Niveau : Master 1 Matière : Analyse de données

Corrigé type

Exercice 1 :

1. objectif de l'ACP (voir le cours) (1) point
2. Matrice centrée réduite

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad (0,25)$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$\bar{X}_1 = \frac{1}{3}(12+14+16)$ $\boxed{\bar{X}_1 = 14}$ (0,25)

$\bar{X}_2 = \frac{1}{3}(13+14+16)$ $\boxed{\bar{X}_2 = 13}$ (0,25)

$X_{centré} \; X_{ij} - \bar{X}_j$ (0,25) $X_{centré\,réduit} \; \frac{(X_j - \bar{X})}{\sigma_j}$ (0,25)

$\sigma_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_j)$ (0,25) (0,25)

$\Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{1}{3}\left((12-14)^2 + (14-14)^2 + (16-14)^2\right)$ $\boxed{\sigma_1 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

$\sigma_2^2 = \frac{1}{3}\left((13-13)^2 + (15-13)^2 + (11-13)^2\right)$ $\boxed{\sigma_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ (0,25)

ou $\boxed{\sigma_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \sigma_2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

$$X_{centré} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ (0,25)

$$X_{centré\,réduit} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$ (0,25)

2 - Matrice de variance covariance $V = \Gamma$ (0,25) car X matrice centrée réduite

$$\Gamma = \frac{1}{n} X^t X \quad (0,25) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(1)

Scanné avec CamScanner

3 - valeurs propres de Γ $\det(\Gamma - \lambda I) = 0$ 0,25

$$\Rightarrow \det(\Gamma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)(1-\lambda) - (-1/2)(-1/2) = 0 \\ \Rightarrow (1-\lambda)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left((1-\lambda) - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) \Rightarrow \end{cases}$$ 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{3}{2}} \quad \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$$ 0,5 0,5

4 - les composants principales de E_2

$$C_1 = X_{\text{centrée réduit}} \cdot u_1 \quad 0,25 \qquad C_2 = X_{\text{centrée réduit}} \cdot u_2 \quad 0,25$$

E_2

$$X_{\text{centrée réduit}} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour E_2

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{6}$$ 0,5

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{6}$$ 0,5

$$\boxed{E_2(\sqrt{6}, \sqrt{6})}$$

Exercice 2 : 1) L'objectif AFC 1 point

2) $z_{i.} = \sum_{j=2}^{2} z_{ij}$ 0,25 $\quad z_{.j} = \sum_{i=1}^{3} z_{ij}$ 0,25 $\quad \Pi = 90$

$$Z = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 30 \\ 10 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 30 \\ \hline 45 & 45 & 90 \end{pmatrix}$$ 0,25

$z_{.j}$ 0,25

$P_{ij} = \frac{1}{\Pi} z_{ij}$ 0,25 $\quad P_{i.} = \frac{z_{i.}}{\Pi}$ 0,25 $\quad P_{.j} = \frac{z_{.j}}{\Pi}$ 0,25

$$P = \begin{pmatrix} 15/90 & 15/90 & 30/90 \\ 10/90 & 20/90 & 30/90 \\ 20/90 & 10/90 & 30/90 \\ \hline P_{.j} \; 45/90 & 45/90 & \end{pmatrix}$$ 0,5 $\quad P_{i.}$

Scanné avec CamScanner

⇒ Tableau de fréquence

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 \\ 2/9 & 1/9 & 1/3 \\ P_{\cdot j} : 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{i\cdot}$$

0,5

2- La distance χ_2 $d(1,3)$

$$d(i,i') = \sum_j \frac{1}{P_{\cdot j}} \cdot \left(\frac{P_{ij}}{P_{i\cdot}} - \frac{P_{i'j}}{P_{i'\cdot}} \right)^2$$ 0,25

$$d(1,3) = \frac{1}{P_{\cdot 1}} \left(\frac{P_{11}}{P_{1\cdot}} - \frac{P_{31}}{P_{3\cdot}} \right)^2 + \frac{1}{P_{\cdot 2}} \left(\frac{P_{12}}{P_{1\cdot}} - \frac{P_{32}}{P_{3\cdot}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{1/2} \left(\frac{1/6}{1/3} - \frac{2/9}{1/3} \right)^2 + \frac{1}{1/2} \left(\frac{1/6}{1/3} - \frac{1/9}{1/3} \right)^2$$

