Programmation Par Contraintes et Applications

Lebbah Yahia

Université d'Oran
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, Département d'Informatique
B.P. 1524 El-M'Naouer, 31000 Oran, Algérie
email: ylebbah@gmail.com

Cours PPC & Applications - 2014

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]
    - Absence de résultats pratiques de la PNE !

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]
  - Absence de résultats pratiques de la PNE !
  - Idée : Recours aux démarches heuristiques et aux raisonnements locaux, tout en guarantissant la globalité !

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]
  - Absence de résultats pratiques de la PNE !
  - Idée : Recours aux démarches heuristiques et aux raisonnements locaux, tout en guarantissant la globalité !
- Recherche opérationnelle : PL (198?, ...), Graphes (1994, ...), PLNE (199?, ...), PNLNE (200?, ...), ...

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]
  - Absence de résultats pratiques de la PNE !
  - Idée : Recours aux démarches heuristiques et aux raisonnements locaux, tout en guarantissant la globalité !
- Recherche opérationnelle : PL (198?, ...), Graphes (1994, ...), PLNE (199?, ...), PNLNE (200?, ...), ...
  - 1ère Idée : RO pour améliorer la PPC

Origine

La programmation par contraintes (PPC) est issue d'un rapprochement entre :

- Satisfaction de contraintes : Le système Alice - [*J.L. Laurière, A Language and a Program for Stating and Solving Combinatorial Problems, AIJ 1978*]
  - Absence de résultats pratiques de la PNE !
  - Idée : Recours aux démarches heuristiques et aux raisonnements locaux, tout en guarantissant la globalité !
- Recherche opérationnelle : PL (198?, ...), Graphes (1994, ...), PLNE (199?, ...), PNLNE (200?, ...), ...
  - 1ère Idée : RO pour améliorer la PPC
  - 2ème Idée : PPC pour améliorer la RO

$$\text{PPC} = \text{Contraintes} + \text{Résolution}$$

La notation CSP

Un CSP (Constraint Satisfaction Problem) $\mathcal{P}$ est un triplet $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$, avec :

- $\mathcal{X}$ un ensemble de n variables $x_1, \ldots, x_n$.

La notation CSP

Un CSP (Constraint Satisfaction Problem) $\mathcal{P}$ est un triplet $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$, avec :

- $\mathcal{X}$ un ensemble de n variables $x_1, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{D}$ le n-uplet $\langle D_1, \ldots, D_n \rangle$ des domaines des variables. D_i est l'ensemble contenant les valeurs de la variable x_i.

$$x_i \in D_i, i = 1..n.$$

La notation CSP

Un CSP (Constraint Satisfaction Problem) $\mathcal{P}$ est un triplet $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$, avec :

- $\mathcal{X}$ un ensemble de n variables $x_1, \ldots, x_n$.
- $\mathcal{D}$ le n-uplet $\langle D_1, \ldots, D_n \rangle$ des domaines des variables. D_i est l'ensemble contenant les valeurs de la variable x_i.

$$x_i \in D_i, i = 1..n.$$

- $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ l'ensemble des contraintes. Sémantiquement

$$C_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) \subseteq D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_l}.$$

Exemple : cryptarithmétique

Remplacer chaque lettre par une décimale telle que la somme

$$\begin{array}{rr} & S\ E\ N\ D \\ + & \\ & M\ O\ R\ E \\ \hline = & M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

soit correcte.

Exemple : cryptarithmétique

Remplacer chaque lettre par une décimale telle que la somme

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & S & E & N & D \\
+ & & & & & \\
 & r1 & M & O & R & E \\
 & & r2 & & r4 & \\
\hline
= & M & O & N & E & Y
\end{array}
$$

soit correcte.
Il existe une solution unique $9567 + 1085 = 10652$.

