Newton Fraktale

Yaroslav Nalivayko

Betreuer: M.Sc. Benjamin Maier

Zusammenfassung Newton Fraktale sind eine Teilmenge der mathematischen Fraktale, die durch Benutzung des Newton Verfahrens für Lösung von nichtlinearen Gleichungen auf Komplexe Ebene erscheinen.

1 Einleitung

Newton Fraktale stellen eine interessante Klasse der mathematischen Fraktalen dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden Theoretische Grundlagen vorgestellt und ein Programm für die Visualisierung der Fraktalen entwickelt. In letzte Sektion findet Analyse mancher interessanten Funktionen statt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Numerische Mathematik

Die numerische Mathematik beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme. [Tre92] Oft wird benutzt, um approximative Lösungen mit Hilfe von Computer zu finden.

2.2 Newton Verfahren

Newton Verfahren ist das iterative numerische Verfahren, das eine Wurzel gegebener Funktion findet. Die Methode ist nach Sir Isaac Newton benannt.
Wir interessieren uns in stetig differenzierbaren Funktionen mit nur eine Variable.

$$f(x) = 0$$

Man soll manuell den Startwert x_0 wählen und dann die iterative Methode benutzen, bis akzeptable Lösung gefunden wird.

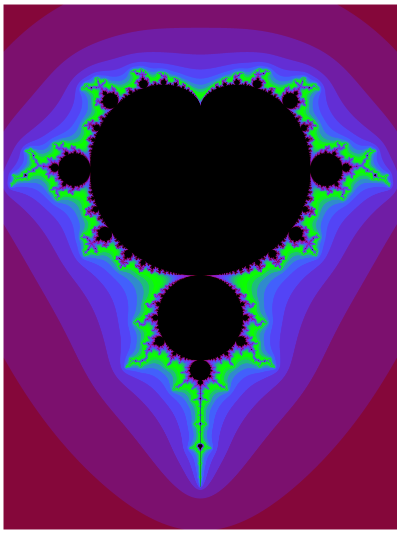
$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Gewöhnlich wählt man eine zulässige Abweichung ε und eine maximale Anzahl der Schritte N. Nach jedem Schritt der iterative Methode prüft man. Falls $f(x_n) < \varepsilon$, dann ist die Lösung gefunden. Und falls $n > N$, dann ist die Lösung unauffindbar in akzeptable Anzahl der Schritte. Iterative Prozess der Annäherung von x_n zu $x_n + 1$ heißt die Konvergenz, und falls x_0 zu x_n kommt, heißt das, dass x_0 gegen x_n konvergiert.

2.3 Fraktale

Fraktal (lateinisch *fractus* - gebrochen) ist ein von Mathematiker Benoît Mandelbrot geprägter Begriff, der bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde oder Muster bezeichnet. Diese Gebilde oder Muster weisen einen hohen Grad von Skaleninvarianz bzw. Selbstähnlichkeit. Das ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst besteht. [fra]
Figure 1a stellt ein Beispiel für ein künstliches Fraktal, und Figure 1b für ein mathematisches Fraktal.

(a) Romanesco. Ein natürliches Fraktal. [Mak]



(b) Mandelbrot. Ein künstliches Fraktal. [Bey]

2.4 Newton Fraktale

Diese Fraktale erscheinen sich, wenn man das Newton Verfahren für Auffinden der Wurzeln der nichtlinearen Gleichungen auf Komplexe Ebene benutzt. Genauer gesagt, soll man die Wurzel für jeden Punkt des gesuchten Bildes mit Newton Verfahren finden.
Zum Beispiel nehmen wir die Funktion $f(x) = x^3 - 1$. Diese Funktion hat drei Lösungen auf Komplexe Ebene: 1, $-\sqrt[3]{-1}$ und $(-1)^{2/3}$. Näherungswerte in Koordinatenform sind $(1, 0)$, $(-0.5, 0.866)$ und $(-0.5, -0.866)$. Die Punkte des Bildes, die sich durch das Newton Verfahren zu entsprechenden Wurzeln annähern, werden entsprechend mit rot, blau und grün gefärbt. Das Fraktal auf dem Bild 2 repräsentiert die gewählte Umgebung. Die Ursachen zu dieser komischen Mischung werden in der Sektion 4 erläutert.

