LOIS DE PROBABILITE

- Variables aléatoires
- Lois discrètes
- Lois continues

1

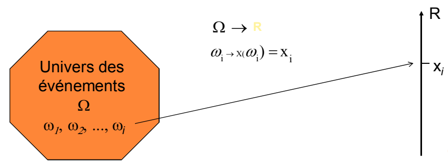
VARIABLES ALÉATOIRES

Une variable aléatoire X est une variable qui prend des valeurs numériques fonction du résultat d'une épreuve

X sert à caractériser le résultat de l'expérience aléatoire

$\Omega \to R$

$\omega_i \to X(\omega_i) = x_i$



2

Variables aléatoires

Deux types de variables aléatoires:

✓ **Variables aléatoires discrètes**
ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle

X = « face du dé » : prend les valeurs x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 (dénombrables)

✓ **Variables aléatoires continues**
peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné

X = « poids d'un nouveau-né » : x = toutes les valeurs, (généralement comprises entre 1 kg et 6)

3

Variables aléatoires

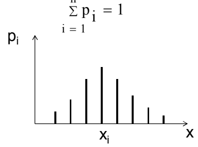
Notion de loi de probabilité

v.a. discrète

$R \to [0, 1]$

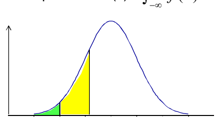
$x_i \to p(X = x_i) = p_i$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$



v.a. continue

Densité de probabilité f(x) / $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$



P(a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$

= P(X<b) - P(X<a)

4

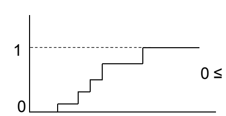
Variables aléatoires

Fonction de répartition F

F(x) = P(X ≤ x)

v.a. discrète

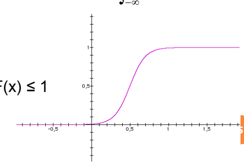
F(k)= P(X≤k) = $\sum_{i=1}^{k} p_i$



v.a. continue

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

0 ≤ F(x) ≤ 1



5

Variables aléatoires

v.a. discrète | v.a. continue

Espérance (moyenne)

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ $\quad$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$

Variance

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$ $\quad$ $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 f(x)dx$

6

LOIS DISCRÈTES

Loi Uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans {1, . . . , n} avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme des ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à un 1/n :

$$\forall k = 1 \ldots n,\ \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{n}.$$

E(X) = (n+1)/2 **V(X) = (n^2-1)/12**

7

LOIS DISCRÈTES

Loi de Bernoulli

Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'événement {X = 1} tandis que X = 0 correspond à un échec X(Ω) = {0; 1}. Puisque l'on a P[X = 0] = 1 − P[X = 1], la loi de X ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès) ; on parle alors de la loi de Bernoulli de paramètre p caractérisée par:

$$\mathbb{P}[X = 1] = p,$$
$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

E(X) = p **V(X) = (1-p)p**

8

LOIS DISCRÈTES

Loi binomiale

On appelle **variable Binomiale** une variable aléatoire X correspondant à la somme de n variables de Bernoulli. Notée X : **B**(n,p)

X = nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Loi de probabilité $p(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$ avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Elle est appelée **loi Binomiale**, notée **B(n,p)**

E(X) = np **V(X) = np(1-p)**

9

LOIS DISCRÈTES

Loi binomiale

Exemple: Répartition du nombre de filles dans les fratries de 4 enfants

p: probabilité d'avoir une fille à chaque naissance = 1/2

X(Ω) = {0, 1, 2, 3, 4} Loi de probabilité $\mathcal{B}$ (4 ; 1/2)

X=0	GGGG	q^4	0.0625
X=1	FGGG, GFGG, GGFG, GGGF	$4q^3p$	0.25
X=2	FFGG, FGFG, FGGF, GFFG, GFGF, GGFF	$6q^2p^2$	0.375
X=3	FFFG, FFGF, FGFF, GFFF	$4qp^3$	0,25
X=4	FFFF	p^4	0,0625
		somme =	1

Indépendance statistique p (G ∩ G ∩ G ∩ G) = q.q.q.q = q^4

10

LOIS DISCRÈTES

Loi Géométrique

La loi géométrique est une loi de probabilité simple à comprendre et à utiliser (ouf !). Elle décrit la situation d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes qu'il est nécessaire d'observer avant d'obtenir un succès. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p, dénoté X ~ Geom(p).

