Niveau : Master1 Matière : Analyse de données 20..

Corrigé type

Exercice 1 :

1. objectif de l'ACP (voir le cours) 1 point

2. Matrice centrée réduite

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad 0{,}25$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{3}(12+14+16) \qquad \boxed{\bar{X}_1 = 14} \quad 0{,}25$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{3}(13+14+16) \qquad \boxed{\bar{X}_2 = 13} \quad 0{,}25$$

X_{centre} $X_{ij} - \bar{X}_j$ 0,25 $X_{centre\ reduit}$ $\frac{(X_j - \bar{X})}{\sigma_j}$ 0,25

0,25

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_j) \quad 0{,}25 \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{1}{3}\left((12-14)^2 + (14-14)^2 + (16-14)^2\right) \quad \boxed{\sigma_1 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{3}\left((13-13)^2 + (15-13)^2 + (11-13)^2\right) \quad \boxed{\sigma_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

0,25

ou $\boxed{\sigma_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \sigma_2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

$$X_{centre} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

$$X_{centre\ reduit} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \quad 0{,}25$$

2 - Matrice de variance covariance $V = \Gamma$ 0,25 car X matrice centrée reduite

$$\Gamma = \frac{1}{n} X^t X \quad 0{,}25 \quad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}} \quad 1$$

3 - valeurs propres de Γ $\quad \det(\Gamma - \lambda I) = 0$ 0,25

$$\Rightarrow \det(\Gamma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)(1-\lambda) - (-1/2)(-1/2) = 0 \\ \Rightarrow (1-\lambda)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

0,25
$$\Rightarrow \begin{cases} \left((1-\lambda) - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{3}{2}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$$

0,5 $\qquad$ 0,5

4 - les composants principales de E_2

$C_1 = \underset{\text{centre réduit}}{X} \cdot u_1$ 0,25 $\qquad C_2 = \underset{\text{centre réduit}}{X} \cdot u_2$ 0,25 $\qquad \underset{\text{centre réduit}}{X} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$ E_2

<u>Pour E_2</u>

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{6}$$ 0,5

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{6}$$ 0,5

$$\boxed{E_2(\sqrt{6}, \sqrt{6})}$$

Exercice 2 1) L'objectif AFC 1 point

2) $Z_{i.}$ $\quad Z_{i.} = \sum_{j=1}^{2} Z_{ij}$ 0,25 $\qquad Z_{.j} = \sum_{i=1}^{3} Z_{ij}$ 0,25 $\qquad M = 90$

$$Z = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{matrix} \\ \hline Z_{.j} \quad 45 \quad 45 & \boxed{90} \end{array}$$ 0,25

0,25

$P_{ij} = \frac{1}{M} Z_{ij}$ 0,25 $\qquad P_{.i} = \frac{Z_{i.}}{M}$ 0,25 $\qquad P_{j.} = \frac{Z_{.j}}{M}$ 0,25

$$P = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 15/90 & 15/90 \\ 10/90 & 20/90 \\ 20/90 & 10/90 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_{i.} \\ 30/90 \\ 30/90 \\ 30/90 \end{matrix} \\ \hline P_{.j} \quad \frac{45}{90} \quad 45/90 & \end{array}$$ 0,25

$\Rightarrow$ Tableau de fréquence

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & P_{i.} \\ P = & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & & \frac{1}{3} \\ & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & & \frac{1}{3} \\ P_{.j} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \boxed{1} \end{array}$$

0,5

2 - La distance χ_2 $d(1.3)$

$$d^2(i,i') = \sum_j \frac{1}{P_{.j}} \cdot \left(\frac{P_{ij}}{P_{i.}} - \frac{P_{i'j}}{P_{i'.}} \right)^2$$ 0,25

$$d^2(1,3) = \frac{1}{P_{.1}} \left(\frac{P_{11}}{P_{1.}} - \frac{P_{31}}{P_{3.}} \right)^2 + \frac{1}{P_{.2}} \left(\frac{P_{12}}{P_{1.}} - \frac{P_{32}}{P_{3.}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{1/2} \left(\frac{1/6}{1/3} - \frac{2/9}{1/3} \right)^2 + \frac{1}{1/2} \left(\frac{1/6}{1/3} - \frac{1/9}{1/3} \right)^2$$

