

Newton-Fraktale

Yaroslav Nalivayko

Betreuer: M.Sc. Benjamin Maier

Zusammenfassung Wenn man das Newton-Verfahren für die Lösung der nichtlinearen Gleichungen auf der komplexen Ebene einsetzt und versucht, die Ergebnisse zu visualisieren, erscheinen sehr interessante Figuren, die eine selbstähnliche Struktur besitzen. Solche Figuren heißen Newton-Fraktale, die in dieser Arbeit behandelt werden. Es werden Ursachen für ihre Struktur benannt und manche Beispiele analysiert.

1 Einleitung

Newton-Fraktale stellen eine interessante Klasse der mathematischen Fraktale dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden theoretische Grundlagen vorgestellt und wird ein Programm für die Visualisierung der Fraktalen entwickelt. In der letzten Sektion findet die Analyse mancher interessanten Funktionen statt.

2 Theoretische Grundlagen

Hier werden wichtigste Grundbegriffe erläutert. Das Anwendungsgebiet der numerischen Mathematik wird gezeigt. Das Arbeitsprinzip des Newtonverfahrens wird aufgeklärt und veranschaulicht. Dann werden natürliche und künstliche Fraktale vorgestellt und Newton-Fraktale präsentiert.

2.1 Numerische Mathematik

Die numerische Mathematik beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme. [Tre92] Sie wird oft benutzt, um approximative Lösungen mit Hilfe des Rechners zu finden. Im Vergleich zu analytischen Lösungen helfen approximative Verfahren nur damit, eine Näherung der Lösung zu finden. Gewöhnlich haben diese Methoden eine iterative Form, das heißt, dass nach jedem Iterationsschritt bekommt man eine genauere Lösung. Numerische Mathematik wird oft benutzt, wenn, zum Beispiel, eine Gleichung schwer zu lösen ist, wenn eine Näherungslösung akzeptabel ist oder wenn man einen Rechner für die Determination der Lösung benutzen will.

2.2 Newton-Verfahren

Newton-Verfahren ist das iterative numerische Verfahren, das die Nullstelle gegebener Funktion findet. Die Methode wurde nach Sir Isaac Newton benannt.

Wir interessieren uns für stetig differenzierbare Funktionen mit nur einer Variable.

$$f(x) = 0$$

Man wählt den Startwert x_0 manuell und benutzt folgende iterative Methode, bis eine akzeptable Lösung gefunden wird.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Auf jedem Iterationsschritt wird eine Tangente zu $f(x)$ im Punkt x_n gebildet. Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt x_{n+1} . Beispiel auf dem Bild 1. Das zeigt, dass für eine stetig differenzierbare Funktion der Punkt x_{n+1} näher zu einer Nullstelle als den Punkt x_n liegt. Nach dem nächsten Iterationsschritt wird den Punkt x_{n+2} berechnet, der noch näher wird.

Gewöhnlich wählt man einen zulässigen "Fehler" $\varepsilon > 0$ und eine maximale Anzahl der Schritte N . Nach jedem Schritt der iterativen Methode prüft man, ob $|f(x_n)| < \varepsilon$ ist. In diesem Fall ist die Lösung gefunden. Und falls $n > N$ ist, dann wird die Lösung in der akzeptablen Anzahl der Schritte unauffindbar. Iterativer Prozess der Annäherung von x_n zu x_{n+1} heißt Konvergenz, und falls x_0 zu x_n kommt, heißt das, dass x_0 gegen x_n konvergiert.

