

# Newton Fraktale

Yaroslav Nalivayko

**Betreuer:** M.Sc. Benjamin Maier

**Zusammenfassung** Newton Fraktale sind eine Teilmenge der mathematischen Fraktale, die durch Benutzung des Newton Verfahrens für Lösung von nichtlinearen Gleichungen auf Kom-  
plexe Ebene erscheinen.

## 1 Einleitung

Newton Fraktale stellen eine interessante Klasse der mathematischen Fraktalen dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden Theoretische Grundlagen vorgestellt und ein Programm für die Visualisierung der Fraktalen entwickelt. In letzte Sektion findet Analyse mancher interessanten Funktionen statt.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Numerische Mathematik

Die numerische Mathematik beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme. [Tre92] Oft wird benutzt, um approximative Lösungen mit Hilfe von Computer zu finden.

### 2.2 Newton Verfahren

Newton Verfahren ist das iterative numerische Verfahren, das eine Wurzel gegebener Funktion findet. Die Methode ist nach Sir Isaac Newton benannt.

Wir interessieren uns in stetig differenzierbaren Funktionen mit nur eine Variable.

$$f(x) = 0$$

Man soll manuell den Startwert  $x_0$  wählen und dann die iterative Methode benutzen, bis akzeptable Lösung gefunden wird.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Gewöhnlich wählt man eine zulässige Abweichung  $\varepsilon$  und eine maximale Anzahl der Schritte  $N$ . Nach jedem Schritt der iterative Methode prüft man. Falls  $f(x_n) < \varepsilon$ , dann ist die Lösung gefunden. Und falls  $n > N$ , dann ist die Lösung unauffindbar in akzeptable Anzahl der Schritte.

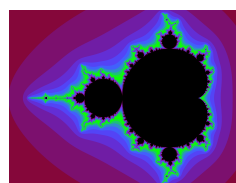
## 2.3 Fraktale

Fraktal (lateinisch *fractus* - gebrochen) ist ein von Mathematiker Benoît Mandelbrot geprägter Begriff, der bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde oder Muster bezeichnet. Diese Gebilde oder Muster weisen einen hohen Grad von Skaleninvarianz bzw. Selbstähnlichkeit. Das ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst besteht. [fra]

Figure 1a stellt ein Beispiel für ein künstliches Fraktal, und Figure 1b für ein mathematisches Fraktal.



(a) Romanesco. Ein natürliches Fraktal. [Mak]



(b) Mandelbrot. Ein künstliches Fraktal. [Bey]

## 2.4 Newton Fraktale

Diese Fraktale erscheinen sich, wenn man das Newton Verfahren für Auffinden der Wurzeln der nichtlinearen Gleichungen auf Komplexe Ebene benutzt. Genauer gesagt, soll man die Wurzel für jeden Punkt des gesuchten Bildes mit Newton Verfahren finden.

Zum Beispiel nehmen wir die Funktion  $f(x) = x^3 - 1$ . Diese Funktion hat drei Lösungen auf Komplexe Ebene:  $1$ ,  $-\sqrt[3]{-1}$  und  $(-1)^{2/3}$ . Näherungswerte in Koordinatenform sind  $(1, 0)$ ,  $(-0.5, 0.866)$  und  $(-0.5, -0.866)$ . Die Punkte des Bildes, die sich durch das Newton Verfahren zu entsprechenden Wurzeln annähern, werden entsprechend mit rot, blau und grün gefärbt. Das Fraktal auf dem Bild 2 repräsentiert die gewählte Umgebung. Die Ursachen zu dieser komischen Mischung werden in der Sektion 4 erläutert.

## 3 Visualisierung

## 4 Analyse

## 5 Zusammenfassung

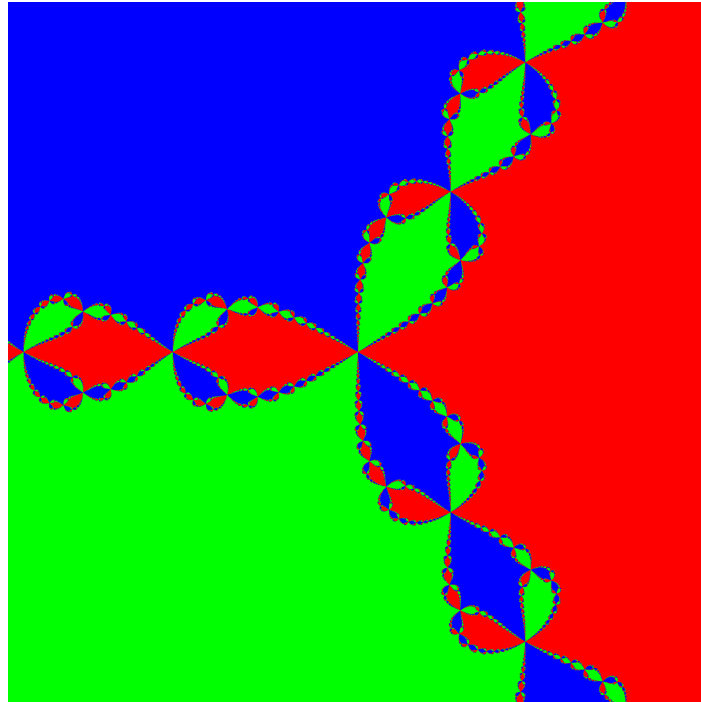


Abbildung 2: Newton Fraktal für  $f(x) = x^3 - 1$

## Literatur

- Bey. [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot\\_set\\_with\\_coloured\\_environment.png](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot_set_with_coloured_environment.png)  
 fra. *Fraktal*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>. – Online-Ressource  
 Mak. <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Romanesco.jpg>  
 Tre92. TREFETHEN, Lloyd: The definition of numerical analysis. In: *SIAM News* (1992)