0,25

$$= 2 \left(\frac{3}{6} - \frac{6}{9} \right)^2 + 2 \left(\frac{3}{6} - \frac{3}{9} \right)^2$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2$$

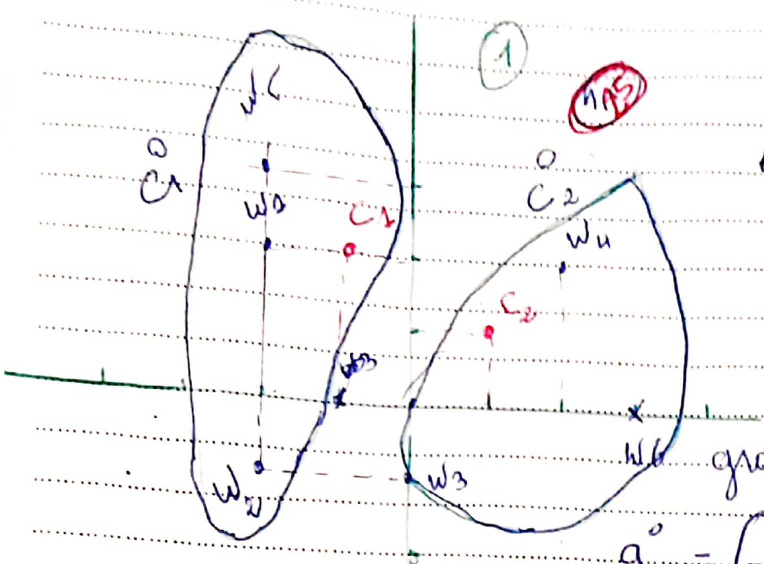
$$= 2 \left(\frac{-1}{6} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{d^2(1\ 3) = 1/9}$$ 1 $\Rightarrow$ $$\boxed{d(1,3) = \frac{1}{3}}$$

Ex : 03 algorithme de centres mobiles

Scanné avec CamScanner

1,5



$C_1(-1,2)$ $C_2(1,1)$

Etape 1 :

$g_{C_1}^0 = \{w_1, w_2, w_5\}$ 0,5

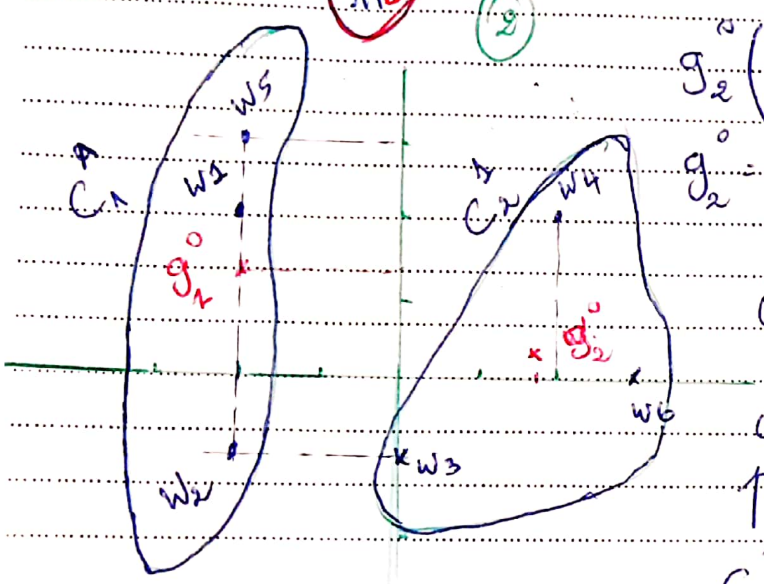
$g_{C_2}^0 = \{w_3, w_4, w_6\}$ 0,5

. calculer les centres de gravité de chaque classe

$$g_1^0 = \left(\frac{-2-2-2}{3}, \frac{2-1+3}{3}\right) = \left(-2, \frac{4}{3}\right)$$ 1

$g_1^0 = (-2, 1{,}33)$ 0,5

1,2



$$g_2^0 \left(\frac{0+2+3}{3}, \frac{-1+2+0}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$ 0,5

$g_2^0 = (1{,}67, 0{,}33)$ 0,5

On retrouve la même classification que l'étape precedente, on arrête l'algorithme 0,5

$C_1^1 = \{w_1, w_2, w_5\}$ $C_2^1 = \{w_3, w_4, w_6\}$

0,5 0,5