Nom : …………………………

Prénom : ……………………......

TEST N°01 :

Probabilités, Statistiques et Applications

Groupe : M1 R.I.D

Date : 24/ 01 / 2017

***Exercice1* : (10pts)**

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas.

**** Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.***

Corrigé :

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou −1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1;\ 1;\ 2;\ 3\}$. ……1pt

Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces)…………………1pt

1. **La probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X.**

- **Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit $P(X = 3) = \frac{1}{216}$ …………1pt**
- **Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit $P(X = 2) = \frac{3\times5}{216} = \frac{15}{216}$ …………………1pt**
- **Pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit $P(X = 1) = \frac{3\times5^2}{216} = \frac{75}{216}$ ………………………………………………1pt**
- **Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit $P(X = -1) = \frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$ ……1pt**

  On a donc la loi suivante :

$X = k$	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1

2. **L'espérance et la variance de la variable *X* représentant le gain du joueur**

- $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times P(x = k) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = -\frac{17}{216} = -0.08$ **…………1,5pt**

  On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie.
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$avec\ E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times P(x = k) = (-1)^2 \times \frac{125}{216} + 1^2 \times \frac{75}{216} + 2^2 \times \frac{15}{216} + 3^2 \times \frac{1}{216} = \frac{269}{216}$$

$donc, V(X) = \frac{269}{216} - \left(-\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57815}{46656} \approx 1.24$ **………2.5pts**

Nom : …………………………

Prénom : ……………………......

TEST N°01 :

Probabilités, Statistiques et Applications

Groupe : M1 R.I.D

Date : 24/ 01 / 2017

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire, à valeurs réelles, de densité de probabilité $f_X(x)$suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda(1-x^2), & si -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1. *Calculer λ*

Corrigé :

On a f est une densité ssi $f(x) \geq 0$ et $\int f(x)dx = 1$ … … … … … … … .1pt

$$\boldsymbol{f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \lambda \geq 0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx} + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \cancel{\int_{1}^{+\infty} f(x)dx} = 1 \ldots \ldots \ldots \ldots .0.5pt$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \lambda(1-x^2)dx = 1 \ldots \ldots 1pt$$

$$\Rightarrow \left[\lambda\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = 1 \ldots \ldots .1pt$$

$$\Rightarrow \lambda\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = 1 \ldots ..1pt$$

$$\Rightarrow \lambda\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\lambda 4}{3} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4} \ldots ..1pt$$

2. *Calculer la probabilité de $|X| \leq \frac{1}{3}$*

$$P\left(|X| \leq \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) \ldots \ldots .1pt$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx \ldots \ldots .1pt$$

$$= \lambda \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (1-x^2)\, dx = \left[\lambda\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{3}\right] = \frac{3}{4\left[\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{27}\right)\right]} = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{27}\right) ..2pts$$

$$P\left(|X| \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27} \ldots .1pt$$