

Les chaînes de Markov

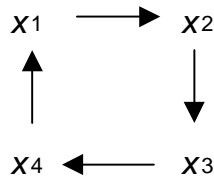
Exercices solutionnés

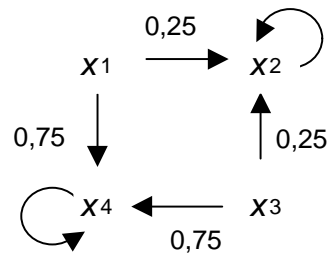
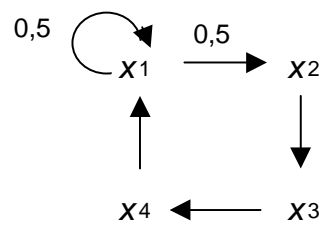
Geneviève Gauthier

dernière mise à jour : 16 octobre 2000

Problème 1 (30 points). À partir des trois graphes de transition suivants, reconstituez les chaînes de Markov qui leur sont associées (espace d'états et matrice de transition). Pour chacune de ces chaînes de Markov, faites-en l'analyse en répondant aux questions suivantes:

- i) La chaîne de Markov comporte combien de classes et quelles sont-elles?;
- ii) Quelles sont les caractéristiques de chacune de ces classes (stable ou instable, absorbante, récurrente ou transitoire, la période)?;
- iii) Existe-t-il une loi stationnaire? Si oui, qu'elle est-elle? Sinon, pourquoi?
- iv) Déterminez, s'il y a lieu, les probabilités d'absorption dans les classes stables.
- v) Déterminez, s'il y a lieu, les temps moyens d'absorption dans les classes stables.





1 Premier graphe de transition

1.1 Classification des états

$$\mathcal{E}_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ et } \mathcal{P}_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a qu'une seule classe forcément stable et récurrente. Par conséquent, tous les états de la chaîne ont même période, soit

$$d(1) = PGCD \{n \in \{1, 2, \dots\} : (\mathcal{P}_X^n)_{11} > 0\} = PGCD \{4, 8, 12, 16, \dots\} = 4.$$

1.2 Loi stationnaire

Résolvant le système $(P' - I) \vec{\pi} = \vec{0}$ en y ajoutant la contrainte $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Comme la chaîne n'est pas apériodique, nous savons que la loi de X_n ne converge pas vers la distribution stationnaire lorsque n croît vers l'infini où X_n représente l'état dans lequel se trouve la chaîne à la n ième étape.

1.3 Probabilités d'absorption

Comme il existe une seule classe et que cette dernière est stable alors le calcul des probabilités d'absorption ne présente aucun intérêt puisque la probabilité d'être absorbé dans cette unique classe, partant de n'importe quel état, est de 1.

2 Deuxieme graphe de transition

2.1 Classification des états

$$\mathcal{E}_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ et } \mathcal{P}_X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a qu'une seule classe forcément stable et récurrente. Par conséquent, tous les états de la chaîne ont même période, soit

$$d(1) = PGCD \{n \in \{1, 2, \dots\} : (\mathcal{P}_X^n)_{11} > 0\} = PGCD \{1, 2, 3, 4, \dots\} = 1.$$

2.2 Loi stationnaire

Résolvant le système $(P' - I) \vec{\pi} = \vec{0}$ en y ajoutant la contrainte $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Comme la chaîne st irréductible et apériodique, nous savons que la loi de X_n converge vers la distribution stationnaire lorsque n croît vers l'infini où X_n représente l'état dans lequel se trouve la chaîne à la n ième étape.

2.3 Probabilités d'absorption

Comme il existe une seule classe et que cette dernière est stable alors le calcul des probabilités d'absorption ne présente aucun intérêt puisque la probabilité d'être absorbé dans cette unique classe, partant de n'importe quel état, est de 1.

3 Troisième graphe de transition

3.1 Classification des états

$$\mathcal{E}_X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ et } \mathcal{P}_X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il y a quatre classes

$\{x_1\}$	instable	transitoire	$d(1) = 0$
$\{x_2\}$	stable	absorbante donc récurrente	$d(2) = 1$
$\{x_3\}$	instable	transitoire	$d(3) = 0$
$\{x_4\}$	stable	absorbante donc récurrente	$d(4) = 1$

3.2 Loi stationnaire

Résolvant le système $(P' - I) \vec{\pi} = \vec{0}$ en y ajoutant la contrainte $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

où la contrainte $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \pi_i \geq 0$ entraîne que $0 \leq a \leq 1$. Il existe donc une infinité de distributions stationnaires. Comme la chaîne n'est pas irréductible, nous savons que la loi de X_n ne converge pas vers la distribution stationnaire lorsque n croît vers l'infini où X_n représente l'état dans lequel se trouve la chaîne à la n ième étape.

3.3 Probabilités d'absorptions

Les probabilités d'absorption semblent beaucoup plus intéressantes dans ce cas-ci. Posons

$$\theta_i = P[\text{la chaîne est éventuellement absorbée en } x_2 | X_0 = x_i].$$

Évidemment, $\theta_2 = 1$ et $\theta_4 = 0$. Il est aussi clair que $\theta_1 = \frac{1}{4}$ et $\theta_3 = \frac{1}{4}$. Effectuons tout de même le calcul: résolvant le système $(P - I) \vec{\theta} = \vec{0}$ auquel nous ajoutons les deux contraintes $\theta_2 = 1$ et $\theta_4 = 0$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$v_i = P[\text{la chaîne est éventuellement absorbée en } x_4 | X_0 = x_i].$$

Évidemment, $v_2 = 0$ et $v_4 = 1$. Il est aussi clair que $v_1 = \frac{3}{4}$ et $v_3 = \frac{3}{4}$. Effectuons tout de même le calcul: résolvant le système $(P - I) \vec{v} = \vec{0}$ auquel nous ajoutons les deux contraintes $v_2 = 0$ et $v_4 = 1$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Temps moyens d'absorption

Déterminons maintenant les temps moyen d'absorption. Puisque x_2 et x_4 sont des classes stables, $\mu_2 = \mu_4 = 0$.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{3}{4}\mu_4 = 1 \\ \mu_3 &= 1 + \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{3}{4}\mu_4 = 1 \end{aligned}$$