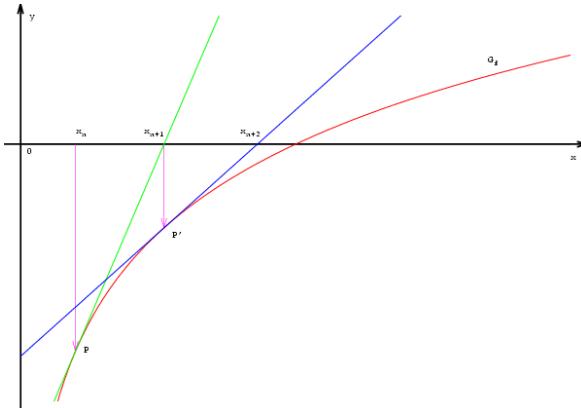


Abbildung 1: Newton-Verfahren
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Newtonsches_N%C3%A4herungsverfahren.png

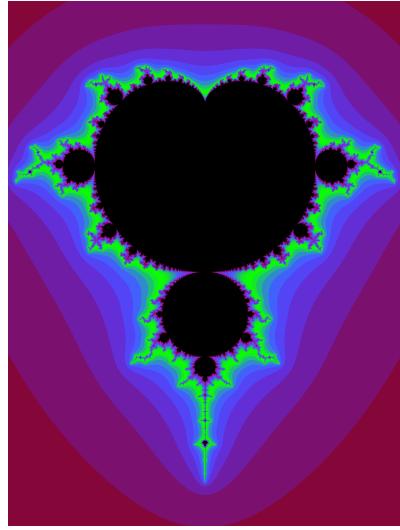
2.3 Fraktale

Fraktal (lateinisch *fractus* - gebrochen) ist ein vom Mathematiker Benoît Mandelbrot geprägter Begriff, der bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde oder Muster bezeichnet. Diese Gebilde oder Muster weisen einen hohen Grad von Skaleninvarianz bzw. Selbstähnlichkeit auf. Das ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst besteht. [Fal03]

Die Figur 2a stellt ein Beispiel für ein naturgegebenes Fraktal, und die Figur 2b für ein mathematisches Fraktal.



(2a) Der Romanesco. Ein natürliches Fraktal.
<https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Romanesco.jpg>



(2b) Das Mandelbrot. Ein künstliches Fraktal.
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot_set_with_coloured_environment.png

2.4 Newton-Fraktale

Diese Fraktale erscheinen, wenn man das Newton-Verfahren für Auffinden der Nullstellen der nichtlinearen Gleichungen auf der komplexen Ebene einsetzt. Die komplexe Zahlen werden verwendet, um ein 2D Bild zu bekommen. Realer Betrag der Zahl wird als die x-Koordinate benutzt und imaginärer Betrag - als die y-Koordinate. Dann wählt man den Bereich und die Auflösung des gesuchten Bildes (zum Beispiel ein Quadrat mit $x \in \{-1; +1\}$ und $y \in \{-1; +1\}$ mit der Auflösung $100x100$) und bemalt es. Genauer gesagt, benutzt man die Position jedes Pixels des Bildes als der Startwert für das Newton-Verfahren und schaut, gegen welche Nullstelle es konvergiert.

Zum Beispiel nehmen wir die Funktion $f(x) = x^3 - 1$. Diese Funktion hat drei Lösungen auf der komplexen Ebene: 1 , $-\sqrt[3]{-1}$ und $(-1)^{2/3}$. Die Näherungswerte im Koordinatenform sind $(1, 0)$, $(-0.5, 0.866)$ und $(-0.5, -0.866)$. Die Punkte des Bildes, die sich durch das Newton-Verfahren zu entsprechenden Nullstellen annähern, werden entsprechend mit rot, blau und grün gefärbt. Das Fraktal auf dem Bild 3 repräsentiert die gewählte Umgebung. Die Ursachen der bemerkenswerten Mischung werden in der Sektion 4 erläutert.

3 Visualisierung

In diesem Abschnitt wird ein Programm entwickelt, das Bilder mit der Newton-Fraktale generiert. Außerdem wird ein Beispiel vorgestellt, wie man Animationen erzeugen kann.

3.1 Bildgenerierung

Hier wird ein Programm beschrieben, die Newton-Fraktale visualisiert. Als Programmiersprache wurde Java gewählt.

