

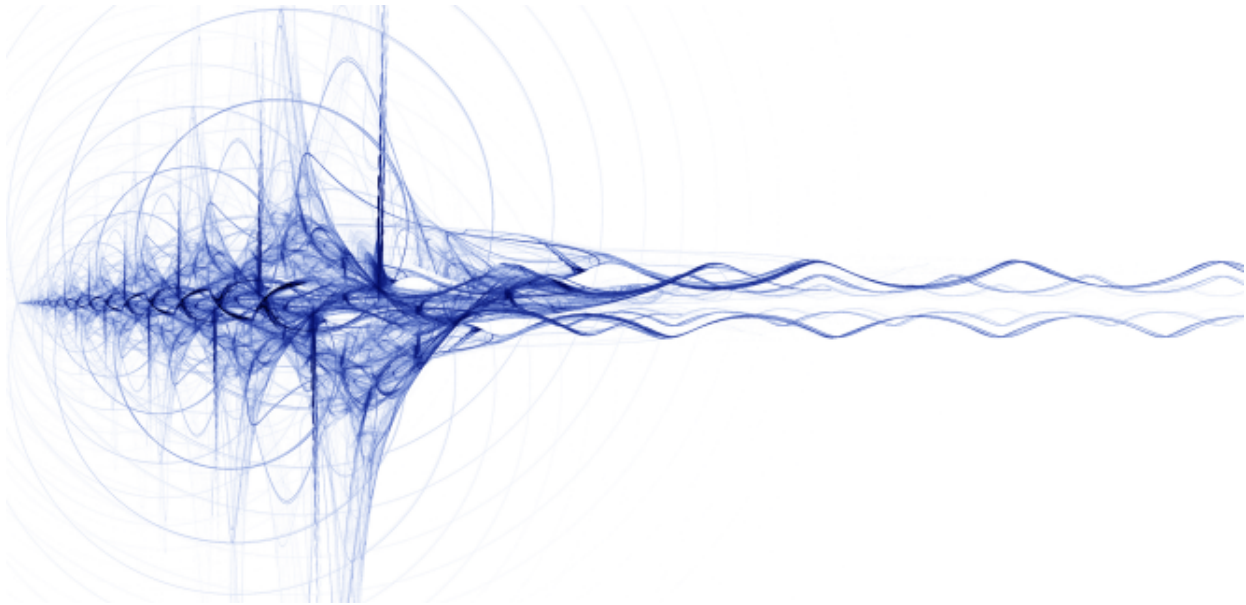


21 février 2023

## BE Vibration/Acoustique

Analyse Modale d'un système couplé structure/fluide :  
Étude d'un Aquarium

UE-PL9006ME



Bastien Piron  
Jérémy Archier  
5A MECA

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modèles/milieux non-couplés</b>	<b>2</b>
2.1	Poutre en traction/compression . . . . .	2
2.1.1	Solution analytique . . . . .	3
2.1.2	Solution éléments finis . . . . .	4
2.2	Poutre bi-encadrée en flexion . . . . .	5
2.2.1	Solution analytique . . . . .	6
2.2.2	Solution éléments finis . . . . .	7
2.3	Fluide dans une cavité (1D) . . . . .	9
2.3.1	Solution analytique . . . . .	9
2.3.2	Solution éléments finis . . . . .	10
2.4	Fluide dans une cavité (2D) . . . . .	12
2.4.1	Solution analytique . . . . .	12
2.4.2	Solution numérique . . . . .	13
2.5	Eau avec surface libre . . . . .	16
2.5.1	Solution analytique . . . . .	16
2.5.2	Solution numérique . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Systèmes couplés Structure/Fluide</b>	<b>21</b>
3.1	Couplage poutre/cavité 1D . . . . .	21
3.1.1	Équations de la structure . . . . .	22
3.1.2	Équations du fluide . . . . .	23
3.1.3	Assemblage du système et Résolution . . . . .	23
3.2	Couplage poutre en flexion/cavité 2D . . . . .	25
3.2.1	Équations de la structure . . . . .	26
3.2.2	Équations du fluide . . . . .	28
3.2.3	Assemblage du système et Résolution . . . . .	29
3.3	Couplage Eau avec surface libre et poutre en flexion . . . . .	32
3.4	Couplage cavité 2D/poutre en flexion/eau avec surface en eau libre . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

# 1 Introduction

Pour faire suite au projet de l'année dernière (i.e éléments finis appliqués à la RDM), nous allons à présent réaliser une analyse modale sur un système couplé structure/fluide par éléments finis. Dans un premier temps, nous construirons les modèles de chaque sous-système du système couplé dans la section 2. Puis dans la section 3, nous couplerons nos sous-systèmes pour construire notre système couplé Fluide/Structure.

Le but de ce projet est de réaliser l'étude mécanique d'un système couplé avec une cavité 2D, une poutre en flexion bi-encadrée avec de l'eau en surface libre. Voici le schéma du système :

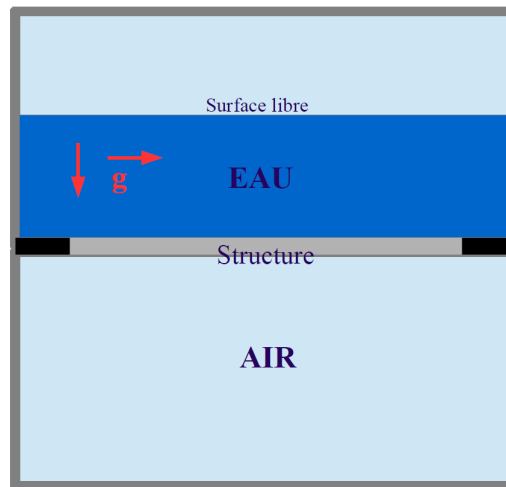


FIGURE 1 – Schéma du système

Nous ferons intervenir les hypothèses suivantes :

- Hypothèse des poutres : la largeur et l'épaisseur sont négligeables devant la longueur
- Hypothèse des petits déplacements/déformation pour rester dans le domaine élastique des matériaux
- Les "fluides" sont supposés parfaits, incompressibles, irrotationnels, non-visqueux, sans tension de surface
- Les batis/parois sont parfaitement rigides

## 2 Modèles/milieux non-couplés

### 2.1 Poutre en traction/compression

Pour commencer notre étude, nous allons d'abord traiter une poutre encadrée libre travaillant en traction/compression. Elle nous sera utile pour appréhender un cas simple de couplage fluide/structure.

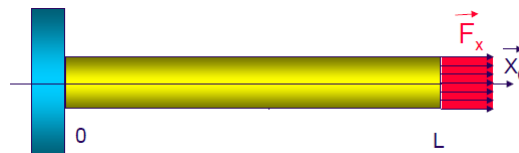


FIGURE 2 – Schéma de la poutre encadrée libre travaillant en traction/compression

Nous réaliserons une analyse modale de la poutre avec les paramètres suivants :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 1.0m$
- Longueur d'un élément :  $dx = \frac{L}{N}$  avec N le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Épaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Masse volumique :  $\rho = 7800kg.m^{-3}$
- Section :  $S = bh$

### 2.1.1 Solution analytique

L'équation du mouvement d'une poutre en traction/compression (1D) est donnée par :

$$-w^2 \rho u + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$u(x) = \alpha \cos(\Omega x) + \beta \sin(\Omega x)$$

Où  $\alpha, \beta$  sont des constantes et

$$w = \Omega \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Dans notre cas, la poutre est encastree-libre, donc en  $x = 0$ , nous avons :

$$u(x = 0) = 0$$

$$\sigma_{xx}(x = L) = 0$$

Avec ces conditions limites, la solution générique devient :

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \Omega \cos(\Omega L) = 0 \end{cases}$$

$$\cos(\Omega L) = 0 \Rightarrow w_k = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{2L} (1 + 2k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Les 5 premières fréquences de résonances sont les suivantes :

Mode	Fréquence exacte (Hz)
1	1281.7
2	3845.0
3	6408.3
4	8971.6
5	11534.9

TABLE 1 – 5 premières fréquences de résonance de la poutre encastree-libre

### 2.1.2 Solution éléments finis

D'après le cours, pour un élément d'une poutre en traction/compression, nous avons le système suivant (en dynamique) :

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{pmatrix} = \frac{\rho S dx}{6} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} \ddot{u}_1^e(x, t) \\ \ddot{u}_2^e(x, t) \end{pmatrix} + \frac{ES}{dx} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} u_1^e(x, t) \\ u_2^e(x, t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{K}_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour deux éléments, le système s'écrit tel que :

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{pmatrix} = \frac{\rho S dx}{6} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1^e(x, t) \\ \ddot{u}_2^e(x, t) \\ \ddot{u}_3^e(x, t) \end{pmatrix} + \frac{ES}{dx} \mathcal{K} \begin{pmatrix} u_1^e(x, t) \\ u_2^e(x, t) \\ u_3^e(x, t) \end{pmatrix}$$

Comme la poutre est encastree-libre, les conditions limites imposent que le déplacement en  $x = 0$  soit nul. Donc pour l'analyse modale, il suffit de résoudre :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{6}{\rho S dx} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \frac{ES}{dx} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$$

Pour N éléments poutres, il suffit d'assembler le système suivant :

$$0 = -w^2 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\rho_s S dx}{6} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_e} \frac{ES}{dx} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

Et de résoudre le problème aux valeurs propres avec  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$ , les matrices globales (en retirant les lignes et colonnes des degrés de libertés bloqués) :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{6}{\rho S dx} \mathcal{M}^{-1} \times \frac{ES}{dx} \mathcal{K})$$

Pour N=5 éléments, nous obtenons les fréquences et les déformées modales suivantes :

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence EF (Hz)	Erreur relative (%)
1	1281.7	1286.9	0.41
2	3845.0	3988.3	3.7
3	6408.3	7066.1	10.2
4	8971.6	10596	18.1
5	11534.9	13628.7	18.2

TABLE 2 – Fréquences de résonance pour 5 éléments

Nous remarquons que les premières fréquences obtenues par éléments finis sont les plus proches de la solution exacte, les modes 1 à 3 sont en dessous des 10% (quasiment). Cependant, plus le mode est élevé, plus les résultats divergent. L'erreur relative en est un bon indicateur, puisqu'elle augmente avec lorsque le numéro des modes. Il serait possible d'affiner les résultats en augmentant le nombre d'éléments car comme montré sur la figure 15, ils convergent (par valeurs supérieures) vers leur valeur exacte lorsque le N augmente. Cependant, l'hypothèse des poutres doit être respectée sous peine de fausser les résultats : la longueur d'un élément doit être suffisamment grande devant l'épaisseur et la largeur. Comme nous avons une section carré, il est possible d'aller jusqu'à environ  $N \simeq 10$ .

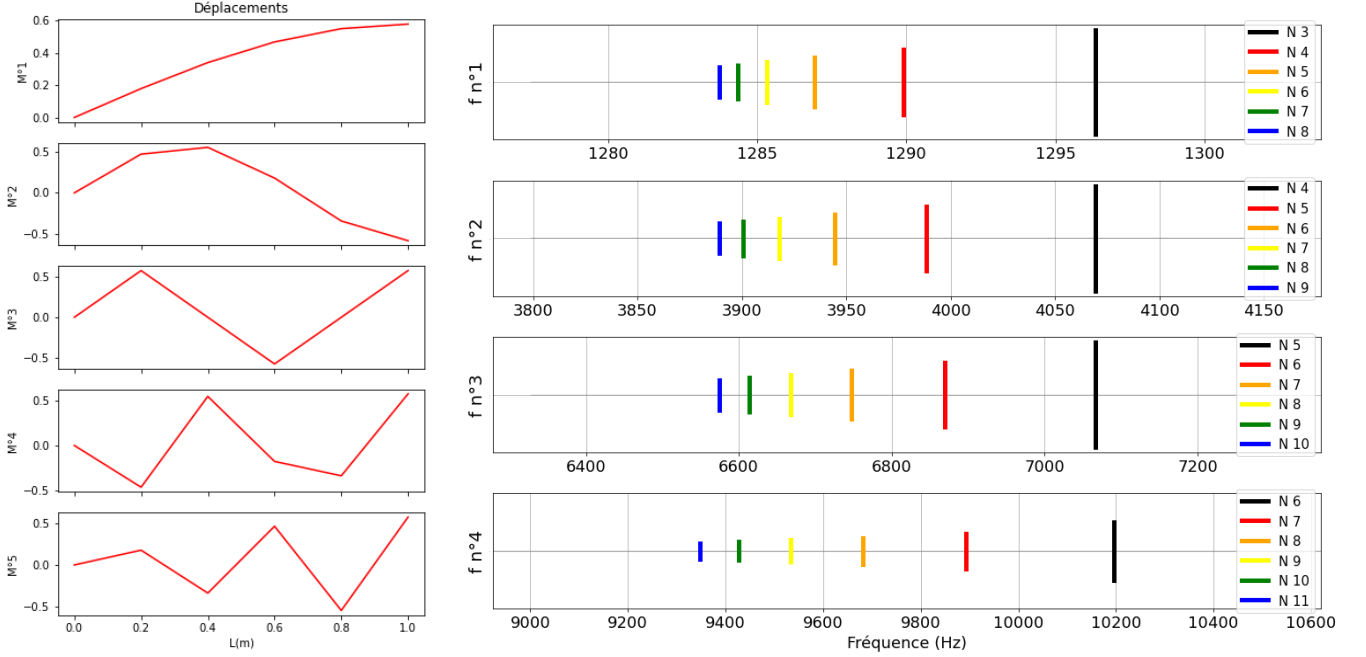


TABLE 3 – Déformées modales et graphiques de convergence des fréquences

## 2.2 Poutre bi-encadrée en flexion

Le système couplé illustré figure 1 contient une poutre bi-encadrée séparant la cavité et le fluide comme montré sur la figure 3 . Cette dernière travaillera en flexion.

