Matière: **Programmation Par Contraintes** **(durée : 1h30)**

Examen

Les documents ne sont pas autorisés.
La note dépend du choix de la méthode, du raisonnement et de la clarté de la copie donc soignez vos réponses !!

Rappel : Les 2 expressions suivantes sont équivalentes :
(1) $p \Longrightarrow q$
(2) $\bar{p} \vee q$

1. Ex1 (8 Pts)

"Les Anderson vont nous rendre visite ce soir", annonce Monsieur Blum. "Toute la famille, donc Monsieur et Madame Anderson et leurs trois fils Antoine, Bernard et Claude ?", demande Madame Blum craintive. Monsieur Blum, qui ne rate pas une occasion de provoquer sa femme : "Non, pas du tout. Je t'explique. Si le père Anderson vient, alors il emmène aussi sa femme. Au moins un des deux fils Claude et Bernard vient. Soit Madame Anderson vient, soit Antoine vient. Soit Antoine et Bernard viennent tous les deux, soit ils ne viennent pas. Et si Claude vient, alors Bernard et Monsieur Anderson aussi."

1.1. Formaliser le CSP correspondant au problème.
1.2. Résoudre le CSP et répondre à la question : qui vient donc ce soir ?

2. Ex2 (4.5 Pts)

Soit un problème de satisfaction de contrainte (CSP) sur 5 variables $x_1, \dots, x_5$ de domaine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ chacune. Les contraintes sont

$$\begin{cases} x_3 \geq 4 \\ |x_1 - x_2| = 1 \\ |x_2 - x_3| = 1 \\ \forall i, j \ \{1, \dots, 5\} \ i \neq j : x_i \neq x_j \end{cases}$$

2.1. Rendre le CSP arc-consistant.
2.2. On ajoute la contrainte $x_2 \neq 3$. Y-a-t-il des nouvelles simplifications ?
2.3. Maintenant considérons le fait qu'on remplace les contraintes binaires de différence «$\forall i, j \ \{1, \dots, 5\} \ i \neq j : x_i \neq x_j$ » par $alldifferent(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Y-a-t-il de nouvelles simplifications si on utilise l'arc-consistance généralisée pour les *alldifferents* ?

Tournez la page !!

3. Ex3 (7.5 Pts)

Soit le CSP définit par :
L'ensemble de contrainte $C = \{X + Y = 10,\ X < 8,\ Y > 4\}$
Les domaines des variables X et Y définies par $D_X = [1..10]$; $D_Y = [1..15]$

3.1. Rendre le CSP arc-consistant.
3.2. Donner la micro-structure du CSP.
3.3. Le CSP est-il consistant, si oui donner l'ensemble des solutions.
3.4. On ajoute maintenant la contrainte suivante à C:

$"X\ est\ premier" \implies "Y\ est\ premier"$

-Donner alors l'ensemble des solutions du CSP.

Bonne chance

Matière: Programmation Par Contraintes (durée : 1h30)

Corrections

1. Ex1 (8)

1.1. (0.5+5)
La famille Anderson est composée de 5 personnes : le Père, la Mère, Antoine, Bernard et Claude.
On pose donc les variables :

$X = \{P, M, A, B, C\}$.

Comme il est demandé de déduire la ou les personne(s) qui vont venir, il est donc immédiat de voir que les variables ont tous 2 valeurs possibles : soit « vient » ou « vient pas ».
Les variables sont donc des variables booléennes :

$D = \{D_P, D_M, D_A, D_B, D_C\}\ avec\ D_i = \{0,1\}, i \in \{P, M, A, B, C\}$

C'est-à-dire que, "P" exprime le fait que le père vient et "$\bar{P}$" veut dire que le père ne vient pas.

