Exercices de probabilités et statistique

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Cours de deuxième année de licence de sciences économiques

Fabrice Rossi & Fabrice Le Lec

Table des matières

Introduction

Ce recueil regroupe quelques exercices étudiés dans le cours de probabilités et de statistiques donné par Fabrice Le Lec et Fabrice Rossi en deuxième année de licence de sciences économiques à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. Chaque exercice comporte des indications de difficulté et de durée de résolution (rédaction incluse), selon les codes suivants :

difficulté :

- ✪ exercice facile d'application du cours
- ✪✪ exercice de niveau standard correspondant à la difficulté attendue en évaluation écrite
- ✪✪✪ exercice demandant astuce et/ou réflexion

durée :

- ☆ exercice court, 10 à 15 minutes
- ☆☆ exercice de longueur classique, entre 15 et 25 minutes
- ☆☆☆ exercice long, plus de 25 minutes

Chapitre 1

Théorie des ensembles

1.1 Notions élémentaires

Exercice 1.1 (difficulté ✪, durée ☆)
Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

Question 1 Calculer $\mathcal{P}(A)$.

Question 2 Calculer $\mathcal{P}(B)$.

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(A) \cap B$.

Question 4 Calculer $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Exercice 1.2 (difficulté ✪, durée ☆)
Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, \{2\}\}$.

Question 1 Calculer $A \times B$.

Question 2 Calculer $A \cup B$.

Question 3 Calculer $\mathcal{P}(B)$.

Soit $C = \{b, c\}$.

Question 4 Calculer $(A \times C) \cap (C \times A)$.

Exercice 1.3 (difficulté ✪, durée ☆)
Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Question 1 Calculer $\{(a,b) \in A^2 \mid a < b\}$.

Question 2 Calculer $\{(a,b) \in A^2 \mid a + b = 4\}$.

Question 3 Calculer $\{B \in \mathcal{P}(A) \mid 2 \in B\}$.

1.2 Outils pour les évènements

Exercice 1.4 (difficulté ✪, durée ☆☆)
On note E l'ensemble des personnes inscrites sur les listes électorales pour les deux dernières élections présidentielles en France, en 2007 et 2012. Les personnes dans E pouvaient donc voter au deux élections. On étudie seulement les votes du second tour.

On note :

— NS_1 l'ensemble des personnes ayant voté pour Nicolas Sarkozy en 2007 ;

— NS_2 l'ensemble des personnes ayant voté pour Nicolas Sarkozy en 2012 ;
— SR l'ensemble des personnes ayant voté pour Ségolène Royal en 2007 ;
— FH l'ensemble des personnes ayant voté pour François Hollande en 2012 ;
— B_1 l'ensemble des personnes ayant voté blanc (ou nul) en 2007 ;
— et enfin A_2 l'ensemble des personnes n'ayant pas voté en 2012.

Déterminer le contenu des ensembles suivants en utilisant uniquement l'ensemble E, les six ensembles définis au dessus et les opérations ensemblistes classiques (intersection, union et complémentaire) :

1. NS : l'ensemble des personnes ayant voté deux fois pour Nicolas Sarkozy ;
2. PS : l'ensemble des personnes ayant voté au moins une fois pour candidat du parti socialiste ;
3. B_2 : l'ensemble des personnes ayant voté blanc (ou nul) en 2012 ;
4. F : l'ensemble des personnes qui n'ont pas voté en 2007 et ont voté François Hollande en 2012.
5. A : l'ensemble des personnes s'étant abstenues exactement une fois (attention, le vote blanc ou nul n'est pas une abstention).

Chapitre 2

Dénombrement

Exercice 2.1 (difficulté ✪, durée ☆)
Dans une course de chevaux, il y a 15 participants au départ.

Question 1 Combien y-a-t'il d'ordres d'arrivée possibles ?

Question 2 Combien y-a-t'il d'ordres d'arrivée possibles avec le cheval a finissant premier, le cheval b deuxième et le cheval c troisième ?

Question 3 Quelle est la proportion d'ordres d'arrivée possibles avec comme trio de tête a, b, c (dans cet ordre) par rapport au total d'ordres d'arrivées possibles ?

Question 4 Mêmes questions pour n chevaux en fixant l'ordre des k premiers.

Exercice 2.2 (difficulté ✪, durée ☆)
Reprenons l'exemple de la course de chevaux avec 15 participants au départ (exercice 2).

Question 1 Combien y-a-t'il de tiercés (trios) gagnants dans l'ordre possibles ?

Question 2 Combien y-a-t'il de quintés (les 5 premiers) gagnants dans l'ordre possible ?

Question 3 Mêmes questions pour n participants.