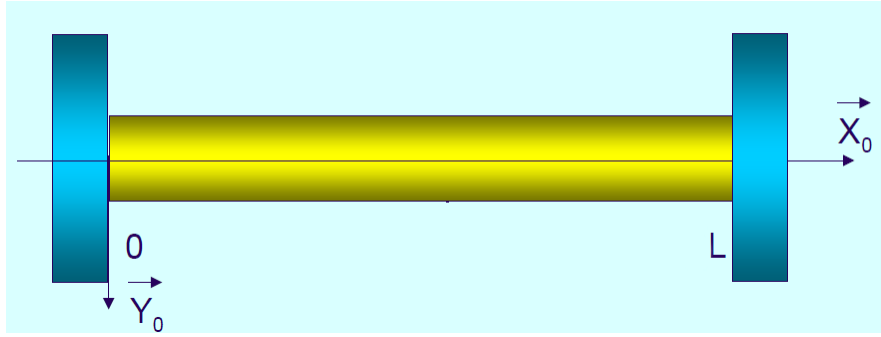


FIGURE 3 – Schéma de la poutre bi-encadrée

Nous réaliserons une analyse modale de la poutre avec les paramètres suivants :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 1.0m$
- Longueur d'un élément :  $dx = \frac{L}{N}$  avec N le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Épaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Moment quadratique d'une section rectangulaire :  $I_z = bh \frac{b^2 + h^2}{12}$
- Masse volumique :  $\rho = 7800 kg.m^{-3}$
- Section :  $S = bh$

### 2.2.1 Solution analytique

L'équation du mouvement d'une poutre en flexion en 1D est donnée par :

$$-w^2 \rho S v + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$v(x) = \alpha \cos\left(\frac{\Omega}{L}x\right) + \alpha' \cosh\left(\frac{\Omega}{L}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\Omega}{L}x\right) + \beta' \sinh\left(\frac{\Omega}{L}x\right)$$

Où  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  sont des constantes et :

$$w = \frac{\Omega^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (1)$$

Dans notre cas, la poutre est bi-encastée, donc en  $x = 0, L$ , nous avons :

$$v(x = 0, L) = 0$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0, L} = 0$$

En utilisant ces conditions limites, nous avons les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} v(x = 0) = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha' = 0 \\ \beta + \beta' = 0 \end{cases} \\ v(x = L) = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos(\Omega) + \alpha' \cosh(\Omega) + \beta \sin(\Omega) + \beta' \sinh(\Omega) = 0 \\ -\alpha \sin(\Omega) + \alpha' \sinh(\Omega) + \beta \cos(\Omega) + \beta' \cosh(\Omega) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le deuxième système nous permettra de déterminer  $\Omega$  pour obtenir les fréquences de résonances. Pour le résoudre, il suffit de trouver les racines de son déterminant :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha(\cos(\Omega) - \cosh(\Omega)) + \beta(\sin(\Omega) - \sinh(\Omega)) = 0 \\ \alpha(-\sin(\Omega) - \sinh(\Omega)) + \beta(\cos(\Omega) - \cosh(\Omega)) = 0 \end{cases} \\ 0 = \det(\cdot) &\Rightarrow 0 = (\cos(\Omega) - \cosh(\Omega))^2 + (\sin(\Omega) - \sinh(\Omega))(\sin(\Omega) + \sinh(\Omega)) \\ &0 = \cos(\Omega)^2 - 2\cos(\Omega)\cosh(\Omega) + \cosh(\Omega)^2 + \sin(\Omega)^2 - \sinh(\Omega)^2 \\ &0 = 1 - \cos(\Omega)\cosh(\Omega) \end{aligned}$$

Les solutions de  $0 = 1 - \cos(\Omega)\cosh(\Omega)$  sont  $\Omega_k \simeq \frac{\pi}{2}(3 + 2k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

Par dichotomie, nous obtenons une meilleure approximation (de l'ordre de  $10^{-12}$ ), nous trouvons les fréquences suivantes en utilisant la relation 1 :

Mode	Fréquence exacte (Hz)
1	74.5
2	205.4
3	402.7
4	665.73
5	994.4
6	1389.0

TABLE 4 – Fréquences de résonance des 6 premiers modes

### 2.2.2 Solution éléments finis

D'après le cours, pour un élément d'une poutre en flexion, nous avons le système suivant (en dynamique) :

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ M_1^e \\ F_2^e \\ M_2^e \end{pmatrix} = \frac{\rho S dx}{420} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} \ddot{v}_1^e(x, t) \\ \ddot{\psi}_1^e(x, t) \\ \ddot{v}_2^e(x, t) \\ \ddot{\psi}_2^e(x, t) \end{pmatrix} + \frac{EI_z}{dx^3} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} v_1^e(x, t) \\ \psi_1^e(x, t) \\ v_2^e(x, t) \\ \psi_2^e(x, t) \end{pmatrix}$$

avec  $\mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} 156 & 22dx & 54 & -13dx \\ 22dx & 4dx^2 & 13dx & -3dx^2 \\ 54 & 13dx & 156 & -22dx \\ -13dx & -3dx^2 & -22dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{K}_e = \begin{pmatrix} 12 & 6dx & -12 & 6dx \\ 6dx & 4dx^2 & -6dx & 2dx^2 \\ -12 & -6dx & 12 & -6dx \\ 6dx & 2dx^2 & -6dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$

Pour deux éléments, le système s'écrit tel que :

$$\begin{pmatrix} F_1^e \\ M_1^e \\ F_2^e \\ M_2^e \\ F_3^e \\ M_3^e \end{pmatrix} = \frac{\rho S dx}{420} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \ddot{v}_1^e(x, t) \\ \ddot{\psi}_1^e(x, t) \\ \ddot{v}_2^e(x, t) \\ \ddot{\psi}_2^e(x, t) \\ \ddot{v}_3^e(x, t) \\ \ddot{\psi}_3^e(x, t) \end{pmatrix} + \frac{EI_z}{dx^3} \mathcal{K} \begin{pmatrix} v_1^e(x, t) \\ \psi_1^e(x, t) \\ v_2^e(x, t) \\ \psi_2^e(x, t) \\ v_3^e(x, t) \\ \psi_3^e(x, t) \end{pmatrix}$$

avec  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 156 & 22dx & 54 & -13dx & 0 & 0 \\ 22dx & 4dx^2 & 13dx & -3dx^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13dx & 312 & 0 & 54 & -13dx \\ -13dx & -3dx^2 & 0 & 8dx^2 & 13dx & -3dx^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13dx & 156 & -22dx \\ 0 & 0 & -13dx & -3dx^2 & -22dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 12 & 6dx & -12 & 6dx & 0 & 0 \\ 6dx & 4dx^2 & -6dx & 2dx^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6dx & 24 & 0 & -12 & 6dx \\ 6dx & 2dx^2 & 0 & 8dx^2 & -6dx & 2dx^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6dx & 12 & -6dx \\ 0 & 0 & 6dx & 2dx^2 & -6dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$

Comme la poutre est bi-encastrée, les conditions limites imposent que les moments et les déplacements soient nuls. Donc pour l'analyse modale, il suffit de résoudre :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{420}{\rho S dx} \begin{pmatrix} 312 & 0 \\ 0 & 8dx^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \frac{EI_z}{dx^3} \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8dx^2 \end{pmatrix})$$

Pour N éléments poutres, il suffit d'assembler le système suivant :

$$0 = -w^2 \sum_{i=1}^N \frac{\rho S dx}{420} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^N \frac{EI}{dx^3} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix}$$

Et de résoudre le problème aux valeurs propres avec  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$ , les matrices globales (en retirant les lignes et colonnes des degrés de liberté bloqués) :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{420}{\rho S dx} \mathcal{M}^{-1} \times \frac{EI_z}{dx^3} \mathcal{K})$$

Pour N=4, nous obtenons les fréquences propres et les déformées modales ci-dessous :



Mode	Fréquence EF (Hz)	Fréquence exacte (Hz)	Erreur relative (%)
1	74.6	74.5	0.13
2	207.3	205.4	0.9
3	411.3	402.7	2.1
4	778.2	665.73	16.9
5	1287.1	994.4	29.4
6	2073.8	1389	49.3

TABLE 5 – Fréquences de résonance pour 4 éléments

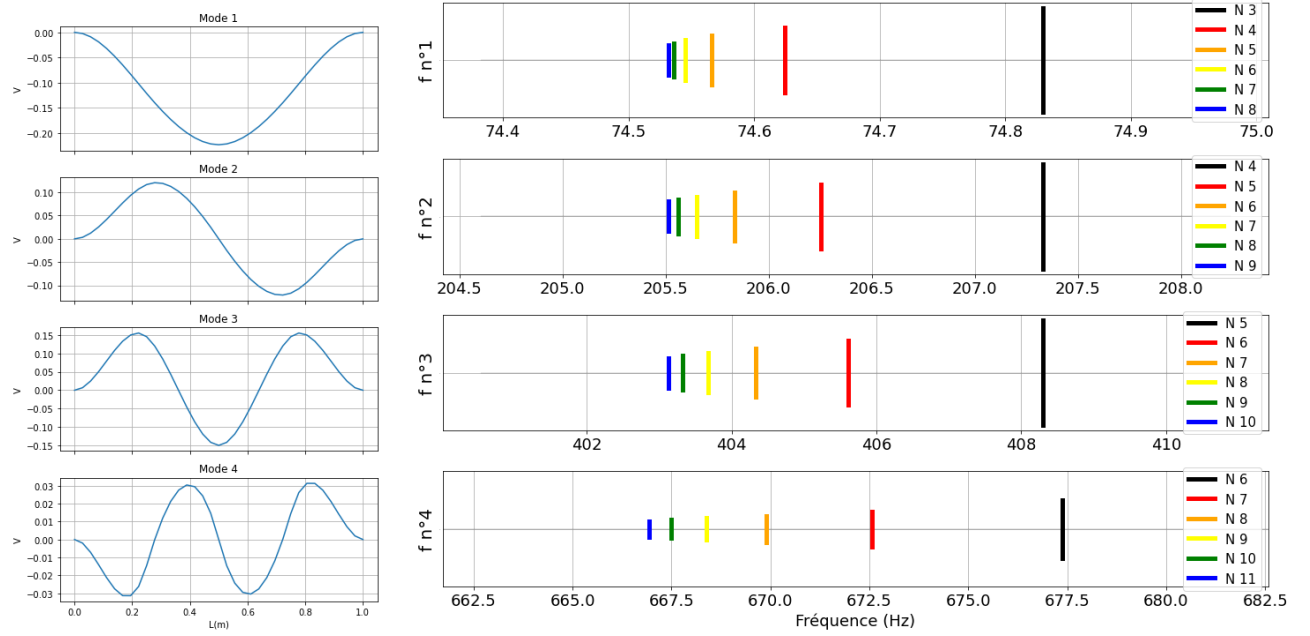


TABLE 6 – Déformées modales et graphiques de convergence des fréquences

Les fréquences obtenues par éléments finis donnent une bonne approximation pour les premières résonances. Le mode 1 et 2 sont en dessous des 10%, validant ces deux résultats. Cependant, l'erreur relative des autres fréquences croît avec le mode, dégradant significativement la qualité des valeurs. Une des solutions possibles serait d'augmenter le nombre d'éléments pour gagner en précision comme nous le voyons sur la figure 6(elles convergent par valeurs supérieures). Cependant, il faut veiller à respecter l'hypothèse des poutres que nous avons faites lors de la linéarisation ? des équations : la longueur de l'élément doit être suffisamment grande devant l'épaisseur et la largeur. Comme nous avons une section carré, il est possible d'aller jusqu'à environ  $N \simeq 10$ . Au delà, les résultats ne seront plus recevables, sortant du cadre des hypothèses.

## 2.3 Fluide dans une cavité (1D)

Au même titre que l'analyse modale de la poutre en traction/compression, ce cas nous servira à construire un couplage simple fluide/structure avec la poutre en traction/compression.

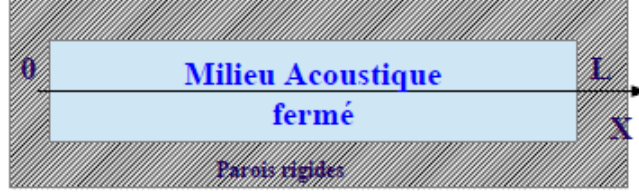


FIGURE 4 – Schéma de la cavité 1D

Caractéristiques de la cavité d'air :

- Longueur de la cavité :  $L = 5.0m$
- Longueur d'un élément :  $dx = \frac{L}{N}$  avec  $N$  le nombre d'éléments
- Largeur de la cavité :  $b = 0.01m$
- Epaisseur de la cavité :  $h = 0.01m$
- Masse volumique de l'air :  $\rho = 1.2kg/m^3$
- Célérité du son dans l'air :  $c = 340m/s$
- Section :  $S = bh$

### 2.3.1 Solution analytique

L'équation vibratoire (Helmoltz 1D) d'un fluide est donnée par :

$$-w^2 \frac{p}{c^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

La solution est similaire à celle de la poutre en traction/compression à savoir :

$$p(x) = \alpha \cos(\Omega x) + \beta \sin(\Omega x)$$

avec

$$\Omega = \frac{w^2}{c^2}$$

A laquelle, nous ajoutons les conditions limites de la cavité, c'est à dire, la condition de paroi rigide :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$$

Nous conduisant au système suivant :

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -\alpha\Omega \sin(\Omega L) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\Omega L) = 0 \Rightarrow w_k = c\sqrt{\frac{\pi k}{L}} \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Voici les 5 premières fréquences de résonances :

Mode	Fréquence exacte (Hz)
1	0.0
2	34.0
3	68.0
4	102.0
5	135.6
6	170.0

TABLE 7 – 6 premières fréquences de résonance

### 2.3.2 Solution éléments finis

Pour un éléments, le système s'écrit tel que :

$$0 = \frac{Sdx}{6c^2} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} \ddot{p}_1^e(x, t) \\ \ddot{p}_2^e(x, t) \end{pmatrix} + \frac{S}{dx} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} p_1^e(x, t) \\ p_2^e(x, t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{K}_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme nous travaillons sur une cavité, les conditions limites n'imposent pas de condition limite sur les pressions. Donc pour l'analyse modale, il suffit de résoudre :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{6}{Sdx} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \frac{S}{dx} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$$

Pour N éléments, il suffit d'assembler le système suivant :

$$0 = -\omega^2 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{Sdx}{6c^2} \mathcal{M}_e \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N_e} \frac{S}{dx} \mathcal{K}_e \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

Et de résoudre le problème aux valeurs propres avec  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$ , les matrices globales (en retirant les lignes et colonnes des degrés de libertés bloqués) :

$$0 = \det(-\omega_i^2 \mathcal{I} + \frac{6c^2}{Sdx} \mathcal{M}^{-1} \times \frac{S}{dx} \mathcal{K})$$

Pour N=5 éléments, nous obtenons les fréquences suivantes :

Mode	Fréquence exacte (Hz)	Fréquence EF (Hz)	Erreur relative (%)
1	0.0	0.0	∅
2	34.0	34.6	1.6
3	68.0	72.5	6.6
4	102.0	116.6	14.3
5	135.6	163.6	20.4
5	170.0	187.5	10.3

