Newton Fraktale

Yaroslav Nalivayko

Betreuer: M.Sc. Benjamin Maier

Zusammenfassung Newton Fraktale sind eine Teilmenge der mathematischen Fraktale, die durch Benutzung des Newton Verfahrens für Lösung von nichtlinearen Gleichungen auf Komplexe Ebene erscheinen.

1 Einleitung

Newton Fraktale stellen eine interessante Klasse der mathematischen Fraktalen dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden Theoretische Grundlagen vorgestellt und ein Programm für die Visualisierung der Fraktalen entwickelt. In letzte Sektion findet Analyse mancher interessanten Funktionen statt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Numerische Mathematik

Die numerische Mathematik beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der Konstruktion und Analyse von Algorithmen für kontinuierliche mathematische Probleme. [Tre92] Oft wird benutzt, um approximative Lösungen mit Hilfe von Computer zu finden.

2.2 Newton Verfahren

Newton Verfahren ist das iterative numerische Verfahren, das eine Wurzel gegebener Funktion findet. Die Methode ist nach Sir Isaac Newton benannt.
Wir interessieren uns in stetig differenzierbaren Funktionen mit nur eine Variable.

$$f(x) = 0$$

Man soll manuell den Startwert x_0 wählen und dann die iterative Methode benutzen, bis akzeptable Lösung gefunden wird.

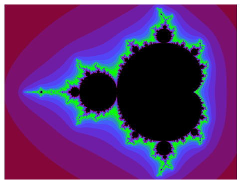
$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Gewöhnlich wählt man eine zulässige Abweichung ε und eine maximale Anzahl der Schritte N. Nach jedem Schritt der iterative Methode prüft man. Falls $f(x_n) < \varepsilon$, dann ist die Lösung gefunden. Und falls $n > N$, dann ist die Lösung unauffindbar in akzeptable Anzahl der Schritte.

2.3 Fraktale

Fraktal (lateinisch *fractus* - gebrochen) ist ein von Mathematiker Benoît Mandelbrot geprägter Begriff, der bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde oder Muster bezeichnet. Diese Gebilde oder Muster weisen einen hohen Grad von Skaleninvarianz bzw. Selbstähnlichkeit. Das ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst besteht. [fra]
Figure 1a stellt ein Beispiel für ein künstliches Fraktal, und Figure 1b für ein mathematisches Fraktal.

(a) Romanesco. Ein natürliches Fraktal. [Mak]



(b) Mandelbrot. Ein künstliches Fraktal. [Bey]

2.4 Newton Fraktale

Diese Fraktale erscheinen sich, wenn man das Newton Verfahren für Auffinden der Wurzeln der nichtlinearen Gleichungen auf Komplexe Ebene benutzt. Genauer gesagt, soll man die Wurzel für jeden Punkt des gesuchten Bildes mit Newton Verfahren finden.
Zum Beispiel nehmen wir die Funktion $f(x) = x^3 - 1$. Diese Funktion hat drei Lösungen auf Komplexe Ebene: 1, $-\sqrt[3]{-1}$ und $(-1)^{2/3}$. Näherungswerte in Koordinatenform sind $(1, 0)$, $(-0.5, 0.866)$ und $(-0.5, -0.866)$. Die Punkte des Bildes, die sich durch das Newton Verfahren zu entsprechenden Wurzeln annähern, werden entsprechend mit rot, blau und grün gefärbt. Das Fraktal auf dem Bild 2 repräsentiert die gewählte Umgebung. Die Ursachen zu dieser komischen Mischung werden in der Sektion 4 erläutert.

3 Visualisierung

In diesem Abschnitt wird ein Programm entwickelt, das Bilder der Newton Fraktale generiert. Außerdem es wird ein Beispiel vorgestellt, wie man Animationen erzeugen kann.

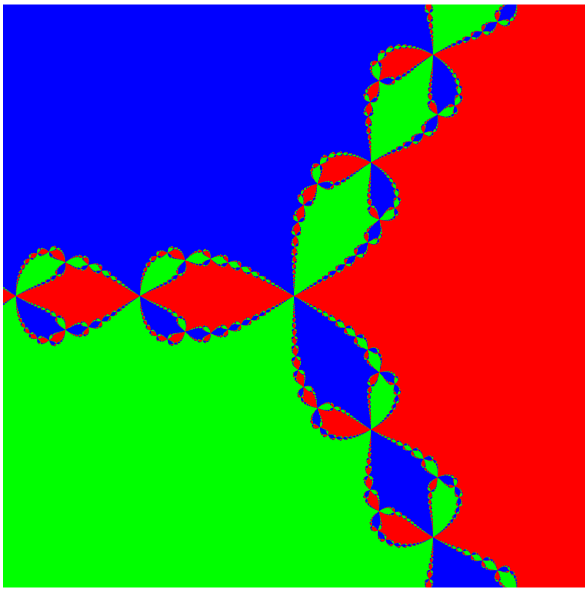


Abbildung 2: Newton Fraktal für $f(x) = x^3 - 1$

3.1 Bildgenerierung

Als Programmiersprache wurde Java gewählt.