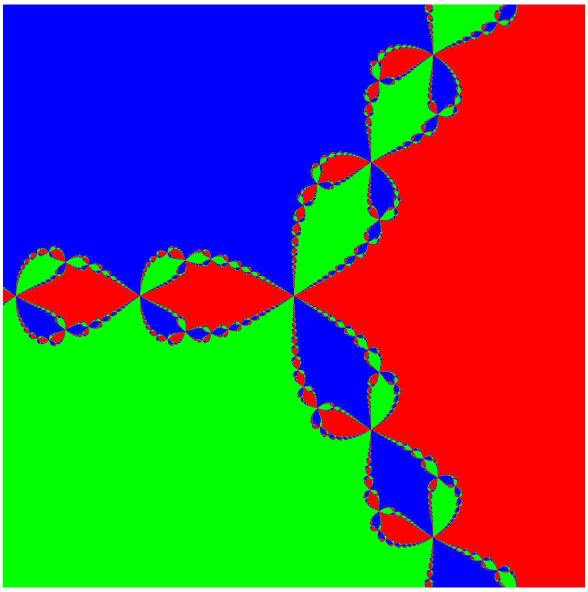


Abbildung 2: Newton Fraktal für $f(x) = x^3 - 1$

3 Visualisierung

In diesem Abschnitt wird ein Programm entwickelt, das Bilder der Newton Fraktale generiert. Außerdem es wird ein Beispiel vorgestellt, wie man Animationen erzeugen kann.

3.1 Bildgenerierung

Als Programmiersprache wurde Java gewählt.

Bibliotheken Zusätzlich zu allgemeine Java-Bibliothek wurde noch das *javax.imageio.ImageIO* verwendet. Das ist öffentliche Bibliothek für die Arbeit mit Bildern, das unter anderem für das *.png* Format geeignet ist. Das PNG (Portable Network Graphics) Format passt für unsere Ziele ideal, wegen kleines Gewicht und keinen Qualitätsverlust.

Bild Mit Hilfe der *javax.imageio.ImageIO* kann man sehr einfach die *.png* Dateien erzeugen. Ein Beispiel in der Auflistung 1.

Listing 1: Ein Beispiel für PNG Generierung

```
BufferedImage bi = new BufferedImage(w, h, TYPE_INT_ARGB) ;
ImageIO.write(bi, "png", outputfilename);
```

Um den Bildinhalt zu generieren, benutzen wir den $bi.setRGB(X, Z, Color)$; Befehl. Natürlich soll man bestimmten Bereich wählen, um dann zu zeichnen. Bei unseres Programm wählt man den Startpunkt durch X und Y Koordinatenwerte, die Bildschirmgröße: *Size* und die Auflösung: *resolution*.

Komplexe Zahlen Für die Bearbeitung der komplexen Zahlen wurden die entsprechende Klasse implementiert, die die Arbeit mit komplexen Zahlen erleichtert. Man kann komplexe Zahlen addieren, abrechnen, multiplizieren, dividieren und potenzieren.

Newton Verfahren Um Newton Verfahren zu benutzen, soll man manuell die Ableitung berechnen, die Newton iterative Funktion ausfinden und im Programmkode umwandeln. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(z) = z^3 - 2z + 2$. Entspreche Ableitung hat die Form $f'(z) = 3z^2 - 2$ und die iterative Funktion $z_{n+1} = \frac{2z_n^3 - 2}{3z_n^2 - 2}$. Und hier steht der Programmkode für diese iterative Funktion.

$$devide(mult(hoch(wert, 3), 2).add(-2), mult(hoch(wert, 2), 3).add(-2));$$

Natürlich nach jedem Schritt soll man Prüfen, ob die maximale Anzahl der Schritten *deep* nicht überschreitet wird und ob der Punkt schon genug nah zu Nullstelle liegt. Das heißt, dass es für jeden gefundenen Punkt z_n soll geprüft werden, ob $n > deep$ ist und $f|(z_n)| < toleranz$. Falls einer der beiden Fälle eintritt, bricht man die iterative Berechnung ab. Im ersten Fall bezeichnet man das Punkt mit weiße Farbe, im zweiten - mit Farbe assoziierte mit gefundener Lösung.

Lösungen Da man manuell Farben für unterschiedliche Lösungen wählen will, war es entschieden, alle Lösungen mit assoziierten Farben im Programmkode eintragen. Ein Beispiel für die Funktion $z^3 - 1$ findet man in der Auflistung 2

Listing 2: Lösungen mit Farben für $z^3 - 1$

```
points.add(new point(1,      0,       255, 0,   0));
points.add(new point(-0.5, 0.866,  0,   255, 0));
points.add(new point(-0.5, -0.866, 0,   0,   255));
```

Schatten Für bessere Informationswiedergabe kann man die Schatten einschalten. Dann je mehr Schritten des Newtonverfahren nötig sind, desto dunkler das Pixel wird.

Programmkode Vollständige Programmkode kann man unter [Nal] finden.