TABLE 8 – Fréquences de résonance pour 5 éléments

Avec les déformées modales

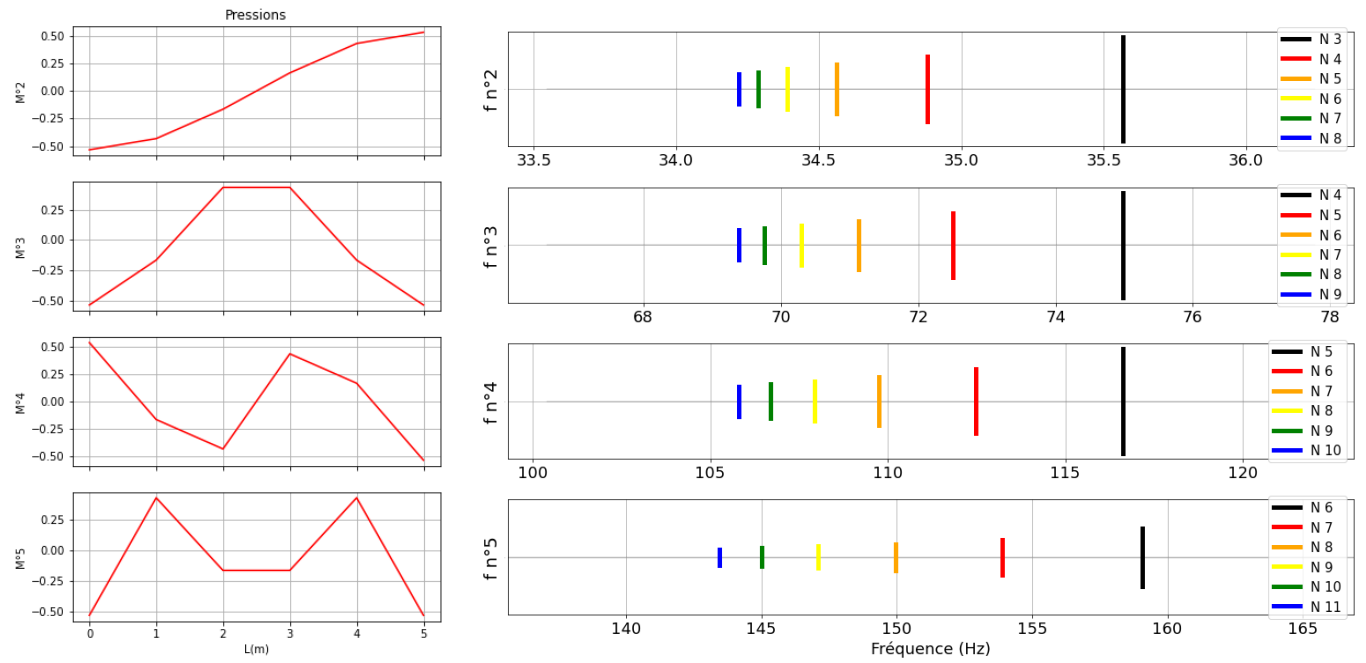


TABLE 9 – Déformées modales et graphiques de convergence des fréquences

Comme pour les précédentes analyses modales, nous observons une dégradation de la précision sur les dernières fréquences, les valeurs convergent (par valeurs supérieures) lorsque  $N$  augmente vers leur valeur exacte. Hypothèses sur longueur d'élément

## 2.4 Fluide dans une cavité (2D)

On s'intéresse au modes de vibration d'une cavité fermée représentée sur la figure ci-dessous :

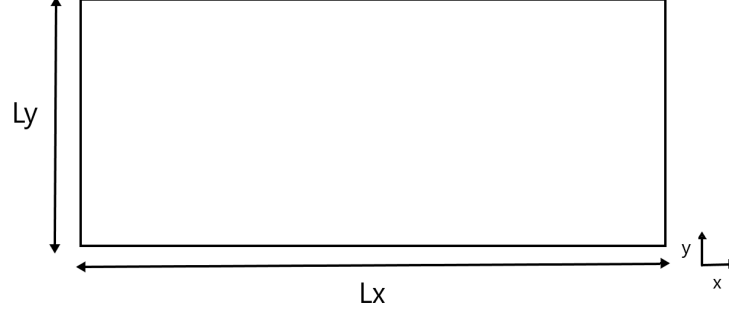


FIGURE 5 – Schéma de la cavité 2D

Caractéristiques de la cavité :

- Longueur de la cavité :  $L_x = 1.0m$
- Hauteur remplissage de la cavité :  $L_y = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L_x}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1.2kg.m^{-3}$  à  $20^\circ C$
- Célérité du son dans l'eau :  $c = 340m/s$

### 2.4.1 Solution analytique

On étudie donc à l'équation de Helmholtz qui régit l'évolution de la pression au sein de la cavité :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

On peut résoudre analytiquement l'équation d'onde en supposant que la solution s'écrit de la forme  $p(x, y, t) = A(x)B(y)e^{-i\omega t}$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + k^2 = 0 \quad (3)$$

On résout les deux équations différentielles sur x et y avec les conditions aux limites de Neumann pour une cavité fermée :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\partial\Omega} = 0$$

Finalement, les relations suivantes dont la relation de dispersion :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{n_x \pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \quad (4)$$

avec  $n_x, n_y$  les modes de propagations selon x,y.

La solution générale va donc s'écrire :

$$p(x, y, t) = \sum_{n_x, n_y} A_{n_x, n_y} \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{-i\omega t} \quad (5)$$

On peut aussi exprimer les fréquences des modes en fonction de  $n_x$  et  $n_y$  :

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2}$$

On peut représenter les fréquences des premiers modes de la cavité de dimension  $L_x = 1m$  et  $L_y = 0,5m$  dans un tableau :

Numéro de mode	$n_x$	$n_y$	Fréquence
1	1	0	170.00
2	2	0	340.00
3	0	1	340.00
4	1	1	380.13
5	2	1	480.83
n	$n_x$	$n_y$	...

TABLE 10 – Fréquences de vibration par calcul analytique

### 2.4.2 Solution numérique

On discrétise l'équation de Helmholtz à l'aide d'éléments finis 2D. On fait le choix de travailler sur des éléments triangulaires à 3 noeuds, on parle d'éléments triangulaires linéaires. On a les matrices de masse et de raideur suivantes :

$$\mathcal{K}_e = \frac{1}{4A} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_e = \frac{A}{12c^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec les coefficients } k_{ij}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2] \\ k_{22} &= \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2] \\ k_{33} &= \frac{1}{4A} [(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ k_{12} &= \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)] \\ k_{13} &= \frac{1}{4A} [(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)] \\ k_{23} &= \frac{1}{4A} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad \text{où } x_i \text{ et } x_j \text{ sont les coordonnées locales des noeuds des élément triangulaire}$$

En utilisant la table de connexion et les coordonnées de chaque point du maillage, les matrices  $\mathcal{K}_e$  et  $\mathcal{M}_e$  peuvent être assemblées en matrices globales  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{M}$ , tel que la formulation faible discrétisée du problème s'écrit :

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M})p = 0 \quad (6)$$

On trouve les modes de vibration du système en résolvant :

$$\det(\mathcal{KM}^{-1} - \omega^2 \mathcal{I}) = 0 \quad (7)$$

La résolution du système 7 va nous donner les  $\omega^2$  et les valeurs propres associés qui nous donnerons l'évolution de la pression dans la cavité pour chaque mode associé. On peut comparer les valeurs de fréquence que l'on obtient par éléments finis aux valeurs analytiques dans le tableau ci-dessous.

Mode $(n_x, n_y)$	Fréquence EF (1600 éléments)	Fréquence EF (3200 éléments)	Fréquence (Hz)
(1,0)	170.033	170.055	170.00
(2,0)	340.652	340.20	340.00
(0,1)	340.56	340.33	340.00
(1,1)	380.69	380.27	380.13
(2,1)	481.56	480.99	480.83
$(n_x, n_y)$	...	...	...

TABLE 11 – Fréquences de vibration par calcul éléments finis

On peut remarquer que les fréquences convergent par valeurs supérieur (voir Figure 8) et que l'on a de bonnes valeurs de fréquence sans pour autant nécessiter un grand nombre d'éléments.

On va maintenant représenter les champs de pression par éléments finis que l'on comparera à la solution analytique pour les modes (2,1) et (2,2) dans les figures 6 et 7. Les seules différences que l'on peut observer sont au niveau des parois où pour la solution EF la solution est atténuée. Ceci étant du à la condition de Neumann imposée aux bords du domaine pour représenter une cavité fermée.

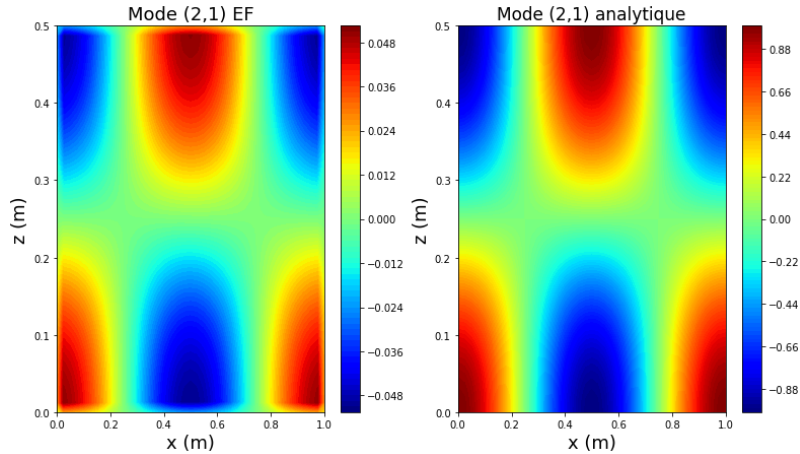


FIGURE 6 – Mode (2,1) : solution EF et analytique pour 3200 éléments

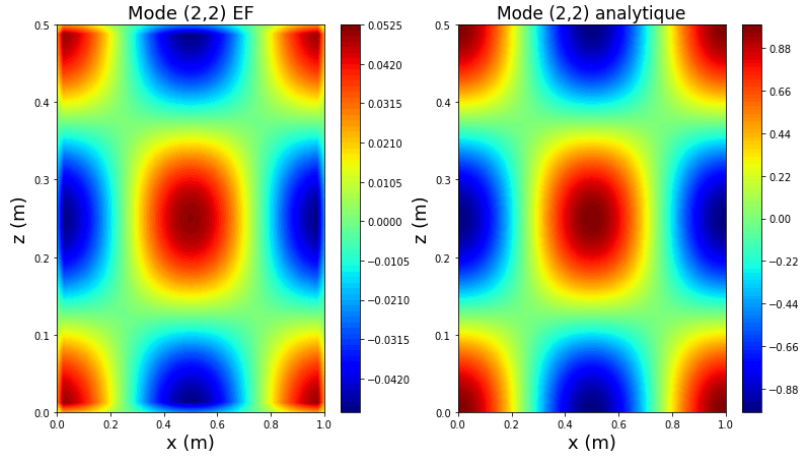


FIGURE 7 – Mode (2,2) : solution EF et analytique pour 3200 éléments

On va maintenant représenter la convergence des fréquences dans le graphique ci-dessous :

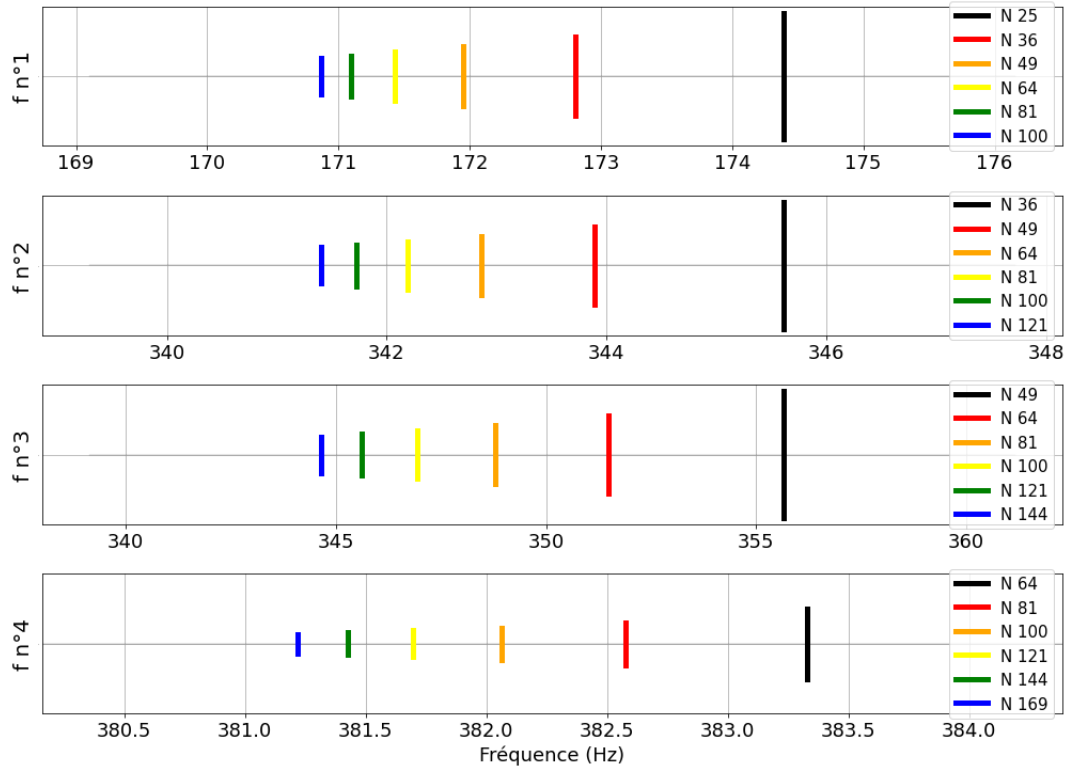


FIGURE 8 – Graphique de convergence des fréquences en fonction du nombre d'éléments  $N$



## 2.5 Eau avec surface libre

On s'intéresse au mode de ballonnement d'un fluide dans un réservoir de longueur  $L = 1$  m et de hauteur d'eau  $h = 0,5$  m soumis à la gravité :

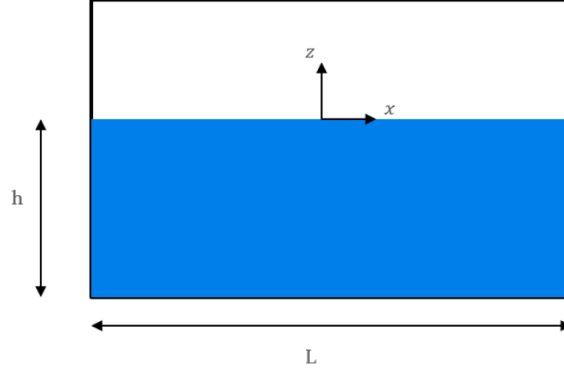


FIGURE 9 – Schéma du problème de ballonnement

Caractéristiques de la cavité :

