

BE éléments finis

Compte rendu

UE-PL7013ME

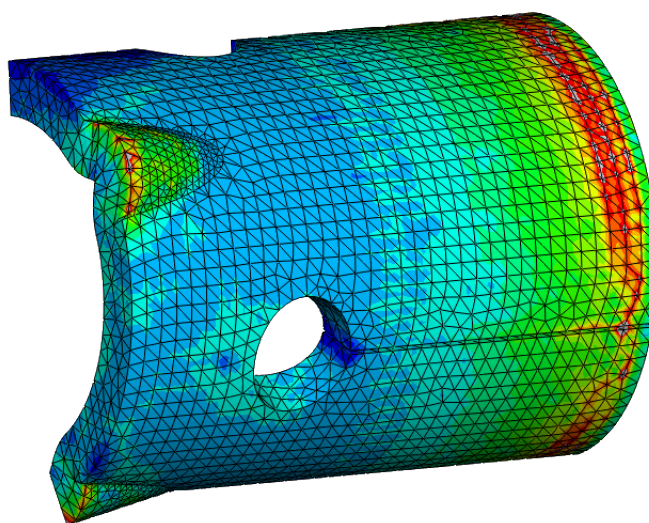


FIGURE 1 – Simulation statique non-linéaire d'une structure en éléments finis

Jérémy Archier
4A MECA
p2019441

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation du problème	2
3	Étude mécanique	3
3.1	Cas 1 : Force ponctuelle	3
3.2	Cas 2 : Force linéique	4
4	Analyse modale	6
5	Conclusion	7
A	Annexe	8
A.1	Étude mécanique structure 3 barres	8
A.2	Analyse modale d'une poutre encastrée	10
A.3	Fonctionnelle d'énergie	12
A.4	Programme	14
A.4.1	Programme étude mécanique câble avec force ponctuelle	14
A.4.2	Programme étude mécanique câble avec force linéique	16
A.4.3	Programme analyse modale câble	18
A.4.4	Programme étude mécanique 3 barres	20
A.4.5	Programme analyse modale poutre en flexion	21

1 Introduction

Nous allons étudier dans ce rapport un câble fortement tendu. Nous allons faire son étude mécanique et son analyse modale lorsque ce dernier sera soumis à différentes sollicitations pour voir leurs influence sur le système.

2 Présentation du problème

On étudie un câble fortement tendu que l'on représente sur la figure ci-dessous :

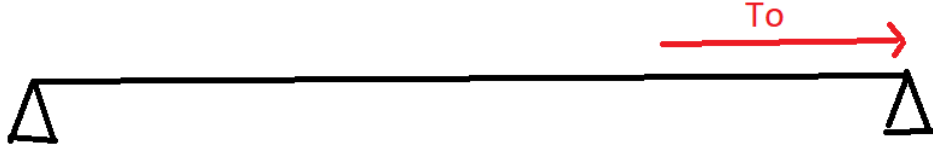


FIGURE 2 – Schéma d'un câble fortement tendu

Hypothèses :

- Petits déplacements
- Matériau isotrope, homogène
- Précontraint de contrainte $\sigma_0 = 10^8 Pa$
- E le module d'Young
- ρ la masse volumique
- S la section du câble
- L la longueur du câble

Le problème est plan et le champ de déplacement cinématiquement admissible est le suivant :

$$\vec{u}(M, t) = \begin{cases} u(M, t) = 0 \\ v(M, t) = v(x, t) \\ w(M, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Objectifs :

- Déterminer les contraintes en tout point
- Déterminer les déplacements
- Faire l'analyse modale

La fonctionnelle d'énergie sur un élément de longueur L^e ci-dessous régissant le problème est établie dans l'annexe A.3 :

$$\frac{1}{2} \frac{\rho S L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_i(x, t) \\ \ddot{v}_j(x, t) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i(x, t) \\ v_j(x, t) \end{Bmatrix} + \int_0^{L^e} p^e \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{pmatrix} \quad (2)$$

3 Étude mécanique

3.1 Cas 1 : Force ponctuelle

On souhaite étudier un câble fortement tendu en appui entre deux supports auquel sera appliqué une force ponctuelle F en $x = \frac{L}{2}$. Pour l'exemple la force F sera équivalente à la poids du câble. Le problème est statique.

La fonctionnelle sur un élément va donc s'écrire dans ces conditions :

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i(x) \\ v_j(x) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nous allons montrer un exemple d'assemblage avec 6 éléments avec les conditions aux limites suivantes dans le système matriciel :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \\ \forall i \in \{2, 3\}, F_i = 0 \\ F_3 = -F(\text{connue}) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ F_7 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Il suffit alors d'inverser les systèmes pour trouver les déplacements et les réactions de liaisons. On trouve ainsi les valeurs suivantes :

$$F_1 = 1\,047\,654\,N \quad \text{et} \quad F_5 = 1\,047\,654\,N$$

On peut tracer la fonction déformée et de contraintes :