Exercice 2.3 (difficulté ✪, durée ☆)
L'enseignant d'un cours magistral met en place un concours pour motiver ses étudiants : l'étudiant avec la meilleure moyenne gagne une tablette tactile (Wifi+3G), le second une tablette seulement Wifi, et le troisième une mini-tablette.

Question 1 Sachant qu'il n'y a pas d'*ex æquo* possible, combien y-a-t'il de façons de distribuer ces trois prix sur un amphi de 389 étudiants ?

Question 2 Même question si les trois prix sont identiques (trois tablettes tactiles Wifi+3G pour les trois premiers) ?

Question 3 Si l'on fixe les trois meilleurs étudiants, combien y-a-t'il d'ordres d'arrivée possibles pour le trio de tête ?

Question 4 Quelle égalité peut-on écrire entre les résultats des trois questions précédentes ?

Question 5 Mêmes questions pour n étudiants et p lauréats.

Exercice 2.4 (difficulté ✪, durée ☆) : tirages dans une urne
On peut utiliser les notions mise en œuvre dans les exercices précédents pour déterminer le nombre de cas possible de tirages sans remise d'une urne contenant n boules distinctes (par ex. numérotées de 1 à n). A quelles notions déjà vues correspondent les cas suivants ?

Question 1 On tire n boules successivement (sans remise), et on veut savoir le nombre de $n-$listes (tirages ordonnés) possibles.

Question 2 On tire p boules successivement (sans remise), et on veut savoir le nombre de $p-$listes (tirages ordonnés) possibles.

Question 3 On tire p boules simultanément ou sans noter l'ordre (sans remise), et on veut savoir le nombre de sous-ensembles (tirages non ordonnés) de cardinal p possibles.

On s'intéresse maintenant aux trois mêmes cas mais avec remise (c'est-à-dire qu'on remet chaque boule dans l'urne après tirage).

Question 4 Déterminer pour les deux premiers cas le nombre de cas possibles.

Exercice 2.5 (difficulté ✪✪✪, durée ☆☆) : combinaisons avec remise/répétition
On s'intéresse au troisième cas de l'exercice précédent, c'est-à-dire que l'on tire p boules d'une urne en contenant n sans prendre en compte l'ordre, et on veut donc connaître le nombre de combinaisons avec répétition, c'est-à-dire d'objets de type $[y_1, y_2, y_3, ..., y_p]$ de p éléments possibles à partir de n éléments.

⚠ **Remarque 2.1.** *Les combinaisons avec répétition ne sont ni des ensembles (qui auraient été notés* $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_p\}$*), chacun des éléments n'étant pas forcément distinct, ni des listes (notées* $(y_1, y_2, y_3, ..., y_p)$*) qui sont ordonnées.*

Question 1 Déterminer le nombre de façons de placer p objets indiscernables dans n boîtes (discernables) ? Autrement dit, on cherche le nombre de n-listes d'entiers naturels $(k_i)_{1\leq i\leq n}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$. k_i représente le nombre d'objets placés dans la boîte i.

Question 2 En utilisant le résultat précédent, déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de longueur p depuis n éléments.

Exercice 2.6 (difficulté ✪, durée ☆)
Deux colocataires Anne et Bob organisent les tâches ménagères selon un planning qui précise qui fait le ménage pour chaque semaine. Le ménage doit être fait chaque semaine et chaque semaine un des deux colocataires en est donc en charge. Pour un planning de trois semaines, on appelle S l'ensemble des plannings possibles. On note également l'ensemble des colocataires $C = \{a,b\}$.

Question 1 A quoi est égal S ?

Question 2 Ecrire l'ensemble des parties de S de cardinal 1.

Question 3 Quel est le cardinal du sous-ensemble de S tel que Bob fait le ménage la première semaine ?

Question 4 On considère maintenant un planning de 2 semaines seulement. On appelle S' l'ensemble des plannings possibles de 2 semaines. Ecrire l'ensemble des parties de S' de cardinal 2.

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Notions fondamentales

Exercice 3.1 (difficulté ✪, durée ☆)
Soit les ensembles $\Omega = \{A, B, C, D, E, a, b, c, d, e\}$, $\Gamma = \{Majuscule, Minuscule\}$ et $\Theta = \{Consonne, Voyelle\}$. La fonction f de Ω dans $\Gamma \times \Theta$ associe à chaque lettre de Ω un couple de $\Gamma \times \Theta$ qui indique sa nature. Par exemple $f(A) = (Majuscule, Voyelle)$.

1. La fonction f est elle injective ?
2. La fonction f est elle surjective ?
3. Calculer $f(\{A, b, e\})$.
4. Calculer $f^{-1}(\Gamma \times \{Consonne\})$.
5. Calculer $f^{-1}(\{(Minuscule, Voyelle)\})$.