- Longueur de la cavité :  $L = 1.0m$
- Hauteur remplissage de la cavité :  $h = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1000kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'eau :  $c = 1482m/s$
- Accélération de pesanteur :  $9.81m/s^2$

### 2.5.1 Solution analytique

Comme le fluide est non-visqueux et incompressible, on peut utiliser les équations de Navier-Stokes simplifiées dites d'Euler :

$$\nabla p(M, t) = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(M, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (9)$$

L'hypothèse d'irrotationnalité permet d'introduire un potentiel de déplacement tel que :

$$\mathbf{u}(M, t) = \nabla \phi(M, t) \quad (10)$$

On suppose que la solution de l'équation d'Euler s'écrit de la forme :

$$\phi(x, z, t) = \phi_n(x, z) e^{-i\omega t} \quad (11)$$

Les équations d'Euler deviennent :

$$\nabla p(x, z, t) = -\rho \omega^2 \nabla \phi_n(x, z, t) \quad (12)$$

$$\Delta \phi(x, z, t) = \mathbf{0} \quad (13)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

$$p(x, 0) = \rho g \frac{\partial \phi_n}{\partial z}(x, 0) \quad (15)$$

Le système est donc bien posé et on peut le résoudre, on ne va pas détailler le calcul pour obtenir le potentiel de déplacement :

$$\phi_n(x, z) = D_n \cos(k_n(x - \frac{L}{2})) \cosh(k_n(z + h)) \quad (16)$$

où

- $D_n$  est une constante
- $k_n = \frac{n\pi}{L}$
- $\alpha_n = \frac{n\pi h}{L} = k_n h$
- $\omega_n^2 = \frac{g\alpha_n}{h} \tanh(\alpha_n)$

Il est également possible de déterminer le déplacement modal au niveau de la surface libre pour chaque mode  $n$  :

$$u_n(x, z = 0) = D_n \frac{\omega_n^2}{g} \cos(k_n(x - \frac{L}{2})) \cosh(k_n h) \quad (17)$$

*Remarque 1.* Si l'on considère la tension de surface notée  $\sigma$ , l'expression de  $\omega_n$  devient :

$$\omega_n^2 = \frac{g\alpha_n}{h} \left( 1 + \underbrace{\frac{\sigma\alpha_n^2}{\rho g h^2}}_{\approx 0.0012} \right) \tanh(\alpha_n)$$

L'hypothèse de tension de surface négligée est donc bien valide dans notre cas pour de l'eau.

On peut représenter les fréquences des 4 premiers modes de la cavité dans le tableau ci-dessous :

Numéro de mode	Fréquence (Hz)
1	0.8461
2	1.2472
3	1.5302
4	1.7671
n	...

TABLE 12 – Fréquences des premiers modes de ballotement

On observe que les fréquences de ballotement sont bien plus faibles que celles d'une cavité ou d'une poutre qui était dans notre cas, de l'ordre d'une centaine de Hertz.

On va maintenant représenter les champs de potentiel de déplacement ainsi que le déplacement modale??

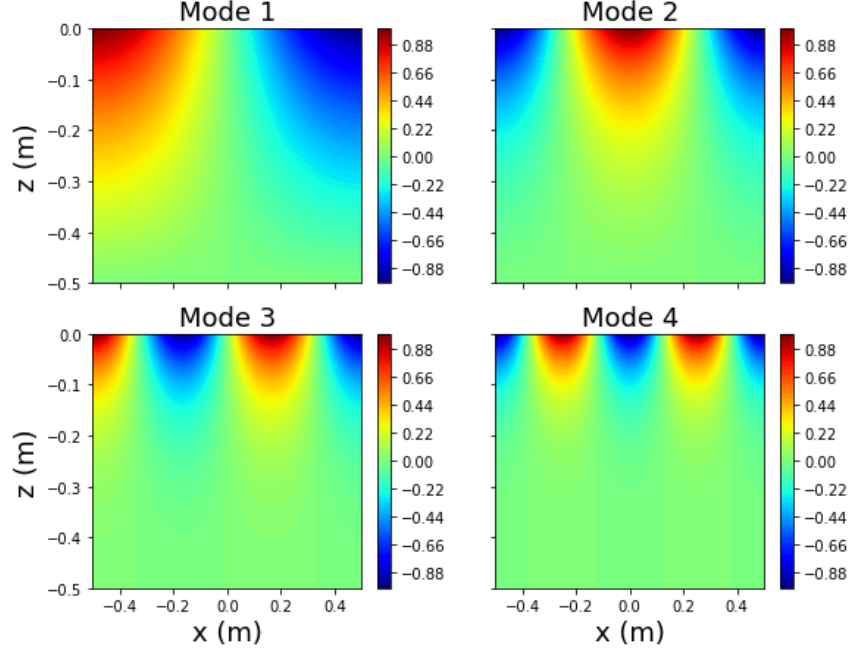


FIGURE 10 – Champ de déplacement modal pour les premiers modes de ballottement

pour les 4 premiers modes dans la figures 10.

On remarque que les modes de déplacement de la surface affecte surtout la surface libre et aussi que le mode correspond au nombre de noeud de vibration. De plus, de part notre modélisation sans viscosité et sans tension de surface le mode de ballottement ne dépend que des dimensions du réservoir et non pas des caractéristiques du fluide.

### 2.5.2 Solution numérique

On repart de l'équation de Laplace 2D :

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z}(x, -h) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}\left(-\frac{L}{2}, z\right) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, z\right) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z}(x, 0) = \frac{\omega_n^2}{g} \phi_n(x, 0) \quad (20)$$

On cherche donc à minimiser le résidu suivant :

$$\mathcal{R}(x, z) = \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} \quad (21)$$

La formulation intégrale va s'écrire sur le domaine fluide ( $\Sigma$ ) avec la fonction de poids  $w$  :

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} w(x, z) dx dz + \iint_{\Sigma} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} w(x, z) dx dz = 0 \quad (22)$$

On intègre par partie et on applique les conditions aux limites, il vient :

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} \right) dx dz - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\omega_n^2}{g} \phi_n(x, 0) w(x, 0) dx = 0 \quad (23)$$

La formulation faible du problème va s'écrire :

$$\sum_{e=1}^{N_e-1} (\mathcal{K}_x^e + \mathcal{K}_y^e) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}^e - \omega_n^2 \sum_{l=1}^{N_x-1} \mathcal{M}^l \begin{bmatrix} \phi_l \\ \phi_{l+1} \end{bmatrix}^l \quad (24)$$

où les matrices élémentaires  $\mathcal{K}_x^e$  et  $\mathcal{K}_y^e$  sont les mêmes que pour le problème de cavité obtenue avec un maillage 2D triangulaire et des éléments finis P1. La matrice élémentaire  $\mathcal{M}^l$  est obtenue avec un maillage 1D de type P1.

$$\mathcal{M}^e = \frac{\Delta x}{6g} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de masse va intervenir dans l'assemblage seulement sur les points de l'axe en  $z = 0$ .

On va ensuite assembler les matrices de masse et de raideur pour obtenir l'expression suivante :

$$(\mathcal{K} - \omega_n^2 \mathcal{M}) \phi_n = 0 \quad (25)$$

On trouve les fréquences de résonance  $\omega$  du système en résolvant :

$$\det(\mathcal{K} \mathcal{M}^{-1} - \omega_n^2 \mathcal{I}) = 0 \quad (26)$$

Cependant, la matrice  $\mathcal{M}$  n'est pas inversible du fait qu'elle ne contient que les composantes liées aux éléments sur la surface libre. Par rapport aux cas précédents, nous utilisons la fonction eig du module scipy de Python, nous évitant d'effectuer un condensage ? du système si nous voulions utiliser eig de numpy.linalg. Nous ferons usage de cette fonction à chaque fois qu'un système fera intervenir du ballottement.

La résolution du système 26 nous conduit à l'obtention des valeurs présentées dans le tableau ci-dessous (Table 2.5.2) :

Mode ( $n_x, n_y$ )	Fréquence EF (1600 éléments)	Fréquence EF (3200 éléments)	Fréquence (Hz)
1	0.8467	0.8465	0.8461
2	1.2510	1.2492	1.2472
3	1.5408	1.5357	1.5302
4	1.7888	1.7783	1.7671
$n$	...	...	...

TABLE 13 – Fréquences de vibration par calcul éléments finis

On a bien comme attendu une convergence par valeurs supérieures (voir Figure 12) et une erreur qui se réduit en augmentant le nombre d'éléments. L'erreur commise pour 1600 ou 3200 éléments est inférieure à 1%.

Les vecteurs propres nous donnant le potentiel de déplacement, nous allons les dériver numériquement pour obtenir le champ de déplacement. On utilise pour ce faire les différences finies centrées d'ordre 2 à l'aide d'une bibliothèque associée de python.

Les 4 premiers modes de vibrations sont donnés par la figure 11. On observe quasi aucune différence entre le champ numérique et le calcul analytique.

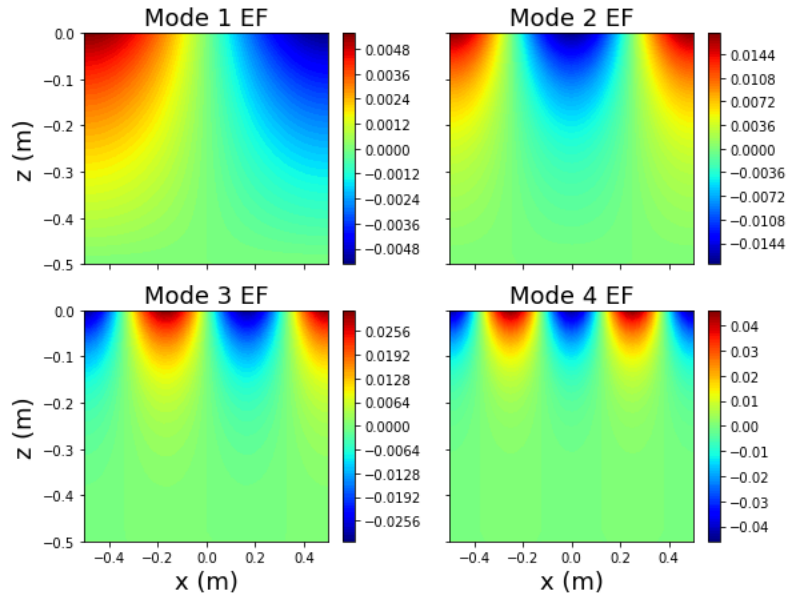


FIGURE 11 – Champ de déplacement modal pour les premiers modes de ballottement EF pour 3200 éléments

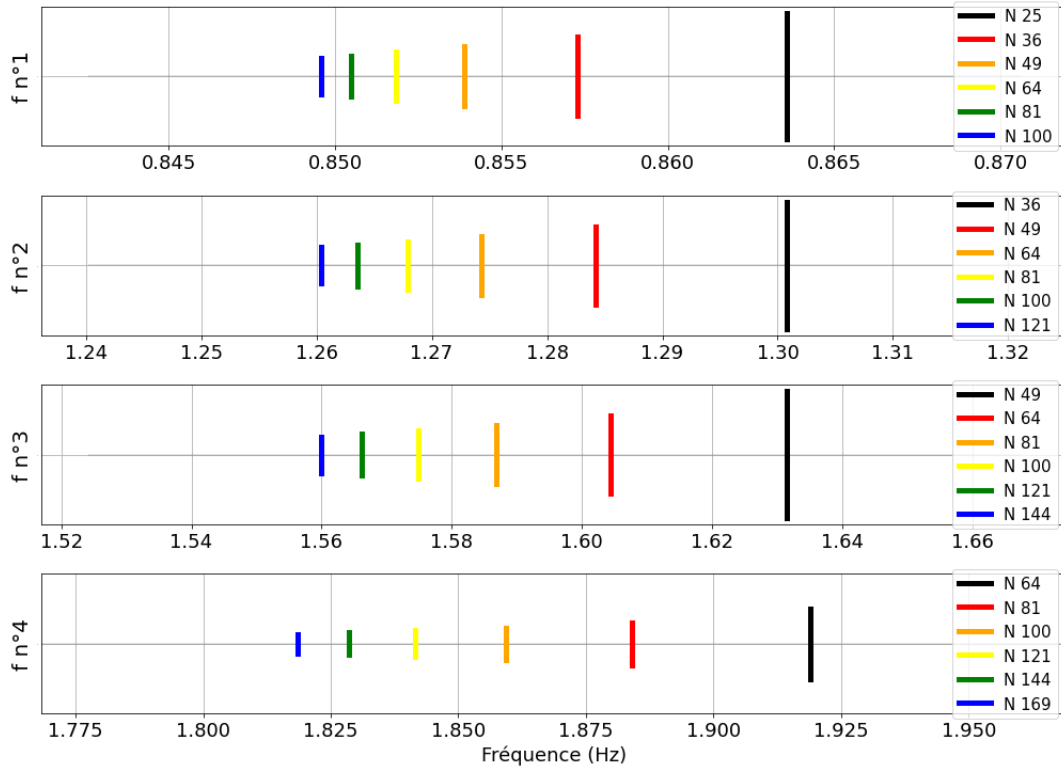


FIGURE 12 – Convergence des fréquences par valeurs supérieur en fonction du nombre d'éléments  $N$

### 3 Systèmes couplés Structure/Fluide

Dans cette partie, nous allons étudier différents systèmes couplés (couplage fort) avec les modèles construits précédemment. Pour simplifier la mise en équation des problèmes, nous allons les formuler en déplacement/pression et non en déplacement/pression/potentiel. Cependant cela aura pour conséquence de dégrader les solutions car une formulation  $(u, p)$  conduit à un problème aux valeurs non-symétrique (matrices creuses), plus difficile à résoudre qu'une formulation  $(u, p, \phi)$  qui conduit à une formulation symétrique.

Via python, nous utiliserons le solveur *eig* du module *scipy*, étant le plus robuste pour ce genre de problème.

