

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Jerzy Gamdzyk

Nr albumu: 440363

Fałdowanie pojedynczej warstwy skalnej w skończonym ośrodku

Praca licencjacka
na kierunku **FIZYKA INDYWIDUALNA**

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Marcin Dąbrowski
 Państwowy Instytut Geologiczny
Marta Adamuszek
 Państwowy Instytut Geologiczny
prof. dr hab. Piotr Szymczak
Wydział Fizyki UW

Warszawa, Wrzesień 2024

Streszczenie

Celem pracy jest stworzenie modelu, który pozwala na rozwiązywanie problemu fałdowania oraz rozciągania pojedynczej warstwy skalnej, o nieliniowej lepkości, w skończonym ośrodku. W tym celu odtwarzany jest model Raymonda Fletchera fałdowania w nieskończonym ośrodku. Po wprowadzeniu aparatury matematycznej odtwarzane są znane literatury wyniki - powstawanie fałdów w procesie skracania struktur skalnych oraz budinażu w przypadku rozciągania.

W kolejnym kroku model modyfikowany jest tak, aby uwzględnić skończone rozmiary ośrodka. Wyprowadzone zostają wzory na współczynniki wzrostu fałdów oraz budinażu. Stworzony jest program pozwalający ściśle znajdować ewolucję interfejsów warstwy skalnej umieszczonej w ośrodku, dla małych amplitud odchylenia od poziomego warstwowania. Kombinuje on rozwiązania analityczne na współczynniki wzrostu i narzędzia do numerycznego całkowania, aby wyznaczyć ewolucję w czasie. Wyniki z programu są następnie zdrezone z symulacjami przeprowadzonymi metodą FEM (Metodą Elementów Skończonych). Oszacowania obydwu metod są zgodne do wartości granicznych wielkości amplitudy i nachylenia, których wyznaczone są rzędy wielkości. Z użyciem tych narzędzi wykluczono wyjaśnienie powstawania fałdów poliharmonicznych w modelu lepkiej deformacji pojedynczej warstwy skalnej, zbadano wpływ poszczególnych parametrów reologicznych warstwy oraz ośrodka na krzywe współczynników wzrostu amplitud konkretnych modów. Wreszcie stworzono narzędzie pozwalające na generowanie krzywych współczynnika wzrostu oraz ewoluowanie zadanych krzywych interfejsu w czasie.

Słowa kluczowe

fałdowanie, budinaż, warstwa, ośrodek, power-law, płyn lepki, reżim Stokesa, relacje konstytutywne, współczynnik wzrostu

Tytuł pracy w języku angielskim

Folding of single rock layer in finite medium

Spis treści

1. Wprowadzenie	5
1.1. Cel pracy	5
1.2. Definicja problemu	5
2. Tensorowa teoria ewolucji pola prędkości	11
2.1. Ważne symbole	11
2.2. Równania Naviera-Stokesa	11
2.3. Relacje konstytutywne	12
2.3.1. Liniowe Relacje Konstytutywne	12
2.3.2. Nieliniowe Relacje Konstytutywne	12
3. Fałdowanie i przewężenie warstwy w ośrodku	13
3.1. Oznaczenia i założenia	13
3.1.1. Przepływ podstawowy	14
3.2. Interfejs i warunki brzegowe	15
3.2.1. Warunki brzegowe zszycia na interfejsie	15
3.2.2. Ewolucja Interfejsu	16
3.3. Linearyzacja relacji konstytutywnych	17
3.4. Funkcja Airy'ego	18
3.4.1. Równanie na funkcję Airy'ego	18
3.5. Ewolucja modów	20
3.5.1. Separacja funkcji Airy'ego	21
3.5.2. Równanie ewolucji przepływu perturbacyjnego	21
3.5.3. Rozwiązywanie dla prędkości	22
3.5.4. Ewolucja interfejsu	22
3.6. Dwa interfejsy	24
3.6.1. Symetrie pola prędkości	24
3.7. Rozwiązywanie Fletchera	26
3.7.1. Układ równań	26
3.7.2. Interfejsy w fazie	27
3.7.3. Interfejsy w przeciwfazie	29
3.7.4. Dyskusja wyników	29
4. Skończony ośrodek	33
4.1. Rozwiązywanie dla skończonego ośrodka	33
4.1.1. Idelny poślizg	33
4.1.2. Mody własne (symetrie)	34
4.1.3. Układ równań	34
4.1.4. Porównania	37

4.2.	Model SAS	44
4.3.	Solver SAS	46
4.3.1.	Sprawdzenie wyników	46
4.3.2.	Sprawdzenie działania solvera SAS	46
4.3.3.	Kiedy wyniki przestają się pokrywać?	47
4.3.4.	Dudnienia	50
4.4.	Problem budinażu	52
4.5.	Podsumowanie	57

Rozdział 1

Wprowadzenie

W geologii strukturalnej znanim problemem jest fałdowanie warstw skalnych. W geologicznych skalach czasu zachowują się one jak lepkie płyny. W wyniku ściskania, rozciągania i ścinania powstawać mogą różne, często bardzo skomplikowane struktury. Obserwować je można na przestrzeni wielu skal wielkości. Od kilku milimetrów, do tysięcy kilometrów. W wyniku ściskania warstwy skalne, o różnych parametrach reologicznych się fałdują. Rozumieć to można w ramach prostej intuicji energetycznej. Prościej jest zgiąć warstwę i następnie zwiększać fałdy (rys. 1.1), niż jednolicie zmniejszać długość i zwiększać grubość. Podobnie dla rozciągania. Tutaj bardziej opłacalne energetycznie jest stworzenie małego przewężenia i rozciąganie go, a nie jednostajne zwiększanie długości i zmniejszanie grubości - w wyniku powstaje struktura, cienkich małych pasków z grubszymi fragmentami pomiędzy nimi, nazywamy ją budinażem lub przewężeniem (rys. 1.2). W celu lepszego zapoznania się z idea fałdów i budinażu zachęcamy gorąco do lektury przeglądowej pracy autorstwa Stefana Markusa Schmalholza i Neila Sydney-Mancktelowa "Folding and necking across the scales: a review of theoretical and experimental results and their applications" [5].

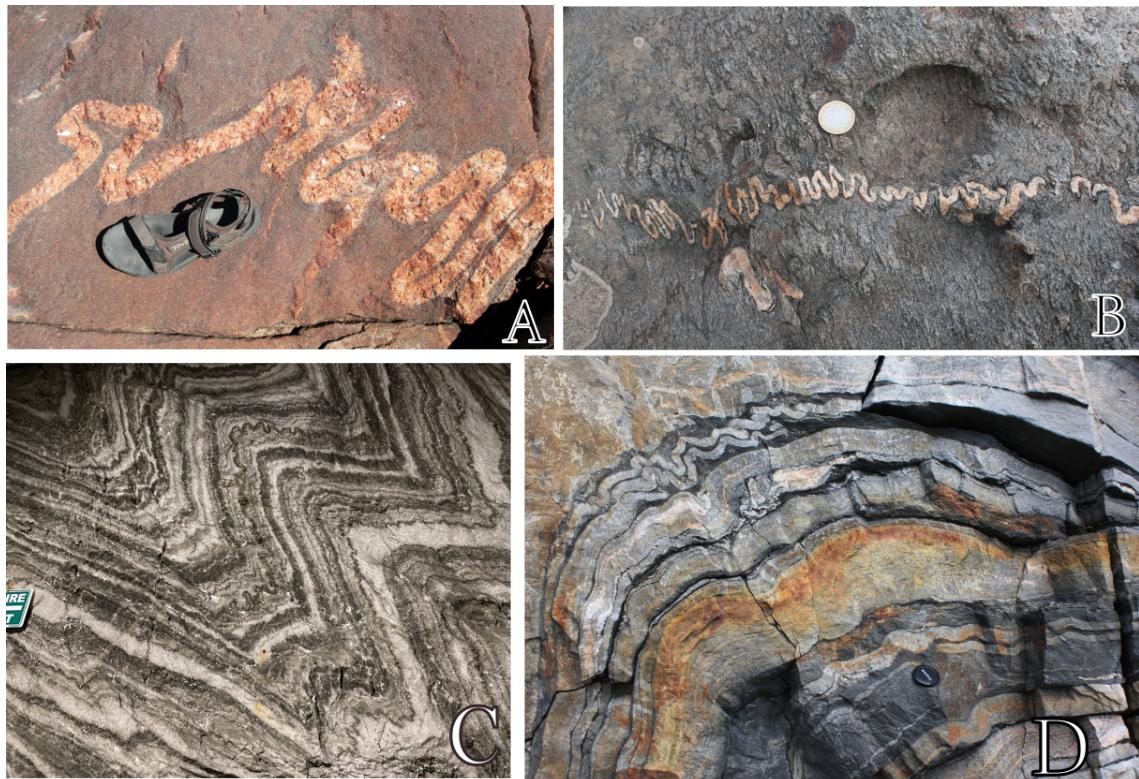
1.1. Cel pracy

W tej pracy skupimy się na efektach ściskania i rozciągania, pomijając wpływ grawitacji. W przyrodzie często obserwować można fałdy i budinaże uwarstwionych ośrodków skalnych, które są efektem ściskania lub rozciągania owych ośrodków w różnych procesach geologicznych. Charakteryzują się one regularną geometrią, często o kształcie zbliżonym do fali sinusoidalnej.

Naszym celem będzie budowa analitycznego modelu wzrostu fałd oraz przewężen, wyjaśnienie ich genezy, a także wyznaczenie wzorów na dominującą długość fali w zależności od parametrów reologicznych skały. Przewidywanie modelu następnie przetestujemy poprzez numeryczne symulacje fałdowania oraz rozciągania warstw skalnych.

1.2. Definicja problemu

Rozwiązywać będziemy problem pojedynczej, lepkiej, izotropowej warstwy skalnej, w ośrodku o innych parametrach reologicznych. Rozważymy liniowe oraz nieliniowe relacje konstytutywne zarówno warstwy jak i ośrodka. Początkowo zakładamy poziome uwarstwienie - obydwa interfejsy między warstwą a ośrodkiem są równoległe i poziome w globalnym układzie współrzędnych. Cały układ jest skończony w osi x , gdzie na brzegach znajdują się sztywne, pionowe ściany. Dynamika problemu polega na jednostajnym ściskaniu lub rozciąganiu warstwy wzdłuż osi x (rys. 1.3). Z uwagi na różnice parametrów reologicznych



Rysunek 1.1: Przykłady naturalnie występujących fałdów w różnych skalach wielkości:

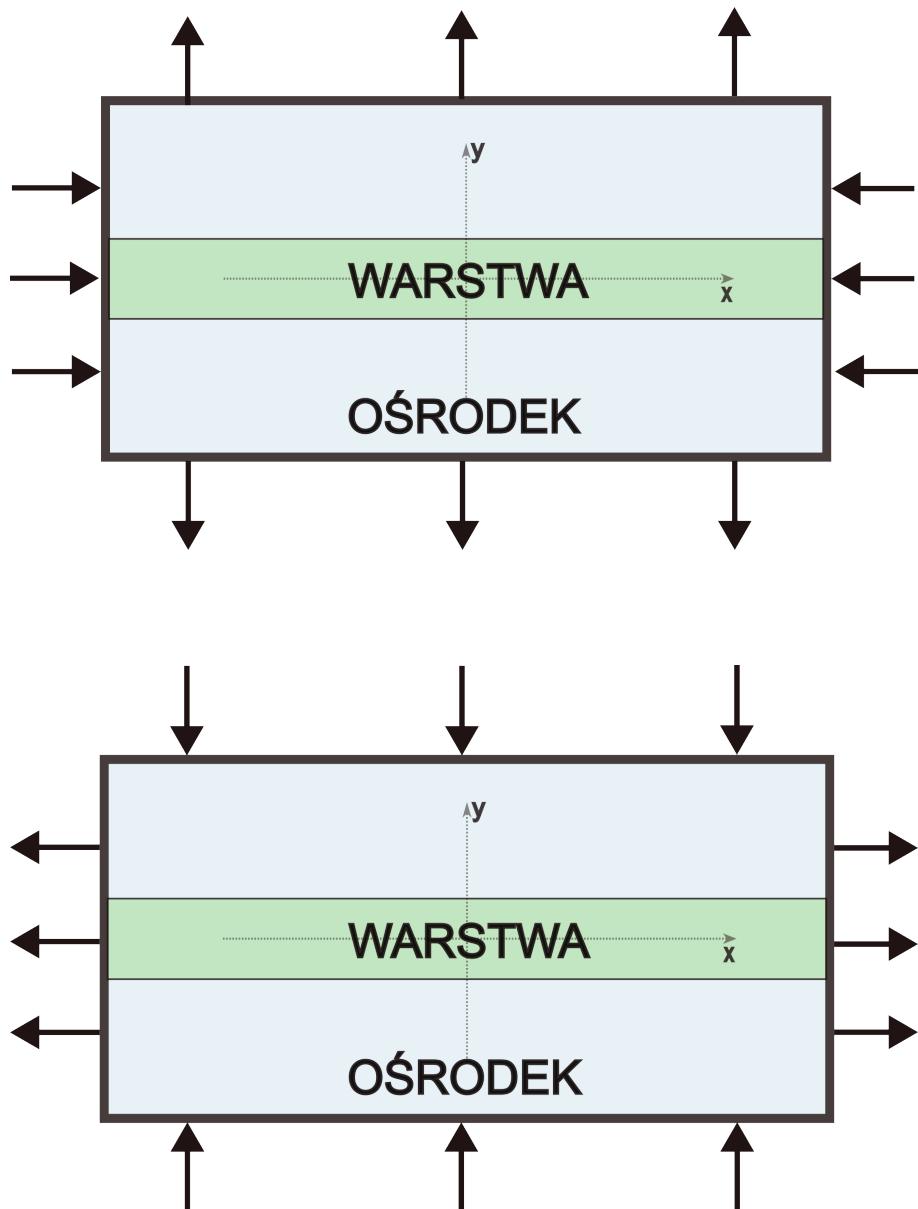
- (A) Autorstwa Cephas - jedna warstwa w ośrodku, [Wiki commons](#)
- (B) Marta Adamuszek - jedna warstwa w ośrodku, Cap de Creus, Hiszpania
- (C) Marta Adamuszek - układ wielowarstwowy, kopalnia soli Ocnele Mari, Rumunia
- (D) Marta Adamuszek - układ wielowarstwowy, Alpy, Szwajcaria



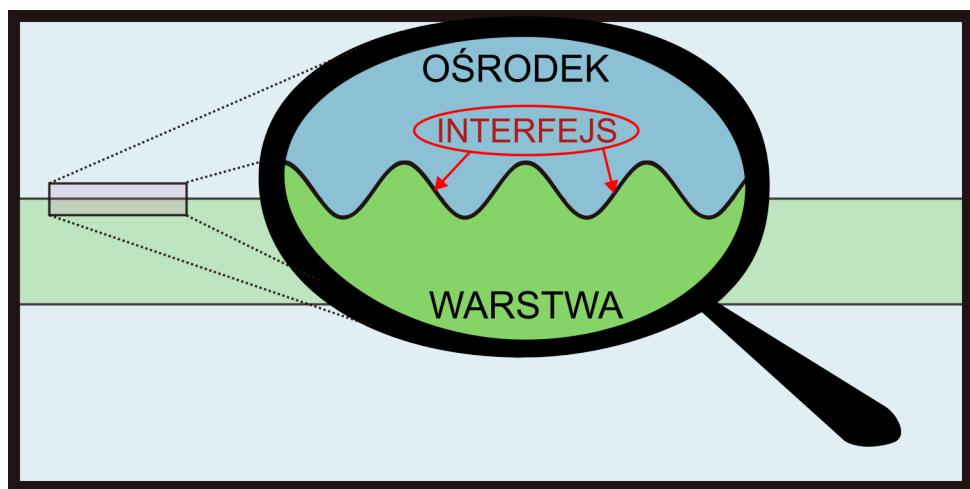
Rysunek 1.2: Przykłady naturalnie występującego budinażu (przeweżeń) ze wskazaniem na różne skale wielkości:

- (A) Marta Adamuszek - Masyw Czeski, kopalnia Spitz, Austria
- (B) Anne Burgess, [Wiki Commons](#)
- (C) Marta Adamuszek - Masyw Czeski, kopalnia Spitz, Austria
- (D) Marta Adamuszek - Alpy, Szwajcaria

między warstwą, a ośrodkiem ewolucja geometrii warstwy jest skomplikowana. Będziemy badać ją w reżimie małych zaburzeń (odchylen od równoległego uwarstwienia). Dokładnie sprawdzamy jak ewoluje interfejs między warstwą a ośrodkiem (rys. 1.4), przy założeniu że substancje je tworzące się nie mieszają. Dodatkowo pomijamy wpływ grawitacji.



Rysunek 1.3: Model warstwy w ośrodku, poddanej jednostajnemu skracaniu (góra) i rozciąganiu (dół) wzduż kierunku warstwowania (osi x). Aby zachować nieściśliwość płynu ośrodek musi się wydłużać (góra) lub skracać (dół) wzduż w kierunku prostopadłym do warstwowania (osi y).



Rysunek 1.4: Interfejs - granica między warstwami, zakładamy że płyny się nie mieszają, dlatego interfejs jest cały czas dobrze zdefiniowanym terminem i rozważać możemy ewolucję jego kształtu w miarę skracania/rozciągania układu. W czasie naszej analizy skupiać będziemy się na małych odchyleniach kształtu interfejsu od płaskiej prostej (warstwowania wzduż kierunku skracania).

Rozdział 2

Tensorowa teoria ewolucji pola prędkości

2.1. Ważne symbole

- \mathbf{u} - pole prędkości
- ρ - gęstość
- μ - lepkość
- $\hat{\sigma}$ - tensor naprężeń
- $\hat{s} = \hat{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \hat{\sigma} \mathbb{1}$ - bezśladowa część tensora naprężeń
- $\hat{D} = (\nabla \mathbf{u})^S = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ - tensor deformacji pola prędkości

2.2. Równania Naviera-Stokesa

W hydrodynamice dynamika ruchu zadana jest przez równania Naviera-Stokesa:

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

Gdzie \mathbf{f} to siły zewnętrzne, a $\frac{D}{Dt} u = \partial_t u + \mathbf{u} \cdot \nabla$ to pochodna rybaka.

W tej pracy ograniczymy badania do płynów nieściśliwych $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, przy braku sił zewnętrznych $\mathbf{f} = 0$. Rozważać będziemy reżim płynów bardzo lepkich, więc korzystać będziemy z przybliżenia małych liczb Reynoldsa - równanie Naviera-Stokesa upraszcza się do równania Stokesa. Chcemy też odejść od zapisu za pomocą pola prędkości, więc ostatecznie układ równań przyjmie formę:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0 \tag{2.1}$$

$$\text{tr} \hat{D} = 0 \tag{2.2}$$

2.3. Relacje konstytutywne

Tensor naprężeń $\hat{\sigma}$ jest funkcją tensora deformacji \hat{D} . Funkcję tę określa się mianem relacji konstytutywnych. W tej pracy skupimy się jedynie na przypadku izotropowym. Rozważać będziemy w ramach niego liniowe oraz nieliniowe relacje konstytutywne.

2.3.1. Liniowe Relacje Konstytutywne

W przypadku liniowym izotropowość wymusza konkretną formę zależności:

$$\hat{\sigma}(\hat{D}) = -p\mathbb{1} + 2\mu\hat{D} + \lambda tr(\hat{D})\mathbb{1}$$

Gdzie p to ciśnienie hydrostatyczne. W przypadku pływu nieściśliwego forma ta upraszcza się do:

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{D} + \frac{1}{3}tr(\hat{\sigma})\mathbb{1}$$

Zapisując przy pomocy bezśladowego tensora naprężień \hat{s} liniowe relacje konstytutywne przyjmują postać:

$$\hat{s} = 2\mu\hat{D} \quad (2.3)$$

2.3.2. Nieliniowe Relacje Konstytutywne

Rozważyć można zestaw nieliniowych relacji konstytutywnych, dla płynu potęgowego:

$$\hat{D} = B \left(\frac{1}{2}\hat{s} : \hat{s} \right)^{\frac{n-1}{2}} \hat{s}$$

Gdzie w notacji indeksowej $\hat{s} : \hat{s} = s_{ij}s_{ij}$, B to stała, a $n \in \mathbb{Z}$ to swobodny parametr. Te relacje można odwrócić, aby otrzymać zależność $\hat{s}(\hat{D})$ dla płynu potęgowego:

$$\hat{s} = B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2}\hat{D} : \hat{D} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \hat{D} \quad (2.4)$$

Aby uprościć zapis często wprowadza się lepkość efektywną.

Definicja 2.3.1 Lepkość efektywna

$$\mu_{eff} = \frac{1}{2}B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2}\hat{D} : \hat{D} \right)^{\frac{1-n}{2n}}$$

Z jej użyciem możemy zapisać relacje konstytutywne dla płynu nieliniowego podobnie jak dla liniowego $\hat{s} = 2\mu_{eff}\hat{D}$, należy jednak pamiętać, że μ_{eff} jest funkcją tensora deformacji. Można zauważyć, że przypadek liniowy jest też potęgowym, dla $n = 1$ i rzeczywiście wtedy lepkość efektywna μ_{eff} jest stałą.

Rozdział 3

Fałdowanie i przewężenie warstwy w ośrodku

Cały ten rozdział stworzony jest na podstawie rozdziału 10 oraz 11 książki Fundamentals of Structural Geology [3].

3.1. Oznaczenia i założenia

W tym miejscu zaprezentujemy model deformacji pojedynczej warstwy w ośrodku. Zakładamy, że warstwa ulega jednolitemu skracaniu lub rozciąganiu w kierunku zgodnym z uwarstwieniem ośrodka (wzdłuż osi x). Zakładamy, że nie ma żadnego przepływu wzdłuż osi z . Badamy tylko początkową fazę odkształcenia interfejsu, a więc skracanie traktujemy jako przepływ podstawowy, a fałdowanie (budinaż) jedynie jako jego małą jego perturbację. Zakładamy, że nie ma naprężeń ścinających w przepływie podstawowym.

Oznaczenie 3.1.1 Wartości przepływu podstawowego \bar{A} ,

Efektywnie założenia dotyczące przepływu podstawowego można podsumować zakładaną formą tensora deformacji:

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{D}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gdzie \bar{D}_{xx} oraz \bar{D}_{yy} to stałe.