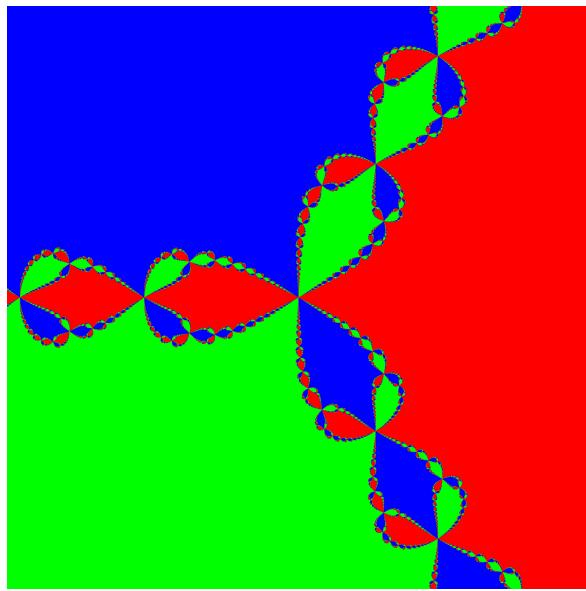


Abbildung 3: Newton-Fraktal für $f(x) = x^3 - 1$

```
BufferedImage bi = new BufferedImage(width, height, TYPE_INT_ARGB) ;
ImageIO . write(bi, "png", outputfilename);
```

Auflistung 1: Ein Beispiel für die PNG Generierung

Bibliotheken Zusätzlich zur allgemeinen Java-Bibliothek wurde noch `javax.imageio.ImageIO` verwendet. Das ist eine öffentliche Bibliothek für die Arbeit mit Bildern, die unter anderem für das `.png` Format geeignet ist. Das PNG (Portable Network Graphics) Format passt für unsere Ziele ideal wegen kleines Gewichtes und keines Qualitätsverlustes der Dateien.

Bild Mit Hilfe von `javax.imageio.ImageIO` kann man die `.png` Bilder sehr einfach erzeugen. Ein Beispiel ist in der Auflistung 1. Um den Bildinhalt einzusetzen, benutzt man den `bi.setRGB(x, y, Color)`; Befehl.

Natürlich muss man einen bestimmten Bereich des Fraktals wählen, um es zu zeichnen. Bei dem Programm wählt man den Startpunkt durch X und Y Koordinatenwerte, die Bildschirmgröße *size* und die Auflösung *resolution*.

Komplexe Zahlen Für die Bearbeitung der komplexen Zahlen ist eine neue Klasse implementiert, die die Arbeit mit komplexen Zahlen erleichtert. So kann man komplexe Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren.

Newton-Verfahren Um das Newton-Verfahren zu benutzen, muss man manuell die Ableitung berechnen, die iterative Newton-Funktion ausfinden und sie im Programmcode umwandeln. Außerdem assoziiert man mit jeder Nullstelle eine Farbe, um später

das Bild zu zeichnen. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(z) = z^3 - 2z + 2$. Die entsprechende Ableitung hat die Form $f'(z) = 3z^2 - 2$ und die iterative Funktion des Newton-Verfahrens $z_{n+1} = \frac{2z_n^3 - 2}{3z_n^2 - 2}$. Und hier steht der Programmkode für die iterative Funktion.

```
devide( mult( pow(X, 3) , 2 ) . add( - 2 ) , mult( pow(X, 2) , 3 ) . add( - 2 ) );
```

Die Funktion wird iterativ für jedes Pixel des Bildes verwendet, um die Farbe zu berechnen. Natürlich muss man nach jedem Schritt prüfen, ob die maximale Anzahl der Schritte N nicht überschritten ist und ob der Punkt schon die Nullstelle ist. Das heißt, dass es für jeden gefundenen Punkt z_n geprüft werden muss, ob $n > N$ oder $|f(z_n)| < \varepsilon$ ist. Falls einer der beiden Fälle eintritt, bricht man die iterative Berechnung ab. Im ersten Fall bezeichnet man den Punkt mit der weißen Farbe, im zweiten - mit der Farbe, mit der man die gefundene Nullstelle assoziiert.