Exercice 3.2 (difficulté ✪, durée ☆☆)
Soit $A = \{1, 2, 4, 7\}$ et $B = \{3, 5, 6, 8\}$. On définit la fonction f de $A \times B$ dans $\mathbb{N}$ par $f(a,b) = a + b$.

1. Calculer $f(A \times B)$.
2. Calculer $f^{-1}(\{7, 10\})$.
3. Calculer $f^{-1}(\{1, 4\})$.

On définit sur le même ensemble la fonction g qui au couple (a,b) associe la plus grande des deux valeurs a et b.

1. Calculer $g(A \times B)$.
2. Déterminer $g^{(-1)}(\{4, 5\})$.

Chapitre 4

Expérience aléatoire et probabilités

4.1 Notions d'expérience aléatoire et de probabilité

Exercice 4.1 (difficulté ✪, durée ☆)
Une expérience aléatoire a pour univers $\Omega = \{a,b,c\}$ associé à une probabilité $\mathbb{P}$. Quel est le domaine de définition de $\mathbb{P}$? On suppose que $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4}$. Calculez explicitement les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ pour tout A dans le domaine de définition de $\mathbb{P}$.

Exercice 4.2 (difficulté ✪, durée ☆)
Une expérience aléatoire a pour univers $\Omega = \{a,b,c,d\}$ associé à une probabilité $\mathbb{P}$.

Question 1 Si on a $\mathbb{P}(\{b,c,d\}) = \frac{7}{8}$ et $\mathbb{P}(\{a,b,d\}) = \frac{3}{4}$, à quoi est égal $\mathbb{P}(\{b,d\})$?

Question 2 Si on suppose en outre que $\mathbb{P}(\{a,b,c\}) = \frac{5}{8}$, quelles sont les valeurs de $\mathbb{P}(\{b\})$ et $\mathbb{P}(\{b\})$?

Question 3 Expliciter $\mathbb{P}$ sur la totalité de son ensemble de définition (en utilisant les hypothèses des questions précédentes).

Exercice 4.3 (difficulté ✪, durée ☆)
Des biologistes étudient le comportement des souris à travers le protocole expérimental suivant : une souris est placée dans une cage et peut en sortir par 8 portes numérotées de 1 à 8. Les portes avec un numéro pair sont à droite, les autres à gauche. Après de nombreux tests, les scientifiques ont réussi à établir les informations partielles suivantes, i indiquant le numéro de porte :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(\{i\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	?	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	?	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$

Question 1 Quelle condition doivent satisfaire $\mathbb{P}(\{3\})$ et $\mathbb{P}(\{6\})$?

Question 2 Les biologistes avaient également établi que la probabilité qu'une souris sorte par une porte paire était de $\frac{1}{3}$. En déduire $\mathbb{P}(\{3\})$ et $\mathbb{P}(\{6\})$.

Question 3 Les scientifiques étudiaient si les souris avaient une plus grande probabilité de sortir par une porte peinte en vert plutôt qu'en gris. Les portes vertes sont les portes 1, 2, 3 et 4 (les autres sont en gris). Est-ce le cas ?

4.2 Équiprobabilité

Exercice 4.4 (difficulté ✪, durée ✫✫)
On considère un dé comportant le chiffre 0 sur trois faces, le chiffre 1 sur deux faces et le chiffre 2 sur une face. Le dé est équilibré. On lance le dé une fois.

Question 1 Donner l'univers de l'expérience en le choisissant de sorte à ce que la probabilité associée soit uniforme.

Question 2 Calculer la probabilité d'obtenir une face portant le chiffre 1.

On lance maintenant deux dés comme celui qu'on vient de décrire.

Question 3 Donner l'univers de la nouvelle expérience en le choisissant de sorte à ce que la probabilité associée soit uniforme.

Question 4 Calculer la probabilité que la somme des valeurs des faces des deux dés soit égale à 2.

Exercice 4.5 (difficulté ✪✪, durée ✫✫) : les mésaventures du Chevalier de Méré
L'écrivain Antoine Gombaud (dit Chevalier de Méré) est connu pour avoir échangé avec Blaise Pascal une correspondance régulière sur les jeux de hasard, alors que la théorie des probabilités était en pleine naissance au milieu du XVIIème siècle. Gombaud aurait perdu des sommes d'argent importantes en jouant aux dés, en passant notamment du premier jeu ci-dessous au second.

On considère le jeu suivant : le parieur lance quatre fois de suite un dé (à six faces) et gagne s'il obtient au moins une fois un six.

Question 1 Décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.

Question 2 Calculer la probabilité de gain pour le parieur.

La probabilité de gain étant supérieure à 0,5, Gombaud finit par ne plus trouver d'adversaire. Il proposa donc la variante suivante : le parieur lance 24 fois de suite une paire de dés et gagne s'il obtient au moins une fois un double six. Le raisonnement de Gombaud était le suivant : en lançant deux dés, on a six fois plus de résultats possibles (36 contre 6). Comme on gagne en lançant 4 fois un dé, on doit aussi gagner en lançant 24 fois les deux dés car $24 = 4 \times 6$.