3.2 Animation

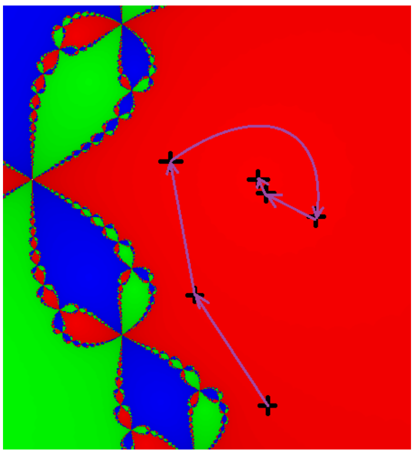
Einer der einfachsten Wegen für die Animationserzeugung wurde gewählt. Das Programm wurde so geändert, dass *size* und *outputfilename* variabel werden. Dann im Zyklus wird eine Reihenfolge der Bildern generiert, so dass neues Bild die Annäherung des Alten wird. Dann aus diese Reihenfolge mit Hilfe des [ani] wurde die Animation generiert.

4 Analyse

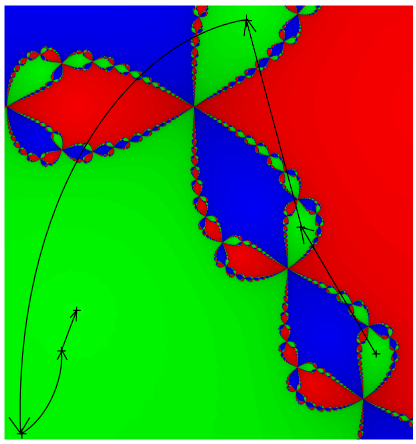
Es werden manche Newton Fraktale vorgestellt und analysiert.

4.1 $z^3 - 1 = 0$

Wie oben schon gesagt war, hat diese Gleichung drei Lösungen auf Komplexe Ebene: $+1$, $-\sqrt[3]{-1}$ und $(-1)^{2/3}$ und war auf dem Bild 2 visualisiert. Wenn man versucht die Grenze zwischen zwei Zonen zu annähern, sieht man, dass dort immer dritte Zone vorkommt. Das wiederholt sich rekursiv bei Annäherung. In anderen Worten, wenn man einen Anfangspunkts z_0 wählt, der gegen $+1$ konvergiert und einen Punkt z_1, der gegen $-\sqrt[3]{-1}$ konvergiert, dann existiert es immer einen dritten Punkt z_2, der noch näher zu z_0 als z_1 liegt und zu $(-1)^{2/3}$ konvergiert.
Wichtigste Frage ist: warum sehen die Zonen nicht wie die einfachen 120-Grad-Sektoren aus? Anfang letztes Jahrhunderts gelang es zwei französischen Mathematiker Gaston Julia und Pierre Fatou zu zeigen, dass die Grenzpunkten eines Einzugsgebiets die Grenzpunkte aller Einzugsgebiete sind. Folglich können Iterationen mit mehr als zwei Einzugsgebieten keine einfach zusammenhängenden Liniensegmente als Gebietsgrenzen in 2D haben. Solche Grenzen müssen zwangsläufig fraktalen Natur sein, bestehend aus vollständig separaten Punktmengen - sozusagen eine unendlich feine Staubwolke aus nichtabzählbar vielen Staubpartikelchen. [Sch94] Machen wir uns damit ein bisschen vertraut, indem wir die Nullstelle (der Punkt $0:0$) anschauen. Logischerweise soll die Nullstelle zwischen allen Zonen liegen und Null selbst konvergiert überhaupt nicht, da bei Newton Verfahren für diese Funktion, $z = 0$ zu Division durch Null folgt. Aber diese Nullstelle ist nicht allein, außerdem existieren noch unendlich viele Punkte, die gegen die Null konvergieren und für die auch gilt, dass daneben sich alle Zonen befinden. (Das folgt aus die lineare Natur des Newton Verfahrens.) Diese Punkten, die gegen die Null konvergieren, bilden diese komische Grenze Zwischen Zonen. Zum Beispiel betrachten wir ein paar Punkte. Die Konvergenz des Punktes (1, 1) wird auf dem Bild 3a vorgestellt. Der Punkt liegt weit genug von der Grenze und wird eindeu-