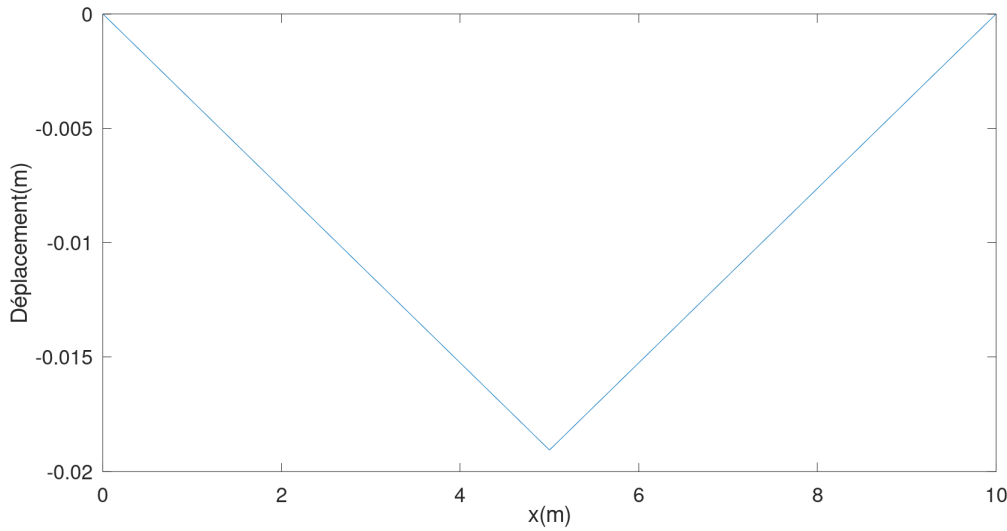


FIGURE 3 – Champ de déplacements d'un câble fortement tendu soumis à une force ponctuelle

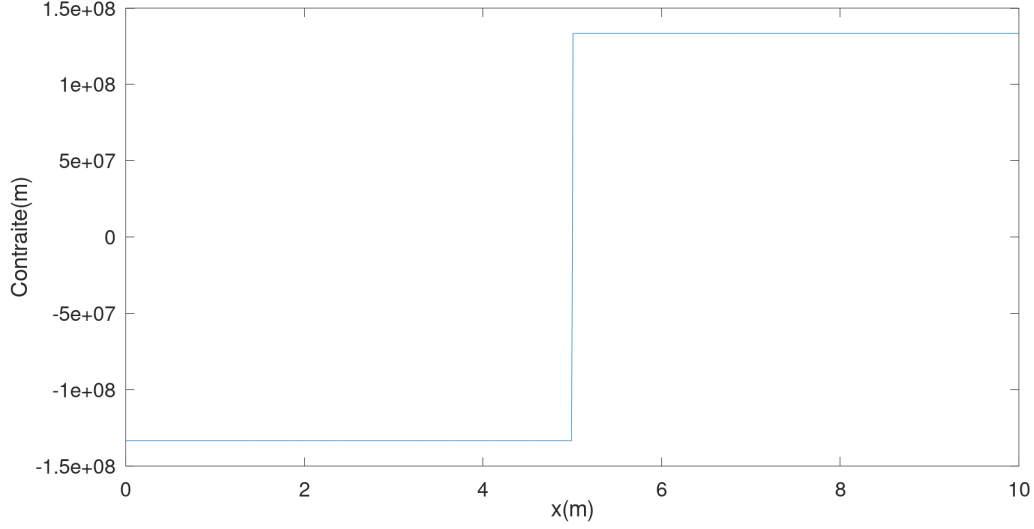


FIGURE 4 – Champ de contrainte d'un câble fortement tendu soumis à une force ponctuelle

3.2 Cas 2 : Force linéique

Nous allons étudier mécaniquement un câble fortement tendu auxquelles on va appliquer une force linéique dont l'intégrale sur $[0, L]$ est égale au poids de la structure.

Le système assemblé pour 6 éléments va s'écrire :

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - \frac{\rho g S L}{7} \\ -\frac{\rho g S L}{7} \\ -\frac{\rho g S L}{7} \\ -\frac{\rho g S L}{7} \\ -\frac{\rho g S L}{7} \\ -\frac{\rho g S L}{7} \\ F_7 - \frac{\rho g S L}{7} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Il suffit alors d'inverser les systèmes pour trouver les déplacements et les réactions de liaisons. On trouve ainsi les valeurs suivantes :

$$F_1 = 3\,142\,107\,N \quad \text{et} \quad F_5 = 3\,142\,107\,N$$

On peut alors représenter les champs de déplacements et de contraintes :