Question 3 Décrire l'univers associé au deuxième jeu.

Question 4 Calculer la probabilité de gain pour le parieur.

Question 5 Commenter le raisonnement de Gombaud.

Exercice 4.6 (difficulté ✪✪, durée ✫✫)
On considère une urne contenant 5 jetons rouges, 4 jetons verts et 6 jetons jaunes.

1. On tire trois jetons successivement, avec remise de chaque jeton après son tirage. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a) obtention de trois jetons jaunes ;
   b) obtention d'aucun jeton rouge ;
   c) obtention d'un jeton de chaque couleur.
2. On recommence l'expérience en tirant les 3 jetons simultanément (et donc sans remise). Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a) obtention de trois jetons verts ;
   b) obtention d'au moins deux jetons rouges ;
   c) obtention d'exactement un jeton jaune.

Exercice 4.7 (difficulté ✪✪, durée ⭑⭑⭑)
On étudie le jeu de hasard suivant. On dispose de deux dés non truqués, un premier dé à 8 faces numérotées de 1 à 8 et un second dé à 4 faces numérotées de 1 à 4. Une manche du jeu consiste à lancer 5 fois de suite les deux dés. Le joueur remporte la manche si au moins l'une des deux conditions suivantes est remplie :

1. il obtient au moins une fois une valeur inférieure ou égale à 3 en ajoutant les valeurs des deux dés ;
2. il obtient exactement une fois un double 3.

Question 1 Déterminez l'univers Ω correspondant à une manche du jeu (les 5 lancers) et indiquez quelle probabilité $\mathbb{P}$ modélise bien l'expérience aléatoire.

Question 2 On étudie d'abord le cas simplifié dans lequel seule la première condition ci-dessus donne une victoire : déterminez la probabilité d'obtenir au moins une fois sur les 5 lancers une valeur inférieure ou égale à 3 en ajoutant les valeurs des deux dés (on note A l'évènement correspondant).

Question 3 On étudie de la même façon le cas simplifié dans lequel seule la deuxième condition ci-dessus donne une victoire : déterminez la probabilité d'obtenir exactement une fois un double 3 sur les 5 lancers (on note B l'évènement correspondant).

Question 4 Soit C l'évènement correspondant à une victoire en tenant compte des deux conditions. Donnez un exemple d'évènement élémentaire (donc un résultat des 5 lancers) qui montre que $\mathbb{P}(C) \neq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Question 5 Déterminez la probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap B$.

Question 6 Déduire des questions précédentes la probabilité de victoire en tenant compte des deux conditions. On pourra utiliser le fait que pour tous ensembles U et V, $U \cup V$ est l'union disjointe de U et de $\overline{U} \cap V$.

Chapitre 5

Conditionnement et indépendance

Exercice 5.1 (difficulté ✪✪, durée ⋆⋆)
Dans un cours de statistique, l'enseignant présente trois thèmes, A, B et C. Pour évaluer un étudiant, l'enseignant choisi au hasard un thème selon les probabilités suivantes : $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(C) = 0{,}5$. L'enseignant observe que les prestations des élèves dépendent du thème. Il range ces prestations en trois catégories : E pour un échec total, R pour une interrogation à revoir pour confirmer la compréhension du sujet et S pour un succès. L'enseignant constate les performances suivantes :

thème A 25 % des étudiants obtiennent un succès S, 30 % sont à revoir R, le reste en échec ;

thème B 40 % des étudiants sont en échec, pour 40 % en succès, le reste étant à revoir ;

thème C on atteint ici 50 % d'échec, 30 % à revoir, le reste en succès.

Question 1 calculer la probabilité qu'un étudiant soit en échec dans cette procédure d'évaluation ;

Question 2 sachant que l'étudiant est à revoir, calculer la probabilité qu'il ait été interrogé sur le thème C ;

Question 3 calculer la probabilité qu'un étudiant ne soit pas en échec, sachant qu'il ne sera pas interrogé sur le thème A ;

Question 4 les évènements « être interrogé sur le thème B » et « obtenir un échec S » sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5.2 (difficulté ✪✪, durée ⋆⋆⋆)
Pour faire face aux erreurs d'arbitrage, la FIFA a décidé de mettre en place un système de détection des buts : une ou plusieurs caméras sont installées sur la ligne de but et indiquent si le ballon a ou non franchi la ligne. Le système proposé à la FIFA a les caractéristiques suivantes : il se compose de deux caméras (notées A et B) qui chacune et indépendamment de l'autre détecte avec probabilité 0,98 que le ballon a bien franchi la ligne quand c'est le cas, et qui dans 3 % des cas indique but alors que le ballon n'a pas complètement franchi la ligne. L'objectif de la FIFA est de déterminer quelle est la meilleure règle pour l'usage de ces caméras, sachant que dans les cas litigieux il y a a priori une chance sur deux que le ballon ait franchi la ligne.