Lösungen Da man die Farben für unterschiedliche Nullstellen manuell wählen will, muss man alle Nullstellen mit assoziierten Farben in den Programmkode eintragen. Ein Beispiel für die Funktion $z^3 - 1$ findet man in der Auflistung 2. Jede Nullstelle wird durch zwei Zahlen festgestellt, die reale und imaginäre Parts abbilden. Letzte drei Argumente definieren die Farbe der Nullstelle im RGB Format.

```
\Position X, Position Y, rot, gruen, blau
points.add(new point( 1, 0,255, 0,0));
points.add(new point(-0.5, 0.866, 0,255,0));
points.add(new point(-0.5,-0.866, 0, 0,255));
```

Auflistung 2: Nullstellen mit Farben für $z^3 - 1$

Helligkeit Für bessere Informationswiedergabe darf man optional die Schatten einschalten. Dann je mehr Schritte des Newton-Verfahrens nötig sind, desto dunkler das Pixel wird.

Programmkode Den vollständigen Programmkode kann man unter [Nal] finden.

3.2 Animation

Einer der einfachsten Wege für die Animationserzeugung wurde gewählt. Das Programm wurde so geändert, damit *size* und *outputfilename* variabel werden. Dann wird eine Reihenfolge der Bildern im Zyklus generiert, so dass das neue Bild die Annäherung des Alten wird. Die Animation wird aus dieser Reihenfolge der Bilder mit Hilfe des [ani] generiert und als eine *.gif* Datei vorgestellt.

4 Analyse

Manche Newton-Fraktale werden vorgestellt und analysiert.

4.1 Newton-Fraktale der Gleichung $z^3 - 1 = 0$

Wie oben schon gesagt wurde, hat diese Gleichung drei Lösungen auf der komplexen Ebene: $+1$, $-\sqrt[3]{-1}$ und $(-1)^{2/3}$. Die iterative Funktion hat die folgende Form:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{3x_n^2}$$

Entsprechendes Newton-Fraktal ist auf dem Bild 3 visualisiert. Wenn man versucht, die Grenze zwischen zwei Zonen zu annähern, sieht man, dass dort immer eine dritte Zone vorkommt. Das wiederholt sich rekursiv bei Annäherung. In anderen Worten, wenn man einen Punkt z_0 , der gegen $+1$ konvergiert, und einen Punkt z_1 , der gegen $-\sqrt[3]{-1}$ konvergiert, wählt, dann existiert zwischen z_0 und z_1 immer ein dritter Punkt z_2 , der noch näher zu z_0 als z_1 liegt und gegen $(-1)^{2/3}$ konvergiert.

Wichtigste Frage ist: warum sehen die Zonen nicht wie die einfachen 120-Grad-Sektoren aus? Anfang letztes Jahrhunderts gelang es zwei französischen Mathematiker Gaston Julia und Pierre Fatou zu zeigen, dass die Grenzpunkte eines Einzugsgebiets die Grenzpunkte aller Einzugsgebiete sind. Folglich können Iterationen mit mehr als zwei Einzugsgebieten keine einfach zusammenhängenden Liniensegmente als Gebietsgrenzen in 2D haben. Solche Grenzen müssen zwangsläufig fraktaler Natur sein, bestehend aus vollständig separaten Punktmengen - sozusagen eine unendlich feine Staubwolke aus nichtabzählbar vielen Staubpartikelchen. [Sch94]