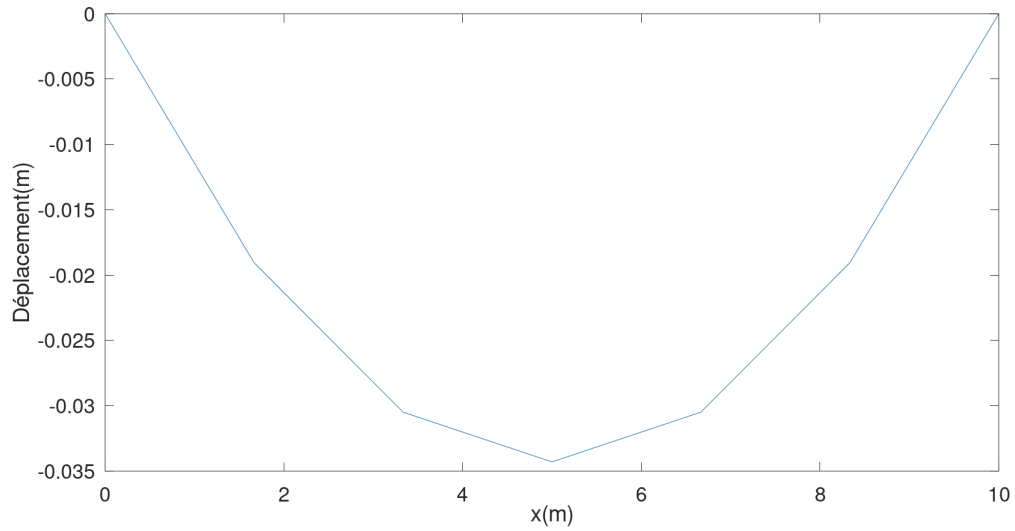


FIGURE 5 – Champ de déplacements d'un câble fortement tendu soumis à une force linéique

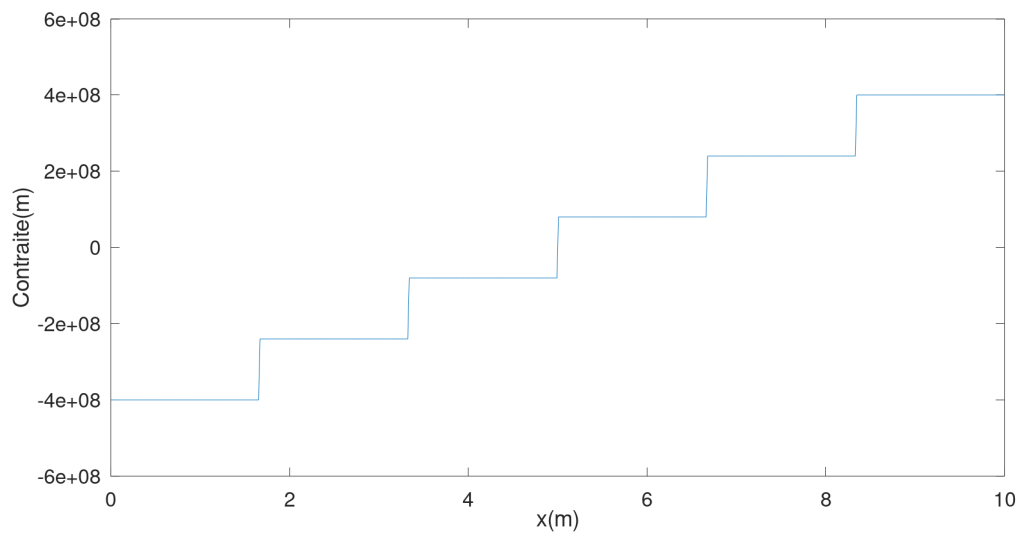


FIGURE 6 – Champ de contrainte d'un câble fortement tendu soumis à une force linéique

4 Analyse modale

Dans cette section, nous allons faire l'analyse modale du câble fortement tendu. C'est à dire faire l'étude des propriétés dynamiques de la structure à partir d'une simulation basée sur l'analyse par éléments finis.

Ainsi la fonctionnelle sur un élément régissant le système s'écrit :

$$\frac{\rho SL^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_i(x, t) \\ \ddot{v}_j(x, t) \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i(x, t) \\ v_j(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Le système assemblé pour n éléments s'écrit :

$$\frac{\rho SL^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1(x, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddot{v}_n(x, t) \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(x, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Les conditions initiales du système sont :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on peut réécrire le système assemblé :

$$\frac{\rho SL^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_i(x, t) \\ \ddot{v}_j(x, t) \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i(x, t) \\ v_j(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Le système assemblé pour n éléments s'écrit :

$$\frac{\rho SL^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v}_1(x, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddot{v}_{n-1}(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2(x, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1}(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ F_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

Nous allons dorénavant chercher les vecteurs propres et les valeurs propres associées au système.

Pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du système, on va additionne les matrices de masse et de raideur assemblé puis on va calculer le déterminant ce qui nous donneras les valeurs propres et on en déduira les vecteurs propres.

On trouve les valeurs propres suivantes pour 6 éléments :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 126\,365 \text{ rad/s}^{-1} & \omega_2 &= 471\,323 \text{ rad/s}^{-1} & \omega_3 &= 942\,545 \text{ rad/s}^{-1} \\ \omega_4 &= 1\,413\,767 \text{ rad/s}^{-1} & \omega_5 &= 1\,758\,725 \text{ rad/s}^{-1} \end{aligned}$$

On peut donc tracer les fonctions déformées modales :

