المركز الجامعي بلحاج بوشعيب - عين تموشنت
Centre Universitaire BELHADJ BOUCHAIB-Aïn Témouchent

Master 1 Informatique Année universitaire 2019/2020

Matière : **Programmation Par Contraintes** **(durée : 1h30)**

Examen

le 29/01/2020

Les documents ne sont pas autorisés. Pas de calculatrice.
Très important : numérotez soigneusement vos réponses !!!

1. Ex1 (6 Pts)

Dans une crèche c'est l'heure du goûter pour les enfants. Chacun a droit à un fruit. Il y a une pomme, une poire, une orange, un pamplemousse, une banane, une pêche et un kiwi (il y a qu'une pièce de chaque fruit !!).
Les fruits préférés des enfants sont :

Artur	pomme, pamplemousse
Tomas	pomme, poire, orange, kiwi
Maxime	pomme, banane, pamplemousse
Emma	poire, pamplemousse, orange
Marie et Matilde	banane, pamplemousse
Lisa	poire, banane, orange, pêche

1.1 Représenter le problème sous la forme d'un CSP.

1.2 Si Emma prend une poire, est-ce que les autres enfants pourront chacun choisir un fruit préféré ? Si oui donner au moins une solution.

2. Ex2 (7 Pts)

Considérons le cryptogramme suivant :

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline D\,C\,B\,A \end{array}$$

On rappelle que chaque lettre correspond à un chiffre compris entre 0 et 9. Les lettres ne doivent pas prendre une même valeur.

2.1. Modéliser le problème sous la forme d'un CSP en utilisant la version avec les retenues.

2.2. Que peut-on remarquer sur la variable A ? Simplifier alors son domaine.

2.3. En déduire la valeur de A puis la valeur de D ?

2.4. Finir alors la résolution pour trouver les valeurs de B et C.

3. Ex3 (7 Pts) :

Soit le CSP définit par :
L'ensemble de contrainte $C = \{X + Y = 10,\ X < 8,\ Y > 4\}$
Les domaines des variables X et Y définies par $D_X = [1..10]$; $D_Y = [1..15]$

3.1. Rendre le CSP arc-consistant.

3.2. Le CSP est-il consistant, si oui donner l'ensemble des solutions.

3.3. On ajoute maintenant la contrainte suivante à C:

$$\text{"}X \text{ est premier"} \Rightarrow \text{"}Y \text{ est premier"}$$

-Donner alors l'ensemble des solutions du CSP.

Master 1 Informatique Année universitaire 2019/2020

Matière : Programmation Par Contraintes **(durée : 1h30)**

Examen **le 29/01/2020**

Les documents ne sont pas autorisés. Pas de calculatrice.
Très important : numérotez soigneusement vos réponses !!!

1. Ex1 (6 Pts)

Dans une crèche c'est l'heure du goûter pour les enfants. Chacun a droit à un fruit. Il y a une pomme, une poire, une orange, un pamplemousse, une banane, une pêche et un kiwi (il y a qu'une pièce de chaque fruit !!).
Les fruits préférés des enfants sont :

Artur	pomme, pamplemousse
Tomas	pomme, poire, orange, kiwi
Maxime	pomme, banane, pamplemousse
Emma	poire, pamplemousse, orange
Marie et Matilde	banane, pamplemousse
Lisa	poire, banane, orange, pêche

1.1 Représenter le problème sous la forme d'un CSP.

1.2 Si Emma prend une poire, est-ce que les autres enfants pourront chacun choisir un fruit préféré ? Si oui donner au moins une solution.

2. Ex2 (7 Pts)

Considérons le cryptogramme suivant :

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline D\,C\,B\,A \end{array}$$

On rappelle que chaque lettre correspond à un chiffre compris entre 0 et 9. Les lettres ne doivent pas prendre une même valeur.

2.1. Modéliser le problème sous la forme d'un CSP en utilisant la version avec les retenues.
2.2. Que peut-on remarquer sur la variable A ? Simplifier alors son domaine.
2.3. En déduire la valeur de A puis la valeur de D ?
2.4. Finir alors la résolution pour trouver les valeurs de B et C.