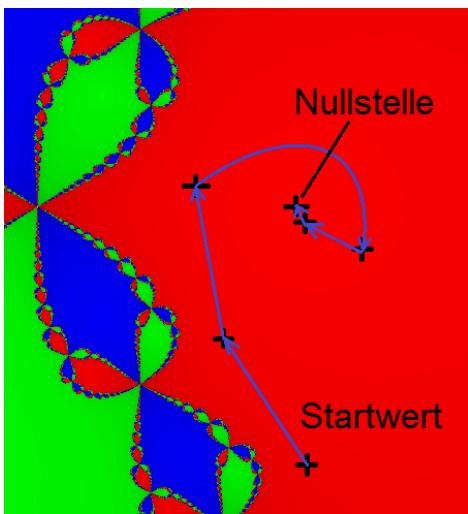
Machen wir uns damit ein bisschen vertraut, indem wir den Ursprung (den Punkt $(0, 0)$) anschauen. Logischerweise soll der Ursprung zwischen allen Zonen liegen. Der Punkt selbst konvergiert überhaupt nicht, da die Einsetzung $z = 0$ in die iterative Formel zur Division durch Null folgt. Aber nicht nur der Ursprung besitzt diese Eigenschaften. Es existieren noch unendlich viele Punkte, die gegen den Ursprung konvergieren und für die auch gilt, dass daneben alle Zonen vorhanden sind. (Das folgt aus der linearen Natur des Newton-Verfahrens.) Die Punkte bilden diese interessante Grenze zwischen den Zonen.

Zum Beispiel betrachten wir die Punkte $(1, 1)$ und $(0.9, 1)$. Die Konvergenz des Punktes $(1, 1)$ wird auf dem Bild 4a vorgestellt.

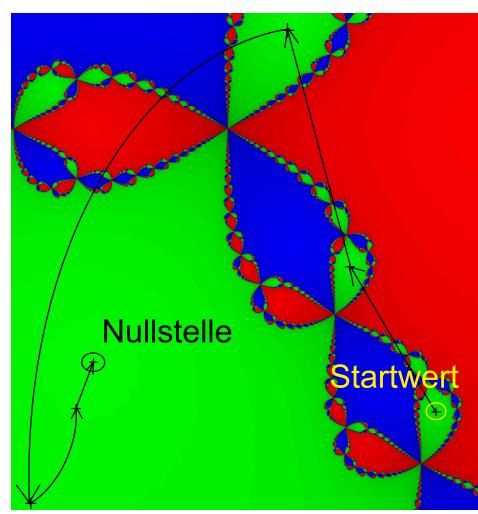
Der Punkt liegt weit genug von der Grenze und wird eindeutig konvergiert, trotzdem sieht man so einen Sprung, die sehr oft bei Newton-Verfahren eintreten können.

Jetzt betrachten wir den Punkt $(0.9, 1)$ auf dem Bild 4b. Die Konvergenz des Punktes zeigt eindeutig, wie die iterativen Schritte des Newton-Verfahrens funktionieren und wie man zu solchen Bilder kommt. Erste zwei iterative Schritte verhalten sich gleich wie bei dem Punkt $(1, 1)$, was die lineare Natur des Newton-Verfahrens bekräftigt. Aber dann, neben der Nullstelle, wird es nach grünem Gebiet geworfen. Die Punkte neben Grenzen bewegen sich zuerst in die Richtung der Nullstelle und springen dann rasant in die passende Zone.

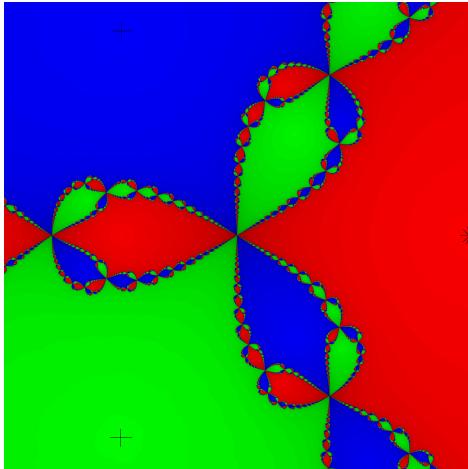
Zusätzliches Beispiel wird auf dem Bild 5a vorgestellt, wo die hellen Bereiche die am schnellsten konvergierenden Punkte bezeichnen.



