Arch des Réseaux / M1 RID: Belman-Ford & Floyd-Warshall

Ali Benzerbadj

Ain Témouchent University Belhadj Bouchaïb (ATU-2B)

20 avril 2021

Plan

Bellman-Ford : Example

Remarque

Ce cours a été inspiré de la vidéo d'Antoine GOURHAND et al. de l'ECAM/Rennes.

- Dijkstra : Shortest path from **one** node to **all** nodes
- Bellman-Ford : Shortest path from **one** node to **all** nodes, **negative** edges allowed
- Floyd-Warshall : Shortest path between **all** pairs of vertices, **negative** edges allowed

Bellman-Ford

Graphe =(S ;A)
Cij appartient R (≤ 0 ou ≥ 0)
Cxy = ∞ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
Bellman Ford (G, C, s)
G = Graphe C = Cij s = point initial

Déclaration des variables

d(s) ← 0
Pour chaque v ε S sauf (s)
    Faire : d(v) ← ∞

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    d(v) ← d(u) + C (u,v)
    Fin
Fin

Pour chaque arc (u,v) ε A
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
        Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)

Bellman-Ford

```
Graphe =(S ;A)
Cij appartient R (≤ 0 ou ≥ 0)
Cxy = ∞ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
      G = Graphe     C = Cij     s = point initial

d(s) ← 0
Pour chaque v ε S sauf (s)
          Faire : d(v) ← ∞
                                          } Initialisation

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
          Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
          d(v) ← d(u) + C (u,v)
          Fin
Fin

Pour chaque arc (u,v) ε A
          Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
                    Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)
```

Bellman-Ford

```
Graphe =(S ;A)
Cij appartient R (≤ 0 ou ≥ 0)
Cxy = ∞ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
      G = Graphe     C = Cij     s = point initial

d(s) ← 0
Pour chaque v ε S sauf (s)
            Faire : d(v) ← ∞

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,                      Relaxation
            Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
            d(v) ← d(u) + C (u,v)
            Fin
Fin

Pour chaque arc (u,v) ε A
            Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
                        Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)
```

Bellman-Ford

Graphe =(S ;A)
Cij appartient R (≤ 0 ou ≥ 0)
Cxy = ∞ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
Bellman Ford (G, C, s)
G = Graphe   C = Cij   s = point initial

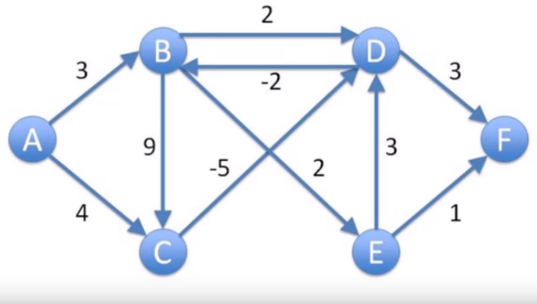
d(s) ← 0
Pour chaque v ε S sauf (s)
Faire : d(v) ← ∞

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
d(v) ← d(u) + C (u,v)
Fin
Fin

Pour chaque arc (u,v) ε A
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)

Contrôle de la présence d'une boucle négative.

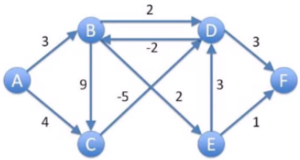
Bellman-Ford : Example



Bellman-Ford : Example

Relaxation:

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
d(v) ← d(u) + C (u,v)
Fin
Fin



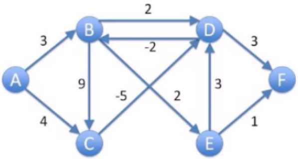
Ici, S = 6 sommets

→ Soit, S-1 = **5 itérations**

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°1

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    d(v) ← d(u) + C (u,v)
    Fin
Fin



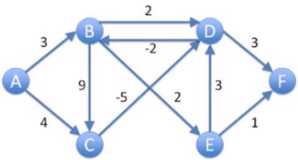
AB	(∞ ; 0+ 3)	d(B) = 3	DB	(∞ ; ∞ + -2)	d(B) = ∞
AC	(∞ ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(∞ ; ∞ + 3)	d(D) = ∞
BC	(∞ ; ∞ + 9)	d(C) = ∞	CD	(∞ ; ∞ + -5)	d(D) = ∞
BE	(∞ ; ∞ + 2)	d(E) = ∞	DF	(∞ ; ∞ + 3)	d(F) = ∞
BD	(∞ ; ∞ + 2)	d(D) = ∞	EF	(∞ ; ∞ + 1)	d(F) = ∞

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	**0**	**3 ; A**	**4 ; A**	**∞**	**∞**	**∞**	
2							
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°2

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    d(v) ← d(u) + C (u,v)
    Fin
Fin