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$\mathcal{X} = \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\}$$

`variables de decision` `variables auxiliaires`

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} = \quad & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = \quad & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
& D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
& D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1]
\end{aligned}$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} = \quad & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = \quad & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
& D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
& D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = \quad & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : \quad & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y
\end{aligned}
$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{X} = & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
 & D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
 & D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y \\
C_2 : & S \neq 0; \quad C_3 : M \neq 0 \quad C_4 : R_1 = M
\end{array}$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{X} = & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
 & D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
 & D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y \\
C_2 : & S \neq 0; \quad C_3 : M \neq 0 \quad C_4 : R_1 = M \\
C_5 : & R_2 + S + M = O + 10 \times R_1
\end{array}
$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} = \quad & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = \quad & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
& D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
& D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = \quad & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : \quad & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y \\
C_2 : \quad & S \neq 0; \quad C_3 : M \neq 0 \quad C_4 : R_1 = M \\
C_5 : \quad & R_2 + S + M = O + 10 \times R_1 \\
C_6 : \quad & R_3 + E + O = N + 10 \times R_2
\end{aligned}
$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{X} = & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
 & D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
 & D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y \\
C_2 : & S \neq 0; \quad C_3 : M \neq 0 \quad C_4 : R_1 = M \\
C_5 : & R_2 + S + M = O + 10 \times R_1 \\
C_6 : & R_3 + E + O = N + 10 \times R_2 \\
C_7 : & R_4 + N + R = E + 10 \times R_3
\end{array}
$$

Exemple : cryptarithmétique - CSP

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{X} = & \{S, E, N, D, M, O, R, Y, R_1, R_2, R_3, R_4\} \\
\mathcal{D} = & \{D_S, D_E, D_N, D_D, D_M, D_O, D_R, D_Y, D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\} \\
 & D_S = D_E = D_N = D_D = D_M = D_O = D_R = D_Y = [0...9], \\
 & D_{R_1} = D_{R_2} = D_{R_3} = [0...1] \\
\mathcal{C} = & \{C_1, ..., C_8\} \\
C_1 : & S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y \\
C_2 : & S \neq 0; \quad C_3 : M \neq 0 \quad C_4 : R_1 = M \\
C_5 : & R_2 + S + M = O + 10 \times R_1 \\
C_6 : & R_3 + E + O = N + 10 \times R_2 \\
C_7 : & R_4 + N + R = E + 10 \times R_3 \\
C_8 : & D + E = Y + 10 \times R_4
\end{array}
$$

Exemple : emploi du temps

Définir l'emploi du temps de managers d'un centre d'assistance comportant 5 activités, représentés par un ensemble $A = \{$**M***atin*, **J***our*, **A***près-midi*, **S***oir*, **W***eek-end*$\}$, 7 personnes, représentés par l'ensemble $P = \{Hassen, Yassine, Ahmed, Tarik, Omar, Saïd, Ali\}$. Une personne de P doit effectuer au moins une des activiés de A. On veut affecter les activités aux managers en respectant le fait que :

- Au moins une personne doit faire M, et au plus deux.
- Au moins une personne doit faire J, et au plus deux.
- Au moins une personne doit faire A, et pas plus d'une.
- Au plus deux personnes peuvent faire S.
- Au plus deux personnes peuvent faire W.

Exemple : emploi du temps

Définir l'emploi du temps de managers d'un centre d'assistance comportant 5 activités, représentés par un ensemble $A = \{$**M***atin*, **J***our*, **A***près-midi*, **S***oir*, **W***eek-end*$\}$, 7 personnes, représentés par l'ensemble $P = \{Hassen, Yassine, Ahmed, Tarik, Omar, Saïd, Ali\}$. Une personne de P doit effectuer au moins une des activiés de A. On veut affecter les activités aux managers en respectant le fait que :

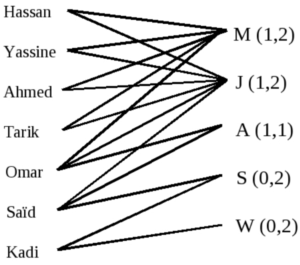
- Au moins une personne doit faire M, et au plus deux.
- Au moins une personne doit faire J, et au plus deux.
- Au moins une personne doit faire A, et pas plus d'une.
- Au plus deux personnes peuvent faire S.
- Au plus deux personnes peuvent faire W.
- *Hassan* est intéressé par M et J; *Yassine* par M et J; *Ahmed* par M et J; *Tarik* par M et J; *Omar* par M, J et A; *Sad* par J, A et S; *Ali* par S et W;

Exemple : emploi du temps - CSP

$$\mathcal{X} = \{H, Y, A, T, O, S, K\} \quad \mathcal{D} = \{D_H, D_Y, D_A, D_T, D_O, D_S, D_K\}$$
$$D_H = \{M, J\}, ..., D_A = \{S, W\} \qquad \mathcal{C} = \{C_1\}$$