Bibliotheken Zusätzlich zu allgemeine Java-Bibliothek wurde noch das *javax.imageio.ImageIO* verwendet. Das ist öffentliche Bibliothek für die Arbeit mit Bildern, das unter anderem für das *.png* Format geeignet ist. Das PNG (Portable Network Graphics) Format passt für unsere Ziele ideal, wegen kleines Gewicht und keinen Qualitätsverlust.

Bild Mit Hilfe der *javax.imageio.ImageIO* kann man sehr einfach die *.png* Dateien erzeugen. Ein Beispiel in der Auflistung 1.

Listing 1: Ein Beispiel für PNG Generierung

```
BufferedImage bi = new BufferedImage(w, h, TYPE_INT_ARGB) ;
ImageIO.write(bi, "png", outputfilename);
```

Um den Bildinhalt zu generieren, benutzen wir den $bi.setRGB(X, Z, Color)$; Befehl. Natürlich soll man bestimmten Bereich wählen, um dann zu zeichnen. Bei unseres Programm wählt man den Startpunkt durch X und Y Koordinatenwerte, die Bildschirmgröße: $Size$ und die Auflösung: $resolution$.

Komplexe Zahlen Für die Bearbeitung der komplexen Zahlen wurden die entsprechende Klasse implementiert, die die Arbeit mit komplexen Zahlen erleichtert. Man kann komplexe Zahlen addieren, abrechnen, multiplizieren, dividieren und potenzieren.

Newton Verfahren Um Newton Verfahren zu benutzen, soll man manuell die Ableitung berechnen, die Newton iterative Funktion ausfinden und im Programmkode umwandeln. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(z) = z^3 - 2z + 2$. Entspreche Ableitung hat die Form $f'(z) = 3z^2 - 2$ und die iterative Funktion $z_{n+1} = \frac{2z_n^3-2}{3z_n^2-2}$. Und hier steht der Programmkode für diese iterative Funktion.

$$devide(mult(hoch(wert, 3), 2).add(-2), mult(hoch(wert, 2), 3).add(-2));$$

Natürlich nach jedem Schritt soll man Prüfen, ob die maximale Anzahl der Schritten *deep* nicht überschreitet wird und ob der Punkt schon genug nah zu Nullstelle liegt. Das heißt, dass es für jeden gefundenen Punkt z_n soll geprüft werden, ob $n > deep$ ist und $f|(z_n)| < toleranz$. Falls einer der beiden Fälle eintritt, bricht man die iterative Berechnung ab. Im ersten Fall bezeichnet man das Punkt mit weiße Farbe, im zweiten - mit Farbe assoziierte mit gefundener Lösung.

Lösungen Da man manuell Farben für unterschiedliche Lösungen wählen will, war es entschieden, alle Lösungen mit assoziierten Farben im Programmkode eintragen. Ein Beispiel für die Funktion $z^3 - 1$ findet man in der Auflistung 2

Listing 2: Lösungen mit Farben für $z^3 - 1$

```
points.add(new point(1,      0,       255, 0,    0));
points.add(new point(-0.5, 0.866,  0,    255, 0));
points.add(new point(-0.5, -0.866, 0,    0,    255));
```

Programmkode Vollständige Programmkode kann man unter [Nal] finden.

3.2 Animation

4 Analyse

5 Zusammenfassung

Literatur

Bey. https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot_set_with_coloured_environment.png

fra. *Fraktal*. https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal. – Online–Ressource

Mak. https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Romanesco.jpg

Nal. NALIVAYKO, Yaroslav: *Newton Fraktale Visualisierung*. https://github.com/Jery77/Simulation_Prog/tree/master/src, . – Accessed Juni 4, 2017

Tre92. TREFETHEN, Lloyd: The definition of numerical analysis. In: *SIAM News* (1992)