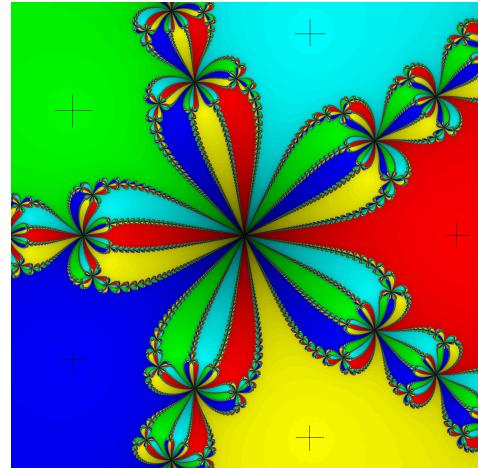
(4a) Die Konvergenz des Punktes $(1, 1)$ für
 $f(z) = z^3 - 1$



(4b) Die Konvergenz des Punktes $(0.9, 1)$ für
 $f(z) = z^3 - 1$



(5a) Die Konvergenzgeschwindigkeit durch
die Helligkeit für $f(z) = z^3 - 1$



(5b) Das Newton-Fraktal für $f(z) = z^5 - 1$

4.2 Newton-Fraktale der Gleichung $z^5 - 1 = 0$

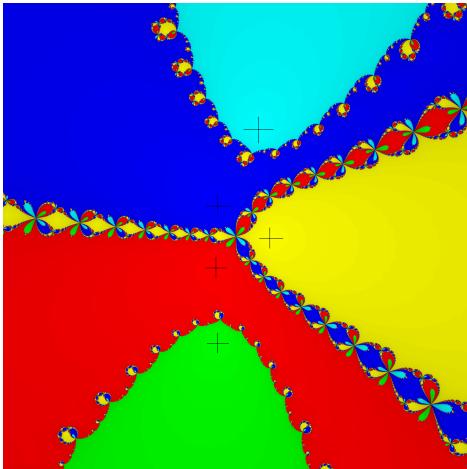
Das Bild 5b illustriert das entsprechende Newton-Fraktal. Der einzige Unterschied liegt in der Anzahl der Zonen und Lösungen. Die Lösungen sind die Punkte $(1, 0)$, $(-0.809, -0.587)$, $(-0.809, +0.587)$, $(0.309, -0.951)$ und $(0.309, +0.951)$.

Wie bei $z^3 - 1 = 0$ sind die Grenzpunkte eines Einzugsgebiets die Grenzpunkte aller Einzugsgebiete, was für die fünf Zonen interessanter aussieht.

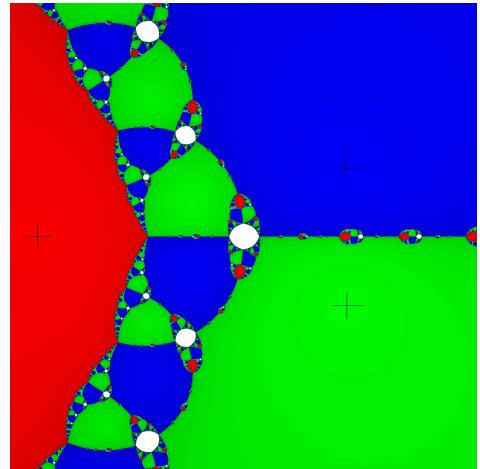
4.3 Newton-Fraktale der Gleichung $z^5 + (5 + 2i)z^3 - 2 - i = 0$

Das entsprechende Newton-Fraktal (das Bild 6a) besitzt eine interessante Struktur. Die Positionen der Lösungen sind die Punkte $(-0.418, 0.640)$, $(-0.4, 2.269)$, $(-0.378, -0.645)$, $(0.474, -2.291)$ und $(0.723, +0.026)$. Der Grund dazu liegt in der

Position der Nullstellen. Der Ursprung, die grüne und die rote Zonen liegen fast auf die Gerade. Das Gleiche gilt für den Ursprung, die blaue und die hellblaue Zonen. Unabhängig davon, dass die hellblaue und die grüne Zonen weit weg von dem Ursprung liegen und mit der roten und blauen Zonen abgegrenzt sind, konvergieren manche Punkte neben dem Ursprung gegen das Grün und das Hellblau.