0,25

$$= 2\left(\frac{3}{6} - \frac{6}{9} \right)^2 + 2\left(\frac{3}{6} - \frac{3}{9} \right)^2$$

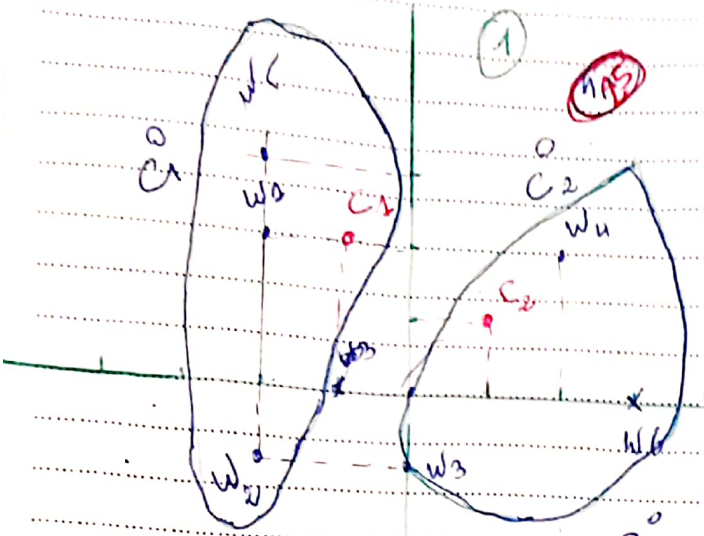
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2$$

$$= 2\left(\frac{-1}{6} \right)^2 + 2\left(\frac{1}{6} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{d(1,3) = 1/9}$$ 1

EX:03 algorithme de centres mobiles

Scanné avec CamScanner



$C_1(-1,2)$ $C_2(1,1)$

Etape 1 :

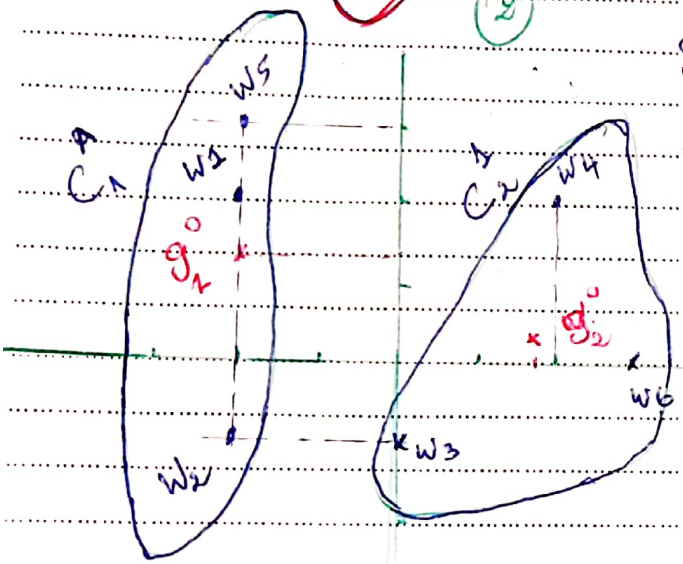
$gc_1^0 = \{w_1, w_2, w_5\}$ ✓ 0,5

$gc_2^0 = \{w_3, w_4, w_6\}$ ✓ 0,1

- calculer les centres de gravité de chaque classe

$g_1^0 = \left(\frac{-2-2-2}{3}, \frac{2-1+3}{3}\right) = \left(-2, \frac{4}{3}\right)$ 0,1

$g_1^0 = (-2, 1,33)$ 0,5



$g_2^0 \left(\frac{0+2+3}{3}, \frac{-1+2+0}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 0,1

$g_2^0 = (1,67, 0,33)$ 0,1

On retrouve la même classification que l'étape précédente, on arrête l'algorithme 0,1

$C_1^1 = \{w_1, w_2, w_5\}$ $C_2^1 = \{w_3, w_4, w_6\}$

0,1 0,1

Scanné avec CamScanner