On pourra noter FL l'évènement « le ballon a franchi la ligne » et CB_A l'évènement « la caméra A indique un but » (idem pour la caméra B avec CB_B).

Question 1 Traduire les hypothèses sur les caméras en valeurs pour certaines probabilités conditionnelles.

Question 2 On s'intéresse au fonctionnement de la caméra A. Quelle est la probabilité que le ballon ait franchi la ligne quant la caméra A indique but ? Quelle est la probabilité que le ballon n'ait pas franchi la ligne lorsque la caméra A indique but ?

On s'intéresse maintenant aux deux caméras (A et B) simultanément. On suppose que les caméras sont indépendantes dans le sens suivant : sachant le résultat réel (par exemple sachant que l'évènement FL a eu lieu), le résultat de la caméra A est indépendant du résultat de la caméra B.

Question 3 Sous cette hypothèse, quel est alors le lien entre $\mathbb{P}(CB_A|FL)$, $\mathbb{P}(CB_B|FL)$, d'une part, et $\mathbb{P}($« les deux caméras indiquent un but »$|FL)$, d'autre part ?

Question 4 Calculez les probabilités qu'une seule des deux caméras indique but si le ballon a bien franchi la ligne et qu'aucune caméra n'indique but si le ballon a bien franchi la ligne.

Question 5 Même question que précédemment pour le cas où le ballon n'a pas franchi la ligne.

Question 6 La FIFA envisage deux règles : soit l'arbitre accorde le but lorsque l'une des caméras au moins indique but, soit lorsque les deux caméras accordent le but. Les deux types d'erreurs (accorder un but alors que le ballon n'a pas franchi la ligne, et ne pas l'accorder alors qu'il l'a franchi) étant considérées équivalentes par la FIFA, elle veut choisir la règle qui minimise la probabilité d'erreur. Calculer cette probabilité pour les deux règles.

Chapitre 6

Variables aléatoires discrètes

6.1 Loi, fonction de répartition, espérance et variance

Exercice 6.1 (difficulté ✪, durée ☆)
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. On munit Ω de la probabilité $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}$. Soit X la fonction de Ω dans $\mathbb{N}$ définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 1, \\ 2 & \text{si } \omega \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 1 Calculer la loi de X.

Question 2 Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6.2 (difficulté ✪✪, durée ☆☆)
On tire deux boules successivement et avec remise d'une urne en contenant 4, numérotées de 1 à 4. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 obtenus.

1. calculer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X ;
2. calculer la fonction de répartition de X ;
3. calculer son espérance et variance.

Exercice 6.3 (difficulté ✪✪, durée ☆☆) : les dés de Sicherman
On considère une paire de dés non truqués sur lesquels on a remplacé la numérotation classique par les numérotations suivantes :

premier dé : les faces portent les numéros 1, 2, 2, 3, 3 et 4.

second dé : les faces portent les numéros 1, 3, 4, 5, 6 et 8.

On lance simultanément les deux dés.

Question 1 Décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.

On appelle S la variable aléatoire correspondant à la somme des valeurs obtenues sur les deux dés.

Question 2 Donner $S(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour S.

Question 3 Donner la loi de S.

Question 4 Comparer cette loi avec celle de la variable aléatoire T définie comme la somme des valeurs obtenues en lançant simultanément deux dés classiques.

Exercice 6.4 (difficulté ✪✪✪, durée ⭐⭐⭐)
On considère le jeu suivant. On jette un dé non truqué à six faces. Si on obtient un résultat pair, on gagne 2 €. Sinon, on relance le dé. Si on obtient un résultat de 1 à 4 inclus, on perd 3 €, sinon on gagne 2 €. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).

Question 1 donner la loi de X ;

Question 2 calculer l'espérance de X ;

Question 3 calculer la variance de X.

On propose un jeu similaire utilisant des dés non truqué à quatre faces numérotés de 1 à 4 (ça existe vraiment). Si on obtient un résultat de 1 à 3 sur le premier lancer, on gagne l'équivalent en euros (par exemple 2 € si le lancer donne 2). Si on obtient 4, on relance le dé à quatre faces. Si on obtient un résultat inférieur ou égal à 2, on perd 3 €, sinon on en gagne 2 €. On note Y la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).

Question 4 donner la loi de Y ;

Question 5 calculer l'espérance de Y ;

Question 6 calculer la variance de Y ;

Question 7 quelle variante du jeu est-elle la plus avantageuse pour le joueur ?