Od razu przejdziemy do analizy płynu potęgowego, przypadek liniowy uzyskać można w granicy $n_0, n_1 \rightarrow 1$, gdzie n_0 to wykładnik warstwy, a n_1 to wykładnik ośrodka, w relacjach konstytutywnych 2.4, dla każdej z nich.

$$\hat{s} = B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2} \hat{D} : \hat{D} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \hat{D}$$

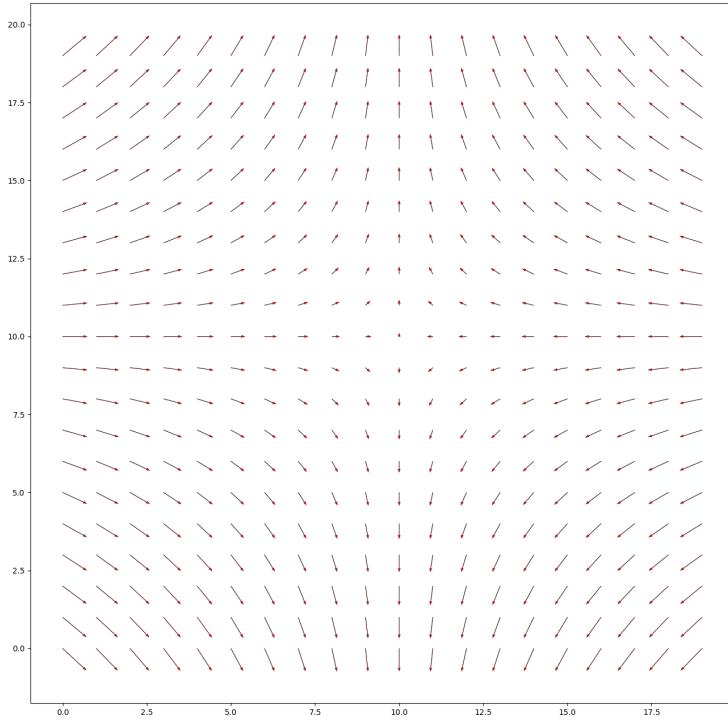
Z nieściśliwości płynu (rów. 2.2) wynika, że:

$$0 = \text{tr} \hat{D} = D_{xx} + D_{yy}$$

Oznaczenie 3.1.2 Wartości przepływu perturbującego \tilde{A}

Zakładamy, że perturbacja jest infinitezymalna, więc zachodzi:

$$\begin{cases} 0 = \bar{D}_{xx} + \bar{D}_{yy} \\ 0 = \tilde{D}_{xx} + \tilde{D}_{yy} \end{cases}$$



Rysunek 3.1: Pole prędkości przepływu podstawowego (rów. 3.1) dla $\bar{D}_{xx} = -1$ (skracanie).

3.1.1. Przepływ podstawowy

Skoro $\bar{D}_{xx} = \text{const}$, to możemy odzyskać postać pola prędkości przepływu podstawowego, po prostu odcałkowując z definicji $D_{xx} = \partial_x u_x$, wtedy przyjmując środek układu współrzędnych w środku warstwy otrzymujemy:

$$\begin{cases} \bar{u}_x = \bar{D}_{xx}x \\ \bar{u}_y = -\bar{D}_{xx}y \\ \bar{u}_z = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Dla $\text{sgn}(\bar{D}_{xx}) = 1$ otrzymujemy rozciąganie, dla $\text{sgn}(\bar{D}_{xx}) = -1$ skracanie. Przepływ ten można łatwo zwizualizować - rys. 3.1. Jak widać nie ma problemu z nieściśliwością, ponieważ płyn ucieka do nieskończoności. Z uwagi na nieściśliwość i niemieszanie się płynów skracanie układu będzie powodować zwiększenie grubości warstwy w tempie wykładniczym $H(t) = H(0)e^{-\bar{D}_{xx}t}$.

3.2. Interfejs i warunki brzegowe

Chcemy poczynić pewne założenia dotyczące perturbacji. Zakładamy poziome warstwowanie (wzdłuż osi x). Chcemy, aby interfejs między dwoma warstwami opisywany był funkcją:

Definicja 3.2.1 *Interfejs: $h(t) + \eta(t, x)$ - funkcja opisująca położenie granicy między dwoma niemieszającymi się warstwami o różnych parametrach reologicznych. $h(t)$ odpowiada za powszechnie położenie granicy między warstwami, a $\eta(t, x)$ za perturbację kształtu interfejsu.*

Założenie dotyczące interfejsu to małe jego nachylenie $\partial_x \eta \ll 1$.

Na interfejsie mamy zadane warunki brzegowe:

- Ciągłość prędkości \mathbf{u}
- Ciągłość sił $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, gdzie \mathbf{n} to wektor normalny do powierzchni interfejsu

3.2.1. Warunki brzegowe zszycia na interfejsie

Naszym następnym celem będzie wyznaczenie warunków brzegowych zszycia na dowolnym interfejsie między dwoma warstwami, przy założeniu warstwowania bliskiego kierunkowi stałego skracania (małej amplitudy perturbacji).

Zacznijmy od ciągłości sił $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Rozpatrzmy wektor normalny do interfejsu w globalnym układzie współrzędnych (x, y) . Ma on postać:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \begin{bmatrix} -\partial_x \eta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że $\partial_x \eta \ll 1$, stąd $\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2} = 1 + O((\partial_x \eta)^2)$. Więc z dokładnością do wyrazów liniowych w $\partial_x \eta$ mamy:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\partial_x \eta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Stąd uzyskujemy równania wartości ciągłych na interfejsie:

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} \partial_x \eta + \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} \partial_x \eta + \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Teraz zauważmy, że $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \ll 1$, a $\partial_x \eta \ll 1$. Więc ostatecznie, po rozbiciu na przepływ podstawowy i perturbację w naszym przybliżeniu otrzymujemy wartości ciągłe na interfejsie:

$$\bar{\sigma}_{yy}, \quad \tilde{\sigma}_{yy}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} - (\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}) \partial_x \eta$$

Teraz wystarczy zauważać, że skoro $0 = \bar{D}_{zz} = \bar{\sigma}_{zz} - \frac{1}{3} \text{tr} \hat{\sigma}$, to $(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}) = 4\bar{\mu}\bar{D}_{xx}$. Stąd dostajemy finalnie równania ciągłości na interfejsie:

$$\tilde{\sigma}_{yy}^{(1)}(x, \eta) = \tilde{\sigma}_{yy}^{(2)}(x, \eta) \quad (3.3)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x, \eta) - 4\bar{\mu}_1 \bar{D}_{xx} \partial_x \eta = \tilde{\sigma}_{xy}^{(2)}(x, \eta) - 4\bar{\mu}_2 \bar{D}_{xx} \partial_x \eta \quad (3.4)$$

3.2.2. Ewolucja Interfejsu

Zakładamy, że warstwy nie mieszają się. Oznacza to, że dla częstek znajdujących się na interfejsie zdefiniować możemy stałą funkcję $y - \eta(t, x)$, jej ewolucja jest trywialna:

$$\frac{D}{Dt}(y - h - \eta) \Big|_{y=\eta} = 0$$

Przekształcając to równanie można uzyskać tak zwane równanie ewolucji interfejsu:

$$\frac{D}{Dt}\eta = u_y|_{y=h+\eta} - \partial_t h$$

Rozpisując we współrzędnych:

$$\partial_t\eta = u_y(x, h + \eta) - u_x(x, h + \eta)\partial_x\eta - \partial_t h$$

Co możemy rozdzielić na przepływ podstawowy oraz perturbację, a następnie zlinearyzować:

$$\partial_t\eta = \bar{u}_y(x, h + \eta) + \tilde{u}_y(x, h + \eta) - \bar{u}_x(x, h + \eta)\partial_x\eta - \partial_t h$$

Podstawiając wartości przepływu podstawowego otrzymujemy finalnie ewolucję krzywej interfejsu w czasie:

$$\partial_t\eta = -\bar{D}_{xx}(h + \eta) + \tilde{u}_y(x, h + \eta) - \bar{D}_{xx}x\partial_x\eta - \partial_t h$$

Jeżeli podstawimy rozseparowaną postać $\tilde{u}_y = V(y)\eta$, to otrzymujemy ostatecznie patrząc na rzędy wielkości dwa równania:

$$\begin{cases} \partial_t h = -\bar{D}_{xx}h \\ \partial_t\eta = -\bar{D}_{xx}\eta + V(h)\eta - \bar{D}_{xx}x\partial_x\eta \end{cases}$$

Gdzie drugie równanie jest ostateczną formą równania ewolucji interfejsu dla małych perturbacji.

$$[\partial_t + \bar{D}_{xx} - V(h) + \bar{D}_{xx}x\partial_x] \eta(t, x) = 0 \quad (3.5)$$

3.3. Linearyzacja relacji konstytutywnych

Znamy nieliniowe relacje konstytutywne (rów. 2.4):

$$\hat{s} = B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2} \hat{D} : \hat{D} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \hat{D}$$

W naszym formalizmie rozbijamy składowe tensora na część odpowiadającą przepływowi podstawowemu i małą perturbacją $\hat{D} = \bar{D} + \tilde{D}$. Następujące obliczenia wykonane zostaną z użyciem notacji indeksowej.

$$\bar{s}_{ij} + \tilde{s}_{ij} = 2\mu_{\text{eff}} \left(\bar{D}_{ij} + \tilde{D}_{ij} \right)$$

Teraz zająć chcemy się członem μ_{eff} , który jak wiemy jest funkcją tensora deformacji.

$$2\mu_{\text{eff}} = B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \right)^{\frac{1-n}{2n}} = B^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2} (\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2\bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}) \right)^{\frac{1-n}{2n}} = 2\bar{\mu} \left[1 + \frac{2\bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}}{\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}} \right]^{\frac{1-n}{2n}}$$

Gdzie $\bar{\mu} = \frac{1}{2^{\frac{1+n}{2n}}} B^{-\frac{1}{n}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} = 2^{\frac{n-1}{2n}} B^{-\frac{1}{n}} \bar{D}_{xx}^2$ jest stałą zależną od tempa deformacji podstawowej.

Teraz korzystając z założenia, że $\tilde{D}_{ij} \ll \bar{D}_{ij}$ możemy oszacować:

$$2\mu_{\text{eff}} = 2\bar{\mu} \left[1 + \frac{1-n}{2n} \frac{2\bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}}{\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}} \right] = 2\bar{\mu} \left[1 + \frac{1-n}{n} \frac{\tilde{D}_{xx}}{\bar{D}_{xx}} \right]$$

A stąd już łatwo uzyskujemy wyrażenia na składowe tensora \bar{s} oraz \tilde{s} :

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij} &= 2\bar{\mu} \bar{D}_{ij} \\ \tilde{s}_{ij} &= 2\bar{\mu} \left(\tilde{D}_{ij} + \frac{1-n}{n} \frac{\tilde{D}_{xx}}{\bar{D}_{xx}} \bar{D}_{ij} \right) \end{aligned}$$

Czyli dla interesujących nas składowych \tilde{s} :

$$\tilde{s}_{xx} = 2\bar{\mu} \frac{\tilde{D}_{xx}}{n} \quad (3.6)$$

$$\tilde{s}_{xy} = 2\bar{\mu} \tilde{D}_{xy} \quad (3.7)$$

$$\tilde{s}_{yy} = 2\bar{\mu} \frac{\tilde{D}_{yy}}{n} \quad (3.8)$$

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie niezerowe składowe tensora \tilde{s} , tym samym zlinearyzowaliśmy relacje konstytutywne.

3.4. Funkcja Airy'ego

Pierwszym z używanym przez nas równaniem Naviera-Stokesa (rów. 2.1) było:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0$$

Odpowiada ono brakowi sił zewnętrznych. Możemy je zapisać w naszych globalnych współrzędnych:

$$\begin{cases} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} = 0 \\ \partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Zauważmy stąd, że tensor sił $\hat{\sigma}$ możemy wygenerować z użyciem funkcji dwóch zmiennych $\Phi(x, y)$:

$$\sigma_{xx} = \partial_y^2 \Phi \quad \sigma_{xy} = -\partial_x \partial_y \Phi \quad \sigma_{yy} = \partial_x^2 \Phi \quad (3.10)$$

Jak łatwo sprawdzić tak zdefiniowane składowe $\hat{\sigma}$ spełniają równania 3.9. Jednocześnie wygenerować możemy wszystkie możliwe postacie $\hat{\sigma}$ spełniające te równania. Dzieje się tak ponieważ $\hat{\sigma}$ ma 3 niezależne składowe, a mamy dwa równania więzów, więc efektywnie $\hat{\sigma}$ opisywana jest przez jeden swobodny parametr - tutaj definiujemy go jako Φ .

3.4.1. Równanie na funkcję Airy'ego

Jednak nie wszystkie takie postacie są dopuszczalne. Wiemy, że składowe tensora deformacji \hat{D} nie są dowolne, z uwagi na definicję. Muszą one spełniać tzw. równanie kompatybilności 2D.

