent utilisée pour résoudre des équations de convection [1]. Elle est simple à mettre en œuvre, mais elle est moins précise que d'autres méthodes [3].
- Schéma de Runge-Kutta (RK2) d'ordre 2 dans le temps et schéma Lax-Wendroff d'ordre 2 dans l'espace : cette combinaison est souvent utilisée pour résoudre des équations de diffusion [1]. Elle est plus précise que le couplage Euler-upwind, mais elle est également plus coûteuse en termes de calculs.

- Schéma de Runge-Kutta (RK4) d'ordre 4 dans le temps et schéma WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) d'ordre 5 dans l'espace : cette combinaison est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles complexes [1]. Elle est très précise, mais elle nécessite beaucoup de calculs et est donc moins adaptée aux problèmes de grande envergure.

Il est important de choisir le couplage de schémas temporels et spatiaux qui convient le mieux au problème que vous souhaitez résoudre. En général, plus les schémas sont précis, plus ils sont coûteux en termes de calculs. Il est donc important de trouver un compromis entre précision et coût de calcul.

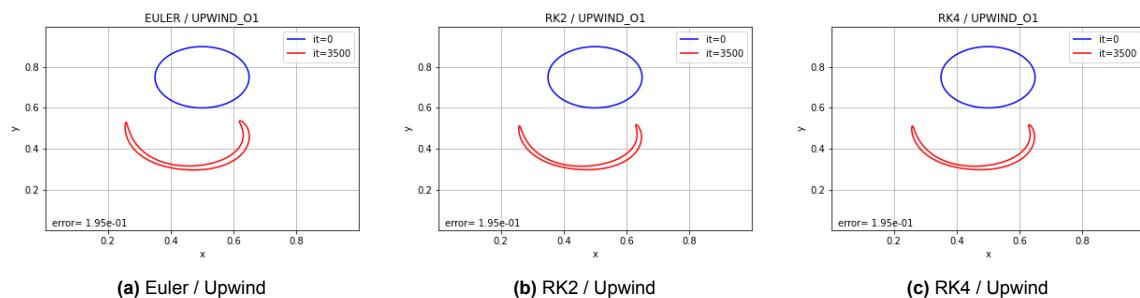
4

# Simulation numérique

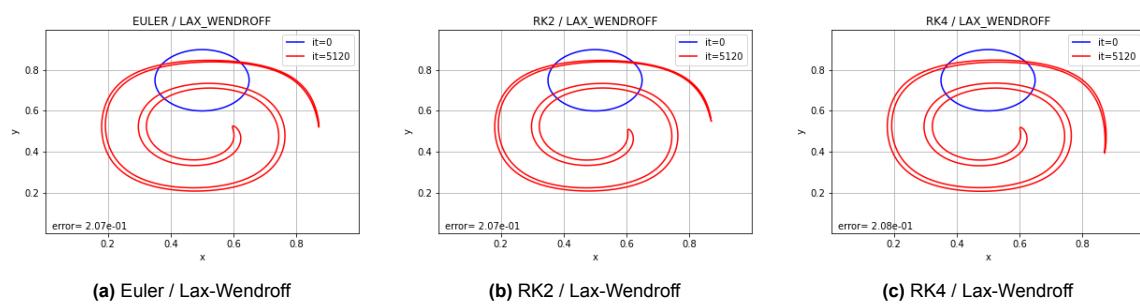
## 4.1. Cas-test du serpentin

#### **4.1.1. Résultats**

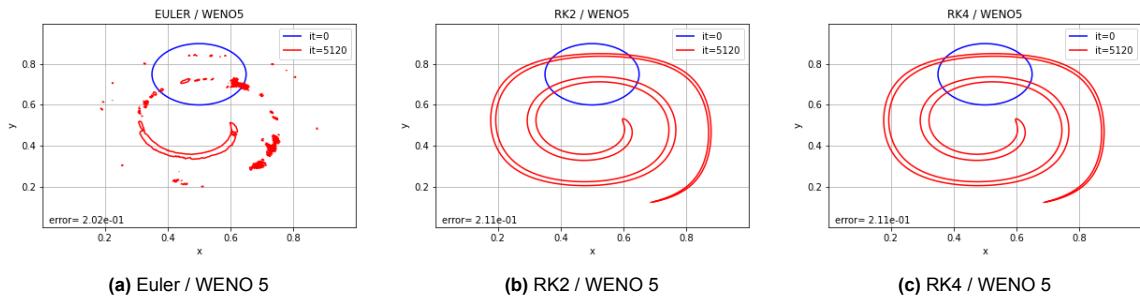
Dans cette étude, nous avons utilisé trois schémas de résolution différents - Euler, RK2 et RK4 - pour analyser l'advection d'une interface entre deux milieux fluides (I) et (II) représentée par l'iso-valeur  $\Phi(x, t) = 0$  de la fonction level-set  $\Phi(x, t)$ . Nous avons comparé l'efficacité de ces schémas en utilisant trois méthodes de diffusion différentes - Upwind, Lax-Wendroff et WENO 5 - pour résoudre l'équation de transport de l'interface. Les résultats de ces simulations sont présentés dans les figures suivantes, qui montrent l'évolution de l'interface dans le temps sous l'influence du champ de vitesse connu  $u$ .