Exercice 6.5 (difficulté ✪✪, durée ⭐⭐⭐)
Lorsqu'un match de football à élimination directe arrive au terme du temps réglementaire et des prolongations, les deux équipes sont départagées par une série de tirs au but. On cherche à modéliser ces tirs au but de façon probabiliste en supposant que les comportements des gardien et tireur sont complètement aléatoires (cette hypothèse est en fait assez vraisemblable car le gardien doit s'élancer au moment même où le tireur frappe la balle s'il veut avoir une chance de l'arrêter).

Dans la version simplifiée d'un tir au but, le gardien peut plonger en haut à droite, en bas à droite, en haut à gauche ou en bas à gauche ; le tireur peut placer la balle en haut à la droite du gardien, en bas à la droite du gardien, en haut à la gauche du gardien, en bas à la gauche du gardien, ou bien sûr tirer à côté.

Question 1 Donner G l'ensemble de choix possibles pour le gardien et T ceux du tireur. En déduire Ω l'univers de l'expérience correspondant à un tir au but (attention, l'expérience tient compte du gardien et du tireur).

Question 2 En supposant que si le gardien choisit le même endroit que le tireur, il arrête le tir, écrire les évènements suivants :

— « le gardien plonge à droite »

— « le tireur ne tire pas en bas »

— « le gardien arrête le tir »

— « le but n'est pas marqué mais le gardien n'a pas arrêté le tir »

Comme dans la question précédente, il faut tenir compte du fait que l'expérience porte sur le couple gardien et tireur.

Question 3 On observe que la probabilité qui décrit bien cette situation est la probabilité uniforme. Montrer que l'événement « le gardien plonge en bas à gauche » est indépendant de l'événement « le tireur tire en bas à gauche ». Généraliser à l'ensemble des actions possibles du gardien et du tireur

Question 4 Calculez la probabilité que le but soit marqué. Soit X la variable aléatoire du nombre de but marqué pour un tir au but, quelle loi suit X ?

La FIFA envisage de changer les règles des séances de tirs au but : la première règle envisagée est que les deux équipes tirent 2 fois au but et l'équipe gagnante est celle qui marque le plus de buts durant la séance et en cas d'égalité, c'est l'équipe qui a eu le moins de cartons pendant le match qui gagne.

Question 5 En considérant que les résultats des deux équipes sont indépendants, et que les tirs au but sont indépendants au sein de chaque équipe, quelles lois suivent Y_A et Y_B les variables aléatoires du nombre de buts marqués par l'équipe A et l'équipe B ? Quelle est la probabilité que l'équipe B marque 1 but lors de la séance ?

Question 6 Calculez la loi jointe du couple (Y_A, Y_B). Quelle est la probabilité que les deux équipes marquent un nombre différent de tirs au but ? Si l'équipe A a reçu plus de cartons que la B pendant le match, quelle est la probabilité que l'équipe A gagne le match ?

La FIFA envisage une deuxième règle pour la séance de tirs au but : chaque équipe tire au but une fois, et si l'une marque alors que l'autre échoue, la première gagne la partie. Si les deux échouent ou marquent, alors on répète l'opération et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un vainqueur soit désigné.

Question 7 En faisant les mêmes hypothèses d'indépendance qu'aux questions précédentes, calculer la probabilité qu'une seule des deux équipes marque quand chacune d'elle effectue un tir au but.

Question 8 Quelle loi suit la variable Z représentant le nombre de tirs au but par équipe nécessaire à ce qu'un vainqueur soit désigné ? Quelle est la probabilité que le nombre de tirs au but nécessaire pour obtenir un vainqueur soit exactement de 2 ? Quelle est la probabilité que le nombre de tirs au but nécessaire pour obtenir un vainqueur excède le nombre de joueurs qu'il y a dans une équipe (soit 11) ?

6.2 Lois classiques pour les variables discrètes

Exercice 6.6 (difficulté ✪, durée ☆☆)
Sur une chaîne de production de batteries, on étudie un défaut très rare mais qui rend la batterie affectée dangereuse, avec notamment un risque d'explosion. Des études ont montré que la probabilité d'observer cette défaillance est d'environ 1 sur 10 millions. L'apparition d'une défaillance sur une batterie est indépendante de son apparition sur une autre batterie. On suppose que le fabriquant concerné produit 40 millions de batteries par an. En utilisant l'approximation poissonnienne (dont on justifiera la pertinence), calculer la probabilité que le nombre de batteries défaillantes produites dans une année soit au moins égal à 4.

6.3 Variable fonction d'une variable aléatoire

Exercice 6.7 (difficulté ✪, durée ☆)
Une expérience aléatoire a pour univers $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$. La probabilité associée est uniforme. La variable aléatoire X est définie de la manière suivante : $X(a) = -1$, $X(b) = 2$, $X(c) = 0$, $X(d) = -1$ et $X(e) = 5$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = (x-2)^2$.