#### 3.1 Couplage poutre/cavité 1D

Nous allons étudier le couplage d'une poutre et d'une cavité d'air :

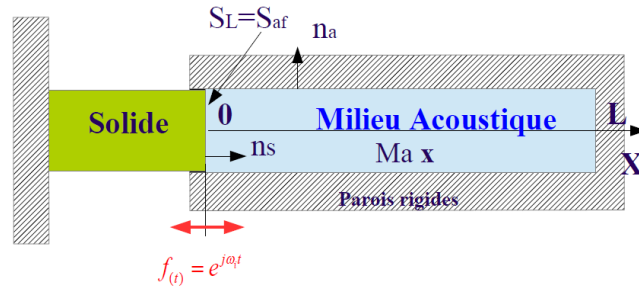


FIGURE 13 – Schéma du système couplé fluide/structure

5

Caractéristiques de la poutre :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 0.1m$
- Longueur d'un élément :  $dx_s = \frac{L}{N_s}$  avec  $N_s$  le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Epaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Moment quadratique d'une section carrée :  $I_z = \frac{bh^3}{12}$
- Masse volumique :  $\rho_p = 7800kg.m^{-3}$
- Section :  $S_L = bh$

Caractéristiques de la cavité d'air :

- Longueur de la cavité :  $L = 5.0m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Largeur de la cavité :  $b = 0.01m$
- Epaisseur de la cavité :  $h = 0.01m$
- Masse volumique de l'air :  $\rho = 1.2kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'air :  $c = 340m/s$
- Section :  $S_{af} = bh$

### 3.1.1 Équations de la structure

La formulation faible pour une poutre en traction/compression s'écrit ( $\mathbf{n}$  représente les fonctions de forme) :

$$-w^2 \int_{\Omega_s} \rho_p u \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_s} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV - \int_{\partial\Omega_s} \sigma_{xx} \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

A laquelle, nous ajouterons la relation de couplage avec la structure :

$$\sigma_{xx} \vec{n} = p \vec{n}$$

et la condition limite (encastrée en  $x = 0$ ) :

$$u(0) = 0$$

Pour finalement obtenir la formulation faible de la poutre :

$$-w^2 \int_{\Omega_s} \rho_p u \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_s} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV - \int_{\partial\Omega_s} p \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

Nous allons utiliser une interpolation d'ordre 1 avec les fonctions de forme suivantes afin de résoudre le problème par éléments finis :

$$N_1^s(x) = \frac{x}{dx_s}$$

$$N_2^s(x) = 1 - \frac{x}{dx_s}$$

Afin d'avoir sur un élément, le déplacement par interpolation :

$$u(x) = N_1^s(x)u_1 + N_2^s(x)u_2$$

En écriture vectorielle,  $u(x)$  s'écrit :

$$u(x) = \begin{pmatrix} N_1^s & N_2^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}$$

Nous permettant de discrétiser la formulation faible :

$$\begin{aligned} 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ns} \int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u_i(x) \mathbf{n} dV + \sum_{i=1}^{Ns} \int_{\Omega_{s_e}} \sigma_{ixx} \epsilon_{ixx} dV - \sum_{k=1}^M \int_{\partial\Omega_{s_e}} p_k \vec{n} \mathbf{n} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ns} \rho_s S \int_0^{dx_s} \begin{pmatrix} N_1^{s2} & N_1^s N_2^s \\ N_2^s N_1^s & N_2^{s2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} dx + \sum_{i=1}^{Ns} \int_0^{L_e} ES_s \begin{pmatrix} N_1'^{s2} & N_2'^s N_1'^s \\ N_2'^s N_1'^s & N_2'^{s2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} dx \\ &\quad - \sum_{k=1}^M \int_{S_f} \begin{pmatrix} N_1^f N_1^s & N_1^f N_2^s \\ N_2^f N_1^s & N_2^f N_2^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ns} \frac{\rho_s S_s dx_s}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{ES_s}{dx_s} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^M \begin{pmatrix} N_1^f N_1^s & N_1^f N_2^s \\ N_2^f N_1^s & N_2^f N_2^s \end{pmatrix} \int_{S_f} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ns} \frac{\rho_s S_c dx_s}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{ES_s}{dx_s} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^M S_f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$M$  correspond au nombre d'éléments sur l'interface solide/fluide.

### 3.1.2 Équations du fluide

La formulation faible pour une cavité d'air s'écrit (hypothèse d'onde plane) :

$$-w^2 \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} p(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} dV - \int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{n} dS = 0$$

A laquelle, nous ajouterons la relation de couplage avec la structure :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{n} = w^2 \rho_f u \vec{n}$$

La condition limite en  $x = L_s + L_f$  (paroi rigide) :

$$\frac{\partial p(L_s + L_f)}{\partial x} = 0$$

Pour finalement obtenir la formulation faible de la cavité suivante :

$$-w^2 \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} p(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} dV - \int_{\partial\Omega_f} w^2 \rho_f u \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

Comme pour la poutre, nous utiliserons une interpolation d'ordre 1 avec les mêmes fonctions de formes de manière à avoir :

$$p(x) = N_1^f(x) p_1 + N_2^f(x) p_2$$

Et

$$p(x) = \begin{pmatrix} N_1^f & N_2^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -w^2 \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} p(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} dV - \int_{\partial\Omega_f} w^2 \rho_f u \vec{n} \mathbf{n} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ne} \frac{S_{af}}{c^2} \int_0^{dx_f} \begin{pmatrix} N_1^{f2} & N_1^f N_2^f \\ N_2^f N_1^f & N_2^{f2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dx + \sum_{i=1}^{Ne} \int_0^{dx_f} S \begin{pmatrix} N_1'^{f2} & N_2'^f N_1'^f \\ N_2'^f N_1'^f & N_2'^{f2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dx \\ &\quad - w^2 \sum_{k=1}^M \rho_f \int_{S_{af}} \begin{pmatrix} N_1^f(0) N_1^s(dx_s) & N_1^f(0) N_2^s(dx_s) \\ N_2^f(0) N_1^s(dx_s) & N_2^f(0) N_2^s(dx_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ne} \frac{S_{af} dx_f}{6c^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dx + \sum_{i=1}^{Ne} \frac{S_{af}}{dx_s} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} dx \\ &\quad - w^2 \sum_{k=1}^M \rho_f \begin{pmatrix} N_1^f(0) N_1^s(dx_f) & N_1^f(0) N_2^s(dx_s) \\ N_2^f(0) N_1^s(dx_f) & N_2^f(0) N_2^s(dx_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} \int_{S_f} dS \\ 0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ne} \frac{S_{af} dx_f}{6c^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{Ne} \frac{S_{af}}{dx_f} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{pmatrix} - w^2 \sum_{k=1}^M \rho_f S_{af} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1.3 Assemblage du système et Résolution

La formulation faible discrète du fluide et de la structure s'assemblent dans le système suivant :

$$0 = \det(-w^2 \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_s & \mathcal{O} \\ \mathcal{C}^t & \mathcal{M}_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_s & \mathcal{C} \\ \mathcal{O} & \mathcal{K}_p \end{pmatrix})$$



Avec 5 éléments pour la structure et 5 éléments pour la cavité, nous obtenons les fréquences et les déformées modales suivantes :

Mode	Fréquence EF (Hz)	Fréquence structure seule EF (Hz)	Fréquence cavité seule EF (Hz)
1	0.0	$\emptyset$	0.0
2	34.6	$\emptyset$	34.6
3	72.5	$\emptyset$	72.5
4	116.6	$\emptyset$	116.6
5	163.6	$\emptyset$	163.6
6	187.5	$\emptyset$	187.5
7	1287.0	1286.9	$\emptyset$
8	3988.3	3988.3	$\emptyset$
9	7066.1	7066.1	$\emptyset$
10	10596.0	10596.0	$\emptyset$
11	13628.6	13628.7	$\emptyset$

TABLE 14 – Fréquences de résonance

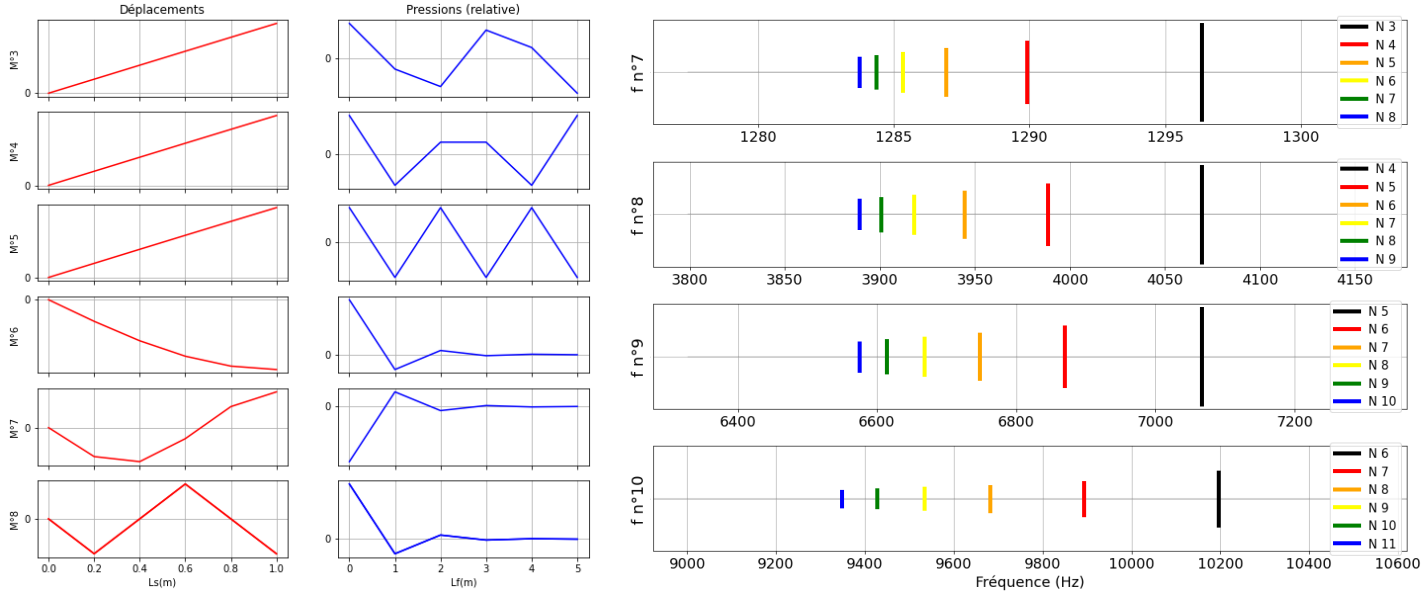


TABLE 15 – Déformées modales et graphiques de convergence des fréquences

En observant les fréquences de résonances du système couplé, nous remarquons aucun changement entre les fréquences de la structure et du fluide découplé. Cela signifie qu'il agit comme un système découplé malgré le couplage des déformées modales. Nous pouvons justifier par le fait que les premières fréquences de résonance de la poutre seule et la cavité seule ne sont pas dans la même bande fréquence (entre 0 et 200 pour la cavité et 1200 à 14000 pour la poutre). Lorsque la poutre ou la cavité est excitée à une de ces fréquences de résonance, le reste du système n'y est pas réceptif, impliquant aucune modification de ces fréquences propres. Il pourrait être intéressant de regarder les modes suivants, lorsque les fréquences de la cavité arrivent sur la plage de celles de la poutre. Cependant, avec notre approche, l'hypothèse des poutres nous limite à l'étude de 10 premiers modes seulement.

Pour un système couplé, la solution devient plus compliquée à déterminer. Nous nous contenterons d'observer la convergence des fréquences, qui, ici se fait par valeurs supérieures, indicateur de la qualité des résultats.

### 3.2 Couplage poutre en flexion/cavité 2D

Nous allons étudier le couplage d'une poutre en flexion et d'une cavité d'air en 2D :

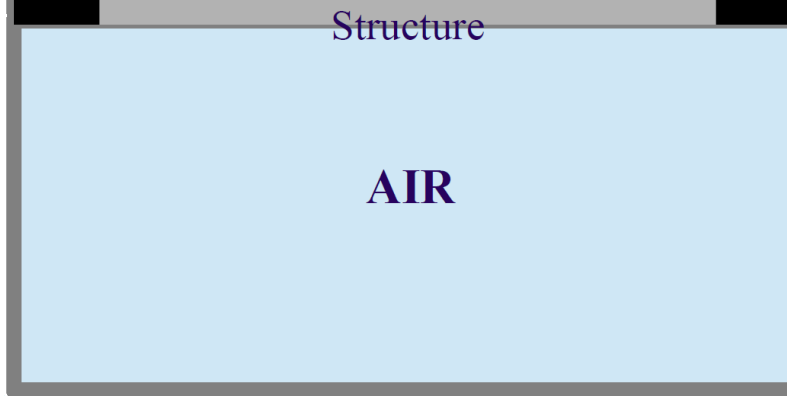


FIGURE 14 – Schéma du système couplé fluide/structure

Caractéristiques de la poutre :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 1m$
- Longueur d'un élément :  $dx_s = \frac{L}{N_s}$  avec  $N_s$  le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Epaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Moment quadratique d'une section carré :  $I_z = \frac{bh^3}{12}$
- Masse volumique :  $\rho_p = 7800kg.m^{-3}$
- Section :  $S_L = bh$

Caractéristiques de la cavité d'air :

- Longueur de la cavité :  $L = 1.0m$
- Hauteur de la cavité :  $h = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'air :  $\rho = 1.2kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'air :  $c = 340m/s$

Note : Pour réaliser ce couplage, nous utiliserons des éléments poutres et cavité ayant autant de degrés de liberté afin de faciliter le calcul des matrices de couplage. Comme un élément poutre 1D en flexion à 4 DL et nous prendrons un élément rectangulaire pour la cavité. Ce pourquoi, nous utiliserons des éléments rectangulaires pour mailler la cavité (à la différence de la cavité 2D qui utilisait un maillage triangulaire).