Definicja 3.4.1 *Równanie kompatybilności 2D dla tensora deformacji \hat{D} .*

$$\partial_y^2 D_{xx} - 2\partial_x \partial_y D_{xy} + \partial_x^2 D_{yy} = 0 \quad (3.11)$$

Teraz odwracamy relacje 3.6:

$$\begin{cases} \tilde{D}_{xx} = \frac{n}{4\bar{\mu}} (\tilde{s}_{xx} - \tilde{s}_{yy}) \\ \tilde{D}_{xy} = \frac{1}{2\bar{\mu}} \tilde{s}_{xy} \end{cases}$$

Teraz zauważamy, że $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} = \tilde{s}_{xx} - \tilde{s}_{yy}$, a następnie wstawiamy wszystko do równania 3.11, pamiętając o tym, że $\tilde{D}_{yy} = -\tilde{D}_{xx}$:

$$(\partial_y^2 - \partial_x^2) \frac{n}{4\bar{\mu}} (\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy}) - \partial_x \partial_y \frac{1}{\bar{\mu}} \tilde{\sigma}_{xy} = 0$$

Wreszcie korzystamy z wcześniej zdefiniowanej funkcji Airy'ego 3.10, bo otrzymać równanie cząstkowe na nią:

$$\left[\partial_x^4 + \left(\frac{4}{n} - 2 \right) \partial_x^2 \partial_y^2 + \partial_y^4 \right] \Phi(x, y) = 0 \quad (3.12)$$

Wyznaczanie pola prędkości za pomocą funkcji Airy'ego

Wiemy, jak wyznaczyć tensor naprężeń za pomocą funkcji Airy'ego (rów. 3.10). Chcemy mieć jeszcze metodę odzyskiwania pozostałych parametrów przepływu. Zacząć możemy od bezsladowej części tensora naprężeń. Wiemy, że $tr\tilde{\sigma} = \frac{3}{2}(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy})$, stąd:

$$\tilde{s}_{xx} = \frac{1}{2} (\partial_y^2 - \partial_x^2) \Phi \quad \tilde{s}_{xy} = -2\partial_x \partial_y \Phi$$

Teraz przejście możemy to tensora deformacji:

$$\tilde{D}_{xx} = \frac{n}{4\bar{\mu}} (\partial_y^2 - \partial_x^2) \Phi \quad \tilde{D}_{xy} = -\frac{1}{\bar{\mu}} \partial_x \partial_y \Phi$$

By wreszcie po odcałkowaniu uzyskać składowe pola prędkości:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{n}{4\bar{\mu}} \left[\int dx (\partial_y^2 - \partial_x^2) \Phi \quad \int dy (\partial_x^2 - \partial_y^2) \Phi \right] \quad (3.13)$$

3.5. Ewolucja modów

Cały czas pracujemy w reżimie małych perturbacji. Dla skończonej długości fałdowanej warstwy krzywą interfejsu możemy rozłożyć na mody. Jeżeli założymy, że perturbacja interfejsu znika na brzegu warstwy, to bazę tworzą funkcje $\cos\left(\frac{2m-1}{L}\pi x\right)$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, a L to długość warstwy. Wtedy krzywą interfejsu rozłożyć możemy w bazie:

$$\eta(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{L(t)}x\right) \quad (3.14)$$

Oznaczmy $k_m(t) = \frac{(2m-1)\pi}{L(t)}$. Z założeń dotyczących perturbacji wynika, że:

$$1 \gg |\partial_x \eta(0, x)| = \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m \sin(k_m x) \quad (3.15)$$

Z ortogonalności funkcji \cos wynika, że $\forall_m A_m k_m \ll 1$, co oznacza, że amplituda jest dużo mniejsza niż długość fali w danym modzie. Teraz przypomnijmy sobie równanie ewolucji interfejsu (rów. 3.5):

$$[\partial_t + \bar{D}_{xx} - V(h) + \bar{D}_{xx}x\partial_x] \eta = 0$$

Zauważycmy, że na krzywą interfejsu η działa liniowy operator różniczkowy, stąd możemy wnioskować, że po podstawieniu postacie krzywej interfejsu rozłożonej na mody (rów. 3.14):

$$\begin{aligned} & [\partial_t + \bar{D}_{xx} - V(h) + \bar{D}_{xx}x\partial_x] \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(k_m x) = 0 \\ & \sum_{m=1}^{\infty} [\partial_t + \bar{D}_{xx} - V(h) + \bar{D}_{xx}x\partial_x] A_m \cos(k_m x) = 0 \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{dA_m}{dt} + \bar{D}_{xx}A_m - V(h)A_m \right) \cos(k_m x) - \left(\frac{dk_m}{dt} + \bar{D}_{xx}k_m \right) A_m x \sin(k_m x) = 0 \end{aligned}$$

Z ortogonalności funkcji $\sin(k_m x)$ oraz $\cos(k_m x)$ możemy wywnioskować, że \forall_m zachodzi:

$$\begin{cases} \frac{dA_m}{dt} = (-\bar{D}_{xx} + V(h)) A_m \\ \frac{dk_m}{dt} = -\bar{D}_{xx}k_m \end{cases}$$

Dlatego dopóki nabylenie pozostaje małe $Ak \ll 1$, to mody ewoluują niezależnie od siebie. Dlatego rozpatrzyć można ewolucję amplitudy w każdym z nich oddziennie. Zakładamy, że długość warstwy jest bardzo duża, dlatego gęstość modów jest duża. Dlatego w dalszej części rozważymy zmianę amplitudy w czasie dla dowolnej wartości liczby falowej k . Dla dowolnej początkowej krzywej interfejsu $\eta(0, x)$ obliczyć ewolucję amplitudy każdego modu $A(t, k(t))$, a następnie odzyskać krzywą interfejsu po pewnym czasie t :

$$\eta(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos(k_m(t)x)$$

Dlatego cały wcześniej stworzony formalizm zastosować możemy do ewolucji interfejsu pojedynczego modu! To niezwykle upraszcza obliczenia. Jednak należy pamiętać, że ograniczeni jesteśmy do reżimu, w którym interfejs jest niemal płaski, a perturbacje przepływu są infinitezymalne. W dalszej części założymy, że interfejs zadany jest funkcją:

$$\eta(t, x) = A(t) \cos(k(t)x)$$

3.5.1. Separacja funkcji Airy'ego

Z warunku brzegowego na ciągłość naprężeń ścinających (rów. 3.4):

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x, \eta) - 4\bar{\mu}_1 \bar{D}_{xx} \partial_x \eta = \tilde{\sigma}_{xy}^{(2)}(x, \eta) - 4\bar{\mu}_2 \bar{D}_{xx} \partial_x \eta$$

Który jest spełniony dla $\forall x \in \mathbb{R}$ wynika, że jeżeli szukać będziemy rozwiązań funkcji Airy'ego w postaci separowalnej $\Phi(x, y) = G(x)F(y)$, to w chwili czasu t : $G(x) = \eta(t, x)$ - funkcja zapamiętuje kształt interfejsu (z dokładnością do czynnika skalującego). Oznacza to, że jeżeli będziemy łączyć wiele interfejsów to muszą one mieć ten sam kształt. W ogólności nie jest to prawda - więc nie zawsze rozwiązanie jest separowalne, ale dla konkretnego modu tak się dokładnie dzieje. Ze względu na to możemy zapostulować separowalną postać funkcji Airy'ego:

$$\Phi(x, y) = F(y)\cos(kx) \quad (3.16)$$

3.5.2. Równanie ewolucji przepływu perturbacyjnego

Wewnątrz każdej warstwy ewolucja zadana jest równaniem ewolucji funkcji Airy'ego (rów. 3.12):

$$\left[\partial_x^4 + \left(\frac{4}{n} - 2 \right) \partial_x^2 \partial_y^2 + \partial_y^4 \right] \Phi(x, y) = 0$$

Jeżeli podstawimy do tego równania wcześniej zapostulowaną postać funkcji Airy'ego 3.16, to otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne na funkcję $F(y)$:

$$\left[d_y^4 - \left(\frac{4}{n} - 2 \right) k^2 d_y^2 + k^4 \right] F(y) = 0 \quad (3.17)$$

Szukamy rozwiązań tego równania w tym celu wystarczy znaleźć pierwiastki równania:

$$x^4 - \left(\frac{4}{n} - 2 \right) x^2 + 1 = 0$$

Gdzie $x = \frac{d_y}{k}$. Aby rozwiązać to równanie obliczamy:

$$x^2 = \frac{2}{n} - 1 \pm i \frac{2}{n} \sqrt{n-1}$$

I sprawdzamy, że $|x^2|^2 = 1$, stąd możemy zapisać $x^2 = e^{i\alpha}$, dla jakiegoś $\alpha \in \mathbb{R}$. Teraz znalezienie rozwiązań jest już proste:

$$x \in \left\{ e^{\frac{i\alpha}{2}}, e^{-\frac{i\alpha}{2}}, -e^{\frac{i\alpha}{2}}, -e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right\}$$

Wyznaczamy teraz:

$$\begin{cases} Re\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \\ Im\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) = \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{n}} \end{cases}$$

Więc uzyskujemy 4 rozwiązania:

$$x \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{n}} + i\sqrt{1-\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{1}{n}} - i\sqrt{1-\frac{1}{n}}, -\sqrt{\frac{1}{n}} - i\sqrt{1-\frac{1}{n}}, -\sqrt{\frac{1}{n}} + i\sqrt{1-\frac{1}{n}} \right\}$$

Co daje ogólne rozwiązańe równania 3.17:

$$F(y) = \left[a \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) + b \sin\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) \right] e^{\sqrt{\frac{1}{n}}ky} + \left[c \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) + d \sin\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) \right] e^{-\sqrt{\frac{1}{n}}ky} \quad (3.18)$$

Gdzie a, b, c, d to arbitralne stałe, których dokładną wartość należy wyznaczyć z warunków brzegowych dla warstwy.

3.5.3. Rozwiązańe dla prędkości

Jak obliczyliśmy wcześniej (rów. 3.13) składowe prędkości perturbacji to:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{n}{4\bar{\mu}} \begin{bmatrix} \int dx (\partial_y^2 - \partial_x^2) \Phi \\ \int dy (\partial_x^2 - \partial_y^2) \Phi \end{bmatrix}$$

Jeżeli podstawimy separowalną postać funkcji Airy'ego (rów. 3.16) to uprościmy prędkość do:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{n}{4\bar{\mu}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{k}F + kF''\right) \sin(kx) \\ (-k^2 \int F(y)dy - F') \cos(kx) \end{bmatrix}$$

Zauważać można, że zapisać ją można w separowalnej postaci jako:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} \frac{dV}{dy} \sin(kx) \\ V(y) \cos(kx) \end{bmatrix}$$

Gdzie $V(y) = \frac{n}{4\bar{\mu}} (-k^2 \int F(y)dy - F')$, zauważmy że całkując lub różniczkując $F(y)$ jedynie zmieniamy współczynniki liczbowe, dlatego $V(y)$ będzie dokładnie tej samej postaci, jedynie z innymi współczynnikami. Stąd:

$$V(y) = \left[a \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) + b \sin\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) \right] e^{\sqrt{\frac{1}{n}}ky} + \left[c \cos\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) + d \sin\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}ky\right) \right] e^{-\sqrt{\frac{1}{n}}ky} \quad (3.19)$$

Gdzie a, b, c, d to arbitralne stałe. Tym samym wyraźiliśmy pole prędkości w danej warstwie za pomocą 4 stałych.

