République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire BELHADJ BOUCHAIB , Ain Temouchent
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

1[ère] année *Master R.I.D. : M1- S1* — *Année Universitaire 2016 / 2017*

Matière : Probabilités, Statistiques et applications

Fiche de TD -0-

1. *En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.*
Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

---

2. *Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.*

1) *Combien de codes différents peut-on former ?*
2) *Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?*
3) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?*
4) *Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?*
5) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?*

1	2	3
4	5	6
A	B	C

---

3. *Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système*

4.
1) *Dénombrer les anagrammes du mot INFORMATIQUE*
2) *Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot INFORMATIQUE :*
a) *commençant et finissant par une consonne ;*
b) *commençant et finissant par une voyelle ;*

---

5. *De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?*

6. *On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geq 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente.*
   1. *Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?*
   2. *Quelle est la probabilité que les deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r-1$ personnes) ?*

---

7. *On étudie les connexions d'internautes à un site web. Celui-ci propose six versions de son contenu, réparties en trois versions anglaises (notées en) et trois versions françaises (notées fr). Pour chaque langue, les trois versions sont les suivantes : une version normale (n), une version pour les petits écrans comme ceux des téléphones (p) et une version pour les écrans de taille moyenne comme ceux des tablettes (m). En étudiant l'historique des connexions, on constate que les versions ne sont pas utilisées de façon uniforme. Plus précisément, si on choisit un internaute connecté au hasard, la probabilité de tomber sur chacune des versions est donnée par la table suivante :*

$version$	(fr,n)	(fr,p)	(fr,m)	(en,n)	(en,p)	(en,m)
$\mathbb{P}(\{version\})$	a	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	b	$\frac{3}{21}$

Dans la table, chaque version est désignée par sa langue et son type. L'ensemble des six versions forme l'univers. Les lettres a et b désignent des paramètres à déterminer.
Question 1 Quelles propriétés doivent vérifier a et b pour que P soit bien une probabilité sur ?
Question 2 On constate que le site a deux fois plus d'utilisateurs anglophones que d'utilisateurs francophones. En déduite a et b.
Question 3 Quel pourcentage d'utilisateurs du site consultent la version pour petit écran ?

Chargée des T.D. : Mme BENNAFLA.

TD n° 1

Exo 1

$P(X<5) = \frac{1}{3}$

$P(X=3) = P(X=4)$

$P(X<5) = P(X=3) + P(X=4)$

$P(X=3) = P(X=4) \Rightarrow 2P(X=3)$ ou $2P(X=4)$

$P(X<5) = \frac{1}{3} \Rightarrow 2P(X=3) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(X=3) = P(X=4) = \frac{1}{6}$

$\Sigma P(X=x) = 1$ $\qquad P(X>5) = P(X=6) = \frac{1}{2}$

$P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 1$

$\Rightarrow P(X=5) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$X(\Omega)$	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Exo 2 :

$X(\Omega)$ = obtenir une boule blanche $\quad X = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(x=0) = N_1$ et N_2 et $N_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

$P(x=1) = B_1N_2N_3 \vee N_1B_2N_3 \vee N_1N_2B_3 = \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{32}$

$P(x=2) = B_1B_2N_3 \vee B_1N_2B_3 \vee N_1B_2B_3 = \left(\frac{1}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{32}$

$P(x=3) = B_1B_2B_3 = \frac{1}{4}\,\frac{2}{4}\,\frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

$X(\Omega) = x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$
$F_X(x)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{32}{32} = 1$

Exo 3 :

$Z(\Omega)$ = valeur absolue de la différence entre 2 dés

$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} \quad z = |w_i - w_j|$

dés 2 \ dés 1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$Z(\Omega) = z$	0	1	2	3	4	5
$P(Z=z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$
$F_Z(z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{34}{36}$	$\frac{36}{36}$
$zP(Z=z)$	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{10}{36}$
z^2P	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{64}{36}$	$\frac{50}{36}$

$E = \Sigma_z zP = \frac{70}{36} = 1{,}94 \qquad V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{210}{36} - (1{,}94)^2 = 2{,}06$

Exo4 :

a) 1-) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, -2\}$ $\qquad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$F_X(x) = \begin{cases} x \leq -2 \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ x \leq 2 \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ x \leq 3 \rightarrow \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 \end{cases}$$

$X(\Omega)$	-2	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$F_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
$x P(X=x)$	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
$x^2 P(X=x)$	$\frac{12}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$

2-) $\mathbb{E}(X) = \sum_k k P(X=k)$

$\mathbb{E}(X) = -1 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 0$

3) $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$= \frac{12}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} - 0 = \frac{13}{3}$

b) 1-) $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$

$Y(\Omega) = \{-5, 1, 2, 3\}$

Lancé 1 \ Lancé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	-5	-5	-5
5	3	3	3	-5	-5	-5
6	3	3	3	-5	-5	-5

2-)

$Y(\Omega)$	-5	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
$y P(Y=y)$	$\frac{-45}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{45}{36}$
$\cancel{y^2 P(Y=y)}$				

$\mathbb{E} = \sum_k k P(Y=k)$

$= \frac{-45}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{45}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

3-) Y est plus avantageuse que X car $\mathbb{E}(Y) > \mathbb{E}(X)$

Exo5 :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f(x)$ densité $\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1 \end{cases}$

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire BELHADJ BOUCHAIB , Ain Temouchent
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

1ère année Master R.I.D. : M1- S1 — Année Universitaire 2016 / 2017
Matière : Probabilités, Statistiques et applications

Fiche de TD -1-

Exercice 1:

Soit X une v.a.r. discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que: $P([X<5]) = 1/3$; $P([X>5]) = 1/2$; $P([X=3]) = P([X=4])$.