### 3.2.1 Équations de la structure

La formulation faible pour une poutre en flexion pure s'écrit ( $\mathbf{n}$  représente les fonctions de forme) :

$$-w^2 \int_{\Omega_s} \rho_p v(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_s} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV - \int_{\partial\Omega_s} \sigma_{xx} \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

A laquelle, nous ajouterons la relation de couplage avec la structure :

$$\sigma_{xx} \vec{n} = p \vec{n}$$

et la condition limite (encastree en  $x = 0$  et en  $x = L$ ) :

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, v(L) = 0 \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0,L} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=0,L} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right|_{x=0,L} &= 0 \end{aligned}$$

Pour finalement obtenir la formulation faible de la poutre :

$$-w^2 \int_{\Omega_s} \rho_p v(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_s} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV - \int_{\partial\Omega_s} p \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

Nous allons utiliser une interpolation d'ordre 1 avec les fonctions de formes suivantes afin de résoudre le problème par éléments finis :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{L_e^2} + 2 \frac{x^3}{L_e^3} \\ N_2(x) &= x \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \\ N_3(x) &= \frac{x^2}{L_e^2} \left(3 - 2 \frac{x}{L_e}\right) \\ N_4(x) &= \frac{x^2}{L_e} \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) \end{aligned}$$

Afin d'avoir sur un élément, l'interpolation du déplacement :

$$v(x) = N_1(x)v_1^e + N_2(x)\psi_1^e + N_3(x)v_2^e + N_4(x)\psi_2^e$$

En écriture vectorielle,  $v(x)$  s'écrit :

$$v(x) = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix}$$

Nous permettant de discrétiser la formulation faible :

$$\begin{aligned}
0 &= -w^2 \int_{\Omega_s} \rho_p v(x) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_s} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV - \int_{\partial\Omega_s} p \vec{n} \mathbf{n} dS \\
0 &= -w^2 \sum_{i=1}^{Ns} \frac{\rho_s S dx}{420} \mathcal{M}_e^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{Ns} \frac{EI}{dx^3} \mathcal{K}_e^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^M \mathcal{C}_e^{s(k)} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } \mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} 156 & 22dx & 54 & -13dx \\ 22dx & 4dx^2 & 13dx & -3dx^2 \\ 54 & 13dx & 156 & -22dx \\ -13dx & -3dx^2 & -22dx & 4dx^2 \end{pmatrix}, \mathcal{K}_e = \begin{pmatrix} 12 & 6dx & -12 & 6dx \\ 6dx & 4dx^2 & -6dx & 2dx^2 \\ -12 & -6dx & 12 & -6dx \\ 6dx & 2dx^2 & -6dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{C}_e^s = \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1 N_1 dx & \int_0^{dx} H_2 N_1 dx & \int_0^{dx} H_3 N_1 dx & \int_0^{dx} H_4 N_1 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_2 dx & \int_0^{dx} H_3 N_2 dx & \int_0^{dx} H_4 N_2 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & \int_0^{dx} H_3 N_3 dx & \int_0^{dx} H_4 N_3 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_4 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx & \int_0^{dx} H_3 N_4 dx & \int_0^{dx} H_4 N_4 dx \end{pmatrix}$$

Avec  $\mathcal{C}_e^s$  calculée tel que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_e^s &= \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_2 dx & \int_0^{dx} H_3 N_2 dx & \int_0^{dx} H_4 N_2 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & \int_0^{dx} H_3 N_3 dx & \int_0^{dx} H_4 N_3 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_4 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx & \int_0^{dx} H_3 N_4 dx & \int_0^{dx} H_4 N_4 dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1(x, L_y) N_1(x) dx & \int_0^{dx} H_2(x, L_y) N_1(x) dx & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_1(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_1(x) dx \\ \int_0^{dx} H_1(x, L_y) N_2(x) dx & \int_0^{dx} H_2(x, L_y) N_2(x) dx & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_2(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_2(x) dx \\ \int_0^{dx} H_1(x, L_y) N_3(x) dx & \int_0^{dx} H_2(x, L_y) N_3(x) dx & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_3(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_3(x) dx \\ \int_0^{dx} H_1(x, L_y) N_4(x) dx & \int_0^{dx} H_2(x, L_y) N_4(x) dx & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_4(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_4(x) dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_1(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_1(x) dx \\ 0 & 0 & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_2(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_2(x) dx \\ 0 & 0 & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_3(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_3(x) dx \\ 0 & 0 & \int_0^{dx} H_3(x, L_y) N_4(x) dx & \int_0^{dx} H_4(x, L_y) N_4(x) dx \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Où les fonctions  $H_i$  sont les fonctions de formes pour les éléments de la cavité :

$$\begin{cases} H_1(x, y) = \frac{(x-x_3)(y-y_3)}{(x_1-x_3)(y_1-y_3)} \\ H_2(x, y) = \frac{(x-x_4)(y-y_4)}{(x_2-x_4)(y_2-y_4)} \\ H_3(x, y) = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_3-x_1)(y_3-y_1)} \\ H_4(x, y) = \frac{(x-x_2)(y-y_2)}{(x_4-x_2)(y_4-y_2)} \end{cases}$$

### 3.2.2 Équations du fluide

Nous utilisons l'équation d'Helmutz et les conditions limites (et relation de couplage) suivantes :

$$-\frac{w}{c^2}p - \Delta p = 0$$

avec

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=0} = 0, \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{x=0, L_x} = 0, \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y=L_y} \vec{n} = w^2 \rho_f v \vec{n}$$

pour obtenir la formulation faible du problème :

$$-w^2 \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} p(x, y) \mathbf{n} dV + \int_{\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} dV - \int_{\partial \Omega_f} w^2 \rho_f v \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

Pour la discrétisation en éléments finis, nous allons interpoler la pression sur un élément quadrangle comme ci-dessous :

$$p(x, y) = p_1^e H_1(x, y) + p_2^e H_2(x, y) + p_3^e H_3(x, y) + p_4^e H_4(x, y)$$

avec des fonctions de formes d'ordre 1 :

$$\begin{cases} H_1(x, y) = \frac{(x-x_3)(y-y_3)}{(x_1-x_3)(y_1-y_3)} \\ H_2(x, y) = \frac{(x-x_4)(y-y_4)}{(x_2-x_4)(y_2-y_4)} \\ H_3(x, y) = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_3-x_1)(y_3-y_1)} \\ H_4(x, y) = \frac{(x-x_2)(y-y_2)}{(x_4-x_2)(y_4-y_2)} \end{cases}$$

En écriture vectorielle, nous pouvons écrire

$$\omega = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}$$

Après avoir injecter ces expressions dans la formulation faible, nous avons le système suivant (avec  $Ne = N_s N_f$ ) :

$$\sum_{k=1}^{Ne} \left( K_x^{(k)} + K_y^{(k)} \right) \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)} - \frac{w^2}{c^2} \sum_{k=1}^{Ne} \mathcal{M}^{(k)} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)} - w^2 \rho_f \sum_{m=1}^M \mathcal{C}_e^{f(m)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix}^{(m)} = 0$$

avec

$$\mathcal{K}_x^{(k)} = \begin{pmatrix} \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_4}{\partial x} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial x} \frac{\partial H_4}{\partial x} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial x} \frac{\partial H_4}{\partial x} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial x} \frac{\partial H_3}{\partial x} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial x} \frac{\partial H_4}{\partial x} dx dy \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K}_y^{(k)} = \begin{pmatrix} \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial H_2}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial H_3}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{\partial H_4}{\partial y} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial H_2}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial H_3}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial H_4}{\partial y} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial y} \frac{\partial H_2}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial y} \frac{\partial H_3}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_3}{\partial y} \frac{\partial H_4}{\partial y} dx dy \\ \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{\partial H_2}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{\partial H_3}{\partial y} dx dy & \int \int_{\Omega_f} \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{\partial H_4}{\partial y} dx dy \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega_k} H_1^2 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_1 H_2 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_1 H_3 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_1 H_4 d\Omega \\ \int_{\Omega_k} H_1 H_2 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_2^2 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_2 H_3 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_2 H_4 d\Omega \\ \int_{\Omega_k} H_1 H_3 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_2 H_3 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_3^2 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_3 H_4 d\Omega \\ \int_{\Omega_k} H_1 H_4 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_2 H_4 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_3 H_4 d\Omega & \int_{\Omega_k} H_4^2 d\Omega \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_e^f = {}^t \mathcal{C}_e^s = \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1 N_1 dx & \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_1 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_2 N_1 dx & \int_0^{dx} H_2 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_3 N_1 dx & \int_0^{dx} H_3 N_2 dx & \int_0^{dx} H_3 N_3 dx & \int_0^{dx} H_3 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_4 N_1 dx & \int_0^{dx} H_4 N_2 dx & \int_0^{dx} H_4 N_3 dx & \int_0^{dx} H_4 N_4 dx \end{pmatrix}$$

Comme nous maillons avec un maillage uniforme, nous avons :

$$\mathcal{M}^{(k)} = \frac{dxdy}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K}^{(k)} = \mathcal{K}_y^{(k)} + \mathcal{K}_x^{(k)} = \frac{1}{6dxdy} \begin{pmatrix} 2dx^2 + 2dy^2 & dx^2 - 2dy^2 & -dx^2 - dy^2 & -2dx^2 + dy^2 \\ dx^2 - 2dy^2 & 2dx^2 + 2dy^2 & -2dx^2 + dy^2 & -dx^2 - dy^2 \\ -dx^2 - dy^2 & -2dx^2 + dy^2 & 2dx^2 + 2dy^2 & dx^2 - 2dy^2 \\ -2dx^2 + dy^2 & -dx^2 - dy^2 & dx^2 - 2dy^2 & 2dx^2 + 2dy^2 \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Assemblage du système et Résolution

L'assemblage du système est identique à celui de la partie précédente, c'est-à-dire :

$$0 = \det(-w^2 \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_s & \mathcal{O} \\ \mathcal{C}^t & \mathcal{M}_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_s & \mathcal{C} \\ \mathcal{O} & \mathcal{K}_p \end{pmatrix})$$

Avec 10 éléments pour la structure et 80 éléments pour la cavité, nous obtenons les fréquences et déformées modales suivantes :

Mode	Fréquence EF (Hz)	Fréquence de référence (Hz)
1	40.6	74.5 (poutre)
2	175.6	170 (cavité)
3	349.3	340 (cavité)
4	355.5	340 (cavité)
5	394.4	380 (cavité), 402.7 (poutre)
6	496.7	480 (cavité)
7	535.0	...
8	640.9	...
9	730.2	...
10	736.6	...
11	749.8	...

TABLE 16 – Fréquences de résonance par EF

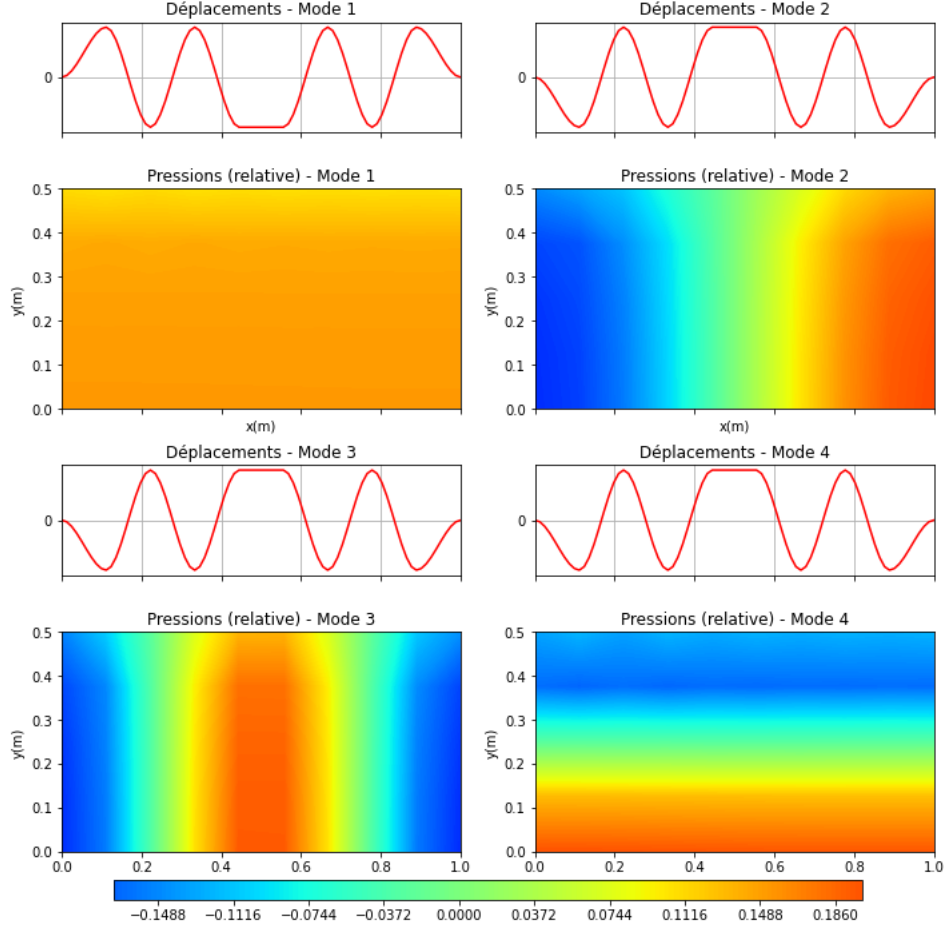


TABLE 17 – Déformées modales

Dans le tableau des fréquences propres 16, malgré qu'elles soient significativement différentes de celles des sous-systèmes (poutre et cavité seule), nous avons pu assimiler les fréquences de la structure et du fluide à celles du système couplé. La première fréquence est de l'ordre de celle de la poutre en flexion ce qui est cohérent. Nous observons toujours une convergence de fréquences de résonances (Figure 18), cependant pour le mode 1 et 2, elle est relativement rapide passée respectivement,  $N = 60$  et  $N = 70$ . Cela pourrait nous alerter sur la véracité des résultats, cependant le nombre d'éléments étant faible, donc la précision des fréquences restent faibles. Et lorsque  $N$  augmente, les premières fréquences convergent toujours en premier et plus rapidement que les autres. De plus, les déformées modales de la Figure 17 respectent la symétrie du problème (les modes affichés sont symétriques). Nous pouvons également remarquer le couplage affectant les déformées modales, restant semblables à celles des sous-systèmes seuls.

*Remarque 2.* Nous observons un "plateau" sur les déformées modales de la poutre, en réalité, il n'y en a pas. C'est un défaut qui apparaît en post-traitement de données. La fonction *eig* renvoie les vecteurs propres normés à 1 et lorsque nous le séparons en deux vecteurs propres : la déformée modale de la structure et de la poutre, ces derniers ne sont plus normés à 1. Nous avons donc artificiellement imposés les déplacements ( $v_i$ ) à 1 sans modifier les moments ( $\phi_i$ ) (sous peine de les fausser) d'où le problème. Et lors de la reconstruction de la déformée modale avec les fonction de forme, nous avons ce plateau.