Question 1 Ecrire la loi de probabilité de X.

Question 2 On définit $Y = f(X)$. Ecrire $Y(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. En déduire $Y(\Omega)$.

Question 3 Donner les images réciproques de Y dans Ω pour chaque élément de $Y(\Omega)$.

Question 4 Donner la loi de Y.

Exercice 6.8 (difficulté ✪✪, durée ✫✫✫)
Le second tour d'une élection oppose deux candidats, A et B (on ne considère pas le vote blanc). Les sondages permettent d'établir la probabilité d'être élu des deux candidats :

Candidat	A	B
Intentions de vote	40 %	60 %

Un groupe de votants s'intéresse à une question de société pour laquelle trois mesures sont envisageables, notées X, Y et Z. En analysant les discours des deux candidats, le groupe établit les probabilités de choix de chacune des mesures en fonction du candidat élu :

Mesure	X	Y	Z
Candidat A	10 %	50 %	40 %
Candidat B	30 %	60 %	10 %

Question 1 Calculer la probabilité que la mesure Z soit prise.

Question 2 Calculer la probabilité que le candidat B ait été élu sachant que la mesure Y a été prise.

Un chiffrage du coût des trois mesures en millions d'euros est donné dans le tableau suivant :

Mesure	X	Y	Z
Coût	1,5	2	1

On définit à partir de ce tableau la variable aléatoire D correspondant au coût de la mesure prise après l'élection.

Question 3 Donner la loi de D.

Question 4 Calculer la probabilité que D soit supérieure ou égale à 1,5 sachant que A n'a pas été élu.

Question 5 Calculer l'espérance de D et sa variance.

6.4 Couples de variables aléatoires

Exercice 6.9 (difficulté ✪✪, durée ✫✫✫)
Deux mesures importantes vont être votées simultanément au Parlement. La mesure A comporte deux choix x et y. La mesure B comporte trois choix u, v et w. Une série de sondages sur les préférences dans la population permet d'établir la loi jointe du couple de variables aléatoires (A,B) :

$\mathbb{P}(A = a, B = b)$	$b = u$	$b = v$	$b = w$
$a = x$	30%	15%	5%
$a = y$	10%	25%	15%

Question 1 Calculer les lois marginales de A et B.

Question 2 Montrer que A et B ne sont pas indépendantes.

Un chiffrage des différentes options donne les coûts suivants en millions d'euros :

Option	u	v	w	x	y
Coût	1	2	1	3	2

Soit C la variable aléatoire correspondant au coût total des deux options choisies (celle pour A et celle pour B).

Question 3 Déterminer $C(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour C.

Question 4 Déterminer la loi de C puis son espérance.

La modélisation ci-dessus est un peu naïve car elle ne tient pas compte des synergies possibles entre les mesures et des réductions de coûts associées. En chiffrant les couples de mesures plutôt que les mesures, on arrive aux coûts suivants en millions d'euros :

Coût du couple (a,b)	$b = u$	$b = v$	$b = w$
$a = x$	3	5	4
$a = y$	3	3	2

On appelle D la nouvelle variable aléatoire de coût correspondant à ce chiffrage.

Question 5 Déterminer $D(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour D.

Question 6 Déterminer la loi de D puis son espérance.

Chapitre 7

Variables aléatoires absolument continues

7.1 Densité, fonction de répartition et moments

Exercice 7.1 (difficulté ✪✪, durée ☆☆☆)
On dit qu'une variable aléatoire absolument continue X suit une loi de Pareto de paramètres $i > 0$ et $r > 0$ si et seulement si X admet la densité f_X suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < i, \\ \frac{ri^r}{x^{r+1}} & \text{si } x \geq i. \end{cases}$$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(i,r)$.

On pourra utiliser dans cet exercice le résultat (admis) suivant. Pour tout $p > 1$ et pour tout $a > 0$, on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}.$$

On suppose dans les trois questions suivantes que $X \sim \mathcal{P}(i,r)$.

Question 1 Calculez $\mathbb{P}(X < i)$.

Question 2 Déterminez la fonction de répartition de X, F_X.

Question 3 Calculez $E(X)$ dans le cas où $r > 1$.

On étudie maintenant une variable aléatoire G modélisant le salaire des joueurs de ligue 1 qu'on suppose suivre une loi de Pareto $\mathcal{P}(i,r)$ dont on cherche à déterminer les paramètres. G est exprimée en millions d'euros.

Question 4 On constate qu'il est trois fois plus probable d'avoir $G > 3$ que $G > 9$. En déduire la valeur de r.

Question 5 On constate d'autre part que la probabilité d'observer une valeur de G plus petite que 2 vaut $\frac{1}{4}$. En déduire la valeur de i.