Można też łatwo wyznaczyć z definicji $\tilde{\sigma}_{xy}$, a następnie z równania $\nabla \cdot \tilde{\sigma} = 0$ znaleźć $\tilde{\sigma}_{yy}$:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xy} = -\bar{\mu} \left(\frac{V''(y)}{k} + kV(y) \right) \sin(kx) \\ \tilde{\sigma}_{yy} = -\bar{\mu} (V'(y) + k^2 \int V(y)dy) \cos(kx) \end{cases} \quad (3.20)$$

3.5.4. Ewolucja interfejsu

Wyprowadziliśmy wcześniej ogólne równanie ewolucji interfejsu dla małych perturbacji (rów. 3.5). Możemy teraz podstawić do niego $\eta(t, x) = A(t) \cos(k(t)x)$, w wyniku otrzymamy równanie:

$$\frac{dA}{dt} \cos(kx) - A \frac{dk}{dt} x \sin(kx) + (\bar{D}_{xx} - V(h)) A \cos(kx) - \bar{D}_{xx} x A k \sin(kx) = 0$$

W pełni analogiczne jak wyprowadzone wcześniej podczas ewolucji na mody. Wiemy, że równanie spełnione jest dla \forall_x , stąd rozbić możemy na składową sin oraz cos otrzymując równania na ewolucję amplitudy oraz liczby falowej perturbacji:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = (-\bar{D}_{xx} + V(h))A \\ \frac{dk}{dt} = -\bar{D}_{xx}k \end{cases} \quad (3.21)$$

Z tym, że teraz znamy postać $V(h)$ i zależy ona jedynie od 4 arbitralnych stałych. Obydwa równania zadają ewolucję w postaci wzrostu (lub zaniku) wykładniczego w czasie. Zgodnie z oczekiwaniami przy jednolitym skracaniu w przepływie podstawowym liczba falowa zadana jest równaniem:

$$k(t) = k(0)e^{-\bar{D}_{xx}t} \quad (3.22)$$

Nas interesuje jednak przede wszystkim ewolucja amplitudy danego modu:

$$A(t) = A(0)e^{(-1+q)\bar{D}_{xx}t} \quad (3.23)$$

Gdzie $q = \frac{V(h)}{\bar{D}_{xx}}$.

Definicja 3.5.1 $q(k) = \frac{V(h)}{\bar{D}_{xx}}$ - współczynnik wzrostu: odpowiada za wykładniczy wzrost amplitudy modu dla liczby falowej k

Naszym celem dalszej części tej pracy będzie wyznaczanie współczynnika wzrostu dla różnych ilości warstw i warunków brzegowych. Pokażemy, że w początkowej fazie ewolucji wyraźnie zarysowuje się jedna dominująca długość fali, która sprawiają że w momencie wyjścia poza reżim małych perturbacji interfejs o dowolnym początkowym kształcie dla danych parametrów reologicznych będzie miał kształt funkcji sinusoidalnej, niezależny od początkowego kształtu interfejsu.

3.6. Dwa interfejsy

Rozważyć teraz możemy przypadek dwóch interfejsów. W danym momencie każdy z nich może mieć różną amplitudę początkową. Wtedy opisać możemy je krzywymi:

$$\eta_1(t, x) = A_1 \cos(kx), \quad \eta_2(t, x) = A_2 \cos(kx)$$

Wówczas otrzymany współczynnik wzrostu, dla każdego z interfejsów, będzie liniową funkcją amplitud interfejsów. Relację tę zaprezentować można ogólnie opisując ewolucję wektora amplitud interfejsów \mathbf{A} :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \hat{q} \cdot \mathbf{A}$$

Gdzie \hat{q} jest macierzą współczynników wzrostu. Ogólne rozwiązywanie analityczne jest bardzo skomplikowane i znacznie uprościć można je badając wektory i wartości własne macierzy \hat{q} .

My rozważamy układ dwóch interfejsów. Możemy wykorzystać symetrię problemu, aby zgadnąć postać macierzy \hat{q} . Wiemy, że układ warstwowy jest w osi x symetrycznie względem osi $y = 0$. Ewolucja tej symetrii zachowuje. Stąd wnioskować można, że ewolucja górnego interfejsu tak zależy od amplitudy górnego jak ewolucja dolnego od dolnego, a ewolucja górnego od dolnego jak dolnego od górnego. Stąd \hat{q} przyjmie postać:

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dla jakichś wartości $a, b \in \mathfrak{R}$. Dla takiej macierzy bardzo prosto znaleźć układ własny. Opisać go można jako:

$$|a+b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |a-b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Widać stąd, że istnieją dwa mody, które ewoluują niezależnie od siebie. Jeden opisany jest przez amplitudę $A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$ odpowiadający interfejsom w fazie, drugi opisany przez $B = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$ to mod opisujący interfejsy w przeciwfazie. Każdy z tych przypadków ma wyraźnie zaznaczone symetrie. W celu wykazania poprawności rozumowania w następnej części przedstawione zostanie rozwiązywanie ogólne, a także szczegółowe wykorzystujące właśnie mody własne problemu i symetrie. Pokażemy dzięki temu, dużo bardziej efektywną metodę rozwiązywania problemu 3 warstw (2 interfejsów).

3.6.1. Symetrie pola prędkości

Dla wcześniej opisanych dowolnych amplitud dwóch interfejsów

$$\eta_1(t, x) = A_1 \cos(kx), \quad \eta_2(t, x) = A_2 \cos(kx)$$

Zdefiniować możemy wartości amplitudy w fazie A oraz przeciwfazie B :

$$A = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \quad B = \frac{1}{2} (A_1 - A_2)$$

Wtedy możemy szukać oddzielnie rozwiązań dla składowej moduł w fazie oraz w przeciwfazie. Każde z tych rozwiązań ma symetrie, które możemy wykorzystać. Dla krzywych interfejsów pole prędkości między nimi posiada symetrię:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} -\tilde{u}_x \\ -\tilde{u}_y \end{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{2} - x, -y \right) \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} -\tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix} (-x, y) \quad (3.25)$$

Widzimy od razu, że \tilde{u}_y musi być parzystą funkcją x , a \tilde{u}_x nieparzystą - jest to spełnione dla naszych założeń ($\cos(kx)$). Pozostałe warunki można przetłumaczyć na funkcję $V(y)$:

$$V(y) = V(-y) \quad V'(y) = -V'(-y)$$

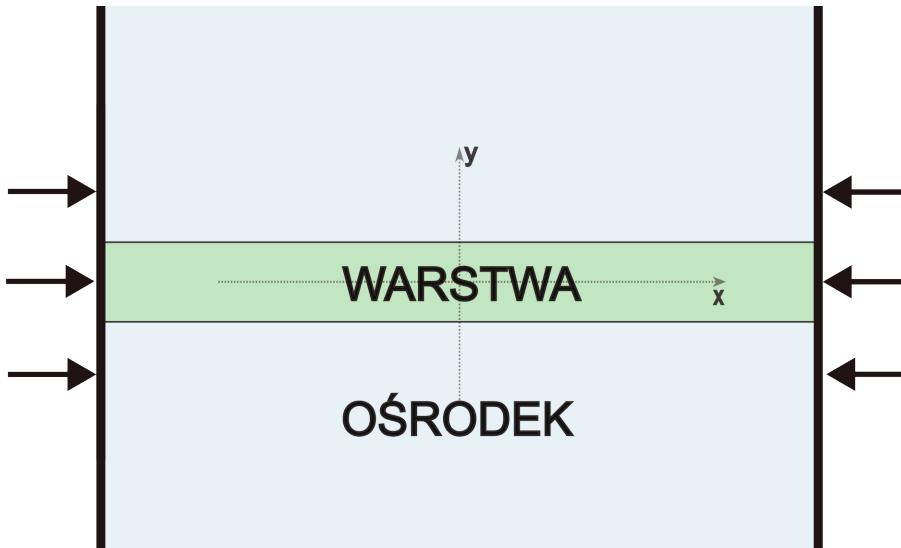
Podczas gdy dla interfejsów w przeciwnieństwie mamy inną symetrię:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix}(x, y) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ -\tilde{u}_y \end{bmatrix}(x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix}(x, y) = \begin{bmatrix} -\tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \end{bmatrix}(-x, y)$$

Co dla funkcji $V(y)$ daje warunek:

$$V(y) = -V(-y) \quad V'(y) = V'(-y)$$



Rysunek 3.2: Model jednostajnego skracania warstwy w nieskończonym ośrodku. W tym przypadku rozważamy nieskończony ośrodek, dlatego rozciąga się on w osi prostopadłej do warstwowania (y) do nieskończoności, nie ma też problemu z nieściśliwością płynu - może on uciec do nieskończoności.

3.7. Rozwiążanie Fletchera

W tej sekcji odtworzymy wzór na współczynnik wzrostu pojedynczej warstwy w ośrodku otrzymany przez Fletchera w jego książce [3].

Rozważamy jedną warstwę, w nieskończonym ośrodku, o parametrach reologicznych innych od niego. Oznacza to, że w modelu mamy układ 3 warstw z dwoma interfejsami między nimi. Wartości związane z warstwą oznaczymy indeksem 0, podczas gdy te związane z ośrodkiem indeksem 1. Wybierzemy środek układu współrzędnych w środku warstwy. Każda z 3 warstw opisywana jest przez 4 arbitralne stałe, ale ze względu na symetrię zamiana:

$$a \leftrightarrow c \quad b \leftrightarrow -d$$

Odpowiada obliczaniu $V(-y)$, stąd nasz problem jest całkowicie opisywany przez 8 stałych. Wyznaczyć je można z warunków zszycia na górnym interfejsie (2 równania na prędkość, 2 na tensor naprężeń) oraz warunków w $y = \pm\infty$ (2 równania). Ostatnie dwa równania wynikać będą z symetrii przepływu wewnątrz warstwy. W ten sposób otrzymamy zamknięty układ 8 równań dla 8 stałych. W ten sposób wyznaczymy stałe, by stąd odzyskać informację o współczynniku wzrostu q dla pojedynczej warstwy.

3.7.1. Układ równań

Konstruujemy więc układ równań, którego rozwiązanie da nam 8 stałych. Rozważmy najpierw zszycie warstwy i ośrodka. Warunki zszycia dla prędkości możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x : V^{(0)}(h) &= V^{(1)}(h) \\ \tilde{u}_y : V'^{(0)}(h) &= V'^{(1)}(h)\end{aligned}$$

Gdzie $h = \frac{H}{2}$, a H to grubość warstwy. Natomiast ciągłość sił (rów. 3.4):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{yy}^{(0)}(x, h) &= \tilde{\sigma}_{yy}^{(1)}(x, h) \\ \tilde{\sigma}_{xy}^{(0)}(x, h) + 4\bar{\mu}_0 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx) &= \tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x, h) + 4\bar{\mu}_1 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx)\end{aligned}$$

W tym momencie mamy 4 równania. Teraz należy ustalić warunki w $y = \pm\infty$. Wiemy, że perturbacja powinna zanikać w nieskończoności, stąd wnioskujemy, że:

$$a_1 = b_1 = 0$$

Ostatnich dwóch równań dostarcza symetria.