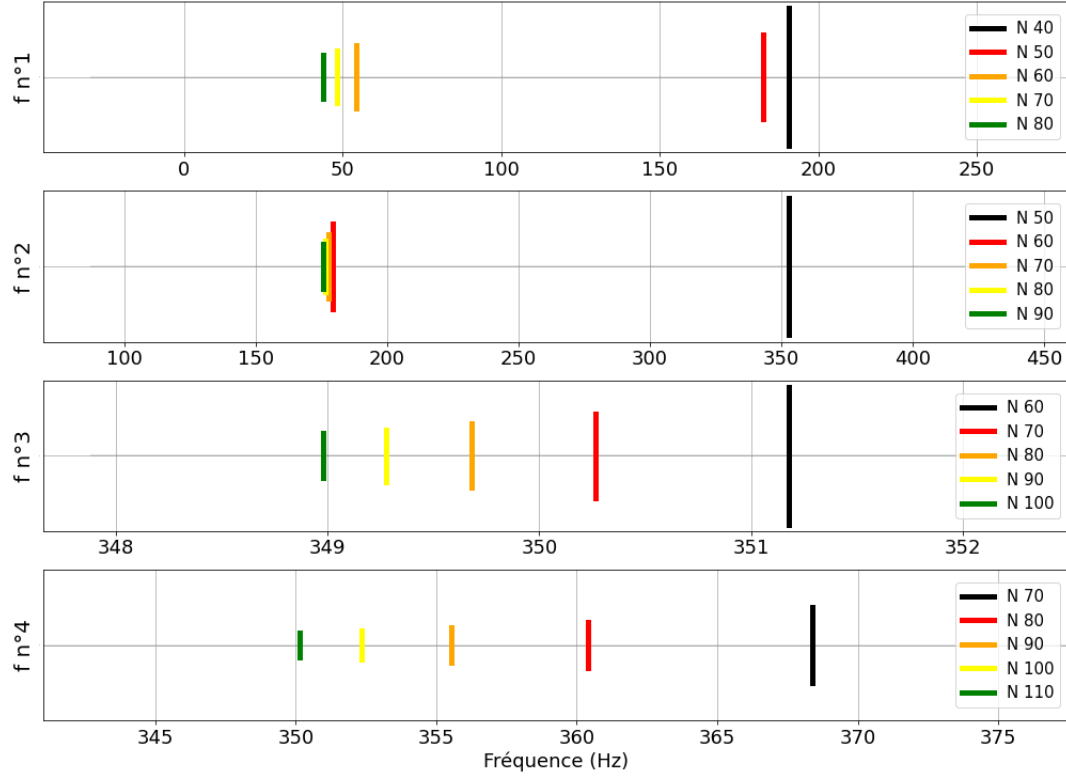


TABLE 18 – Graphiques de convergence des fréquences



### 3.3 Couplage Eau avec surface libre et poutre en flexion

Nous allons étudier le couplage d'une poutre en flexion et d'une cavité d'air en 2D :

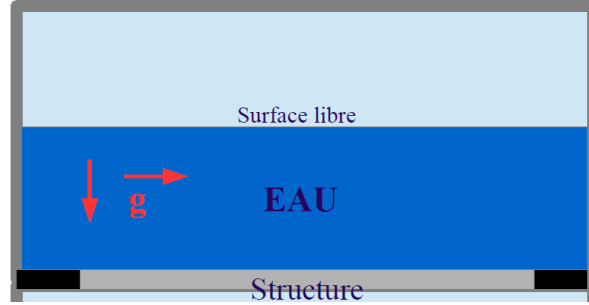


FIGURE 15 – Schéma du système couplé fluide/structure

Caractéristiques de la poutre :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 1m$
- Longueur d'un élément :  $dx_s = \frac{L}{N_s}$  avec  $N_s$  le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Epaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Moment quadratique d'une section carré :  $I_z = \frac{bh^3}{12}$
- Masse volumique :  $\rho_p = 7800kg.m^{-3}$
- Section :  $S_L = bh$

Caractéristiques de la cavité :

- Longueur de la cavité :  $L = 1.0m$
- Hauteur remplissage de la cavité :  $h = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1000kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'eau :  $c = 1482m/s$

Note : Pour réaliser ce couplage, nous utiliserons des éléments poutres et ballotement ayant autant de degrés de liberté afin de faciliter le calcul des matrices de couplage. Comme un élément poutre 1D en flexion à 4 DL et nous prendrons un élément rectangulaire pour du ballotement. Ce pourquoi, nous utiliserons des éléments rectangulaires pour mailler la cavité (à la différence du ballotement qui utilisait un maillage triangulaire).

Pour résoudre ce problème par éléments finis, nous n'avons pas besoin de réécrire la formulation faible du problème, l'équation de la structure est identique à la partie précédente à savoir :

$$0 = -w^2 \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\rho_s S dx}{420} \mathcal{M}^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix}^{(i)} + \sum_{i=1}^{Ne} \frac{EI}{dx^3} \mathcal{K}^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix}^{(i)} - \sum_{k=1}^M \mathcal{C}_e^{s(k)} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)}$$

avec  $\mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} 156 & 22dx & 54 & -13dx \\ 22dx & 4dx^2 & 13dx & -3dx^2 \\ 54 & 13dx & 156 & -22dx \\ -13dx & -3dx^2 & -22dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{K}_e = \begin{pmatrix} 12 & 6dx & -12 & 6dx \\ 6dx & 4dx^2 & -6dx & 2dx^2 \\ -12 & -6dx & 12 & -6dx \\ 6dx & 2dx^2 & -6dx & 4dx^2 \end{pmatrix}$

et

$$\mathcal{C}_e^s = \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1 N_1 dx & \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_1 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & \int_0^{dx} H_3 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx \\ \int_0^{dx} H_1 N_4 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx & \int_0^{dx} H_4 N_4 dx \end{pmatrix}$$

Avec  $\mathcal{C}_e^s$  calculée tel que :

$$\mathcal{C}_e^s = \begin{pmatrix} \int_0^{dx} H_1 N_1 dx & \int_0^{dx} H_2 N_1 dx & 0 & 0 \\ \int_0^{dx} H_1 N_2 dx & \int_0^{dx} H_2 N_2 dx & 0 & 0 \\ \int_0^{dx} H_1 N_3 dx & \int_0^{dx} H_2 N_3 dx & 0 & 0 \\ \int_0^{dx} H_1 N_4 dx & \int_0^{dx} H_2 N_4 dx & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation du fluide, quant à elle, est différente. Il suffira d'ajouter la matrice de couplage au système matriciel de l'équation du ballottement. Nous allons démontrer succinctement le cheminement :

La formulation faible est la suivante :

$$-w^2 \int_{\partial\Omega_{f_0}} \frac{1}{g} p(x, y) \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y} dV - \int_{\partial\Omega_f} w^2 \rho_f v \vec{n} \mathbf{n} dS = 0$$

Sa discrétisation nous conduit au système matriciel ci-dessous, où nous conservons les notations des parties précédentes (où  $p_{sk}^e$  sont les éléments sur la surface libre, et  $Ne = N_s N_f$ ) :

$$\sum_{k=1}^{Ne} \left( K_x^{(k)} + K_y^{(k)} \right) \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)} - \frac{w^2}{g} \sum_{k=1}^{Ne} \mathcal{M}^{(k)} \begin{pmatrix} p_{s1}^e \\ p_{s2}^e \end{pmatrix}^{(k)} - w^2 \rho_f \sum_{m=1}^M \mathcal{C}_e^{f(m)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix}^{(m)} = 0$$

Il suffit ensuite de résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$0 = \det(-w^2 \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_s & \mathcal{O} \\ {}_t\mathcal{C} & \mathcal{M}_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_s & \mathcal{C} \\ \mathcal{O} & \mathcal{K}_p \end{pmatrix})$$

Avec 10 éléments pour la structure et 50 éléments pour la cavité, nous obtenons les fréquences et les déformées modales suivantes :

Mode	Fréquence EF (Hz)
1	0.4
2	0.88
3	1.28
4	1.61
5	1.93
6	2.65
7	3.0
8	3.3
9	3.41

TABLE 19 – Fréquences de résonance

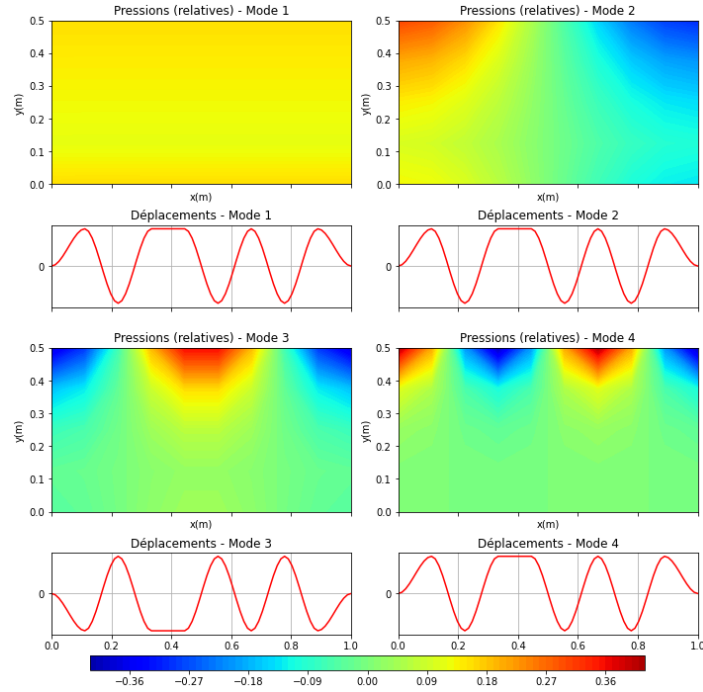


TABLE 20 – Déformées modales

Sur ce couplage, nous remarquons que les premières fréquences de résonances (Tableau 21) sont légèrement supérieures à celles du ballotement seul (sauf la première). Par ailleurs, les modes associés sont relativement similaires à ceux du ballotement. Nous aurions pu faire varier la hauteur de remplissage de la cavité afin de mettre en lumière ces effets sur les fréquences de résonances mais par manque de temps, nous nous contenterons de ceux-ci.

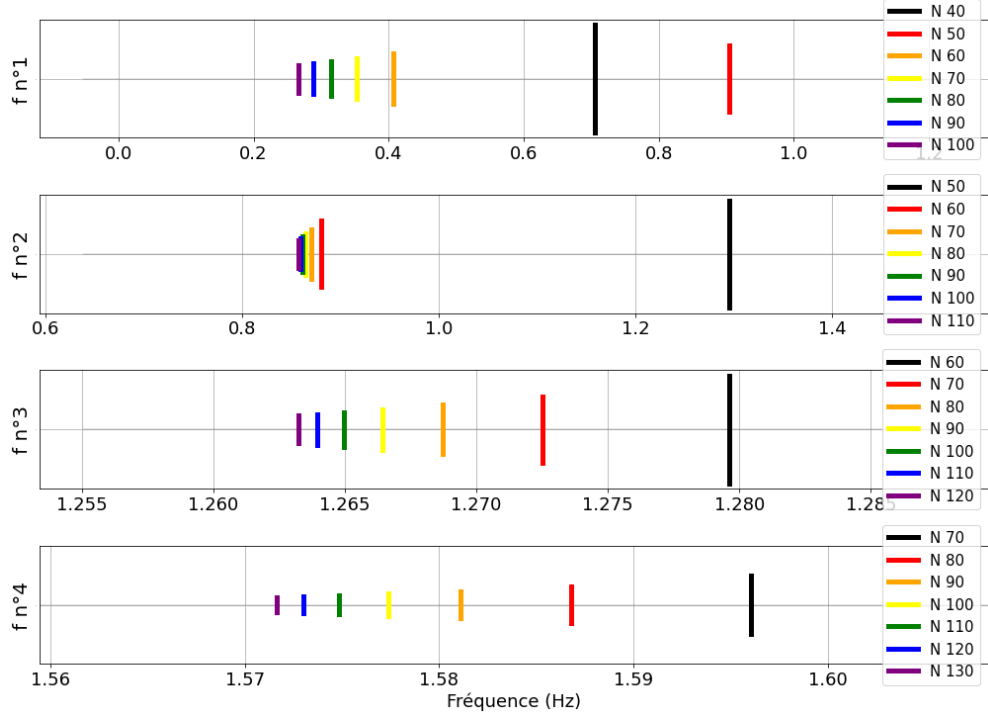


TABLE 21 – Graphiques de convergence des fréquences

Comme pour les simulations précédentes, l'hypothèse des poutres imposent de ne pas dépasser 10 éléments pour la poutre, nous limitant dans l'exploitation des résultats. En ce qui concerne la convergence des fréquences (Figure 21), elle reste bonne mise à part pour  $f^\circ 1$ , qui converge à partir de  $N = 60$ . Cette anomalie est certainement dû à notre formulation  $(u, p)$  (et la fonction  $eig$ ) qui, sur peu d'éléments, donne des résultats imprécis. Cela ne remet pas en cause nos résultats.

En raison du plateau sur les déformées modales de la poutre, il est difficile d'interpréter les déformées modales (Figure 20). Nous pouvons simplement remarquer que sur le mode 1, la déformée modale du ballottement n'est pas identique à celle du ballottement seul (nous la retrouvons sur le mode 2). Par ailleurs, nous l'avions déjà observer sur le mode 1 de la cavité de la partie précédente.

### 3.4 Couplage cavité 2D/poutre en flexion/eau avec surface en eau libre

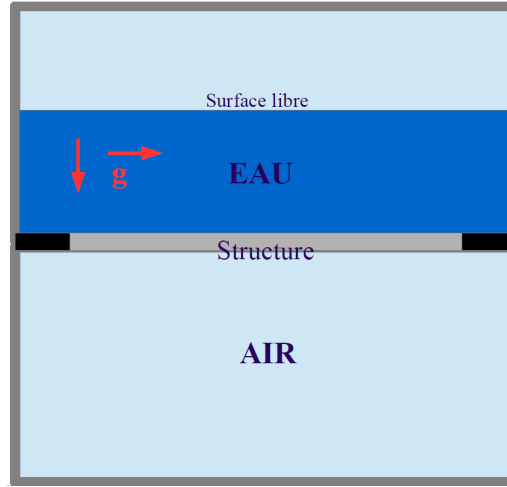


FIGURE 16 – Schéma du système couplé fluide/structure

Caractéristiques de la poutre :

- Module d'Young :  $E = 205 \times 10^9 Pa$
- Longueur de la poutre :  $L = 1m$
- Longueur d'un élément :  $dx_s = \frac{L}{N_s}$  avec  $N_s$  le nombre d'éléments
- Largeur de la poutre :  $b = 0.01m$
- Épaisseur de la poutre :  $h = 0.01m$
- Moment quadratique d'une section carré :  $I_z = \frac{bh^3}{12}$
- Masse volumique :  $\rho_p = 7800kg.m^{-3}$
- Section :  $S_L = bh$

Caractéristiques de la cavité d'air :

- Longueur de la cavité :  $L = 1.0m$
- Hauteur de la cavité :  $h = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'air :  $\rho = 1.2kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'air :  $c = 340m/s$

Caractéristiques d'eau avec surface libre :

- Longueur de la cavité :  $L = 1.0m$
- Hauteur remplissage de la cavité :  $h = 0.5m$
- Longueur d'un élément :  $dx_f = \frac{L}{N_f}$  avec  $N_f$  le nombre d'éléments
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1000kg.m^{-3}$
- Célérité du son dans l'air :  $c = 1482m/s$
- Accélération de pesanteur :  $9.81m/s^2$

Note : Pour les mêmes raisons que les deux parties précédentes, nous utiliserons des éléments quadrangulaires pour faciliter le calcul des matrices de couplage.

