Méthodes Numériques Avancées pour la Dynamique des Fluides

Résolution de l'Équation de de Korteweg-de Vries par Méthode Pseudo-Spectrale

Jérémy Archier

Université Claude Bernard Lyon 1

15 Décembre, 2022

Table of Contents

Introduction

"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation." [1]

[1] John Scott Russell (1845)

Table of Contents

Équation

Énoncé de l'équation de Korteweg-de Vries 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}_{terme\ dispersif} + \underbrace{6u\frac{\partial u}{\partial x}}_{terme\ d'advection} = 0 \qquad (1)$$

- Équation aux dérivées partielles non linéaire hyperbolique.
- Modèle mathématique pour les vagues en faible profondeur.
- Les solutions de (1) sont appelées Solitons ou ondes solitaires.

Retour sur la dispersion[2]

[2] Nonlinear PDE Meylan, Lecture 5

Solution exacte

La solution générale de (1) est de la forme[3] :

$$u(x,t) = \frac{\beta}{2} sech^2 \left[\frac{\sqrt{\beta}}{2}(x - \beta t) \right] \tag{2}$$

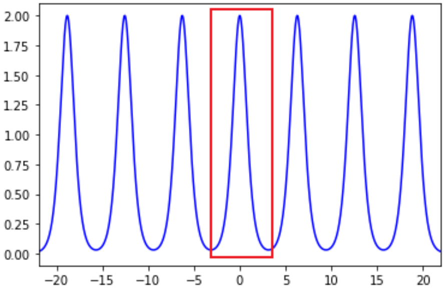
Ainsi, Les ondes solitaires de grande amplitude se déplacent à une vitesse plus élevée que les ondes de petite amplitude.

[3] The Korteweg-de Vries Equation : History, exact Solutions, and graphical Representation, Klaus Brauer, University of Osnabrück, May 2000

Table of Contents

Problème physique

- On considère un mascaret par exemple, on observe un train d'onde sur une très grande distance, ainsi seule la première et la dernière sont impactées par les conditions limites.
- On considère une boite centrée autour d'une onde:



Formulation mathématique du problème

- Équation à résoudre sur $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Condition initiale :

$$u(x, 0) = 2sech^2(x)$$

- Conditions limites périodiques

Méthodes Spectrale de Fourier

- Discrétisation spatiale : Fourier-Galerkin

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} - ij^3 \hat{u}_k + 6ij\hat{w}_k = 0 \quad où \quad \hat{w}_k = TF\left(\frac{u^2}{2}\right) \tag{3}$$

- Discrétisation temporelle : opérateur discret

$$L_h = ik^3 - 6ikW_m \quad où \quad W_m = \max_{x\in[-\pi,\pi]}\left(\frac{u^2}{2}\right) \tag{4}$$

- Valeurs propres (Fourier) :

$$\lambda_k = ik\delta t(k^2 - 6W_m) \tag{5}$$

Paramètre de la simulation

- Paramètres :
  - Nombre de point $N = 64$
  - Pas de temps $\Delta t = 10^{-5}$ s
  - Nombre d'itérations temporelle : $N_t = 200000$

- Choix du schéma d'intégration : AB3 (ou AB/BDE 4)

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\Delta t}{12}\left[23\mathcal{H}(\hat{u}_j^n) - 16\mathcal{H}(\hat{u}_j^{n-1}) + 5\mathcal{H}(\hat{u}_j^{n-2}))\right]$$

$\Rightarrow$ 3 premières itérations à l'aide du schéma d'Euler Explicite

Valeurs propres

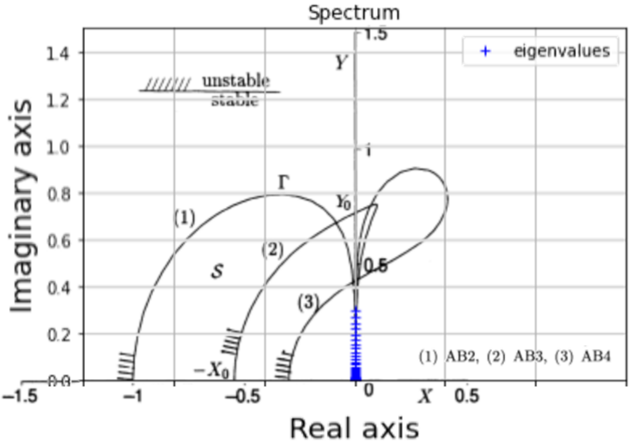


Figure: Domaine de stabilité du schéma AB3 et valeurs propres

Simulation

temps de calcul $\sim$ 1 min

Table of Contents

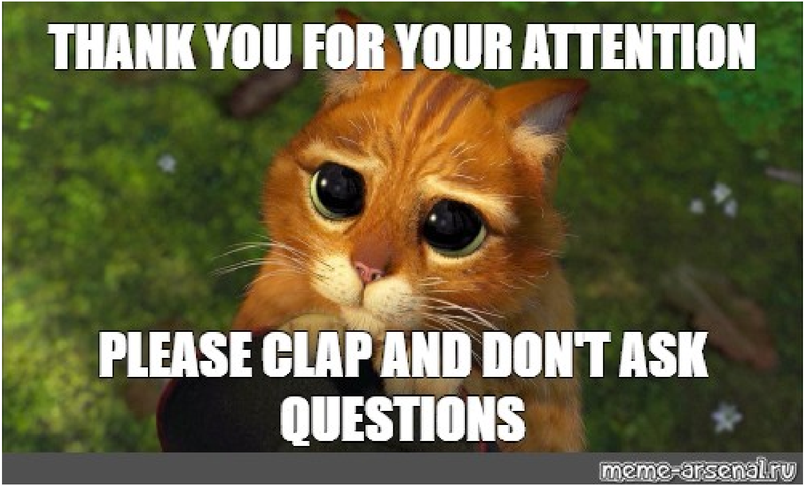
Conclusion & Recommandations

Les méthodes spectrales reposes sur un lourd formalisme mathématique mais permette d'obtenir de très bon résultats même avec peu de points spatiaux. Il est facile de traiter les termes non-linéaire à l'aide des aller-retour dans l'espace de Fourier.

En utilisant des murs réflecteurs aux limites. Cette techniques introduit des forces parasites dans la simulation, pouvant donc introduire un écart supplémentaire (en plus des approximations de simulation utilisées) par rapport au système réel.

Références

1. Nonlinear PDE Meylan, Lecture 5
2. Report on Waves, Published in the York 1844 BA reports, 1845, 311-390
3. The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation, Klaus Brauer, University of Osnabrück, May 2000
4. Peyret, Roger. Spectral methods for incompressible viscous flow. Vol. 148. Springer Science Business Media, 2002.


THANK YOU FOR YOUR ATTENTION
PLEASE CLAP AND DON'T ASK QUESTIONS
meme-arsenal.ru