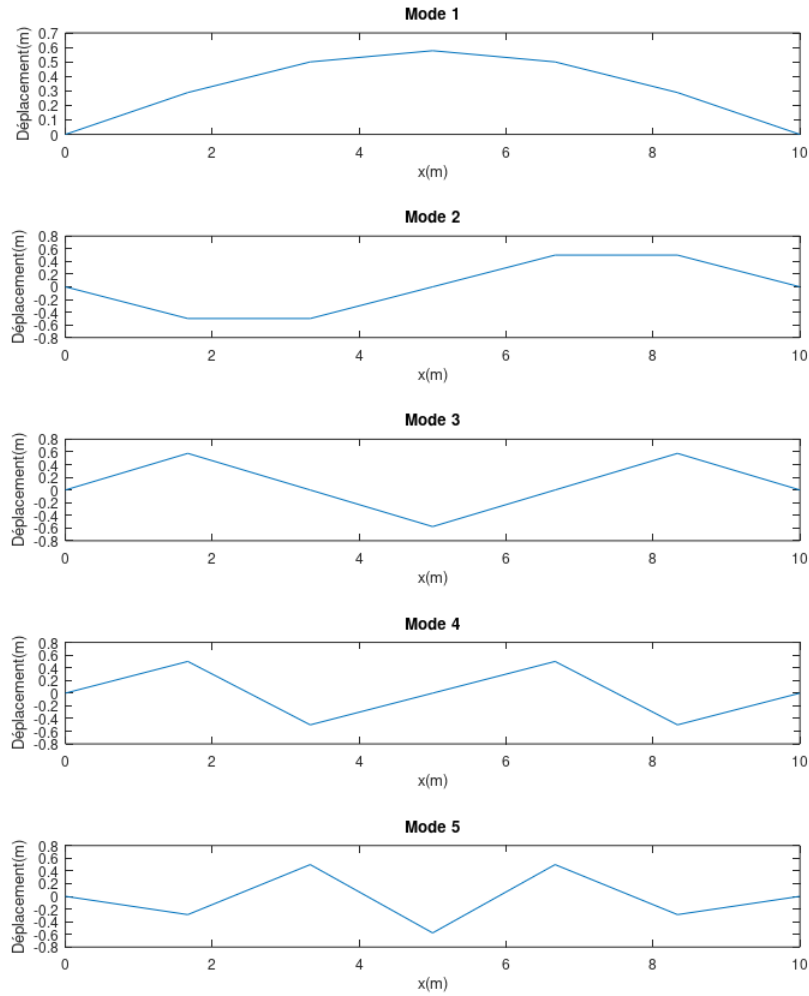


FIGURE 7 – Fonctions déformée modale pour le câble fortement tendu

5 Conclusion

La méthodes des éléments finis nous a permise de déterminer les champs de déplacement et de contraintes pour différentes forces appliquées au câble fortement tendu. On a également été capable d'en faire l'analyse modale pour trouver les valeurs propres et tracer les fonctions déformées modales. Tout cela ayant été possible grâce a une approche énergétique afin d'implémenter les différents programmes.

A Annexe

A.1 Étude mécanique structure 3 barres

On étudie un système 3 barres que l'on représente sur la figure ci-dessous :

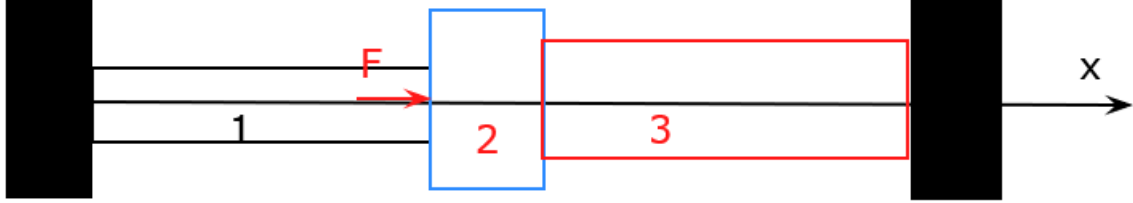


FIGURE 8 – Schéma de la structure à 3 barres

Hypothèses :

- Petits déplacements
- Matériau isotrope, homogène
- Force appliquée $F = 100$ N

Barre 1

$$\begin{aligned} E_1 &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ S_1 &= 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ L_1 &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Barre 2

$$\begin{aligned} E_2 &= 7,0 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \\ S_2 &= 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ L_2 &= 0,25 \text{ m} \end{aligned}$$

Barre 3

$$\begin{aligned} E_3 &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ S_3 &= 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \\ L_3 &= 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Le problème est plan et le champ de déplacement cinématiquement admissible est le suivant :

$$\vec{u}(M, t) = \begin{cases} u(M, t) = u(x, t) \\ v(M, t) = 0 \\ w(M, t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Objectifs :

- Déterminer les contraintes en tout point
- Déterminer les déplacements

On peut utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz afin de déterminer les matrices de raideur de chaque barres. Ainsi les matrices de raideur s'écrivent toutes de la forme :

$$K_i = \frac{E_i S_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

avec

E_i le module d'Young de la barre i

S_i la section de la barre i

L_i la longueur de la barre i

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = u_4 = 0 \\ F_3 = F \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le système matriciel assemblée en statique s'écrira :

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1 S_1}{L_1} & -\frac{E_1 S_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 S_1}{L_1} & \frac{E_1 S_1}{L_1} + \frac{E_2 S_2}{L_2} & -\frac{E_2 S_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 S_2}{L_2} & \frac{E_2 S_2}{L_2} + \frac{E_3 S_3}{L_3} & -\frac{E_3 S_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 S_3}{L_3} & \frac{E_3 S_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