Exemple : emploi du temps - CSP

$$\mathcal{X} = \{H, Y, A, T, O, S, K\} \quad \mathcal{D} = \{D_H, D_Y, D_A, D_T, D_O, D_S, D_K\}$$
$$D_H = \{M, J\}, ..., D_A = \{S, W\} \qquad \mathcal{C} = \{C_1\}$$
$$C_1 : \quad gcc(\{H, Y, A, T, O, S, K\}, \{M, J, A, S, W\}, [1, 1, 1, 0, 0], [2, 2, 1, 2, 2])$$



Exemple : ordonnancement

Soit un problème d'odonnancement :

- 7 tâches.
- Chaque tâche a une durée et une consommation de ressources.

tâche	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
durée	16	6	13	7	5	18	4
ressource	2	9	3	7	10	1	11

Ordonnancer les tâches sans dépasser la capacité en ressource 13 à n'importe quel instant. (Toute les tâches sont effectuées en moins de 30 minutes.)

Exemple : ordonnancement - CSP

$\mathcal{X} = LO \cup LE$
$LO = \{O_1, ..., O_7\}$
$LE = \{E_1, ..., E_7\}$
$D_{O_1} = ... = D_{O_7} = D_{E_1} = ... = D_{E_7} = [1, ..., 30]$
$C_1 : O_1 + 16 = E_1 \quad C_2 : O_2 + 6 = E_2 \quad C_3 : O_3 + 13 = E_3$
$C_4 : O_4 + 7 = E_4 \quad C_5 : O_5 + 5 = E_5 \quad C_6 : O_6 + 18 = E_6$
$C_7 : O_7 + 4 = E_7$
Soit $D = (16, 6, 13, 7, 5, 18, 4)$, $R = (2, 9, 3, 7, 10, 1, 11)$, $L = 13$
$C_8 : \forall i \in \boldsymbol{N}, \Sigma_{j | O_j \leq i \leq O_j + D_j - 1} R_j \leq 13$

Exemple : mélange chimique

Nous avons quatre réservoires : $R1, R2, R3$ et $R4$. Les deux premiers reçoivent trois produits de sources distinctes, puis leur contenu est combiné dans les deux autres afin de créer les mélanges désirés. La question est de déterminer la quantité de chaque produit à acheter afin de maximiser les profits.

$$
\begin{array}{ll}
 & x_1 \geq 0, \leq 100, x_2 \geq 0, \leq 100, \\
 & x_3 \geq 0, \leq 100, x_4 \geq 0, \leq 100, x_5 \geq 1, \leq 3. \\
\textit{minimize} & 120x_1 + 60x_2 + 10x_3 - 50x_4 - 50x_1x5 - 50x_2x_5 \\
\textit{subject to} & c_1 : 2.5x_1 + 0.5x_3 - x_1x_5 \geq 0 \\
 & c_2 : 1.5x_2 - 0.5x_4 - x_2x_5 \geq 0 \\
 & c_3 : x_1 + x_3 \leq 10 \\
 & c_4 : x_2 + x_4 \leq 20
\end{array}
$$

Exemple : PPC et test logiciel

- Test structurel :
  Trouver un jeu de cas de test dont le flot d'exécution passe par un point du programme !
- Démarches classiques : génération aléatoire !
  → un fruit du hasard !
- Avec la PPC :
  - Transformation du programme en un système de contraintes
  - Transformation du critère structurel en une contrainte
  - Résolution du système résultant
    - Pas de solution : du code mort
    - Des solutions : toutes sont des cas de test

```
int proc(int i)
  int j;
  j := 2;
  if (I ≤ 16) {
      j := j*I;
  }
  if (j > 8) {
      j := 0
  }
  return (j)
```

Exemple : PPC et test logiciel

```
int proc(int i)
  int j;
  j := 2;
  if (I ≤ 16) {
      j := j*i;
  }
  if (j > 8) {
      j := 0
  }
  return (j)
```