7.2 Lois classiques pour les variables continues

Exercice 7.2 (difficulté ✪✪, durée ☆☆☆)
L'annonce d'un concours radio peut passer à tout moment entre 7h et 10h. On cherche la probabilité qu'a un auditeur d'entendre cette annonce dans son intégralité s'il se réveille à 8h précisément.

On suppose d'abord que l'heure de démarrage de l'annonce est un nombre réel arbitraire compris entre 7 et 10, représenté par une variable aléatoire T.

Question 1 Quelle est la nature de T ?

Question 2 Donner $T(\Omega)$.

Question 3 Quelle loi usuelle semble adaptée pour modéliser T en respectant le principe que « l'annonce peut passer à tout moment entre 7h et 10h » ?

Question 4 Calculer la probabilité d'entendre l'annonce dans son intégralité selon celle loi.

On suppose maintenant que les annonces et émissions ne peuvent démarrer qu'à des heures de la forme x heure $2m$ minutes (donc avec un nombre pair de minutes). Par exemple, on peut émettre l'annonce en démarrant à 7h00 et à 7h02, mais pas à 7h01 ni à 8h15. On suppose aussi que l'annonce dure 1 minute et qu'elle doit être terminée avant 10h. Soit T la variable aléatoire indiquant l'heure de démarrage de l'annonce :

Question 5 Quelle est la nature de T ?

Question 6 Donner $T(\Omega)$.

Question 7 Quelle loi usuelle semble adaptée pour modéliser T ?

Question 8 Calculer la probabilité d'entendre l'annonce dans son intégralité selon celle loi.

Exercice 7.3 (difficulté ✪, durée ☆)
D'après une étude TNS Sofres de 2006, le délai moyen de renouvellement de téléphone portable est de 18 mois. En supposant la durée de vie exponentielle, quelle est la probabilité de conserver un téléphone portable au moins 36 mois, soit la durée de vie moyenne estimée d'une batterie ?

Exercice 7.4 (difficulté ✪✪, durée ☆☆)
On suppose que la durée de vie moyenne typique d'un écran LCD est de 10 000 heures d'utilisation (à ne pas confondre avec le temps entre l'achat et la première panne). On suppose que la durée de vie typique suit une loi exponentielle et qu'un écran est utilisé exactement 4 heures par jour. Le constructeur fournit une garantie de 2 ans pour les écrans concernés.

Question 1 Calculer la durée de vie moyenne d'un écran en années depuis l'achat.

Question 2 Calculer la probabilité de panne dans les deux premières années qui suivent l'achat de l'écran.

Question 3 En supposant que la réparation d'une panne dans la durée de garantie coûte au constructeur α euros alors que la vente d'un écran rapporte β euros, donner la condition que doivent vérifier α et β pour que le constructeur ne perde pas d'argent en moyenne en raison de la garantie. On suppose que l'écran ne peut tomber en panne qu'au plus une seule fois dans la durée de garantie.

Annexes

Annexe A

Récapitulatif de lois classiques

Loi	Valeurs prises	Loi	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}_n$	$\{1,\ldots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$	$\{0{,}1\}$	$P(X=0)=1-p$ $P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\ldots,n\}$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\{1,2,3,\ldots,\}$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $F(k)=1-(1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ

Loi	Valeurs prises	Densité/Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$	$[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE A.1: Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Évolutions de ce document

La dernière version de ce document se trouve sur la page
http://apiacoa.org/teaching/statistics/index.fr.html.

05/01/2017 : version 0.4.0

- ajout de trois exercices de théorie des ensembles ;
- ajout d'un exercice de dénombrement ;
- ajout d'un chapitre sur les fonctions ;
- ajout d'un exercice sur l'équiprobabilité ;
- ajout d'un exercice sur les variables aléatoires simples ;
- clarifications mineures de certains énoncés.

12/01/2014 : version 0.3.0

- suppression d'exercices sur les ensembles ;
- ajout de trois exercices sur les probabilités simples ;
- ajout d'un exercice sur le conditionnement ;
- ajout d'un exercice de synthèse sur les variables aléatoires discrètes ;
- ajout d'un exercice sur la loi de Pareto ;
- ajout d'indications de difficulté et de durée pour chaque exercice ;
- réorganisation du recueil pour mieux suivre le plan du cours.

09/01/2014 : version 0.2.0

- ajout d'un exercice sur la loi de Poisson.

08/01/2014 : version 0.1.0

- ajout d'un exercice sur le Chevalier de Méré ;
- ajout d'un exercice sur les dés de Sicherman ;
- ajout de deux exercices de théorie des ensembles ;
- ajout d'un exercice sur la loi uniforme ;
- ajout d'exercices de dénombrement.

10/01/2013 : version 0.0.1 première version diffusée avec sept exercices.