On résout le système suivant grâce au programme présenté en annexe et on obtient :

$$F_1 = -72,6N \quad \text{et} \quad F_4 = -27,4N$$

On peut tracer la fonction déformée et de contraintes :

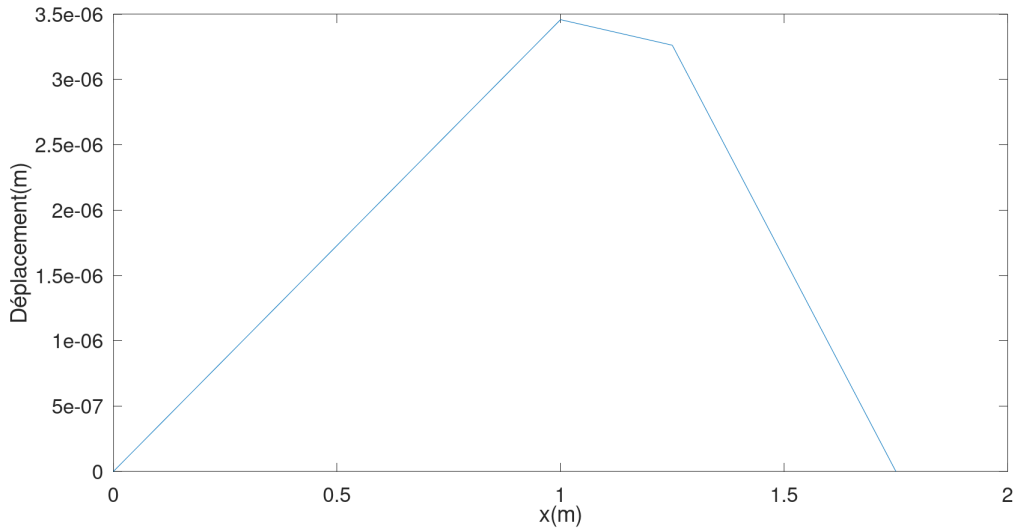


FIGURE 9 – Fonction déformée du système 3 barres

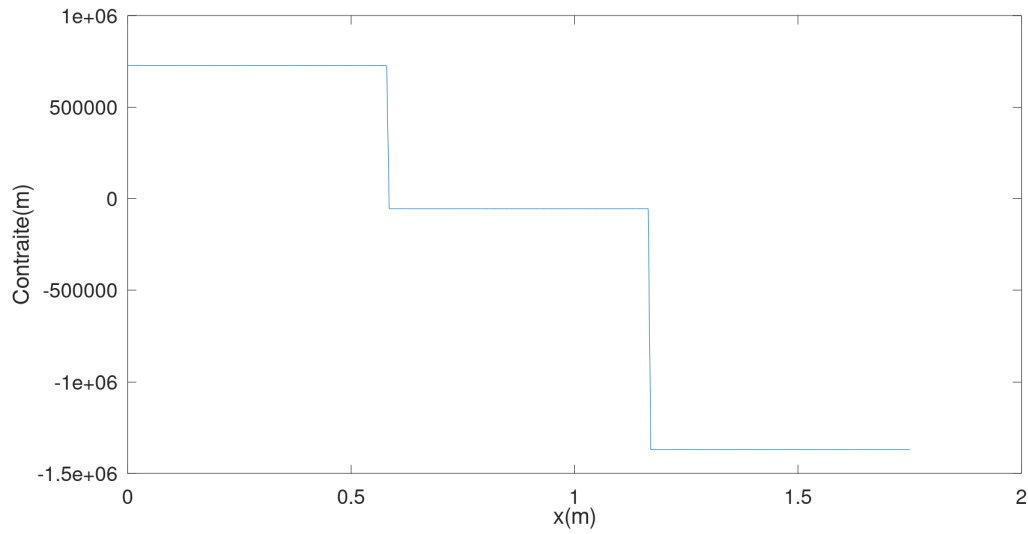


FIGURE 10 – Fonction de contraintes du système 3 barres

A.2 Analyse modale d'une poutre encastrée

On étudie une poutre encastrée en traction-compression représentée sur la figure ci-dessous :

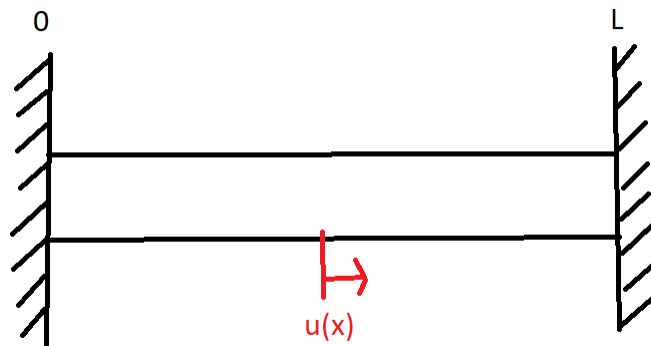


FIGURE 11 – Schéma de la structure à 3 barres

Hypothèses :

- Petits déplacements
- Matériau isotrope, homogène
- E le module d'Young
- ρ la masse volumique
- S la section du câble
- L la longueur du câble

Les matrices de masse et de raideur sur un élément s'écrivent :

$$\mathcal{M} = \frac{\rho S L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{K} = \frac{ES}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le système assemblé pour n éléments s'écrit :

$$\frac{\rho S L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v}_1(x, t) \\ \vdots \\ \ddot{v}_{n-1}(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2(x, t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du système, on va additionne les matrices de masse et de raideur assemblé puis on va calculer le déterminant ce qui nous donneras les valeurs propres.