A partir de l'énoncé on peut alors déduire les contraintes $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$:

C_1: $P \Longrightarrow M$ «<u>Si</u> le père Anderson vient, <u>alors</u> il emmène aussi sa femme. »

C_2: $C \vee B$ «<u>Au moins un</u> des deux fils Claude et Bernard vient. »

C_3: $M \oplus A$ « <u>Soit</u> Madame Anderson vient, <u>soit</u> Antoine vient. »

C_4: $(A \wedge B) \oplus (\bar{A} \wedge \bar{B})$ (Ou tout simplement: $A \Leftrightarrow B$) «<u>Soit</u> Antoine et Bernard viennent tous les deux, <u>soit</u> ils ne viennent pas. »

C_5: $C \Longrightarrow (B \wedge P)$ « Et <u>si</u> Claude vient, <u>alors</u> Bernard et Monsieur Anderson aussi. »

Car $\boldsymbol{A \Leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) = (A \wedge B) \oplus (\bar{A} \wedge \bar{B})}$

1.2. (2.5) Résolvons alors le CSP :

$$\begin{cases} P \Longrightarrow M \\ C \vee B \\ M \oplus A \\ A \Leftrightarrow B \\ C \Longrightarrow (B \wedge P) \end{cases} \quad \text{qui devient} \quad \begin{cases} \bar{P} \vee M \\ C \vee B \\ (M \wedge \bar{A}) \vee (\bar{M} \wedge A) \\ (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \\ \bar{C} \vee (B \wedge P) \end{cases}$$

On choisit d'instancier en premier B car elle intervient dans 3 contraintes (ce choix n'est pas obligatoire mais préférable pour réduire l'espace de recherche !).

Deux cas possibles :a. $B = 0$ le système devient alors $\begin{cases} \bar{P} \vee M \\ C \\ (M \wedge \bar{A}) \vee (\bar{M} \wedge A) \\ \bar{A} \\ \bar{C} \end{cases}$ ce qui nous donne une contradiction (C et $\bar{C}$ à vrai en même temps)

b. $\boxed{B = 1}$ le système devient alors $\begin{cases} \bar{P} \vee M \\ \\ (M \wedge \bar{A}) \vee (\bar{M} \wedge A) \\ A \\ \bar{C} \vee P \end{cases}$

On en déduit que $\boxed{A = 1}$

On simplifie alors le système sachant que $A = 1$ $\begin{cases} \bar{P} \vee M \\ \bar{M} \\ \bar{C} \vee P \end{cases}$

On a alors que $\bar{M} = 1$ c.-à-d. $\boxed{M = 0}$.

De même on simplifie encore une fois le système $\begin{cases} \bar{P} \\ \bar{C} \vee P \end{cases}$

On en déduit que $\boxed{P = 0}$ et finalement que $\boxed{C = 0}$.

La réponse à la question est donc : « Seul Antoine et Bernard viennent»

2. Ex2 (4.5)

2.1. (1.5) Rendre le CSP arc-consistant :
Initialement les domaines des variables sont :

$\begin{pmatrix} Dx_1 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_2 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_3 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_5 = \{1,2,3,4,5\} \end{pmatrix}$ comme on a $x_3 \geq 4$ alors on a $\begin{pmatrix} Dx_1 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_2 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_3 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_5 = \{1,2,3,4,5\} \end{pmatrix}$

En tenant en compte des 2 contraintes $|x_1 - x_2| = 1$ et $|x_2 - x_3| = 1$ alors les domaines deviennent

$$\boxed{\begin{pmatrix} Dx_1 = \{-,2,3,4,5\} \\ Dx_2 = \{-,-,3,4,5\} \\ Dx_3 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_5 = \{1,2,3,4,5\} \end{pmatrix}}$$

Il n'y a plus de filtrage possible.

2.2. (1) Si on ajoute la contrainte $x_2 \neq 3$ les domaines deviennent $\begin{pmatrix} Dx_1 = \{-,-,3,4,5\} \\ Dx_2 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_3 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,3,4,5\} \\ Dx_5 = \{1,2,3,4,5\} \end{pmatrix}$

2.3. (1 + 1) Etant donné que nous avons maintenant une contrainte globale *alldifferent* définie sur les variables du CSP, on peut utiliser l'arc-consistance généralisée pour essayer de simplifier encore plus les domaines des variables.