3.7.2. Interfejsy w fazie

Dla dwóch interfejsów w fazie mamy warunek:

$$u_y^{(0)}\left(\frac{L}{2} - x, y\right) = -u_y^{(0)}(x, -y)$$

Stąd wnioskować możemy, że $a_0 = b_0$ oraz $b_0 = -d_0$. W ten sposób zapełniamy zamknięty układ 8 równań, dla fałdowania:

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{(0)}(h) = V^{(1)}(h) \\ V'^{(0)}(h) = V'^{(1)}(h) \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{(0)}(x, h) = \tilde{\sigma}_{yy}^{(1)}(x, h) \\ \tilde{\sigma}_{xy}^{(0)}(x, h) + 4\bar{\mu}_0 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx) = \tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x, h) + 4\bar{\mu}_1 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx) \\ a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_0 = c_0 \\ b_0 = -d_0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

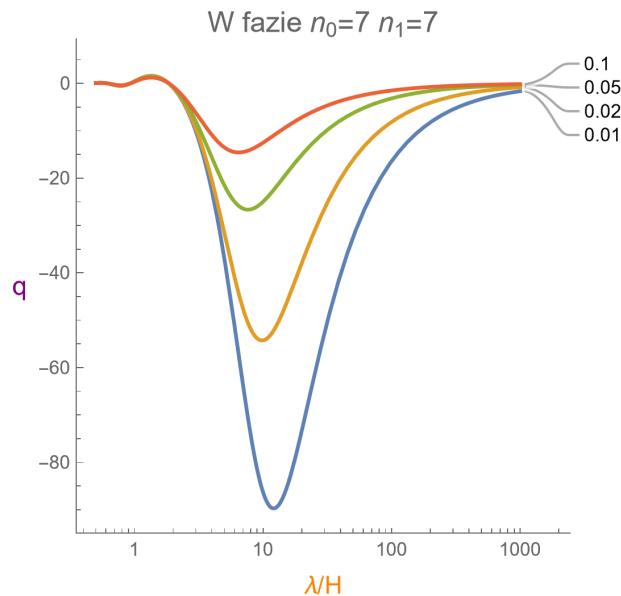
Ten proces zautomatyzowano z użyciem programu Mathematica. Otrzymano analityczne wzory na współczynniki $\{a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1\}$, z użyciem których następnie obliczono współczynniki wzrostu $q = \frac{V(h)}{\bar{D}_{xx}}$, zauważać można, że wynik nie zależy od tego którą funkcję V weźmiemy. Otrzymano analityczny wzór:

$$q(p, r, n_0, n_1) = \frac{2n_0(1-r)}{1 - Q^2 - \frac{\sqrt{n_0-1}}{\sin \sqrt{1-\frac{1}{n_0}} p} \left[(1+Q^2) \sinh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) + 2Q \cosh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) \right]} \quad (3.27)$$

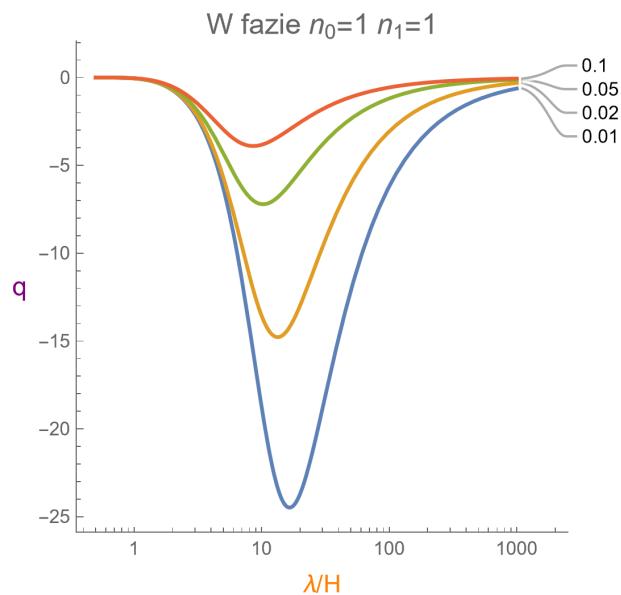
Gdzie $p = kH$, $r = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_0}$, a $Q = \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} r$. Tak otrzymaną funkcję możemy wyrysować dla kilku przykładowych wartości (rys. 3.3). W następnym kroku możemy uzyskać wynik w granicy liniowych relacji konstytutywnych. Oznacza to, że musimy obliczyć limes dla $n_0, n_1 \rightarrow 1$:

$$q_{\text{lin}}(p, r) = \frac{2p(1-r)}{p(1-r^2) - (1+r^2) \sinh(p) - 2r \cosh(p)} \quad (3.28)$$

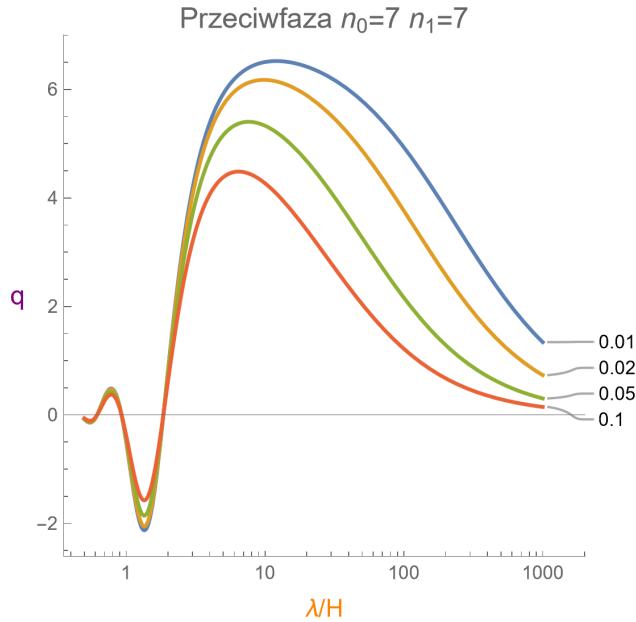
Dla przykładowych wartości r krzywe wzrostu dla liniowych relacji konstytutywnych zvisualizowano na wykresie 3.4.



Rysunek 3.3: Współczynnik wzrostu w funkcji znormalizowanych długości fali. Różne kolory krzywych odpowiadają różnym wartościom współczynnika $r = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}$ - stosunkowi lepkości ośrodka do warstwy.



Rysunek 3.4: Współczynnik wzrostu w funkcji znormalizowanej długości fali dla interfejsów w fazie oraz liniowych relacji konstytutywnych. Rozważany tu jest przypadek interfejsów w przeciwfazie. Odtworzony tu został wykres z rozdziału 10 podręcznika Fundamentals of Structural Geology [3].



Rysunek 3.5: Wykres współczynnika wzrostu w funkcji zmormalizowanej długości fali dla nieliniowych relacji konstytutywnych z wykładnikami $n_0 = 7$ oraz $n_1 = 7$. Różne kolory oznaczają krzywe dla różnych wartości współczynnika $r = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2}$.

3.7.3. Interfejsy w przeciwfazie

Podobnie rozwiążanie otrzymamy można dla interfejsów będących w przeciwfazie. Układ równań jest dokładnie taki sam, z tą różnicą, że dwa ostatnie równania w układzie (rów. 3.26) zmieniają się na:

$$a_0 = -c_0 \quad b_0 = d_0$$

Rozwiążując ten układ można otrzymać współczynnik wzrostu q :

$$q(p, r, n_0, n_1) = \frac{2n_0(1-r)}{1-Q^2 + \frac{\sqrt{n_0-1}}{\sin \sqrt{1-\frac{1}{n_0}} p} \left[(1+Q^2) \sinh \left(\frac{p}{\sqrt{n_0}} \right) + 2Q \cosh \left(\frac{p}{\sqrt{n_0}} \right) \right]} \quad (3.29)$$

Tutaj też możemy wyrysować wykres dla $n_0 = n_1 = 7$ oraz przykładowych wartości r (rys. 3.5).

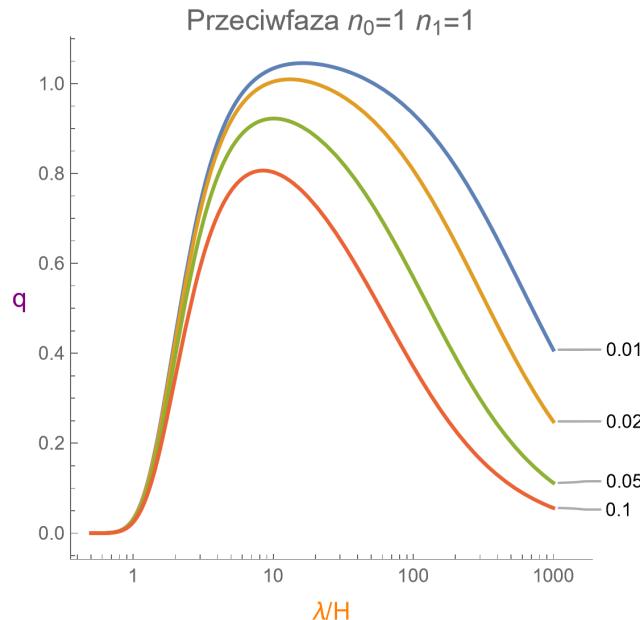
W granicy liniowych relacji konstytutywnych $n_0, n_1 \rightarrow 1$:

$$q_{\text{lin}}(p, r) = \frac{2p(1-r)}{p(1-r^2) + (1+r^2) \sinh(p) + 2r \cosh(p)} \quad (3.30)$$

Co zwizualizować można na wykresie (rys. 3.6).

3.7.4. Dyskusja wyników

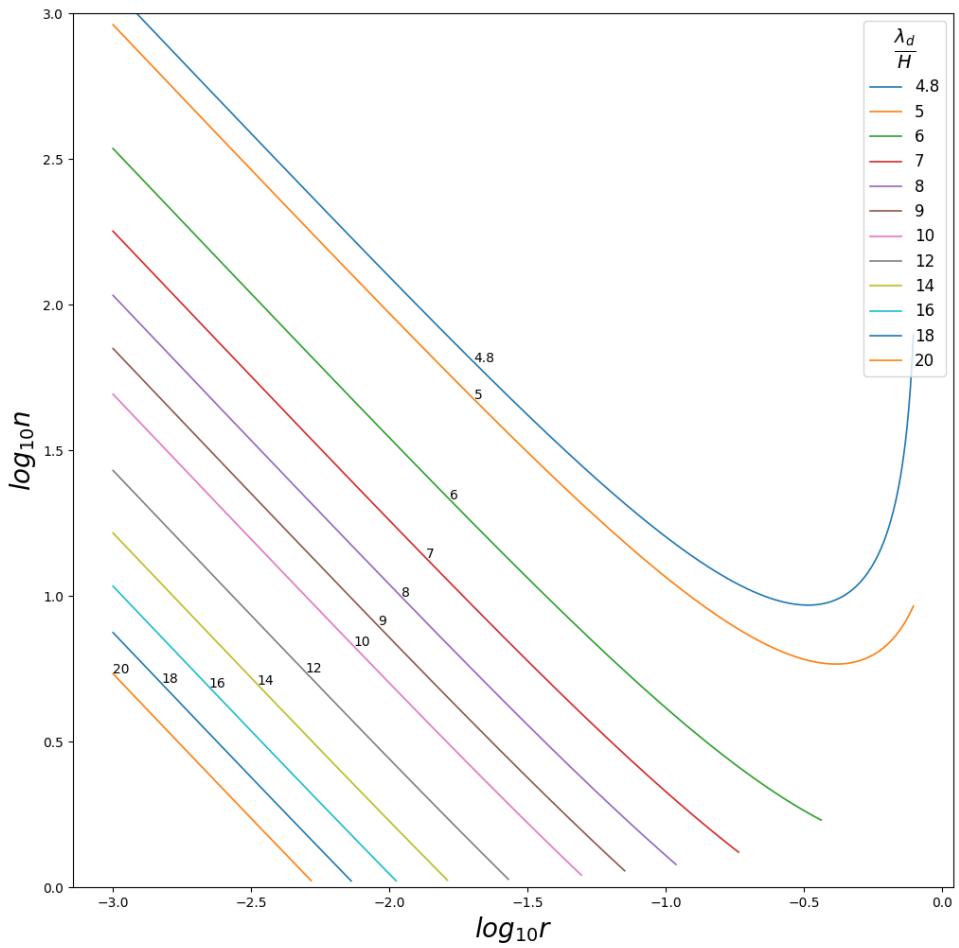
Charakter otrzymanych krzywych przeanalizować można dla różnych wartości n_0 oraz n_1 , występujące w przyrodzie wartości dla skał plasują się zazwyczaj w przedziale od 3 do 5, w rzadkich przypadkach do 7. Dla tych wartości wszystkie krzywe charakteryzują się jednym ekstremum globalnym. W przypadku interfejsów będących w fazie jest to globalne minimum. Oznacza to, że mod w fazie narasta dla $\text{sgn}(\bar{D}_{xx}) = -1$, co odpowiada skracaniu



Rysunek 3.6: Współczynnik wzrostu w funkcji znormalizowanej długości fali, dla warstwy i ośrodka posiadających liniowe relacje konstytutywne. Rozważany jest przypadek interfejsów w fazie.

warstwy. Analogicznie dla interfejsów w przeciwfazie istnieje wyraźnie zarysowane globalne maksimum. Oznacza to, że dla dowolnej perturbacji początkowej mod o długości fali odpowiadającej temu maksimum narasta podczas rozciągania warstwy $\text{sgn}(\bar{D}_{xx}) = 1$. W ten sposób analitycznie odtworzyliśmy dobrze znany z geologii strukturalnej fakt, mówiący że w przypadku skracania warstwa się fałduje, a przy rozciąganiu formuje budinaż.