Loi de probabilité: $p(X = k) = p\, q^{k-1}$

Elle est appelée **loi Géometrique**, notée **Geom(p)**

E(X) = 1/p **V(X) = q/p²**

11

LOIS DISCRÈTES

Loi Hypergéométrique

La variable aléatoire X suit la loi Hypergéométrique H(N, m, n), alors

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Loi de probabilité: $\mathrm{Prob}\{X = k\} = \dfrac{C_m^k \times C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$

Elle est appelée **loi Hypergéométrique**, notée **H(N, m, n)**

E(X) = np **V(X) =** $np(1-p)\left(1-\dfrac{n-1}{N-1}\right)$

12

Lois discrètes

Loi Hypergéométrique

Exemple 01:

Dans une boîte, il y a 6 boules rouges et 8 boules jaunes.
On tire au hasard 3 boules de la boîte, sans remise.
Soit X (respectivement Y) le nombre de boules rouges (respectivement jaunes) tirées parmi les 3.
1) Expliciter la loi de X.
2) Calculer :
   a) E [X].
   b) E [Y].
   c) Var (Y).

13

Lois discrètes

Loi Hypergéométrique

Solution 01:

Loi de X est la loi hypergéométrique.
On choisit au hasard l'une des $\binom{14}{3}$ combinaisons équiprobables de 3 boules parmi les 14.
Parmi ces $\binom{14}{3}$ combinaisons, il y en a $\binom{6}{k}\binom{8}{3-k}$ comportant k boules rouges choisies parmi les 6, et 3 – k boules jaunes choisies parmi les 8, 0 <= k <= 3.

La probabilité que X = k, égale à la probabilité que Y = 3 – k, est donc donnée par la loi hypergéométrique

$$P[X = k] = \frac{\binom{6}{k}\binom{8}{3-k}}{\binom{14}{3}}, \quad 0 <= k <= 3.$$

14

Lois discrètes

Loi Hypergéométrique

Solution 01:

2°/ Espérances et variance.
a) E [X].
E [X] = $\sum_{k=0}^{k=3} k\,P(X = k)$=1/364(6 × 28 + 2 × 15 × 8 + 3 × 20) = 468/364 = 9/7==» 1,286.

b) E [Y].
E [Y] = E [3 – X] = 3 – E [X] =12/7 == » 1,714.

c) Var (Y).
Var (Y) = Var (3 – X) = Var (X) = E [X ²] – (E [X]) ²
E [X ²] =$\frac{1}{364}$ (6 × 28 + 2 ² × 15 × 8 + 3 ² × 20)= $\frac{828}{364}$= $\frac{207}{91}$

V [Y]= $\frac{207}{91}$ - $\frac{81}{49}$ = $\frac{396}{637}$ =0.622

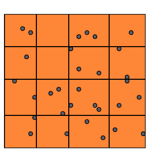
15

Lois discrètes

Loi de Poisson

Dans le cas d'une **variable de Poisson**, les événements se produisent les uns à la suite des autres, de façon aléatoire dans l'espace ou le temps.

X = nombre d'objets par boite



Loi de probabilité: $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Elle est appelée **loi de Poisson**, notée **P(λ)**

k = 0, 1, 2, …, ∞

E(X) = λ **V(X) = λ**

16

Lois discrètes

Loi de Poisson

Exemple 04:

Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par : aucun client ;
5 clients ;
au moins 6 clients..