3. Ex3 (7 Pts) :

Soit le CSP définit par :
L'ensemble de contrainte $C = \{X + Y = 10,\ X < 8,\ Y > 4\}$
Les domaines des variables X et Y définies par $D_X = [1..10]$; $D_Y = [1..15]$

3.1. Rendre le CSP arc-consistant.
3.2. Le CSP est-il consistant, si oui donner l'ensemble des solutions.
3.3. On ajoute maintenant la contrainte suivante à C:

$$\text{"}X\ est\ premier\text{"} \Rightarrow \text{"}Y\ est\ premier\text{"}$$

-Donner alors l'ensemble des solutions du CSP.

Master 1 Informatique — Année universitaire 2019/2020

Matière: **Programmation Par Contraintes**

Corrections

1. Ex1 (6 Pts)

1.1. (3)

Il est facile de voir ici que les variables représentent les enfants, les domaines sont les fruits préférés pour chaque enfant et la seule contrainte est qu'il n'y a qu'une pièce de chaque fruit (il ya donc une contrainte Alldiffrent entre les variables).

Définissons donc le CSP P(X,C,D) suivant :

X={Artur, Tomas, Maxime, Emma, Marie, Matilde, Lisa}

Pour simplifier la représentation des domaines on remplace les noms des fruits par des numéros et donc on a : pomme→1,…,kiwi→7.

Donc, D={$D_{Artur}, \dots, D_{Lisa}$} avec :

$D_{Artur} = \{1, 4\}$
$D_{\text{Tomas}} = \{1, 2, 3, 7\}$
$D_{\text{Maxime}} = \{1, 4, 5\}$
$D_{\text{Emma}} = \{2, 3, 4\}$
$D_{\text{Marie}} = \{4, 5\}$
$D_{\text{Matilde}} = \{4, 5\}$
$D_{\text{Lisa}} = \{2, 3, 5, 6\}$

La contrainte est : **C={Alldiffrent(Artur, Tomas, Maxime, Emma, Marie, Matilde, Lisa)}**

1.2. (3)

Si Emma prend la poire et qu'il n'y a qu'une seule poire alors les autres enfants qui aiment ce fruit ne peuvent le choisir (contrainte Alldiffrent), on peut alors simplifier les domaines :

$D_{Artur} = \{1, 4\}$
$D_{\text{Tomas}} = \{1, 3, 7\}$
$D_{\text{Maxime}} = \{1, 4, 5\}$
$D_{\text{Emma}} = \{2\}$
$D_{\text{Marie}} = \{4, 5\}$
$D_{\text{Matilde}} = \{4, 5\}$
$D_{\text{Lisa}} = \{3, 5, 6\}$

On remarque que dans le cas Marie et Matilde, si l'une choisit l'un des deux fruits alors l'autre choisit obligatoirement l'autre fruit (Marie → banane et Matilde→pamplemousse ou Marie → pamplemousse et Matilde→ banane) et donc Artur et Maxime ne peuvent pas les choisir et dans ce cas leurs domaines deviennent : $D_{Artur} = \{1\}$ et $D_{\text{Maxime}} = \{1\}$ ce qui implique qu'il ne peut pas y avoir de solution.

<u>Conclusion</u> : **Si Emma choisit de prendre la poire alors les autres enfants ne pourront pas choisir un fruit préféré.**

2. Ex2 (7 Pts)

2.1. (2)

CSP(X,D,C) (avec les retenues):

X={A, B, C, D, r1, r2, r3}

D={$D_A, \dots, D_D, D_{r1}, \dots, D_{r3}$} avec $D_A = D_D = \{1, \dots, 9\}$, $D_B = D_C = \{0, \dots, 9\}$ et $D_{r1} = \cdots = D_{r3} = \{0, \dots, 3\}$

C={$C_1, \dots, C_4, Alldiffrent(A, B, C, D)$} avec :

C_1: $4 * D = A + 10 * r1$
C_2: $r1 + 4 * C = B + 10 * r2$
C_3: $r2 + 4 * B = C + 10 * r3$
C_4: $r3 + 4 * A = D$

2.2. (1.5)

A partir de C_1 on déduit que la somme $A + 10 * r1$ doit obligatoirement être paire car $4 * D$ est paire et comme le nombre 10 est pair alors A doit être obligatoirement pair d'où : $D_A = \{\mathbf{2, 4, 6, 8}\}$

2.3. (1.5)

Comme $0 < D \leq 9$ alors $0 < r3 + 4 * A \leq 9$ et si $A \geq 4$ alors $4 * A \geq 16 > 9$ donc obligatoirement $A = \mathbf{2}$

C_4 devient alors $r3 + 8 = D \Rightarrow D - 8 = r3$ et comme $0 \leq r3 \leq 3$ alors $D = 8$ ou $D = 9$.