On a donc $\begin{pmatrix} Dx_1 = \{-,-,3,-,-\} \\ Dx_2 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_3 = \{-,-,-,4,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,-,-,-\} \\ Dx_5 = \{1,2,-,-,-\} \end{pmatrix}$

On **revérifie** alors l'arc-consistance des domaines de x_1, x_2 *et* x_3 en tenant en compte des contraintes $|x_1 - x_2| = 1$ et $|x_2 - x_3| = 1$ car le domaine de x_1 a changé.

On obtient finalement $\boxed{\begin{pmatrix} Dx_1 = \{-,-,3,-,-\} \\ Dx_2 = \{-,-,-,4,-\} \\ Dx_3 = \{-,-,-,-,5\} \\ Dx_4 = \{1,2,-,-,-\} \\ Dx_5 = \{1,2,-,-,-\} \end{pmatrix}}$

3. Ex3 (7.5)

3.1. (2) Initialement les domaines de X et Y sont :

$$\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ \\ D_Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \end{pmatrix}$$

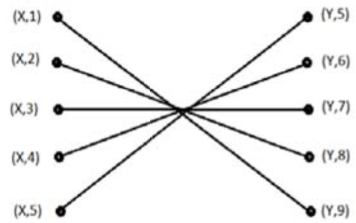
On considérant les 2 contraintes X < 8 et Y > 4 on obtient alors

$$\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,6,7,-,-,-\} \\ \\ D_Y = \{-,-,-,-,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \end{pmatrix}$$

De même si on considère maintenant la contrainte X + Y = 10 on obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_x = \{1,2,3,4,5,-,-,-,-,-\} \\ \\ D_Y = \{-,-,-,-,5,6,7,8,9,-,-,-,-,-,-\} \end{pmatrix}}$$

3.2. (1.5) La micro-structure du CSP est la suivante :



3.3. (1.5) Oui, en effet, comme il y a que 2 variables, le CSP est consistant si et seulement si la micro-strucuture contient des cliques de taille 2 c.-à-d. des arêtes. Donc chaque arête de la micro-structure est une solution du CSP.
Les solutions sont donc : $\boxed{\{X=1,Y=9\};\ \{X=2,Y=8\};\ \{X=3,Y=7\};\ \{X=4,Y=6\};\ \{X=5,Y=5\}}$

3.4. (2.5) Considérons maintenant la contrainte : "X est premier" ⟹"Y est premier"
C'est une contrainte logique et donc la satisfaire revient à trouver l'ensemble des cas où elle est vraie. Or nous savons que $p \Longrightarrow q$ est logiquement équivalent à $\bar{p} \vee q$

On déduit que "X est premier" ⟹"Y est premier" est équivalent à $\overline{\text{"}X \text{ est premier"}}$ ∨ "Y est premier" c'est-à-dire ;
Nous avons ajouté à C la contrainte suivante : $\text{"}X\ n'est\ pas\ premier\text{"} \vee \text{"}Y\ est\ premier\text{"}$

Et donc $C = \{X + Y = 10,\ X < 8,\ Y > 4, \text{"}X\ n'est\ pas\ premier\text{"} \vee \text{"}Y\ est\ premier\text{"}\}$

Finalement on va enlever de l'ensemble des solutions précédentes ($\{X=1,Y=9\}$; $\{X=2,Y=8\}$; $\{X=3,Y=7\}$; $\{X=4,Y=6\}$; $\{X=5,Y=5\}$) celles qui ne vérifient pas la contrainte : $\text{"}X\ n'est\ pas\ premier\text{"} \vee \text{"}Y\ est\ premier\text{"}$.
On remarque que la solution $\{X=2,Y=8\}$ est la seule solution qui ne vérifie pas cette contrainte et elle doit être enlevé (car le nombre 2 est premier).

Et donc les solutions du CSP sont maintenant : $\boxed{\{X=1,Y=9\};\ \{X=3,Y=7\};\ \{X=4,Y=6\};\ \{X=5,Y=5\}}$

Attention : Par définition le nombre 1 n'est pas premier (voir la définition d'un nombre premier)!!

FIN