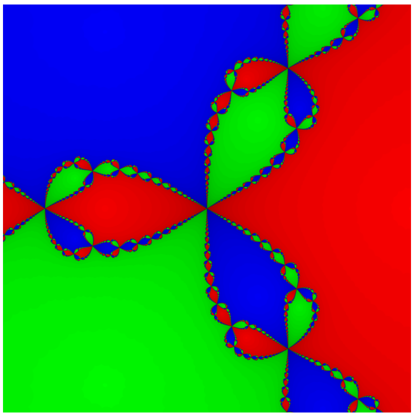
(a) Die Konvergenz des Punktes (1, 1) für $f(x) = x^3 - 1$



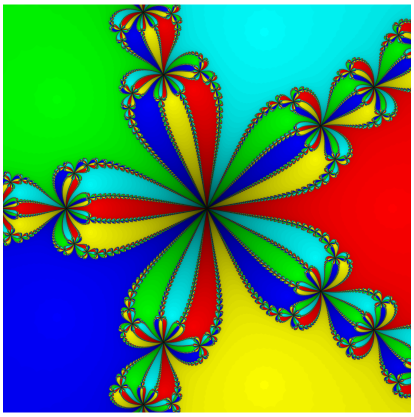
(b) Die Konvergenz des Punktes (0.9, 1) für $f(x) = x^3 - 1$

tig konvergiert, trotzdem sieht man so ein Sprung, die sehr oft bei Newton Verfahren eintreten werden.
Jetzt betrachten wir das Punkt (0.9, 1) auf dem Bild 3b. Die Konvergenz des Punktes

zeigt eindeutig, wie die iterative Schritte des Newton Verfahrens funktionieren und wie man zu solchen Bildern kommt. Erste drei Punkte sind gleich zu die Konvergenz des Punktes (1, 1), was die lineare Natur des Newton Verfahrens bekräftigt, aber dann, neben der Nullstelle, wird die Konvergenz nach grünen Gebiet geworfen. Die Punkten neben Grenzen bewegen sich zuerst in die Richtung der Nullstelle und dann rasant in die passende Zone springen.
Zusätzliches Beispiel wird auf Bild 4a vorgestellt, wo die helle Bereiche am schnellsten zu Lösungen konvergierende Punkte bezeichnen.



(a) Die Konvergenzgeschwindigkeit durch die Helligkeit für $f(x) = x^3 - 1$



(b) Das Newton Fraktal für $f(x) = x^5 - 1$

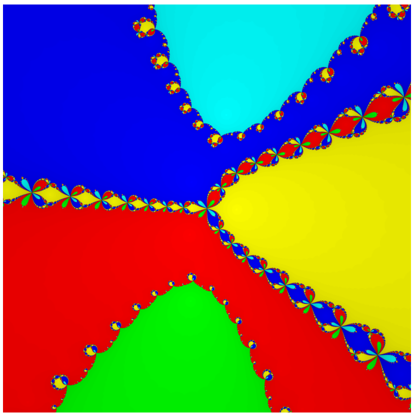
4.2 $z^5 - 1 = 0$

Das Bild 4b illustriert das entsprechende Newton Fraktal. Einziegen Unterschied liegt in der Anzahl der Zonen und Lösungen: hier gibt es 5 beides. Wie bei $z^3 - 1 = 0$ sind die Grenzpunkten eines Einzugsgebiets die Grenzpunkte aller Einzugsgebiete, was für die fünf Zonen interessanter aussieht.

4.3 $z^5 + (5 + 2i) * z^3 - 2 - i$

Das entsprechende Newton Fraktal (Bild 5a) hat eine interessante Struktur. Der Grund dazu liegt in der Position der Lösungen. Die Nullstelle, die grüne und die rote Zonen liegen fast auf eine Gerade. Die Gleiche gilt für die Nullstelle, die blaue und die hellblaue Zonen. Unabhängig davon, dass die hellblaue und die grüne Zonen weit weg von der Nullstelle liegen, konvergieren manche Punkte neben der Nullstelle gegen Grün und Hellblau.

5 Zusammenfassung



(a) Das Newton Fraktal für $f(x) = x^5 + (5 + 2i)x^3 - 2 - i$

Literatur

ani. `https://toolson.net/GifAnimation/Create`

Bey. `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot_set_with_coloured_environment.png`

fra. *Fraktal.* `https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal`. – Online–Ressource

Mak. `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Romanesco.jpg`

Nal. Nalivayko, Yaroslav: *Newton Fraktale Visualisierung.* `https://github.com/Jery77/Simulation_Prog/tree/master/src`, . – Accessed Juni 4, 2017

Sch94. Schroeder, Manfred ; Schlierf, Markus (Hrsg.): *Fraktale, Chaosund Selbstähnlichkeit.* Spektrum, 1994

Tre92. Trefethen, Lloyd: The definition of numerical analysis. In: *SIAM News* (1992)