

Arch des Réseaux / M1 RID: Belman-Ford & Floyd-Warshall

Ali Benzerbadj

Ain Témouchent University Belhadj Bouchaïb (ATU-2B)

20 avril 2021

Plan

1 Algorithme de Bellman-Ford

Bellman-Ford : Example

Remarque

Ce cours a été inspiré de la vidéo d'Antoine GOURHAND et al. de l'ECAM/Rennes.

- Dijkstra : Shortest path from **one** node to **all** nodes
- Bellman-Ford : Shortest path from **one** node to **all** nodes, **negative** edges allowed
- Floyd-Warshall : Shortest path between **all** pairs of vertices, **negative** edges allowed

Bellman-Ford

```

Graphe=(S ;A)
Cij appartient R ( $\leq 0$  ou  $\geq 0$ )
Cxy =  $\infty$  s'il n'y a pas d'arc entre x et y
Bellman Ford (G, C, s)
  G = Graphe   C = Cij   s = point initial

```

} Déclaration des variables

```

d(s)  $\leftarrow 0$ 
Pour chaque v  $\in S$  sauf (s)
  Faire : d(v)  $\leftarrow \infty$ 

Pour i  $\leftarrow 1$  à S - 1
  Faire, pour chaque arc (u,v)  $\in A$ ,
    Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
      d(v)  $\leftarrow$  d(u) + C (u,v)
    Fin
  Fin

Pour chaque arc (u,v)  $\in A$ 
  Faire : si d(v) > d(u) + C (u,v)
    Alors existence d'une boucle négative
Sinon retour à d(v)

```

Bellman-Ford

Graphe = (S ; A)
 Cij appartient \mathbb{R} (≤ 0 ou ≥ 0)
 $C_{xy} = \infty$ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
 G = Graphe C = Cij s = point initial

$d(s) \leftarrow 0$ Pour chaque $v \in S$ sauf (s) Faire : $d(v) \leftarrow \infty$	} Initialisation
---	------------------

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$
 Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$
 $d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$
 Fin
 Fin

Pour chaque arc $(u,v) \in A$
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$
 Alors existence d'une boucle négative
 Sinon retour à d(v)

Bellman-Ford

Graphe = (S ; A)
 Cij appartient \mathbb{R} (≤ 0 ou ≥ 0)
 $C_{xy} = \infty$ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
 G = Graphe C = Cij s = point initial

$d(s) \leftarrow 0$
 Pour chaque $v \in S$ sauf (s)
 Faire : $d(v) \leftarrow \infty$

Pour i $\leftarrow 1$ à $S - 1$ Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$, Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$ $d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$ Fin Fin	} Relaxation
---	--------------

Pour chaque arc $(u,v) \in A$
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$
 Alors existence d'une boucle négative
 Sinon retour à d(v)

Bellman-Ford

Graphe = (S ; A)
 Cij appartient \mathbb{R} (≤ 0 ou ≥ 0)
 $C_{xy} = \infty$ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
 G = Graphe C = Cij s = point initial

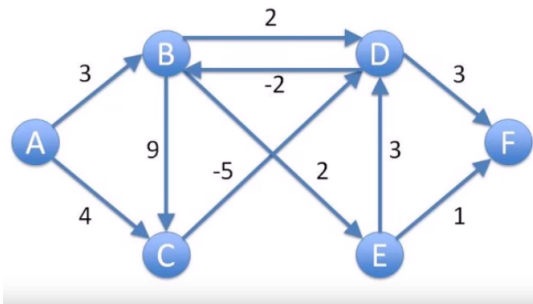
$d(s) \leftarrow 0$
 Pour chaque $v \in S$ sauf (s)
 Faire : $d(v) \leftarrow \infty$

 Pour i $\leftarrow 1$ à $S - 1$
 Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$
 $d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$
 Fin
 Fin

Pour chaque arc $(u,v) \in A$
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$
 Alors existence d'une boucle négative
 Sinon retour à d(v)

Contrôle de la présence
 d'une boucle négative.