En réutilisant les équations que nous avons développées dans les parties précédentes, nous allons construire le système global :

Équation de la cavité 2D :

$$\sum_{k=1}^{Ne} \left( K_x^{(k)} + K_y^{(k)} \right) \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)} - \frac{w^2}{cg} \sum_{k=1}^{Ne} \mathcal{M}^{(k)} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^k - w^2 \rho_f \sum_{m=1}^M \mathcal{C}^{(m)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix}^k = 0$$

Équation de la poutre :

$$0 = -w^2 \sum_{i=1}^{Ne} \frac{\rho_s S dx}{420} \mathcal{M}^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{Ne} \frac{EI}{dx^3} \mathcal{K}^{(i)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_1^e \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^M \mathcal{C}^{(k)} \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}$$

Équations du ballottement :

$$\sum_{k=1}^{Ne} \left( K_x^{(k)} + K_y^{(k)} \right) \begin{pmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \end{pmatrix}^{(k)} - \frac{w^2}{g} \sum_{k=1}^{Ne} \mathcal{M}^{(k)} \begin{pmatrix} p_{s1}^e \\ p_{s2}^e \end{pmatrix}^k - w^2 \rho_f \sum_{m=1}^M \mathcal{C}^{(m)} \begin{pmatrix} v_1^e \\ \psi_1^e \\ v_2^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix}^{(k)} = 0$$

Le système global assemblé est de la forme suivante :

$$-w^2 \begin{pmatrix} \mathcal{M}_f & \mathcal{C}_{f/s} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{M}_s & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{C}_{s/f} & \mathcal{M}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ V/\psi \\ P_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{K}_f & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ {}^t\mathcal{C}_{f/s} & \mathcal{K}_s & {}^t\mathcal{C}_{s/f} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{K}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ V/\psi \\ P_b \end{pmatrix} = 0$$

Pour trouver les fréquences de résonance du système, il suffit de résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\det \left( -w^2 \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_f & \mathcal{C}_{f/s} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{M}_s & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{C}_{s/f} & \mathcal{M}_b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_f & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ {}^t\mathcal{C}_{f/s} & \mathcal{K}_s & {}^t\mathcal{C}_{s/f} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{K}_b \end{pmatrix} \right) = 0$$

Avec 10 éléments pour la structure et 100 éléments pour la cavité et le ballottement, nous obtenons les fréquences suivantes :

Mode	Fréquence EF ( $Hz$ )
1	0.85
2	1.26
3	1.35
4	1.57
5	1.86
6	2.14
7	2.41
8	2.67
9	2.86

TABLE 22 – Fréquences de résonance

Avec les déformées modales :

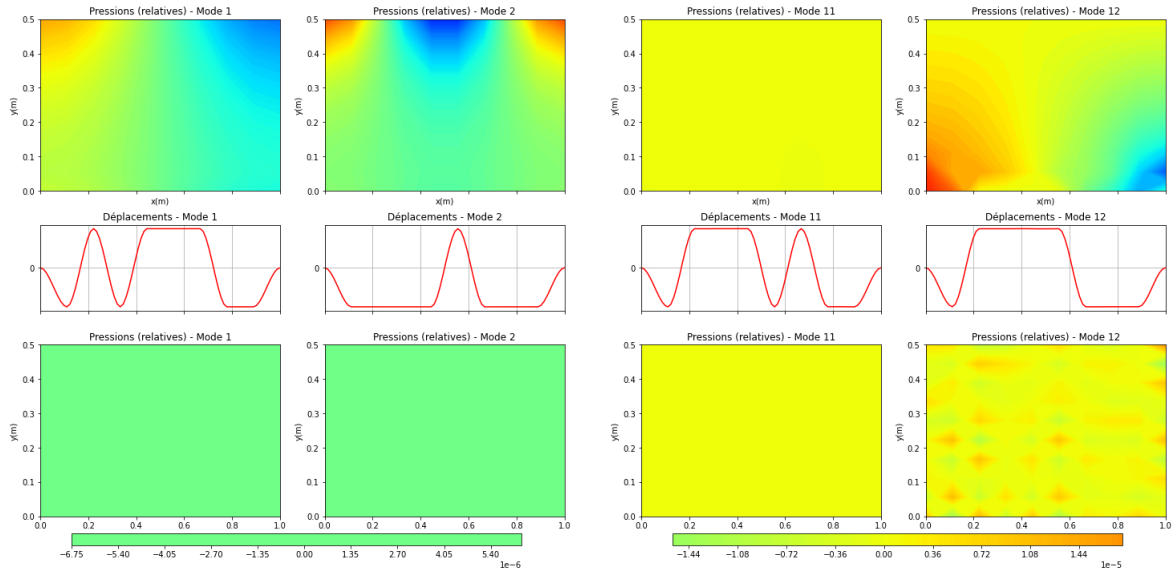


TABLE 23 – Déformées modales des modes 1 & 2 et 11 & 12

En observant les premières fréquences propres (Tableau 3.4), nous reconnaissons les fréquences du ballottement seul (légèrement supérieures). Cependant, nous ne retrouvons pas la première fréquence du couplage poutre/ballottement ( $0.4 Hz$ ). Hormis, ce petit détail, nous avons toujours une convergence des fréquences par valeur supérieur (Figure 26) sauf pour la fréquence 3 du tableau 3.4. Elle décroît lorsque le nombre d'éléments augmente et ne semble pas converger :

Fréquences <sup>1</sup>	Nombre d'éléments			
	210	460	810	1810
1	0.85	0.85	0.85	0.72
2	1.26	1.05	0.89	0.85
3	1.35	1.26	1.26	1.26
4	1.57	1.57	1.57	1.57

TABLE 25 – Fréquences de résonance

1. classées dans l'ordre croissant

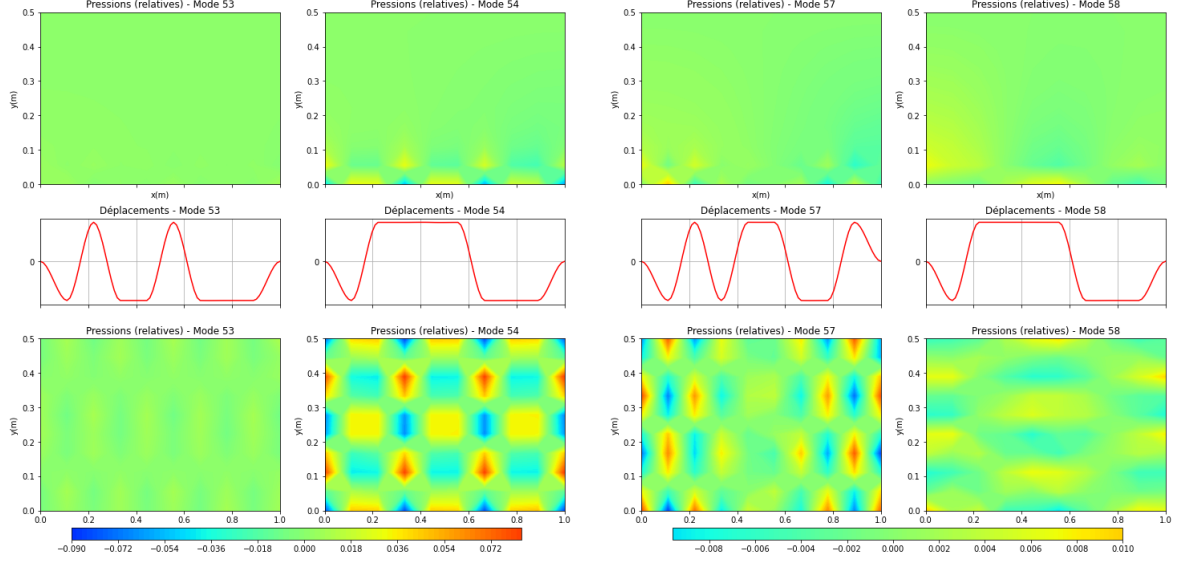


TABLE 24 – Déformées modales des modes 25 & 26 et 57 & 58

Il est difficile de connaître l'origine de cette anomalie, cela peut aussi bien être une erreur numérique lié au solveur du problème aux valeurs propres ou aux calculs des matrices de couplage utilisant le calcul formel. Ceci dit, nous n'excluons pas l'hypothèse de la présence d'une erreur dans notre formulation éléments finis.

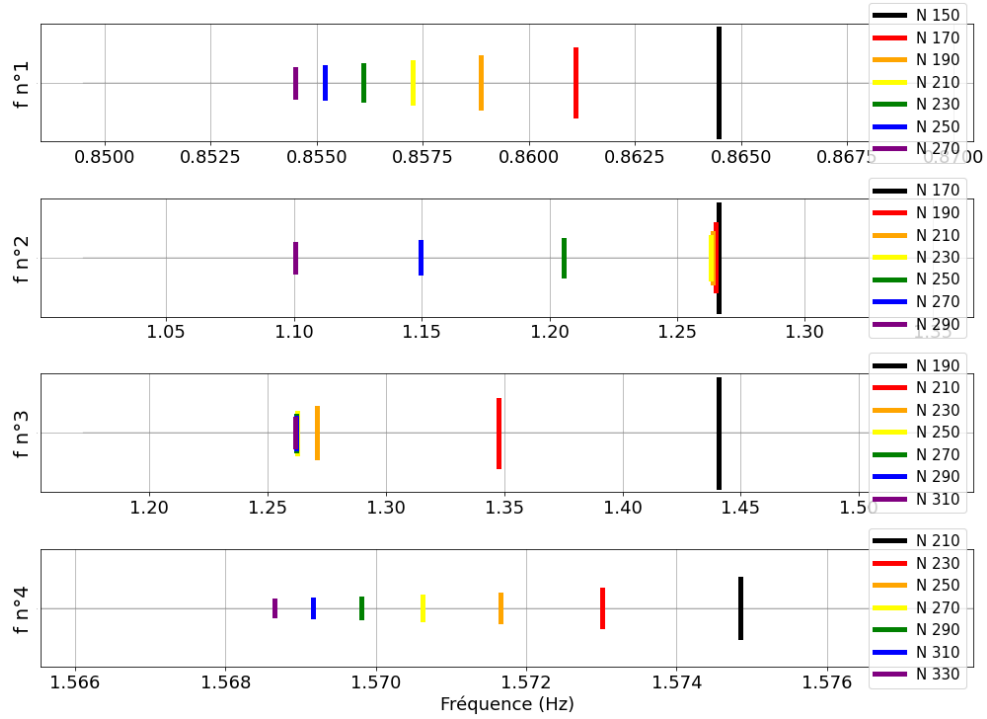


TABLE 26 – Graphiques de convergence des fréquences



Nous avons quand même tracé quelques modes (Figures 23, 24) qui semblent cohérents au vue des déformées modales de chacun des sous-systèmes alors que nos fréquences propres ne sont pas valides.

Faute de temps, nous n'avons pas eu le temps de pousser le debuggage plus loin. Dans un premier temps, nous aurions utilisé ANSYS afin de comparer les résultats des premiers systèmes couplés (poutre/cavité 1D, poutre/cavité 2D et poutre/ballottement).

Si les résultats avaient été cohérents, nous aurions poursuivi avec l'analyse modale de ce système. Au vue du comportement de la fréquence 3, nos résultats n'auraient pas été validés donc nous aurions essayé les pistes suivantes :

- Revoir l'assemblage du système
- Valider notre programme sur un cas test
- Utiliser d'autre fonction pour résoudre le système aux valeurs propres
- Condenser les degrés de liberté de la surface libre du ballottement dans le problème aux valeurs propres
- Revoir la formulation éléments finis
- Formuler le problème en  $(u, p, \phi)$

## 4 Conclusion

Dans le cadre de cette étude, nous avons appliqué la méthode d'analyse modale par éléments finis pour examiner le comportement dynamique d'un aquarium rempli d'eau. En utilisant une formulation faible du problème, nous avons mis en évidence le couplage entre l'eau et la structure de l'aquarium. En discrétisant le terme d'interaction Fluide/Structure, nous avons pu l'inclure dans le système matriciel et obtenir des solutions précises pour les fréquences de résonance et les modes de déformation associés à cet aquarium. Ces résultats sont importants pour comprendre les vibrations et les modes de déformation, utiles pour l'optimisation, la conception et la prévention des défaillances structurelles.

Il est important de souligner que le couplage fluide-structure est un phénomène courant dans de nombreux domaines tels que l'aéronautique, l'industrie pétrolière, l'architecture, la conception des navires et des ponts, pour ne citer que quelques exemples. Les effets de ce couplage peuvent être bénéfiques ou nuisibles, en fonction des conditions d'opération. Dans l'aéronautique, par exemple, la capacité de la structure à résister aux vibrations générées par l'interaction avec l'air est essentielle pour garantir la sécurité des passagers et de l'équipage. Dans l'industrie pétrolière, les effets du couplage fluide-structure peuvent entraîner des défaillances de l'équipement, ce qui peut avoir des conséquences financières et environnementales désastreuses. Par conséquent, une compréhension approfondie des phénomènes de couplage fluide-structure est essentielle pour concevoir des structures plus sûres, plus efficaces et plus fiables.

## Références

- [1] Gregory Girault Jean-Marc Cadou Bertille Claude, Laëtitia Duigou. Etude numérique des vibrations d'un fluide contenu dans une cavité visco-élastique par une méthode d'homotopie et de perturbation, May 2013.
- [2] ABBAS Mickaël. *Éléments pour le couplage interaction fluide- structure linéaire avec fluide inerte*. March 2022.
- [3] Emmanuel Foltete Morvan Ouisse. Une méthode de modification des modes complexes couplés en identification modale pour la vérification de la propreté vibroacoustique, 2007.
- [4] Jean-François Sigrist. *Méthode de couplage éléments finis/éléments finis pour l'analyse linéaire de problèmes d'interaction fluide/structure*. April 2009.
- [5] Jean-François Sigrist, Christian Lainé, and Bernard Peseux. Analyse modale d'une structure industrielle avec prise en compte du couplage fluide/structure. <http://dx.doi.org/10.1051/meca :2005067>, 6, September 2005.