17

Lois discrètes

Loi de Poisson

Solution 04:

Comme $C \sim \mathcal{P}(4)$, on a

$$\mathbb{P}(C = 0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} \simeq 0.0183.$$

En appliquant de nouveau la formule de la loi de Poisson, on a

$$\mathbb{P}(C = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} \simeq 0.156.$$

Enfin, pour calculer $\mathbb{P}(C \geq 6)$, on note que

$$\overline{\{C \geq 6\}} = \{C \leq 5\} = \bigcup_{k=0}^{5}\{C = k\},$$

car C prend seulement des valeurs entières. On a donc

$$\mathbb{P}(C \geq 6) = 1 - \sum_{k=0}^{5}\mathbb{P}(C = k) = 1 - e^{-4}\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!} \simeq 0.215.$$

18

Lois continues

Loi Uniforme

La v.a. X suit une loi uniforme sur l'intervalle borné [a; b] si elle a une densité f constante sur cet intervalle et nulle en dehors. Elle est notée υ([a; b]).

Densité de probabilité: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Elle est appelée **loi Uniforme**
Notée **υ ([a,b])**

E(X) = (a+b)/2 **V(X) = (b-a)²/12**

Fonction de répartition

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

Fonction de répartition

Lois continues

Loi Uniforme

Exemple 02 :

Martin et Valentin se donnent rendez-vous entre 12h et 14h. Proche du lieu fixé, Valentin arrivera assurément à 12h30. Quant à Martin, son arrivée dépend des conditions de circulation routière : il arrivera entre 12h et 13h.
1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Martin ?
2) Calculer la probabilité que Martin arrive avant Valentin.
3) Calculer la probabilité que Valentin attende Martin plus de 10 minutes.

Lois continues

Loi Uniforme

Solution 02 :

1) La variable aléatoire X donnant l'heure d'arrivée de Martin suit la loi uniforme sur [12,13].
2) Calculons la probabilité que Martin arrive avant Valentin, dont l'arrivée est programmée à 12h30.
Martin arrive avant Valentin si et seulement si Martin arrive avant 12h30, c'est-à-dire entre 12h et 12h30.
La probabilité recherchée est donc :

$$p(X \le 12{,}5) = p(12 \le X \le 12{,}5) = \frac{12{,}5 - 12}{13 - 12} = 0{,}5$$

Lois continues

Loi Uniforme

Solution 02 :

Calculons la probabilité que Valentin attende Martin plus de 10 minutes.

Valentin attend Martin plus de 10 minutes si et seulement si Martin arrive après 12h40, c'est-à-dire entre 12h40 et 13h. Comme 12h40 représente (12+ 40/60) h, c'est-à-dire 38/3 h, la probabilité recherchée est :

$$p\left(X \ge \frac{38}{3}\right) = p\left(\frac{38}{3} \le X \le 13\right) = \frac{13 - \frac{38}{3}}{13 - 12} = \frac{1}{3}$$

Lois continues

Loi Exponentielle

La loi exponentielle est utilisée pour mesurer des temps d'attente, des temps de service etc.
On la rencontre souvent en fiabilité pour modéliser des durées de vie des composants.

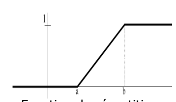
Densité de probabilité: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Elle est appelée **loi Uniforme**
Notée **X ~ ε(λ)**

E(X) = 1/λ **V(X) = 1/λ²**

Fonction de répartition

$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x\lambda} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Fonction de répartition

Lois continues

Loi Exponentielle

Exemple 03:

- Une machine tombe en panne selon la loi exponentielle avec un facteur λ =0.5/heure. Quelle est la probabilité que la machine tombe en panne entre la première et deuxième heure après le démarrage.

Solution 03 :

Lois continues

Loi Exponentielle

Exemple 03:

- Une machine tombe en panne selon la loi exponentielle avec un facteur λ =0.5/heure. Quelle est la probabilité que la machine tombe en panne entre la première et deuxième heure après le démarrage.