Bellman-Ford : Example



Bellman-Ford : Example

Relaxation:

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

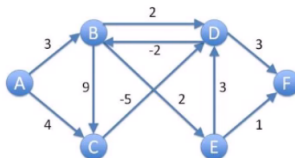
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



Ici, $S = 6$ sommets

→ Soit, $S-1 = 5$ **itérations**

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°1

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

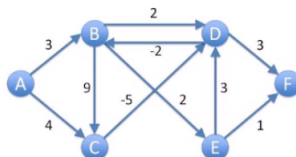
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB $(\infty; 0 + 3)$

AC $(\infty; 0 + 4)$

BC $(\infty; \infty + 9)$

BE $(\infty; \infty + 2)$

BD $(\infty; \infty + 2)$

$d(B) = 3$

$d(C) = 4$

$d(C) = \infty$

$d(E) = \infty$

$d(D) = \infty$

DB $(\infty; \infty + -2)$

ED $(\infty; \infty + 3)$

CD $(\infty; \infty + -5)$

DF $(\infty; \infty + 3)$

EF $(\infty; \infty + 1)$

$d(B) = \infty$

$d(D) = \infty$

$d(D) = \infty$

$d(F) = \infty$

$d(F) = \infty$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2							
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°2

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

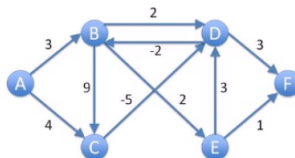
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB (3 ; 0 + 3)

$d(B) = 3$

AC (4 ; 0 + 4)

$d(C) = 4$

BC (4 ; 3 + 9)

$d(C) = 4$

BE (∞ ; 3 + 2)

$d(E) = 5$

BD (∞ ; 3 + 2)

$d(D) = 5$

DB (3 ; ∞ + -2)

$d(B) = 3$

ED (∞ ; ∞ + 3)

$d(D) = \infty$

DF (∞ ; 4 + -5)

$d(D) = -1$

EF (∞ ; ∞ + 3)

$d(F) = \infty$

FF (∞ ; ∞ + 1)

$d(F) = \infty$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°2

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

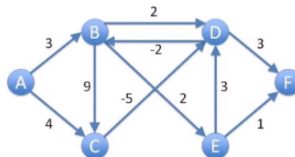
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB	(3; 0 + 3)	$d(B) = 3$	DB	(3; $\infty + -2$)	$d(B) = 3$
AC	(4; 0 + 4)	$d(C) = 4$	ED	(∞ ; $\infty + 3$)	$d(D) = \infty$
BC	(4; 3 + 9)	$d(C) = 4$	CD	(∞ ; 4 + -5)	$d(D) = -1$
CE	(∞ ; 3 + 2)	$d(E) = 5$	DE	(∞ ; $\infty + 3$)	$d(F) = \infty$
BD	(∞ ; 3 + 2)	$d(D) = 5$	EF	(∞ ; $\infty + 1$)	$d(F) = \infty$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; E	∞	
3							
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

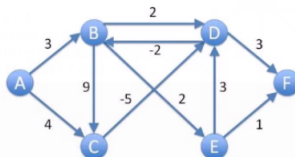
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire: si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB (3 ; 0 + 3)

$d(B) = 3$

AC (4 ; 0 + 4)

$d(C) = 4$

BC (4 ; 3 + 9)

$d(C) = 4$

BE (5 ; 3 + 2)

$d(E) = 5$

BD (-1 ; 3 + 2)

$d(D) = -1$

DB (3 ; -1 + -2)

$d(B) = -3$

ED (-1 ; 5 + 3)

$d(D) = -1$

CD (-1 ; 4 + -5)

$d(D) = -1$

DF (∞ ; -1 + 3)

$d(F) = 2$

EF (∞ ; 5 + 1)

$d(F) = 6$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

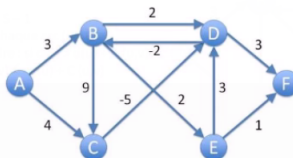
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire: si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB (3 ; 0 + 3)

$d(B) = 3$

AC (4 ; 0 + 4)

$d(C) = 4$

BC (4 ; 3 + 9)

$d(C) = 4$

BE (5 ; 3 + 2)

$d(E) = 5$

BD (-1 ; 3 + 2)