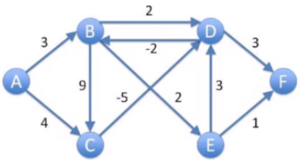
AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(3 ; ∞ + -2)	d(B) = 3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(∞ ; ∞ + 3)	d(D) = ∞
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(∞ ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(∞ ; 3 + 2)	d(E) = 5	DF	(∞ ; ∞ + 3)	d(F) = ∞
BD	(∞ ; 3 + 2)	d(D) = 5	EF	(∞ ; ∞ + 1)	d(F) = ∞

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	**0**	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	**0**	**3 ; A**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**5 ; B**	∞	
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°2

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
  Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
  d(v) ← d(u) + C (u,v)
  Fin
Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4
BE	(∞ ; 3 + 2)	d(E) = 5
BD	(∞ ; 3 + 2)	d(D) = 5

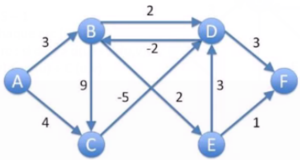
DB	(3 ; ∞ + -2)	d(B) = 3
ED	(∞ ; ∞ + 3)	d(D) = ∞
CD	(∞ ; 4 + -5)	d(D) = -1
DF	(∞ ; ∞ + 3)	d(F) = ∞
EF	(∞ ; ∞ + 1)	d(F) = ∞

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
d(v) ← d(u) + C (u,v)
Fin
Fin



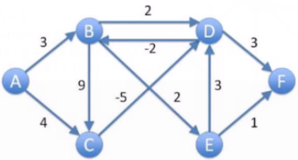
AB	(3 ; 0 + 3)	$\boxed{d(B) = 3}$	DB	(3 ; -1 + -2)	$\boxed{d(B) = -3}$
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; 3 + 2)	d(E) = 5	DF	(∞ ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; 3 + 2)	d(D) = -1	EF	(∞ ; 5 + 1)	d(F) = 6

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**5 ; B**	**2 ; D**	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
        Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
        d(v) ← d(u) + C (u,v)
        Fin
Fin



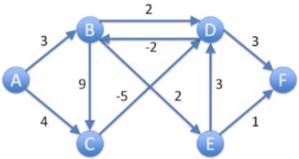
AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; 3 + 2)	d(E) = 5	DF	(∞ ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; 3 + 2)	d(D) = -1	EF	(∞ ; 5 + 1)	d(F) = 6

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**5 ; B**	**2 ; D**	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
  Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
  d(v) ← d(u) + C (u,v)
  Fin
Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4
BE	(5 ; 3 + 2)	d(E) = 5
BD	(-1 ; 3 + 2)	d(D) = -1

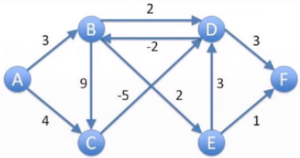
DB	(3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
DF	(∞ ; -1 + 3)	d(F) = 2
EF	(∞ ; 5 + 1)	d(F) = 6

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°4

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    d(v) ← d(u) + C (u,v)
    Fin
Fin



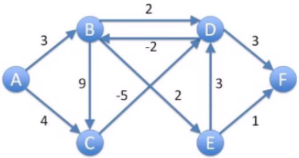
AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; -3 + 2)	$\boxed{d(E) = -1}$	DF	(2 ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1	EF	(2 ; 5 + 1)	d(F) = 2

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**-1 ; B**	**2 ; D**	
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°4

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
d(v) ← d(u) + C (u,v)
Fin
Fin



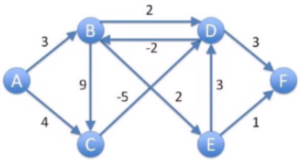
AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; -3 + 2)	d(E) = -1	DF	(2 ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1	EF	(2 ; 5 + 1)	d(F) = 2

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**-1 ; B**	**2 ; D**	
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°5

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    d(v) ← d(u) + C (u,v)
    Fin
Fin



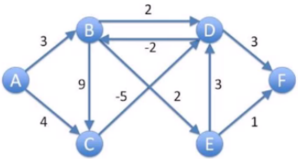
AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; -3 + 2)	d(E) = -1	DF	(2 ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1	EF	(2 ; -1 + 1)	d(F) = 0

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**-1 ; B**	**0 ; E**	

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°5

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
  Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
  d(v) ← d(u) + C (u,v)
  Fin
Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4
BE	(5 ; -3 + 2)	d(E) = -1
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1
DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
DF	(2 ; -1 + 3)	d(F) = 2
EF	(2 ; -1 + 1)	d(F) = 0

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	**0**	**-3 ; D**	**4 ; A**	**-1 ; C**	**-1 ; B**	**0 ; E**	

Bellman-Ford : Example

Graphe =(S ;A)
Cij appartient R (≤ 0 ou ≥ 0)
Cxy = ∞ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
Bellman Ford (G, C, s)
G = Graphe   C = Cij   s = point initial

d(s) ← 0
Pour chaque v ε S sauf (s)
Faire : d(v) ← ∞

Pour i ← 1 à S – 1
Faire, pour chaque arc (u,v) ε A,
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
d(v) ← d(u) + C (u,v)
Fin
Fin

Pour chaque arc (u,v) ε A
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)

Contrôle si présence d'une boucle négative.