Dodatkowo na koniec zaprezentować możemy wykres (rys. 3.7), za pomocą którego dla fałdowania odczytać można znając znormalizowaną długość fali interfejsu $\frac{\lambda_d}{H}$ oraz stosunek lepkości warstw r wartość współczynnika nieliniowości n_0 , przy założeniu że w ośrodku funkcjonują liniowe relacje konstytutywne $n_1 = 1$. Niestety nie jest on zbyt przydatny w praktyce, bo przepływy skał nie są opisywane modelem liniowych relacji konstytutywnych (typowe wykładniki $2 < n < 5$), a parametr $p = kH$ ewoluje nietrywialnie w czasie. Fakt ten weźmiemy pod uwagę w dalszej części pracy przy tworzeniu modelu SAS (Small Amplitude Solution) - wówczas liczyć będziemy mogli na wyniki pozwalające odtworzyć występujące w przyrodzie struktury - oczywiście w reżimie naszego przybliżenia małych odchyleń od warstwowania w kierunku skracania układu. Wykres tej zależności jest bezpośrednim odtworzeniem wyników z podręcznika Fletchera [3] z rozdziału 11.



Rysunek 3.7: Przestrzeń fazowa (n, r) z krzywymi stałej wartości $\frac{\lambda_d}{H}$. Można z niej teoretycznie odczytać wykładnik nieliniowości relacji konstytutywnych warstwy. Niestety wynik ten nie jest praktyczny, ponieważ parametr $p = kH$ ewoluje w czasie, a ośrodek nigdy nie jest raczej liniowy.

Rozdział 4

Skończony ośrodek

W tym rozdziale zaprezentujemy rozwiązanie dla ośrodka o ograniczonych rozmiarach (rys. 4.1). Wprowadza to do naszego problemu nowy parametr swobodny - grubość ośrodka $2d$. Zbadamy charakterystykę otrzymanych krzywych współczynnika wzrostu. Następnie skonstruujemy model numeryczne rozwiązujący problem ewolucji pojedynczej warstwy w ośrodku dla małych amplitud interfejsu (odchylenia od warstwowania wzdłuż kierunku skracania).

4.1. Rozwiążanie dla skońzonego ośrodka

Proces rozwiązania jest niemalże taki sam jak dla nieskońzonego ośrodka w osi y , z tą różnicą, że dwa z równań finalnym układzie przyjmują inną postać. Mianowicie

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

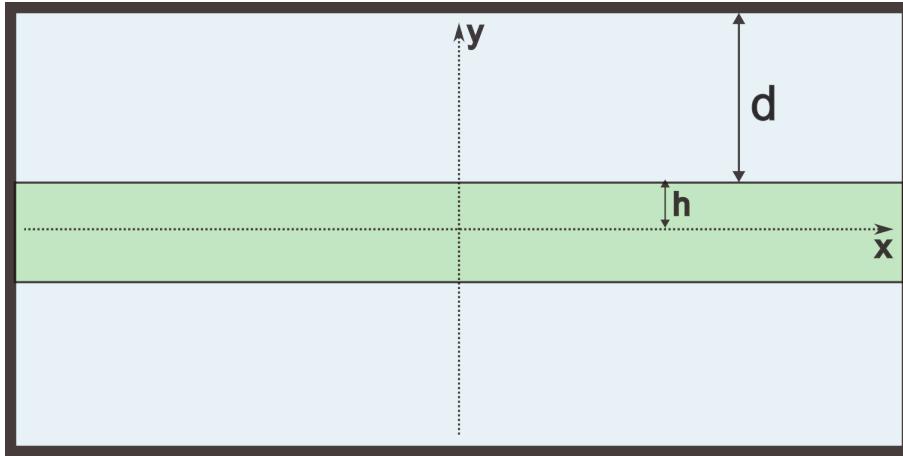
Zmienią się na warunki brzegowe na górnej granicy ośrodka. Rozważać możemy tutaj różne przypadki. Idealny poślizg - zakładamy sztywną warstwę, stąd składowa \tilde{u}_y perturbacji znika, natomiast w kierunku x mamy idealny poślizg, stąd znikają siły w tym kierunku $\sigma_{xy} = 0$. Kolejną opcją jest standardowy dla reżimu Stokesa warunek braku poślizgu $u_x = u_y = 0$. Ostatnią opcją jest warunek swobodnego brzegu $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$.

Rozważyć możemy teraz fizyczność powyższych warunków brzegowych. Rozważamy rozwiązania równania Naviera-Stokesa w reżimie bardzo lepkich przepływów. Naturalne warunki brzegowe to brak poślizgu. Niestety w naszym modelu na granicy ośrodka prędkość przepływu podstawowego jest niezerowa $\bar{u}_x = \bar{D}_{xxx}$, stąd niemożliwe jest narzucenie tych warunków brzegowych. Dla idealnie śliskiej płyty możliwe jest natomiast spełnienie warunków brzegowych dla przepływu podstawowego pod warunkiem, że płyta będzie poruszać się do góry w tempie pozwalającym zachować nieściśliwość płynu $-\bar{D}_{xxy}$. Warunek swobodnej powierzchni jest niemożliwy do spełnienia w naszym modelu, ponieważ sama powierzchnia ewoluowałaby i zmieniałaby kształt.

4.1.1. Idelny poślizg

$a_1 = b_1 = 0$ zamieni się na:

$$\begin{cases} \sigma_{xy}^{(1)}(x, d) = 0 \\ u_y^{(1)}(x, d) = 0 \end{cases}$$



Rysunek 4.1: Model warstwy w skończonym ośrodku. Jego grubość oznaczona jest przez $2d$. Z uwagi na zachowanie nieściśliwości płynu dla skracania ośrodka w kierunku warstwowania (osi x) jego brzegi muszą się oddalać w kierunku prostopadłym (osi y). Odwrotnie dla skracania.

Gdzie d to współrzędna y górnej granicy interfejsu. Ewolucja d , pozwalająca zachować nieściśliwość płynu, zadana jest przez:

$$\frac{dd}{dt} = de^{-\bar{D}_{xx}t}$$

Warunki te przetłumaczyć można łatwo na funkcję $V(y)$ podobnie jak zrobiliśmy to dla warunku nieskończonego.

4.1.2. Mody własne (symetrie)

Tak samo jak w rozwiązyaniu Fletchera rozważamy dwie symetrie - interfejsy w fazie i przeciwfazie. Układ równań między nimi będzie się ponownie różnił tylko symetrią wewnętrz warstwy (rów. 3.24):

$$W \text{ fazie: } \begin{cases} a_0 = c_0 \\ b_0 = -d_0 \end{cases} \quad W \text{ przeciwfazie: } \begin{cases} a_0 = -c_0 \\ b_0 = d_0 \end{cases}$$

W najbliższej części rozważymy jedynie interfejsy w fazie. Dla interfejsów w przeciwfazie podamy jedynie wynik.

4.1.3. Układ równań

Konstruujemy liniowy układ równań pozwalający wyznaczyć współczynniki $\{a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1\}$ w pełnie opisujące funkcję $V(y)$, dla interfejsów w fazie - modu narastającego przy skra-

caniu:

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{(0)}(h) = V^{(1)}(h) \\ V'^{(0)}(h) = V'^{(1)}(h) \\ \sigma_{xy}^{(1)}(x, d) = 0 \\ V^{(1)}(d) = 0 \\ a_0 = c_0 \\ b_0 = -d_0 \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{(0)}(x, h) = \tilde{\sigma}_{yy}^{(1)}(x, h) \\ \tilde{\sigma}_{xy}^{(0)}(x, h) + 4\bar{\mu}_0 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx) = \tilde{\sigma}_{xy}^{(1)}(x, h) + 4\bar{\mu}_1 \bar{D}_{xx} A k \sin(kx) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Jego rozwiązanie daje nam współczynnik wzrostu dla nieliniowych relacji konstytutywnych oraz skończonego ośrodka:

$$q^{fatd}(p, r, n_0, n_1, u) = 2n_0 n_1 (r - 1) \frac{\text{licz}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (4.2)$$

Gdzie $p = kH$, $r = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_0}$, $u = \frac{d}{h}$, a pod skrótami licz , m_1 , m_2 , m_3 kryją się:

$$\begin{aligned} \text{licz} &= \sin(\alpha_0 p) \left[(r - 1) \sin(\alpha_1 pu) + \sqrt{n_1 - 1} \sinh \left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}} \right) \right] + \sqrt{n_0 - 1} r \sinh \left(\frac{p}{\sqrt{n_0}} \right) \sin(\alpha_1 pu) \\ m_1 &= 2r \sqrt{n_0 n_1 (n_0 - 1)(n_1 - 1)} \left[\cos(\alpha_0 p) \cos(\alpha_1 pu) + \cosh \left(\frac{p}{\sqrt{n_0}} \right) \cosh \left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}} \right) \right] \\ m_2 &= \sin(\alpha_0 p) \left[(-2n_0 n_1 r + n_0 r^2 + n_1) \sin(\alpha_1 pu) - \sqrt{n_1 - 1} (n_1 - n_0 r^2) \sinh \left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}} \right) \right] \\ m_3 &= \sqrt{n_0 - 1} \sinh \left(\frac{p}{\sqrt{n_0}} \right) \left[\sqrt{n_1 - 1} (n_0 r^2 + n_1) \sinh \left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}} \right) - (n_1 - n_0 r^2) \sin(\alpha_1 pu) \right] \end{aligned}$$

A w celu uproszczenia zapisu $\alpha_i = \sqrt{1 - \frac{1}{n_i}}$. Można sprawdzić, że w granicy

$$\lim_{u \rightarrow \infty} q(p, r, n_0, n_1, u)$$

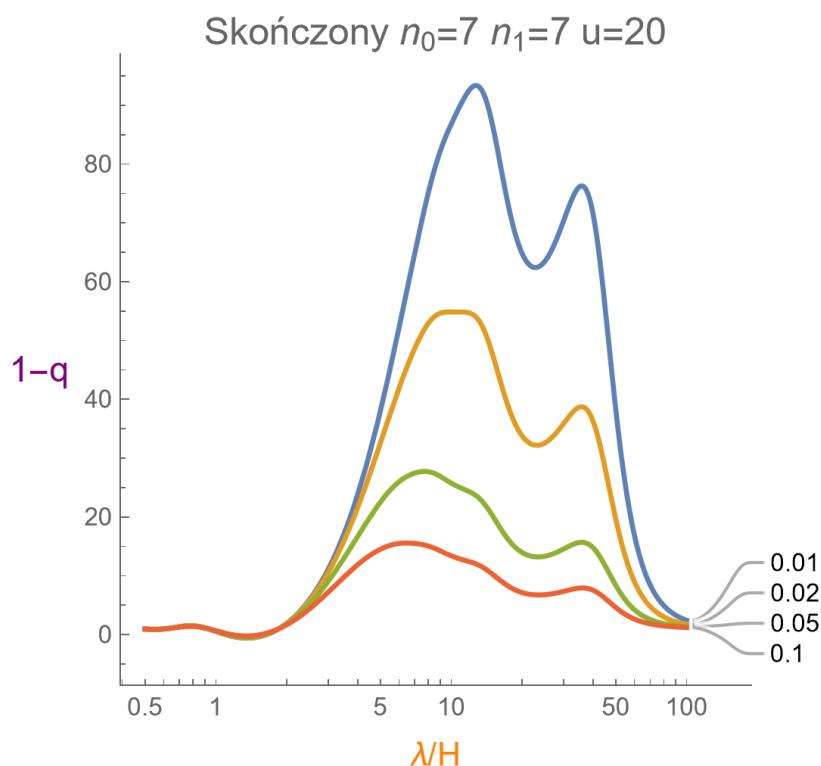
współczynnik wzrostu upraszcza się do wzoru Fletchera (rów. 3.27). W pracy zamieszczono wykresy współczynnika wzrostu w funkcji znormalizowanej długości fali $\frac{\lambda}{H}$ dla kilku przykładowych wartości parametrów n_0 , n_1 , u . Jeżeli czytelnik chciałby jednak zbadać większą ich wariację, to w załączniku do pracy znajduje się arkusz w programie Mathematica z wykresem, z suwakami, stworzony specjalnie w tym celu. W granicy liniowych wykładników relacji konstytutywnych wzór ten upraszcza się do:

$$\begin{aligned} q_{lin}^{fatd}(p, r, u) &= \\ &\frac{2p(r - 1)(p(r - 1)u + \text{rush}(p) + \text{sh}(pu))}{p^2(r - 1)^2u + p(r^2 - 1)\text{ush}(p) + (p(r^2 - 1) + (r^2 + 1)\text{sh}(p))\text{sh}(pu) + 2r\text{ch}(p)\text{ch}(pu) + 2r} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Współczynniki dla budinażu