Exercice 2:

Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanches et 3 noires, 2 blanches et 2 noires et 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes et on désigne par X le nombre de boule blanches obtenues.

- Donner la loi de X et sa fonction de répartition

Exercice 3:

On lance 2 dès et on appelle Z la v.a.r. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

- Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance

Exercice 4:

On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué.
S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en euros (c'est-à-dire 1 € s'il obtient 1, par exemple).
Sinon, il perd 2€. On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (négatif en cas de perte).

a)
1. Donnez la loi de X et sa fonction de répartition F_X.
2. Calculez l'espérance de X.
3. Calculez la variance de X.

On modifie le jeu de la façon suivante : les gains restent les mêmes pour les résultats 1, 2 ou, mais si le joueur obtient autre chose, il relance le dé. S'il obtient 3 ou moins, il gagne 3 €, sinon il perd 5 €.

b)
1. Décrivez formellement l'univers du nouveau jeu.
2. Donnez la loi de Y (qui désigne de nouveau le gain du joueur) et calculez son espérance.
3. Quelle variante du jeu est la plus avantageuse pour le joueur ?

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. À quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?
2. On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f. On suppose que $P(X \geq 0,5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.

Exercice 6 :

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble

$$X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$$

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.

3. Donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.
4. Calculer $E(Y)$ de deux façons différentes.

Reprendre les deux questions précédentes pour la variable $Z = (X+1)^2$.

Chargée des T.D. : Mme BENNAFLA.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire BELHADJ BOUCHAIB , Ain Temouchent
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

1ère année Master R.I.D. : M1- S1 — Année Universitaire 2016 / 2017
Matière : Probabilités, Statistiques et applications

Fiche de TD -1-

Exercice 7 :

Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. On peut réaliser les opérations suivantes :

– on utilise trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts.
– on place les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.

On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q. On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.

1. Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.
2. Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.
3. Si p = q, quelle solution de redondance est la plus intéressante ?

Exercice 8 :

Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par :

1. aucun client ;
2. 5 clients ;
3. au moins 6 clients.

Exercice 9 :

On remplit un verre de volume 20 cl d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl :

1. quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?

On vide 5 verres ainsi remplis dans une très grande bassine.

2. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

Exercice 10:

On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à 0,001 de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice 11:

Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise.
Soit X la variable "nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon".

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $P([X=0])$, $P([X \geq 1])$, $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Chargée des T.D. : Mme BENNAFLA.

Les conditions

1er cas : $f(x) \geqslant 0$

$f(0) = b \Rightarrow$ il faut que $b \geqslant 0$

$f(1) = a + b \Rightarrow$ il faut que $a + b \geqslant 0$:

* Si $a = 0$ $f(x) = b$ $b \geqslant 0$
* Si $a > 0$ $f \nearrow$ $f(x) \geqslant b$ $b \geqslant 0$
* Si $a < 0$ $f \searrow$ $f(x) \geqslant a + b \Rightarrow a \geqslant -b$

$f(x) \geqslant 0$ ssi $b \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $a \geqslant -b$

2ème cas : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(x)\,dx} + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} \cancel{f(x)}\,dx$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2 + b)\,dx$$

$= \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + b - 0 = \frac{a}{3} + b \Rightarrow$ il faut que $\frac{a}{3} + b = 1$

de plus $b \geqslant 0$ $a \geqslant -b$

* $\frac{a}{3} + b = 1 \Rightarrow b = 1 - \frac{a}{3} \Rightarrow$ il faut que $1 - \frac{a}{3} \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant 3$
* $a \geqslant -b \Rightarrow a + b \geqslant 0 \Rightarrow a + 1 - \frac{a}{3} \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant \frac{-3}{2}$

alors $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ ssi $\begin{cases} b \geqslant 0 \text{ et } b = 1 - \frac{a}{3} \\ a \in \left[-\frac{3}{2}, 3\right] \end{cases}$

2-) $P(X \geqslant 0,5) = \frac{7}{8}$

$$= \int_{0,5}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0,5}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} \cancel{f(x)}\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_{0,5}^1$$

$\left(\frac{a}{3} + b\right) - \left(\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{b \times 1}{2}\right) = \frac{a}{3} + b - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} =$

$P(X \geqslant 0,5) = \overbrace{\frac{a}{3} + b}^{1} - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} = 1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} = \frac{7}{8}$

$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ 1 - \frac{a}{24} - \frac{b}{2} = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$ car $b = 1 - \frac{a}{3}$ $\Rightarrow f(x) = 3x^2$

3-) $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 (3x^3)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$

$V(X) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (3x^4)\,dx = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$

Exo 6 : $X \sim \mathcal{U}(\{1,\dots,4\})$

$X(\Omega) = \{-3,-2,1,4\}$

$X(\Omega)$	-3	-2	1	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$xP(X=x)$	$-3/4$	$-2/4$	$1/4$	$4/4$
$x^2P(X=x)$	$9/4$	$4/4$	$1/4$	$16/4$

1/ $P(X) = \frac{1}{n} \Rightarrow P(X) = \frac{1}{4}$

2/ $\mathbb{E}(X) = \sum k\, P(X=k) = 0$

$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \frac{30}{4} - 0 = \frac{15}{2}$

3/ $Y = 2X + 1$

$Y(\Omega) = \{2(-3)+1,\ 2\times(-2)+1,\ 2\times1+1,\ 2\times4+1\}$

$= \{-5,-3,3,9\}$

$P(Y) = \frac{1}{4}$

4/ $\mathbb{E}(Y) = \sum k\, P(Y=k)$

$= \frac{-5}{4} + \frac{-3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 1$

$\mathbb{E}(Y) = 2\,\mathbb{E}(X) + 1 = 2\times 0 + 1 = 1$