$d(D) = -1$

DB (3 ; -1 + -2)

$d(B) = -3$

ED (-1 ; 5 + 3)

$d(D) = -1$

CD (-1 ; 4 + -5)

$d(D) = -1$

EF (∞ ; -1 + 3)

$d(F) = 2$

EF (∞ ; 5 + 1)

$d(F) = 6$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°3

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

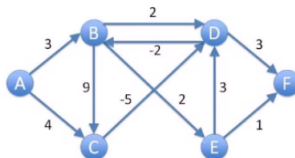
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
CE	(5 ; 3 + 2)	d(E) = 5	EF	(∞ ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; 3 + 2)	d(D) = -1	EF	(∞ ; 5 + 1)	d(F) = 6

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; D	5 ; B	2 ; E	
4							
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°4

Pour $i \leftarrow 1$ à $S-1$

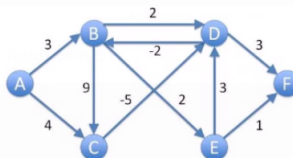
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB (3 ; 0 + 3)

$d(B) = 3$

AC (4 ; 0 + 4)

$d(C) = 4$

BC (4 ; 3 + 9)

$d(C) = 4$

BE (5 ; -3 + 2)

$d(E) = -1$

BD (-1 ; -3 + 2)

$d(D) = -1$

DB (-3 ; -1 + -2)

$d(B) = -3$

ED (-1 ; 5 + 3)

$d(D) = -1$

CD (-1 ; 4 + -5)

$d(D) = -1$

DF (2 ; -1 + 3)

$d(F) = 2$

EF (2 ; 5 + 1)

$d(F) = 2$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°4

Pour $i \leftarrow 1$ à $S-1$

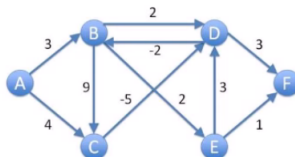
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	$d(B) = 3$	DB	(-3 ; -1 + -2)	$d(B) = -3$
BC	(4 ; 0 + 4)	$d(C) = 4$	ED	(-1 ; 5 + 3)	$d(D) = -1$
BC	(4 ; 3 + 9)	$d(C) = 4$	CD	(-1 ; 4 + -5)	$d(D) = -1$
CE	(5 ; -3 + 2)	$d(E) = -1$	EF	(2 ; -1 + 3)	$d(F) = 2$
BD	(-1 ; -3 + 2)	$d(D) = -1$	EF	(2 ; 5 + 1)	$d(F) = 2$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; E	2 ; D	
5							

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°5

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$

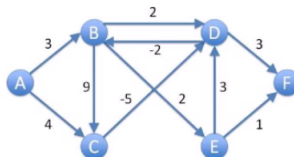
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB	(3 ; 0 + 3)	d(B) = 3	DB	(-3 ; -1 + -2)	d(B) = -3
AC	(4 ; 0 + 4)	d(C) = 4	ED	(-1 ; 5 + 3)	d(D) = -1
BC	(4 ; 3 + 9)	d(C) = 4	CD	(-1 ; 4 + -5)	d(D) = -1
BE	(5 ; -3 + 2)	d(E) = -1	DF	(2 ; -1 + 3)	d(F) = 2
BD	(-1 ; -3 + 2)	d(D) = -1	EF	(2 ; -1 + 1)	d(F) = 0

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3 ; A	4 ; A	∞	∞	∞	
2	0	3 ; A	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	∞	
3	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	5 ; B	2 ; D	
4	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	2 ; D	
5	0	-3 ; D	4 ; A	-1 ; C	-1 ; B	0 ; E	

