

TP : Suivi d'une interface par méthode *level-set*.

Une interface entre deux milieux fluides (I) et (II) est représentée par l'iso-valeur $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ de la fonction level-set $\Phi(\mathbf{x}, t)$. L'interface est advectée par un champ de vitesse \mathbf{u} connu. On cherche alors à résoudre l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi = 0 \quad (1)$$

On s'intéressera aux deux conditions limites suivante :

I Déformation d'un disque par un tourbillon (cas-test du serpent)

Ce cas test a pour but d'étudier le comportement d'une méthode de suivi d'interface lorsque cette dernière s'étire sous l'effet d'un cisaillement jusqu'à former un ligament. Les effets de sous-résolution sont ainsi mesurés grâce à ce cas test. On considère un domaine carré $[0, 1]^2$ dans lequel un cercle de rayon 0.15 est placé à l'instant initial au point $(0.5, 0.75)$. Un champ de vitesse \mathbf{u} tournoyant circulaire est défini par la fonction courant suivante :

$$\psi = \frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \quad (2)$$

Le temps de simulation sera fixé à 3 s.

II Advection du disque de Zalesak

La rotation d'un disque épuré d'une fente dans un champ de vitesse tourbillonnant est étudiée. Ce cas test vise à mettre en évidence la capacité de la méthode à capturer des structures fines avec une géométrie raide (ici, des coins). Dans un domaine carré $[0, 100]^2$, un disque privé d'une fente est advecté autour du centre du domaine par un champ de vitesse stationnaire donné par :

$$u(x, y) = \frac{\pi}{314} (50 - y) \quad (3a)$$

$$v(x, y) = \frac{\pi}{314} (x - 50) \quad (3b)$$

Le disque a pour rayon $R_d = 15$ et est initialement centré en $(x_d, y_d) = (50, 75)$. La fente a pour largeur $w_d = 5$ (Fig. 1). Le disque fait un tour complet en 628 s pour revenir exactement à sa

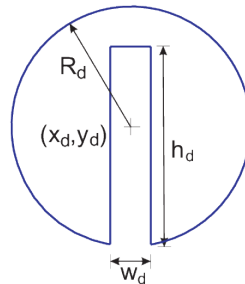


FIGURE 1: Configuration initiale du disque de Zalesak.

position initiale.

III Travail demandé

Exercice I (Code Python)

- 1) Compléter les scripts Python joints. Les deux conditions initiales (cas-tests du serpent in et de Zalesak) devront être testées.
- 2) Les schémas en espace suivants devront être codés :

- Décentré amont (ou upwind) d'ordre 1 en espace, qui s'écrit en 1D :

$$u_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n = \max(u_i, 0) \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \min(u_i, 0) \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (4)$$

- Schéma centré avec ajout d'un terme de dissipation (type Lax-Wendroff), d'ordre 2 en espace, qui s'écrit en 1D :

$$u_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^n = u_i \cdot \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{u_i^2 \Delta t}{2} \cdot \frac{\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n - 2\Phi_i^n}{\Delta x^2} \quad (5)$$

- Schéma WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory), d'ordre 5 en espace (fourni dans le code Python).

- 3) En ré-écrivant l'Eq. (1) de la façon suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t, \Phi) \quad (6)$$

Les schémas temporels suivants devront être codés :

- Schéma d'Euler explicite d'ordre 1 :

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = F(t^n, \Phi^n) \quad (7)$$

- Schéma RK2 (Runge-Kutta ordre 2)

$$F_1 = F(t^n, \Phi^n) \quad (8a)$$

$$F_2 = F(t^n + \Delta t, \Phi^n + \Delta t \cdot F_1) \quad (8b)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot (F_1 + F_2) \quad (8c)$$

- Schéma RK4 (Runge-Kutta ordre 4)

$$F_1 = F(t^n, \Phi^n) \quad (9a)$$

$$F_2 = F\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_1\right) \quad (9b)$$

$$F_3 = F\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_2\right) \quad (9c)$$

$$F_4 = F(t^n + \Delta t, \Phi^n + \Delta t \cdot F_3) \quad (9d)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{6} \cdot (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) \quad (9e)$$

où Δt est le pas de temps, et les indices i et n correspondent respectivement à la position x_i et au temps t^n .

Exercice II (Compte rendu et synthèse)

- 1) Etudier les différents schémas en espace et en temps ainsi que leurs couplages. Caractériser les différentes méthodes sur les deux cas du serpentini et du disque de Zalesak (perte de masse pour le serpentini, erreurs relatives après un tour pour le disque de Zalesak, efficacité pour capturer les structures sous-résolues et les zones de fortes courbures, ...).
- 2) Montrer l'erreur de convergence en espace (numérique) pour chacun des schémas en espace.