$I_0 \in [0,\ 2^{16}-1]$

$J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 \in [0,\ 2^{16}-1]$

$J_1 = 2$

$ite(J_1 \leq 16,$
$\quad J_2 = J_1 * I_0 \wedge J_3 = J_2,$
$\quad J_3 = J_1)$

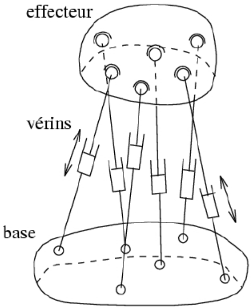
$ite(J_3 \leq 8,$
$\quad J_4 = 0 \wedge J_5 = J_4,$
$\quad J_5 = J_3)$

$RET = J_5$

$J3 > 8$

- Après un filtrage par *arc-consistance* : $i \in [5,\ 16]$
- Après une *énumération* : parmi les solutions $i = 5$

Exemple : PPC et robotique



Problem 1 (Gough-Stewart [11]).

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 31;\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 39;\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 29; \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + 6x_1 - 6x_2 = 51; \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 + 7x_1 - 2y_1 - 7x_3 + 2y_3 = 50; \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_1z_3 + x_2 - 2y_2 - x_3 + 2y_3 = 34; \\ -12x_1 + 15y_1 - 10x_2 - 25y_2 + 18x_3 + 18y_3 = -32; \\ -14x_1 + 35y_1 - 36x_2 - 45y_2 + 30x_3 + 18y_3 = 8; \\ 2x_1 + 2y_1 - 14x_2 - 2y_2 + 8x_3 - y_3 = 20; \\ x_1 \in [-2.00, 5.57];\ y_1 \in [-5.57, 2.70];\ z_1 \in [0, 5.57] \\ x_2 \in [-6.25, 1.30];\ y_2 \in [-6.25, 2.70];\ z_2 \in [-2.00, 6.25] \\ x_3 \in [-5.39, 0.70];\ y_3 \in [-5.39, 3.11];\ z_3 \in [-3.61, 5.39] \end{cases}$$

Exemple : vérification et SAT

- Modélisation des problèmes de vérification sous forme de formules booléennes

$$(a_{11} \vee \dots \vee a_{1l_1}) \wedge (a_{21} \vee \dots \vee a_{2l_2}) \wedge \dots \wedge (a_{n1} \vee \dots \vee a_{nl_n})$$

- Résolution de ces formules avec les solveurs SAT

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

- Problèmes NP-complets, NP-difficiles, ... problèmes indécidables, ...

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

- Problèmes NP-complets, NP-difficiles, ... problèmes indécidables, ...
- ... difficulté dans le cas général, ... mais les instances peuvent être résolues “r a p i d e m e n t”
- Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

- Problèmes NP-complets, NP-difficiles, ... problèmes indécidables, ...
- ... difficulté dans le cas général, ... mais les instances peuvent être résolues "r a p i d e m e n t"
- Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration
- Filtrage :
  - méthode de résolution disponible pour une contrainte C_i,
  - exploitation de cette méthode pour supprimer les valeurs ne participant pas aux solutions de C_i.

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

- Problèmes NP-complets, NP-difficiles, ... problèmes indécidables, ...
- ... difficulté dans le cas général, ... mais les instances peuvent être résolues "r a p i d e m e n t"
- Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration
- Filtrage :
  - méthode de résolution disponible pour une contrainte C_i,
  - exploitation de cette méthode pour supprimer les valeurs ne participant pas aux solutions de C_i.
- Décomposition : Séparation, branching, énumération, ...

Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration

- Problèmes NP-complets, NP-difficiles, ... problèmes indécidables, ...
- ... difficulté dans le cas général, ... mais les instances peuvent être résolues "r a p i d e m e n t"
- Résolution = Filtrage + Décomposition + Exploration
- Filtrage :
  - méthode de résolution disponible pour une contrainte C_i,
  - exploitation de cette méthode pour supprimer les valeurs ne participant pas aux solutions de C_i.
- Décomposition : Séparation, branching, énumération, ...
- Exploration : Parcours astucieux des noeuds de l'arbre de recherche

Définitions graphiques de base

hypergraphes des contraintes

A chaque CSP $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ est associé un hypergraphe des contraintes obtenu en représentant chaque variable du CSP par un sommet et chaque contrainte $C_j(x_{j_1}, \ldots, x_{i_l})$ par une hyperarête entre $x_{j_1}, \ldots,$ et x_{i_l}.

hypergraphe de consistance

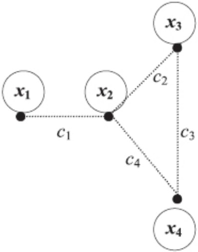
L'hypergraphe de consistance ou microstructure d'un CSP $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ est l'hypergraphe dont les sommets sont le éléments de domaines d_i, et qui comporte une hyperarête $d_{i_1}, \ldots, d_{i_l}$ ssi le l-uplet est autorisé par la contrainte $C(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$.