Solution 03 :

$$P(1hr \le T \le 2hr) = P(T \le 2hr) - P(T \le 1hr)$$
$$= \left(1 - e^{-0.5/hr \cdot 2hr}\right) - \left(1 - e^{-0.5/hr \cdot 1hr}\right) = 0.24$$

25

Lois continues

Loi Exponentielle

Exemple 04:

- La durée de vie d'un composant d'un système est supposée suivre une loi exponentielle de paramètre λ. Un grand nombre de ces composants sont testés et on a observé que 5% ne durent pas plus de 100 heures.

  Estimer la probabilité qu'un composant pris au hasard dure plus de 200 heures, ou T est la durée de la vie en heures

26

Lois continues

Loi Exponentielle

Exemple 04:

- La durée de vie d'un composant d'un système est supposée suivre une loi exponentielle de paramètre λ. Un grand nombre de ces composants sont testés et on a observé que 5% ne durent pas plus de 100 heures.

  Estimer la probabilité qu'un composant pris au hasard dure plus de 200 heures, ou T est la durée de la vie en heures

Solution 04 :

La probabilité de survie est $P(T > 100) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 100}) = 0.95 = e^{-\lambda \times 100}$

Pour $T \geq 200$, $P(T \geq 200) = e^{-\lambda 200}$

$$= (e^{(-\lambda 100)})^2$$
$$= (1 - .05)^2$$
$$= (0.95)^2 = 0.9025 \approx 0.9$$

27

Couple de Variables Aléatoires

Loi Jointe

Définition :

- Les définitions portant sur **la loi jointe** entre deux variables aléatoires *X* et *Y* impliquent que ces dernières soient définies sur **le même <u>espace fondamental</u>** Ω.

Il suffit alors de connaître la loi jointe des deux variables aléatoires ou loi de probabilité du couple (X,Y),la fonction définie par :
x,y → pxy = P ((X = x) et (Y = y)) dans le cas discret
Dans le cas continu, pxy = P ((xa < X < xb) et (yc < Y < yd)).

28

Couple de Variables Aléatoires

Théorème :

Si *X* et *Y* sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même univers Ω
alors : $E(XY) = E(X)E(Y)$

29

Couple de Variables Aléatoires

Loi Jointe

Exemple:

Une boite comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette boite et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.
Remplir le tableau suivant.

	X=0	X=1	X=2
Y=0			
Y=1			

30

Couple de Variables Aléatoires

Loi Jointe

Exemple:

Une boite comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette boite et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

	X=0	X=1	X=2
Y=0	0	1/3	1/6
Y=1	1/6	1/3	0

31

Couple de Variables Aléatoires

Lois marginales

Exemple:

Théorème 1. Soit
~
C = (X,Y) un couple aléatoire discret, on a :

$$1.\quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \qquad et \qquad 2.\quad \forall j \in [\![1,m]\!],\ p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

32

Couple de Variables Aléatoires

Lois marginales

Exemple:

Une urne comporte 2 boules blanches, 1 rouge et 1 noire. On tire simultanément deux boules de cette urne et l'on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules noires tirées.

	X=0	X=1	X=2	**Pi.**
Y=0	0	1/3	1/6	1/2
Y=1	1/6	1/3	0	1/2
P.j	1/6	2/3	1/6	

33

Couple de Variables Aléatoires

Lois marginales

Exemple:

La distribution conjointe de deux variables aléatoires discrètes se présente comme suit :

$X\|Y$	0	1	2
10	0	0.25	0
12	0.25	0	0.25
14	0	0.25	0

(a)déterminer les distributions marginales, puis E(X) et E(Y).
(b) Déterminer E(X.Y).
(c) les deux variables sont-elles indépendantes ?

34

Couple de Variables Aléatoires

Lois marginales

Exemple:

pour $j = 0, 1, 2$: $\boxed{p(X = 10) = 0.25,\ p(X = 12) = 0.5,\ p(X = 14) = 0.25}$

De même, $\boxed{p(Y = 0) = 0.25,\ p(Y = 1) = 0.5,\ p(Y = 2) = 0.25}$

$E(X.Y) = 10p(X = 10, Y = 1) + 12p(X = 12, Y = 1) + 14p(X = 14, Y = 1) + 10p(X = 10, Y = 2) + 12p(X = 12, Y = 2) + 14p(X = 14, Y = 2) = 0.25 \times 10 + 0.25 \times 14 + 0.25 \times 24 = 12$.