Bellman-Ford : Example

Relaxation: Itération n°5

Pour $i \leftarrow 1$ à $S-1$

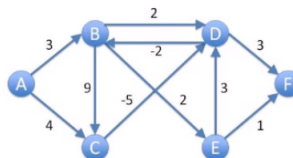
Faire, pour chaque arc $(u,v) \in A$,

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

$d(v) \leftarrow d(u) + C(u,v)$

Fin

Fin



AB	(3; 0 + 3)	$d(B) = 3$	DB	(-3; -1 + -2)	$d(B) = -3$
BC	(4; 0 + 4)	$d(C) = 4$	ED	(-1; 5 + 3)	$d(D) = -1$
BC	(4; 3 + 9)	$d(C) = 4$	FD	(-1; 4 + -5)	$d(D) = -1$
CE	(5; -3 + 2)	$d(E) = -1$	DF	(2; -1 + 3)	$d(F) = 2$
BD	(-1; -3 + 2)	$d(D) = -1$	EF	(2; -1 + 1)	$d(F) = 0$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; F	

Bellman-Ford : Example

Graphe = (S, A)
 C_{ij} appartient \mathbb{R} (≤ 0 ou ≥ 0)
 $C_{xy} = \infty$ s'il n'y a pas d'arc entre x et y
 Bellman Ford (G, C, s)
 $G = \text{Graphe}$ $C = C_{ij}$ $s = \text{point initial}$

$d(s) \leftarrow 0$
 Pour chaque $v \in S$ sauf (s)
 Faire : $d(v) \leftarrow \infty$

Pour $i \leftarrow 1$ à $S - 1$
 Faire, pour chaque arc $(u, v) \in A$,
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u, v)$
 $d(v) \leftarrow d(u) + C(u, v)$
 Fin
 Fin

Pour chaque arc $(u, v) \in A$
 Faire : si $d(v) > d(u) + C(u, v)$
 Alors existence d'une boucle négative
 Sinon retour à $d(v)$

Contrôle si présence
 d'une boucle négative.

Bellman-Ford : Example

Contrôle :

Pour chaque arc $(u,v) \in A$

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

Alors existence d'une boucle négative

Sinon retour à $d(v)$

- Consiste à contrôler la **non existence** d'une boucle négative.
- Permet de vérifier que la dernière itération est bien la bonne.

Bellman-Ford : Example

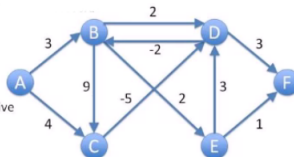
Contrôle:

Pour chaque arc $(u,v) \in A$

Faire : si $d(v) > d(u) + C(u,v)$

Alors existence d'une boucle négative

Sinon retour à $d(v)$



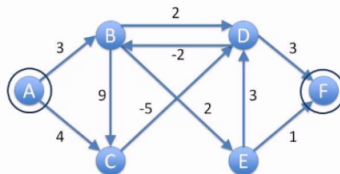
AB	$(-3; 0 + 3)$	$d(B) = -3$	DB	$(-3; -1 + -2)$	$d(B) = -3$
AC	$(4; 0 + 4)$	$d(C) = 4$	ED	$(-1; -1 + 3)$	$d(D) = -1$
BC	$(4; -3 + 9)$	$d(C) = 4$	CD	$(-1; 4 + -5)$	$d(D) = -1$
BE	$(-1; -3 + 2)$	$d(E) = -1$	DF	$(0; -1 + 3)$	$d(F) = 0$
BD	$(-1; -3 + 2)$	$d(D) = -1$	EF	$(0; -1 + 1)$	$d(F) = 0$

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; E	
Contrôle	0	-3	4	-1	-1	0	✓

Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

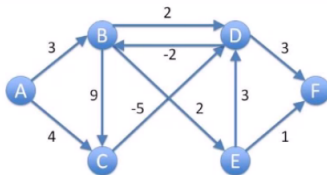
	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; E	



Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

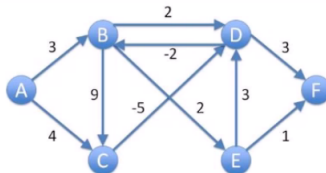
	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; E	



Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; E	E



Bellman-Ford : Example

Exploitation des résultats :

	A	B	C	D	E	F	Sommet
Init	0	∞	∞	∞	∞	∞	
1	0	3; A	4; A	∞	∞	∞	A
2	0	3; A	4; A	-1; C	5; B	∞	C
3	0	-3; D	4; A	-1; C	5; B	2; D	D
4	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	2; D	B
5	0	-3; D	4; A	-1; C	-1; B	0; E	E
							F