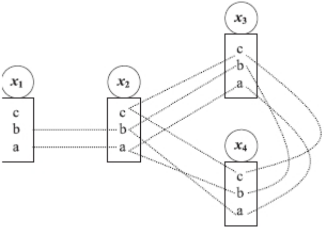
Définitions graphiques de base - exemples

Soit le CSP

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, avec $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{C} = \{C_1(x_2, x_3), C_2(x_2, x_3), C_3(x_3, x_4), C_4(x_2, x_4)\}$ où :
  - $C_1(x_1, x_2) = \{(a, a), (b, b)\}$
  - $C_2(x_2, x_3) = C_3(x_3, x_4) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
  - $C_4(x_2, x_4) = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$

Définitions graphiques de base - exemples





Définitions de base

Instanciation partielle ou locale

Une instanciation partielle I de V est de la forme $\{x_{i_1} \rightarrow d_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rightarrow d_{i_k}\}$. I est un élément de $D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_k}$.

Définitions de base

Instanciation partielle ou locale

Une instanciation partielle I de V est de la forme $\{x_{i_1} \rightarrow d_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rightarrow d_{i_k}\}$. I est un élément de $D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_k}$.

Satisfiabilité d'une instanciation partielle

Une instanciation partielle $\langle d_{j_1}, \ldots, d_{j_l} \rangle$ vérifie une contrainte $C_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l} \rangle)$ si et seulement si elle appartient à cette contrainte.

Définitions de base

Instanciation partielle ou locale

Une instanciation partielle I de V est de la forme $\{x_{i_1} \to d_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \to d_{i_k}\}$. I est un élément de $D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_k}$.

Satisfiabilité d'une instanciation partielle

Une instanciation partielle $\langle d_{j_1}, \ldots, d_{j_l} \rangle$ vérifie une contrainte $C_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l} \rangle)$ si et seulement si elle appartient à cette contrainte.

Consistance locale d'une instanciation

Une instanciation partielle est dite localement consistante ssi elle satisfait toutes les contraintes se portant sur les variables de cette instanciation.

Définitions de base

Valeur compatible

Une valeur (x_i, d_i), avec $d_i \in D_i$, est dite compatible avec une instanciation localement consistante I, si $I \cup \{x_i \rightarrow d_i\}$ est localement consistante.

Définitions de base

Valeur compatible

Une valeur (x_i, d_i), avec $d_i \in D_i$, est dite compatible avec une instanciation localement consistante I, si $I \cup \{x_i \rightarrow d_i\}$ est localement consistante.

Instanciation globalement consistante

Une instanciation globalement consistante ou une solution d'un CSP $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ est une instanciation complète de $\mathcal{X}$ localement consistante.

Définitions de base

Valeur compatible

Une valeur (x_i, d_i), avec $d_i \in D_i$, est dite compatible avec une instanciation localement consistante I, si $I \cup \{x_i \rightarrow d_i\}$ est localement consistante.

Instanciation globalement consistante

Une instanciation globalement consistante ou une solution d'un CSP $\langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ est une instanciation complète de $\mathcal{X}$ localement consistante.

Instanciation partielle globalement consistante

Une instanciation partielle est globalement consistante ssi elle peut être étendue à une solution.

Définitions de base

Propriété

Si toutes les contraintes sont d'arité n, on aura $Sol(\mathcal{P}) = \mathcal{D} \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m$.

Définitions de base

Propriété

Si toutes les contraintes sont d'arité n, on aura $Sol(\mathcal{P}) = \mathcal{D} \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m$.

Equivalence de CSPs

Nous dirons que les deux CSP $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont équivalents si et seulement si $Sol(\mathcal{P}_1) = Sol(\mathcal{P}_2)$.