On trouve pour 6 éléments les fonctions déformée modale suivantes :

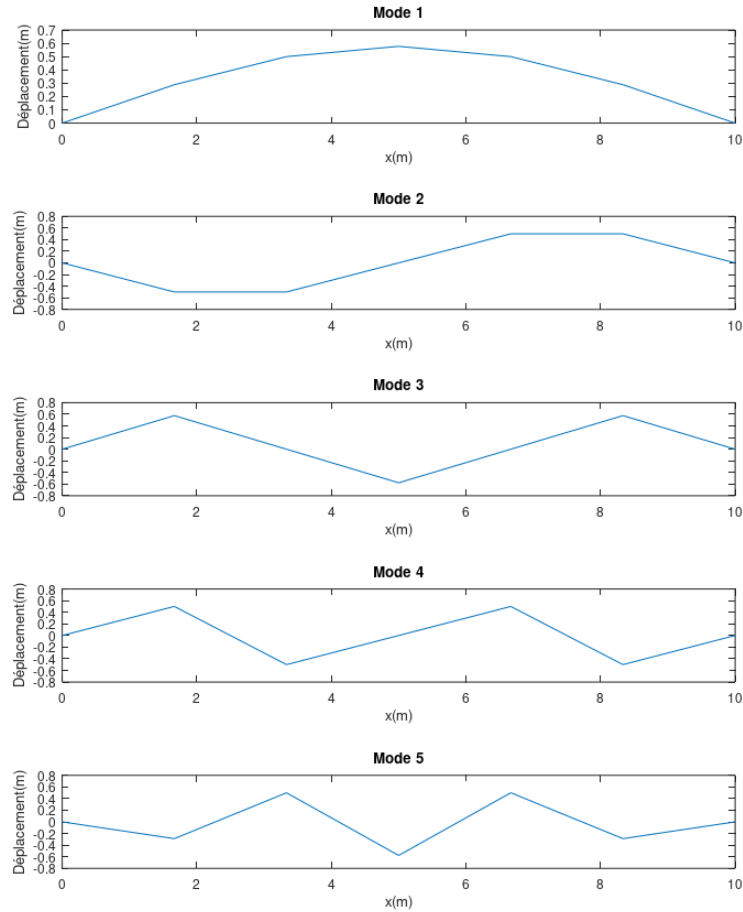


FIGURE 12 – Fonctions déformée modale pour une poutre en traction-compression

A.3 Fonctionnelle d'énergie

On va établir la fonctionnelle pour le câble fortement tendu.

On a le champ de déplacement suivant :

$$\vec{u}(M, t) = \begin{cases} u(M, t) = 0 \\ v(M, t) = v(x, t) \\ w(M, t) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

On suppose le champ de déplacement sur un élément de la forme suivante :

$$v^e(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{L^e} \quad (15)$$

avec

$$\begin{cases} v^e(0) = v_i^e \\ v^e(L^e) = v_j^e \end{cases} \quad (16)$$

$$\Rightarrow v^e(x) = \left\langle 1 - \frac{x}{L^e} \quad \frac{x}{L^e} \right\rangle \begin{Bmatrix} v_i^e \\ v_j^e \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ou encore

$$\Rightarrow v^e(x) = \left\langle N_1(x) \quad N_2(x) \right\rangle \begin{Bmatrix} v_i^e \\ v_j^e \end{Bmatrix} \quad (18)$$

avec N_1 et N_2 les fonctions de formes

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L^e} \\ N_2(x) &= \frac{x}{L^e} \end{aligned} \quad (19)$$

On détermine le champ de déformation :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (20)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (21)$$

On écrit la loi de comportement du matériau :

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} + \sigma_0 \quad (22)$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy}\epsilon_{xy} \quad (23)$$

On peut donc écrire le principe variationnel :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \langle \dot{v}_i^e(t) \quad \dot{v}_j^e(t) \rangle \int_0^{L^e} \rho S \begin{bmatrix} N_1^2(x) & N_2(x)N_1(x) \\ N_1(x)N_2(x) & N_2^2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_i^e(t) \\ \dot{v}_j^e(t) \end{Bmatrix} dx \quad (24)$$

$$U_{def} = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{xx} + \sigma_{xy} dV = \frac{1}{2} \int_0^{L^e} \frac{ES}{L^e} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 + \frac{G_{xy}S}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \sigma_0 S \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (25)$$

L'hypothèse de câble fortement tendu permet de négliger les termes $\frac{ES}{L^e} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4$ et $\frac{G_{xy}S}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$, et donc :

$$U_{def} = \frac{1}{2} \int_0^{L^e} \frac{\sigma_0 S}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \langle v_i^e(t) \quad v_j^e(t) \rangle \int_0^{L^e} \sigma_0 S \begin{bmatrix} N_1'^2(x) & N_2'(x)N_1'(x) \\ N_1'(x)N_2'(x) & N_2'^2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i^e(t) \\ v_j^e(t) \end{Bmatrix} dx \quad (26)$$