Bellman-Ford : Example

Contrôle :

Pour chaque arc (u,v) ε A
Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)

- Consiste à contrôler la **non existence** d'une boucle négative.
- Permet de vérifier que la dernière itération est bien la bonne.

Bellman-Ford : Example

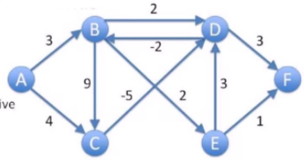
Contrôle:

Pour chaque arc (u,v) ε A

Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)

Alors existence d'une boucle négative

Sinon retour à d(v)



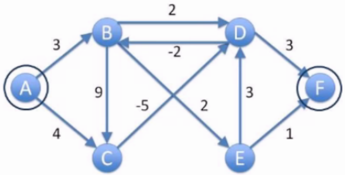
AB	(-3 ; 0 + 3)	d(B) =-3	DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; -1 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; -3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(-1 ; -3 + 2)	d(E) = -1	DF	(0; -1 + 3)	d(F) = 0
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1	EF	(0 ; -1 + 1)	d(F) = 0

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	
Contrôle	**0**	**-3**	**4**	**-1**	**-1**	**0**	√

Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

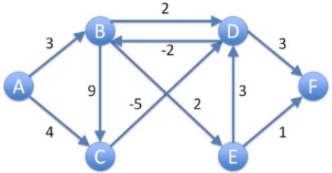
	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	



Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

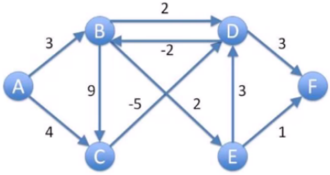
	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	



Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

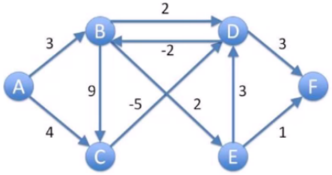
	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	E



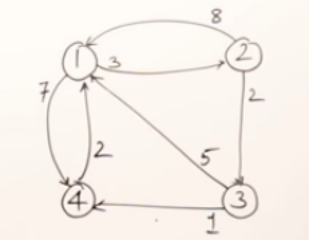
Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	A
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	C
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	D
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	B
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	E
							F



Floyd-Warshall : Example



$$\mathbf{A^0} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 7 \\ 8 & 0 & 2 & \infty \\ 5 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Floyd-Warshall : Example

- Vertex 1 as intermediate vertex $\Rightarrow$ First Column and First Line remain unchanged.

$$\begin{array}{ccccc}
A^0(2,3) & & A^0(2,1) & + & A^0(1,3) \\
2 & \color{red}{<} & 8 & + & \infty \\
A^0(2,4) & & A^0(2,1) & + & A^0(1,4) \\
\infty & > & 8 & + & 7 \\
A^0(3,2) & & A^0(3,1) & + & A^0(1,2) \\
\infty & > & 5 & + & 3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\mathbf{A^1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{0} & \color{red}{3} & \color{red}{\infty} & \color{red}{7} \\ \color{red}{8} & \color{blue}{0} & 2 & 15 \\ \color{red}{5} & 8 & \color{blue}{0} & 1 \\ \color{red}{2} & 5 & \infty & \color{blue}{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Floyd-Warshall : Example

- Vertex 2 as intermediate vertex $\Rightarrow$ Second Column and Second Line remain unchanged.

$$\begin{array}{ccccc}
A^1(1,3) & & A^1(1,2) & + & A^1(2,3) \\
\infty & > & 3 & + & 2 \\
A^1(1,4) & & A^1(1,2) & + & A^1(2,4) \\
7 & \color{red}{<} & 3 & + & 15 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\mathbf{A^2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{3} & 5 & 7 \\ \color{red}{8} & \color{red}{0} & \color{red}{2} & \color{red}{15} \\ 5 & \color{red}{8} & \color{blue}{0} & 1 \\ 2 & \color{red}{5} & 7 & \color{blue}{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Floyd-Warshall : Example

- Vertex 3 as intermediate vertex $\Rightarrow$ Third Column and Third Line remain unchanged.

$$\begin{array}{ccccc} A^3(1,2) & & A^3(1,3) & + & A^3(3,2) \\ 3 & < & 5 & + & 8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$\mathbf{A^3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Floyd-Warshall : Example

- Vertex 4 as intermediate vertex $\Rightarrow$ Fourth Column and Fourth Line remain unchanged.

$$
\mathbf{A^4} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Floyd-Warshall : Formula

- $A^k[i,j]$=minimum$(A^{k-1}[i,j], A^{k-1}[i,k]+ A^{k-1}[k,j])$

```
for(k=1 ;k≤n ;k++)
   for(i=1 ;i≤n ;i++)
      for(j=1 ;j≤n ;j++)
         A[i,j]=min(A[i,j], A[i,k]+ A[k,j])
```

- Complexité : $\mathcal{O}(n^3)$ (Because there are 3 nested loops).