$E(X) = 12$ et $E(Y) = 1$, et donc $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, mais pourtant $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes :}}$ on voit par exemple que $p(X = 10, Y = 0)$ n'est pas égal à $p(X = 10)p(Y = 0)$.

35

$$\boxed{P(S = k) = \frac{3^{40-k}}{4^{40}}\binom{40}{k}}$$

Son espérance mathématique est $E(S) = n\,p = 10$, sa variance est $Var(S) = n\,p\,q = \frac{15}{2}$.

2°/ Calcul d'une probabilité.

$P(S \geq 36) = P(S = 36) + P(S = 37) + P(S = 38) + P(S = 39) + P(S = 40)$

$P(S = 36) = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times \frac{3^4}{4^{40}}$

$P(S = 37) = \frac{40 \times 39 \times 38}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{3^3}{4^{40}}$

$P(S = 38) = \frac{40 \times 39}{1 \times 2} \times \frac{3^2}{4^{40}}$

$P(S = 39) = 40 \times \frac{3}{4^{40}}$

$P(S = 40) = \frac{1}{4^{40}}$

$4^{40} = 16^{20} > 10^{20}$

$1 + 40 \times 3 + \frac{40 \times 39}{1 \times 2} \times 3^2 + \frac{40 \times 39 \times 38}{1 \times 2 \times 3} \times 3^3 + \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 3^4 < 5 \times 40^4 < 10^8$

Correction de l'exercice N01

Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^{5} = 0.20233$.

Correction de l'exercice N02

La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[X = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés. Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 2] = \frac{\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $P[X = 0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$P[X = k] = \frac{\binom{60}{k} \cdot \binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Correction de l'exercice N02

Résultats numériques :
$k = 0 : P[X = 0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$
$k = 1 : P[X = 1] \simeq 0.289$
$k = 2 : P[X = 2] \simeq 0.438$
$k = 3 : P[X = 3] \simeq 0.212$
L'espérance est $E(X) = 1.8$ (selon la formule $E(X) = np$).

Correction de l'exercice N04

La loi de Poisson de paramétre λ est définie par :
$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
$P(X\ {}^{3}\ 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-l} = 1 - (1 + \lambda) e^{-l}$
Pour $\lambda = 3$, $P(X \geq 2) = 1 - (1 + \lambda) e^{-l} = 1 - 4 e^{-3} = 0.800851726528544$.

Correction de l'exercice N05

1°/ Loi de X.
On lance le deuxième dé au moins une fois, donc les valeurs de X sont les entiers naturels différents de 0 :
X (Ω) = N*.
Le numéro du premier dé étant fixé, la probabilité pour que X = 1, c'est-à-dire la probabilité pour que le deuxième dé indique le même numéro que le premier à son premier lancer est :
$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$.

Le deuxième dé donne le même numéro que le premier seulement au nième lancer si, et seulement si, les n – 1 premiers lancers ont donné un numéro différent et le nième a donné le même numéro.
La probabilité de cet évènement est donc :

$$P(X = n) = p\, q^{n-1}$$

E(x)=1/p=6. V(x)=q/p²=30.

Correction de l'exercice N06

1°/ Loi de X.
On lance le deuxième dé au moins une fois, donc les valeurs de X sont les entiers naturels différents de 0 :
X (Ω) = N*.
Le numéro du premier dé étant fixé, la probabilité pour que X = 1, c'est-à-dire la probabilité pour que le deuxième dé indique le même numéro que le premier à son premier lancer est :
$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$.

Le deuxième dé donne le même numéro que le premier seulement au nième lancer si, et seulement si, les n – 1 premiers lancers ont donné un numéro différent et le nième a donné le même numéro.
La probabilité de cet évènement est donc :

$$P(X = n) = p\, q^{n-1}$$

E(x)=1/p=6. V(x)=q/p²=30.