Les matrices de masse et de raideur vont donc s'écrire :

$$\mathcal{M} = \int_0^{L^e} \rho S \begin{bmatrix} N_1^2(x) & N_2(x)N_1(x) \\ N_1(x)N_2(x) & N_2^2(x) \end{bmatrix} dx = \frac{\rho S L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = \int_0^{L^e} \sigma_0 S \begin{bmatrix} N_1'^2(x) & N_2'(x)N_1'(x) \\ N_1'(x)N_2'(x) & N_2'^2(x) \end{bmatrix} dx = \frac{\sigma_0 S}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A.4 Programme

A.4.1 Programme étude mécanique câble avec force ponctuelle

```
clc
clear all
close all

%%% Etude mécanique d'un câble fortement tendu %%%

% Données
rho=7770;
E=210e9;
sigma=1e8;
L=10;
r=5e-2; %rayon du câble
S=pi*r^2; %section du câble

f=-rho*L*S*9.81; %force équivalente au poids du câble
F=[0;0;f;0;0];

% Discretisation
Ne=6; %nombre d'éléments
Nn=Ne+1; %nombre de noeuds
dx=L/Ne;

% Matrices élémentaires
Ke=ones(2,2);
Ke(1,2)=-1;
Ke(2,1)=-1;
Ke=sigma*S/dx*Ke;

% Assemblage
K=zeros(Nn,Nn);

for i=1:Ne
    K(i:i+1,i:i+1)=K(i:i+1,i:i+1)+Ke;
endfor

Kinf=zeros(Nn-2,Nn-2);
for i=1:Nn-2
    for j=1:Nn-2
        Kinf(i,j)=K(i+1,j+1);
    endfor
endfor

% Résolution
u=Kinf\F;
U=[0;u;0];

F1=-E*S/L*U(2)
Fn=-E*S/L*U(Ne)

Sigma1=E/L*[-1 1]*[U(1);U(2)];
Sigma2=E/L*[-1 1]*[U(2);U(3)];
```

```

Sigma3=E/L*[-1 1]*[U(3);U(4)];
Sigma4=E/L*[-1 1]*[U(4);U(5)];
Sigma5=E/L*[-1 1]*[U(5);U(6)];
Sigma6=E/L*[-1 1]*[U(6);U(7)];

SIGMA=[ones(1,100)*Sigma1,ones(1,100)*Sigma2,ones(1,100)*Sigma3,ones(1,100)*Sigma4,ones(1,100)*Sigma5,ones(1,100)*Sigma6];

%Graphe
x=linspace(0,L,Nn);
x2=linspace(0,L,100*Ne);

figure(1)

plot(x,U);
xlabel('x(m)')
ylabel('Déplacement(m)')
set(gca,'FontSize',34)

figure(2)

plot(x2,SIGMA);
xlabel('x(m)')
ylabel('Contrainte(m)')
set(gca,'FontSize',34)

```


A.4.2 Programme étude mécanique câble avec force linéique

```
clc
clear all
close all

%%% Etude mécanique d'un câble fortement tendu %%%

% Donnés
rho=7770;
E=210e9;
sigma=1e8;
L=10;
r=5e-2; %rayon du câble
S=pi*r^2; %section du câble

f=-rho*L*S*9.81; %force équivalente au poids du câble

% Discretisation
Ne=6; %nombre d'éléments
Nn=Ne+1; %nombre de noeuds
dx=L/Nn;

% Matrices élémentaires
Ke=ones(2,2);
Ke(1,2)=-1;
Ke(2,1)=-1;
Ke=sigma*S/dx*Ke;

F=f/dx*ones(5,1);

% Assemblage
K=zeros(Nn,Nn);

for i=1:Ne
    K(i:i+1,i:i+1)=K(i:i+1,i:i+1)+Ke;
endfor

Kinf=zeros(Nn-2,Nn-2);
for i=1:Nn-2
    for j=1:Nn-2
        Kinf(i,j)=K(i+1,j+1);
    endfor
endfor

% Résolution
u=Kinf\F;
U=[0;u;0];

F1=-E*S/L*U(2)+f/Nn
Fn=-E*S/L*U(Ne)+f/Nn

Sigma1=E/L*[-1 1]*[U(1);U(2)];
Sigma2=E/L*[-1 1]*[U(2);U(3)];
Sigma3=E/L*[-1 1]*[U(3);U(4)];
```

```

Sigma4=E/L*[-1 1]*[U(4);U(5)];
Sigma5=E/L*[-1 1]*[U(5);U(6)];
Sigma6=E/L*[-1 1]*[U(6);U(7)];

SIGMA=[ones(1,100)*Sigma1,ones(1,100)*Sigma2,ones(1,100)*Sigma3,ones(1,100)*Sigma4,ones(1,100)*Sigma5,ones(1,100)*Sigma6];

%Graphe
x=linspace(0,L,Nn);
x2=linspace(0,L,100*Ne);

figure(1)

plot(x,U);
xlabel('x(m)')
ylabel('Déplacement(m)')
set(gca,'FontSize',34)

figure(2)

plot(x2,SIGMA);
xlabel('x(m)')
ylabel('Contrainte(m)')
set(gca,'FontSize',34)