Si $D = 9$ il facile de voir que dans C_1 on aura $4 * 9 = 2 + 10 * r1 \Rightarrow r1 = \frac{4*9-2}{10} \Rightarrow impossible!$

Donc obligatoirement $\boldsymbol{D = 8}$

2.4. (2)

Comme $D = 8$ et $A = 2$, on déduit de C_1: $\mathbf{r1} = \frac{\mathbf{4*8-2}}{\mathbf{10}} = \mathbf{3}$ et de C_4: $\mathbf{r3 = 8 - 4 * 2 = 0}$

On a alors :

C_2: $3 + 4 * C = B + 10 * r2$
C_3: $r2 + 4 * B = C$ $\Rightarrow$ $3 + 4 * (r2 + 4 * B) = B + 10 * r2 \Rightarrow 1 + 5 * B = 2 * r2$

Donc $r2 > 0$ car $1 + 5 * B > 0$ donc $0 < r2 \leq 3$

Si $r2 = 1 \Rightarrow 1 + 5 * B = 2 \Rightarrow pas\ de\ valeur\ de\ B\ possible$

Si $r2 = 2 \Rightarrow 1 + 5 * B = 4 \Rightarrow pas\ de\ valeur\ de\ B\ possible$

Si $\mathbf{r2 = 3} \Rightarrow 1 + 5 * B = 6 \Rightarrow \mathbf{B = 1} \Rightarrow \mathbf{C = 3 + 4 * 1 = 7}$

3. Ex3 (7 pts)

3.1. (2)

Initialement les domaines de X et Y sont :

$$\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ \\ D_Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \end{pmatrix}$$

On considérant les 2 contraintes X < 8 et Y > 4 on obtient alors

$$\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,6,7,-,-,-\} \\ \\ D_Y = \{-,-,-,-,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \end{pmatrix}$$

De même si on considère maintenant la contrainte X + Y = 10 on obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,-,-,-,-,-\} \\ \\ D_Y = \{-,-,-,-,5,6,7,8,9,-,-,-,-,-,-\} \end{pmatrix}}$$

Le CSP est à présent arc-consistant.

3.2. (2)

Oui, en effet, comme il y a que 2 variables, le CSP est consistant si et seulement si le CSP est arc-consistant (ce qui est le cas, voir la question précédente).

Les solutions sont donc : $\boxed{\{X = 1, Y = 9\};\ \{X = 2, Y = 8\};\ \{X = 3, Y = 7\};\ \{X = 4, Y = 6\};\ \{X = 5, Y = 5\}}$

3.3.(3)

Considérons maintenant la contrainte : "X est premier" ⟹"Y est premier"

C'est une contrainte logique et donc la satisfaire revient à trouver l'ensemble des cas où elle est vraie. Or nous savons que $p \Longrightarrow q$ est logiquement équivalent à $\bar{p} \vee q$

On déduit que "X est premier" ⟹"Y est premier" est équivalent à $\overline{\text{"X est premier"}}$ $\vee$ "Y est premier" c'est-à-dire ;

Nous avons ajouté à C la contrainte suivante : *"X n'est pas premier"* $\vee$ *"Y est premier"*

Et donc $C = \{X + Y = 10,\ X < 8,\ Y > 4, \text{"X n'est pas premier"} \vee \text{"Y est premier"}\}$

Finalement on va enlever de l'ensemble des solutions précédentes ($\{X = 1, Y = 9\}$; $\{X = 2, Y = 8\}$; $\{X = 3, Y = 7\}$; $\{X = 4, Y=6; X=5, Y=5\}$) celles qui ne vérifient pas la contrainte : *"X n'est pas premier"* $\vee$ *"Y est premier"*.

On remarque que la solution $\{X = 2, Y = 8\}$ est la seule solution qui ne vérifie pas cette contrainte et elle doit être enlevé (car le nombre 2 est premier).

Et donc les solutions du CSP sont maintenant : $\boxed{\{X = 1, Y = 9\};\ \{X = 3, Y = 7\};\ \{X = 4, Y = 6\};\ \{X = 5, Y = 5\}}$

Attention : Par définition le nombre 1 n'est pas premier (voir la définition d'un nombre premier)!!