(6a) Das Newton-Fraktal für $f(z) = z^5 + (5 + 2i)z^3 - 2 - i$



(6b) Das Newton-Fraktal für $f(z) = z^3 - 2z + 2$

4.4 Newton-Fraktale der Gleichung $z^3 - 2z + 2 = 0$

Das Bild 6b illustriert das Newton-Fraktal für diese Funktion. Die Lösungen sind die Punkte $(-1.769, 0)$, $(0.884, 0.589)$ und $(0.884, -0.589)$. Wie man sieht, gibt es hier ziemlich große weiße Bereiche. Was passiert dort? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir ein paar Schritte des Newton-Verfahrens manuell ausführen. Die iterative Funktion hat die folgende Form:

$$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 - 2}{3z_n^2 - 2}$$

Probieren wir den Punkt $(0,0)$ ($z_0 = 0$). Nach der Einsetzung in die iterative Formel bekommt man $z_1 = 1$. Sieht noch gut aus, aber was passiert weiter? Erstaunlicherweise ist z_2 wieder gleich 0. So springt der Wert zwischen 0 und 1, was ein gutes Beispiel dafür ist, warum man die Anzahl der Schritte begrenzen soll. Aber was passiert neben dem Punkt $(0,0)$, sodass diese weißen Gebiete so groß sind? Iterieren wir den Punkt $(0.1, 0)$, der ziemlich nah zum Ursprung liegt. Dann ist $z_0 = 0.1$; $z_1 = 1.014213$ und $z_2 = 0.079655$. Man sieht, dass z_2 noch näher zum Ursprung liegt, als z_0 . Je mehr iterative Schritte man ausführt, desto näher es zum Ursprung hintritt. Wenn man versucht, andere Punkte aus der Umgebung des Ursprungs zu iterieren, werden die Punkte, die nah genug liegen, gegen den Ursprung konvergieren. So werden die weißen Fällen gebildet, die diese Funktion auszeichnen.

5 Zusammenfassung

Numerische Lösungen von nichtlinearen Gleichungen durch Approximation sind in der modernen Welt überall gebraucht. Man berechnet alles von der Wetterprognose und dem Werkzeugmaschinenverhalten bis zu der Raketensteuerung und der Planetenbahn. Die approximativen Berechnungen bringen viele unerwartete Probleme und interessante Ereignisse. Newton-Fraktale sind ein dieser Ereignisse. Die Erforschung des Phänomens ist wichtig für unser Verständnis des Newton-Verfahrens. Je besser man versteht, wie die numerische Methoden sich verhalten, desto effektiver können sie benutzt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden theoretische Grundlagen vorgestellt, wichtigste Begriffe erläutert und erklärt. Dann wurde die Software entwickelt, die manche Newton-Fraktale visualisiert. Es wurde eine Methode vorgestellt, die beschreibt, wie man Animationen erzeugen kann. Danach wurden manche Newton-Fraktale analysiert und die Ursachen für ihre interessante Struktur vorgestellt.

Literatur

- ani. *FREE ONLINE APPLICATION SERVICE.* <https://toolson.net/GifAnimation/Create>
- Fal03. FALCONER, Kenneth: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Version: 2003. <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>. – Online-Ressource
- Nal. NALIVAYKO, Yaroslav: *Newton Fraktale Visualisierung*. https://github.com/Jery77/Simulation_Prog/tree/master/src, . – Accessed Juni 4, 2017
- Sch94. SCHROEDER, Manfred ; SCHLIERF, Markus (Hrsg.): *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit*. Spektrum, 1994
- Tre92. TREFETHEN, Lloyd: The definition of numerical analysis. In: *SIAM News* (1992)