**Figure 4.1** – Cas-test du serpentin avec le schéma Upwind à  $t = 2s$



**Figure 4.2 – Cas-test du serpentin avec le schéma Lax-Wendroff à  $t = 3s$**

Figure 4.3 – Cas-test du serpentin avec le schéma WENO 5 à  $t = 3s$ 

Pour toutes les simulations nous avons utiliser un CFL de **0.3** qui permet de limiter les erreurs numériques. En effet en gardant le CFL à 0.9, nous avons de nombreuses tâches comme sur la Figure 4.3a d'Euler / WENO 5.

Nous n'avons pas réussi à pousser la simulation jusqu'au 3s voulu pour les simulations avec le schéma upwind étant donné qu'après 2s de simulation, nous perdons l'iso-surface et nous n'avons plus rien d'afficher.

Schéma temporel \ Schéma spatial	Euler	RK2	RK4
Upwind	1 min 26 s	2 min 55 s	5 min 58 s
Lax-Wendroff	2 min 55 s	5 min 52 s	12 min 3 s
WENO 5	17 min 44 s	35 min 28 s	1 h 10 min 52 s

Table 4.1 – Temps de calculs pour les différentes combinaisons de schémas

On a regroupé les temps de calculs des simulations pour les différents couples de schéma. On note que en fonction de l'ordre du schéma temporel ou spatial les temps de calculs augmentent grandement comme prévu.

Les différentes variantes de Lax-Wendroff donnent de bon résultats pour des temps de simulation raisonnables.

#### 4.1.2. Perte de masse

Afin de calculer la perte de masse engendré par les méthodes spatiales, nous allons calculer l'aire à l'intérieur des serpentins que nous allons comparer à l'aire initiale du disque pour avoir une idée de la variation de masse induit par la méthode level-set.

Nous allons seulement calculer les variations de masse (d'aire) pour les schémas spatiaux associée au schéma de Lax-Wendroff pour lesquels nous avons de bon résultats.

Schémas	Aire initial	Aire final	Erreur relative
Euler / Lax-Wendroff	$0.0706833 \text{ m}^2$	$0.0547661 \text{ m}^2$	22.5 %
RK2 / Lax-Wendroff	$0.0706833 \text{ m}^2$	$0.0514956 \text{ m}^2$	27.1 %
RK4 / Lax-Wendroff 5	$0.0706833 \text{ m}^2$	$0.0607083 \text{ m}^2$	14.1 %

Table 4.2 – Perte de masse pour les variantes de Lax-Wendroff

Les pertes de masse sont de l'ordre de 20 % ce qui est plutôt important mais du au schéma numérique qui n'assure pas la conservation de la masse.

# 5

## Conclusion

Dans le cadre de ce TP, nous avons eu l'opportunité de mettre en pratique l'utilisation de la méthode level-set pour simuler l'évolution de surfaces dans des champs de vitesses. Cette méthode est largement utilisée dans les domaines de la physique et de l'ingénierie pour modéliser des phénomènes tels que la déformation de solides, la diffusion de substances chimiques, et la propagation d'ondes. Nous avons appliqué cette méthode à deux exemples simples mais représentatifs, le serpentin et le disque de Zalesak, afin de mieux comprendre son fonctionnement et ses limitations.

Afin de simuler ces deux situations, nous avons testé plusieurs combinaisons de schémas en espace et en temps. Certains d'entre eux se sont avérés plus efficaces que d'autres, tandis que d'autres ont nécessité des temps de calcul relativement longs. Malheureusement, nous avons également constaté que tous les schémas testés ont entraîné une perte de masse globale au fil de la simulation dans le temps. Cela peut être un problème pour certains modèles, et nous devrons donc être conscients de cette limitation lors de l'application de la méthode level-set à des problèmes réels.

# Références

- [1] JM Ghidaglia et JP Caltagirone. *Numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 2001.
- [2] R. Malladi, J.A. Sethian et B.C. Vemuri. *An overview of the level set method*. IEEE Press, 1995.
- [3] KW Morton et DF Mayers. *Numerical Solution of Partial Differential Equations : An Introduction*. Cambridge University Press, 2005.
- [4] J.A. Sethian. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1996.
- [5] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1999.