```

A.4.3 Programme analyse modale câble

```
clc
clear all
close all

%%% Analyse modale d'un câble fortement tendu %%%

% Donnés
rho=7770;
E=210e9;
sigma=1e8;
L=10;
r=5e-2; %rayon du cable
S=pi*r^2; %section du cable

% Discretisation
Ne=6; %nombre d'éléments
Nn=Ne+1; %nombre de noeuds
dx=L/Ne;

% Matrices élémentaires
Me=ones(2,2);
Me(1,1)=2;
Me(2,2)=2;
Me=rho*S*dx/6*Me;

Ke=ones(2,2);
Ke(1,2)=-1;
Ke(2,1)=-1;
Ke=sigma*S/dx*Ke;

% Assemblage
M=zeros(Nn,Nn);
K=zeros(Nn,Nn);

for i=1:Ne
    M(i:i+1,i:i+1)=M(i:i+1,i:i+1)+Me;
    K(i:i+1,i:i+1)=K(i:i+1,i:i+1)+Ke;
endfor

MK=M(2:Nn-1,2:Nn-1)+K(2:Nn-1,2:Nn-1);
[V,D] = eig(MK) %D la matrice diagonale valeurs propres de A
               %V la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres correspondant

% Valeurs propres
v=zeros(Nn,Ne-1);
v(2:Nn-1,:)=V

% Graphe
x=[0:dx:L];
n=[0:L/(Ne-1):L];

figure('Name','Déplacement','Numbertitle','off')
```

```
for k=1:(Ne-1)
    j=2*k;
    subplot(Ne-1,2,j-1)
    plot(x,v(:,k));
    title(['Mode ',num2str(k)])
    xlabel('x(m)')
    ylabel('Déplacement(m)')
    set(gca,'FontSize',12)
endfor
```

A.4.4 Programme étude mécanique 3 barres

```
clc
clear all
close all

%%% Etude mécanique d'un système 3 barres %%%

% Données
E1=E3=2.1e11;
L1=1;
L3=0.5;
S1=1e-4;
S3=2e-5;
E2=7e10;
L2=0.25;
S2=5e-4;
f=100;
Ne=3;

% Matrices
K=[E1*S1/L1+E2*S2/L2 -E2*S2/L2;-E2*S2/L2 E2*S2/L2+E3*S3/L3];
F=[f;0];

% Résolution
u=K\F;
U=[0;u;0];

F1=-E1*S1/L1*U(2)
F4=-E3*S3/L3*U(3)

Sigma1=E1/L1*[-1 1]*[U(1);U(2)];
Sigma2=E2/L2*[-1 1]*[U(2);U(3)];
Sigma3=E3/L3*[-1 1]*[U(3);U(4)];

SIGMA=[ones(1,100)*Sigma1,ones(1,100)*Sigma2,ones(1,100)*Sigma3]

%Graphe
x=[0;L1;L1+L2;L1+L2+L3];
x2=linspace(0,L1+L2+L3,100*Ne)

figure(1)
plot(x,U);
xlabel('x(m)')
ylabel('Déplacement(m)')
set(gca,'FontSize',34)

figure(2)
plot(x2,SIGMA);
xlabel('x(m)')
ylabel('Contraite(m)')
set(gca,'FontSize',34)
```

A.4.5 Programme analyse modale poutre en flexion

```
clc
clear all
close all

%%% Analyse modale d'une poutre encastrée %%%

% Donnés
rho=7770;
E=210e9;
L=10;
r=5e-2; %rayon du cable
S=pi*r^2; %section du cable

% Discretisation
Ne=6; %nombre d'éléments
Nn=Ne+1; %nombre de noeuds
dx=L/Ne;

% Matrices élémentaires
Me=ones(2,2);
Me(1,1)=2;
Me(2,2)=2;
Me=rho*S*dx/6*Me;

Ke=ones(2,2);
Ke(1,2)=-1;
Ke(2,1)=-1;
Ke=E*S/dx*Ke;

% Assemblage
M=zeros(Nn,Nn);
K=zeros(Nn,Nn);

for i=1:Ne
    M(i:i+1,i:i+1)=M(i:i+1,i:i+1)+Me;
    K(i:i+1,i:i+1)=K(i:i+1,i:i+1)+Ke;
endfor

MK=M(2:Nn-1,2:Nn-1)+K(2:Nn-1,2:Nn-1);
[V,D] = eig(MK); %D la matrice diagonale valeurs propres de A
               %V la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres correspondant

% Valeurs propres
v=zeros(Nn,Ne-1);
v(2:Nn-1,:)=V

% Graphe
x=[0:dx:L];
n=[0:L/(Ne-1):L];

figure('Name','Déplacement','Numbertitle','off')

for k=1:(Ne-1)
```

```
j=2*k;  
subplot(Ne-1,2,j-1)  
plot(x,v(:,k));  
title(['Mode ',num2str(k)])  
xlabel('x(m)')  
ylabel('Déplacement(m)')  
set(gca,'FontSize',12)  
endfor
```