Jeżeli rozważymy interfejsy w przeciwfazie, to otrzymamy wzór:

$$q^{budin}(t, r, n_0, n_1, u) = 2n_0 n_1 \sqrt{n_1 - 1} (1 - r) \frac{\text{licznik}}{\text{mianownik}} \quad (4.4)$$



Rysunek 4.2: Krzywe współczynnika wzrostu dla wykładników nieliniowości $n_0 = n_1 = 7$ w skończonym układzie $u = 20$, dla interfejsów w fazie. Od razu zaprezentowano funkcję $1 - q$, co odpowiada wykładnikowi przy wzroście amplitudy dla danej długości fali dla skracania $\text{sgn}(\bar{D}_{xx})(-1 + q)$. Kolory krzywych odpowiadają kolejnym stosunkom lepkości ośrodka do warstwy r . Zauważać można pojawienie się podwójnych maksimów krzywej współczynnika wzrostu - będące efektem skończości ośrodka i przyjętych warunków brzegowych.

$$\text{licznik} = \sin\left(\sqrt{\frac{n_0-1}{n_0}}p\right) \left((r-1) \sin\left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}pu\right) + \sqrt{n_1-1} \sinh\left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}}\right) \right) \\ - \sqrt{n_0-1} r \sinh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}pu\right)$$

$$\text{mianownik} = 2r \left(\sqrt{(n_0-1)n_0n_1} - \sqrt{(n_0-1)n_0n_1^3} \right) \cos\left(\sqrt{\frac{n_0-1}{n_0}}p\right) \cos\left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}pu\right) \\ - 2r \left(\sqrt{(n_0-1)n_0n_1} - \sqrt{(n_0-1)n_0n_1^3} \right) \cosh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) \cosh\left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}}\right) \\ + \sqrt{n_1-1} (n_1(2n_0r-1) - n_0r^2) \sin\left(\sqrt{\frac{n_0-1}{n_0}}p\right) \sin\left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}pu\right) \\ + (n_1-1)(n_1-n_0r^2) \sin\left(\sqrt{\frac{n_0-1}{n_0}}p\right) \sinh\left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}}\right) \\ + \sinh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) \left(\sqrt{(n_0-1)(n_1-1)} (n_0r^2 - n_1) \sin\left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}pu\right) \right) \\ + \sinh\left(\frac{p}{\sqrt{n_0}}\right) \left(\sqrt{n_0-1}(n_1-1) (n_0r^2 + n_1) \sinh\left(\frac{pu}{\sqrt{n_1}}\right) \right)$$

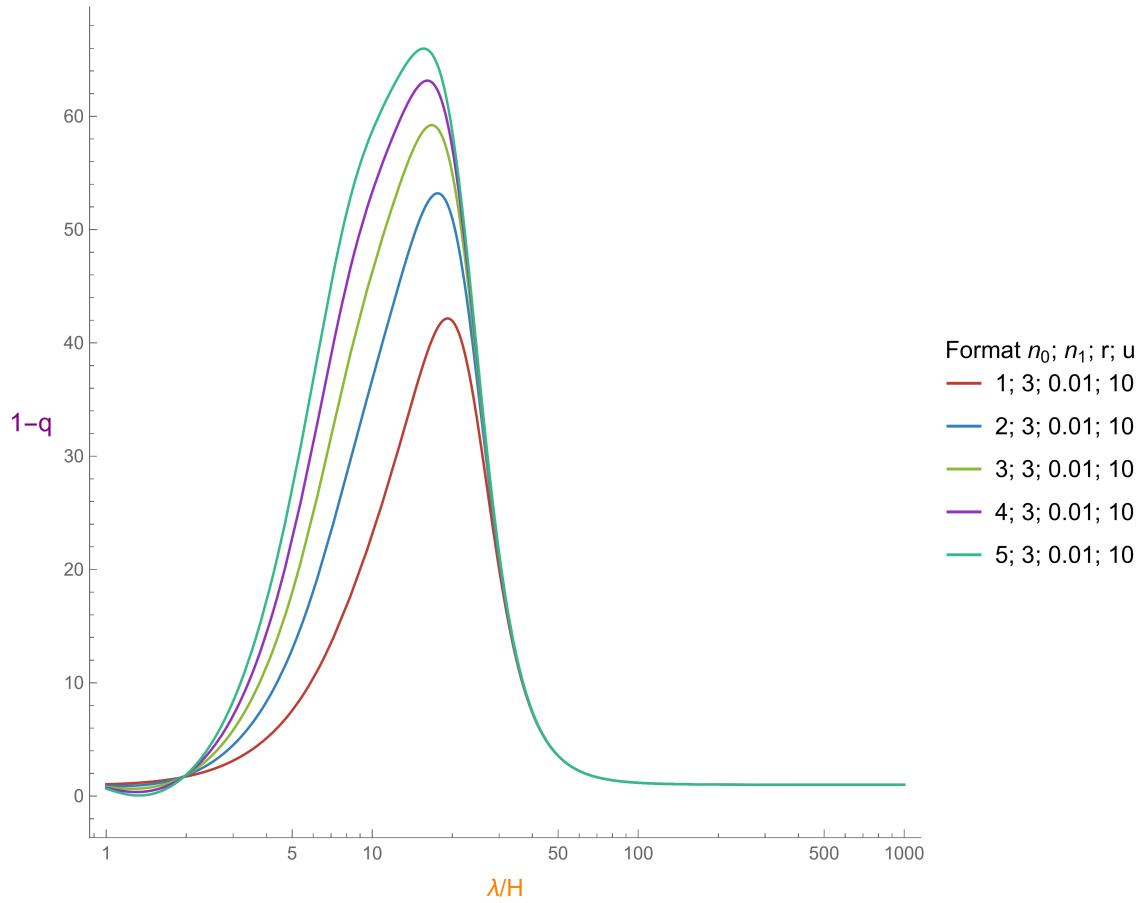
Co w granicy liniowych wykładników relacji konstytutywnych (lepkości niezależnej o tempa skracania) upraszcza się do:

$$q_{lin}^{bardin}(p, r, u) = \frac{2p(r-1)(p(r-1)u - ru \sinh(p) + \sinh(pu))}{p^2(r-1)^2u - p(r^2-1)u \sinh(p) - (-pr^2 + (r^2+1)\sinh(p) + p) \sinh(pu) - 2r \cosh(p) \cosh(pu) + 2r} \quad (4.5)$$

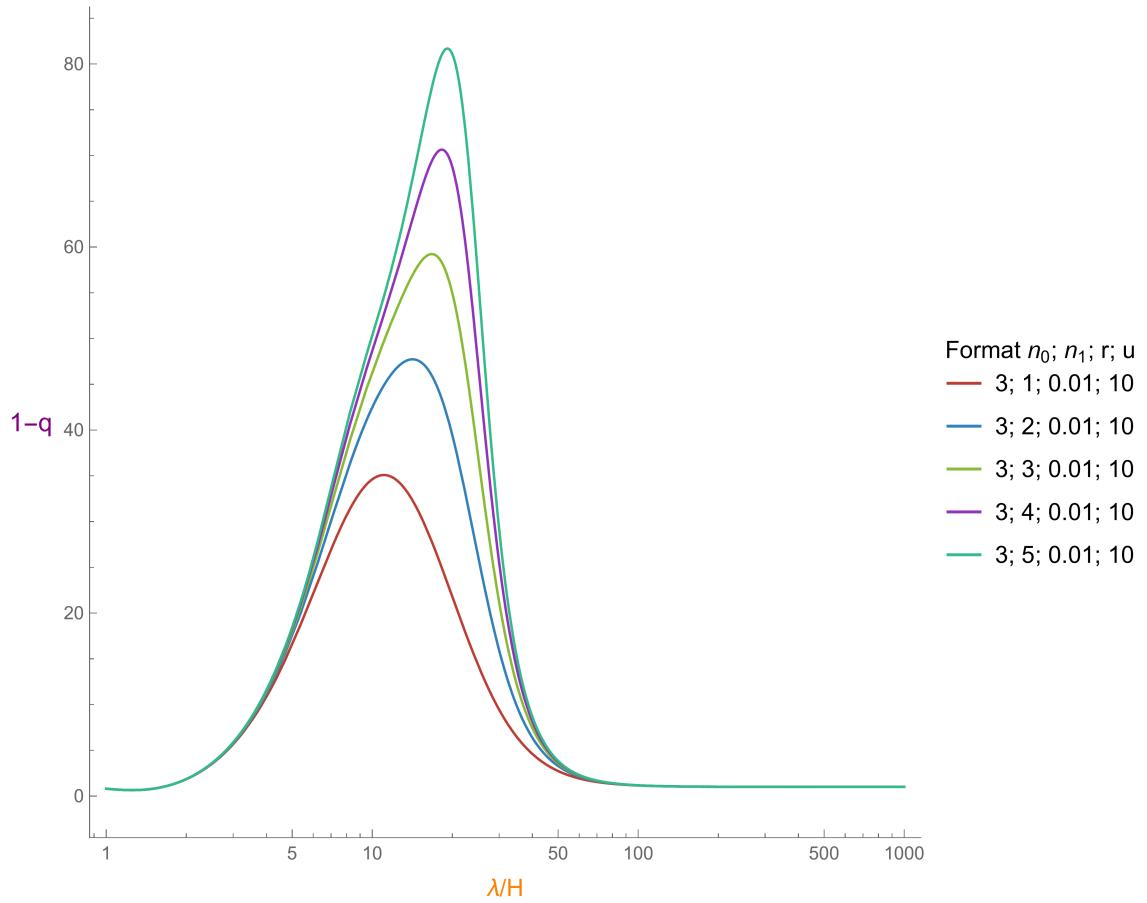
4.1.4. Porównania

W tej części przedstawimy kilka wykresów pokazujących wpływ kolejnych parametrów na kształt krzywych wykładnika wzrostu. Rozważamy jedynie przypadek współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie. Pokazywana jest od razu funkcja $1-q$, odpowiadająca wykładnikowi wzmacnienia amplitudy (rów. 3.23), przy skracaniu $\text{sgn}(\bar{D}_{xx})(-1+q)$ - wiemy, że przy skracaniu właśnie ten mod narasta. Na wykresach 4.3, 4.4, 4.5 oraz 4.6 przedstawiono wpływ zmiany każdego z parametrów dla podstawowej wartości $n_0 = 3$ $n_1 = 3$ $r = 0,01$ $u = 10$. Oddaje to generalny charakter, który zaobserwować można przy zmianie parametrów.

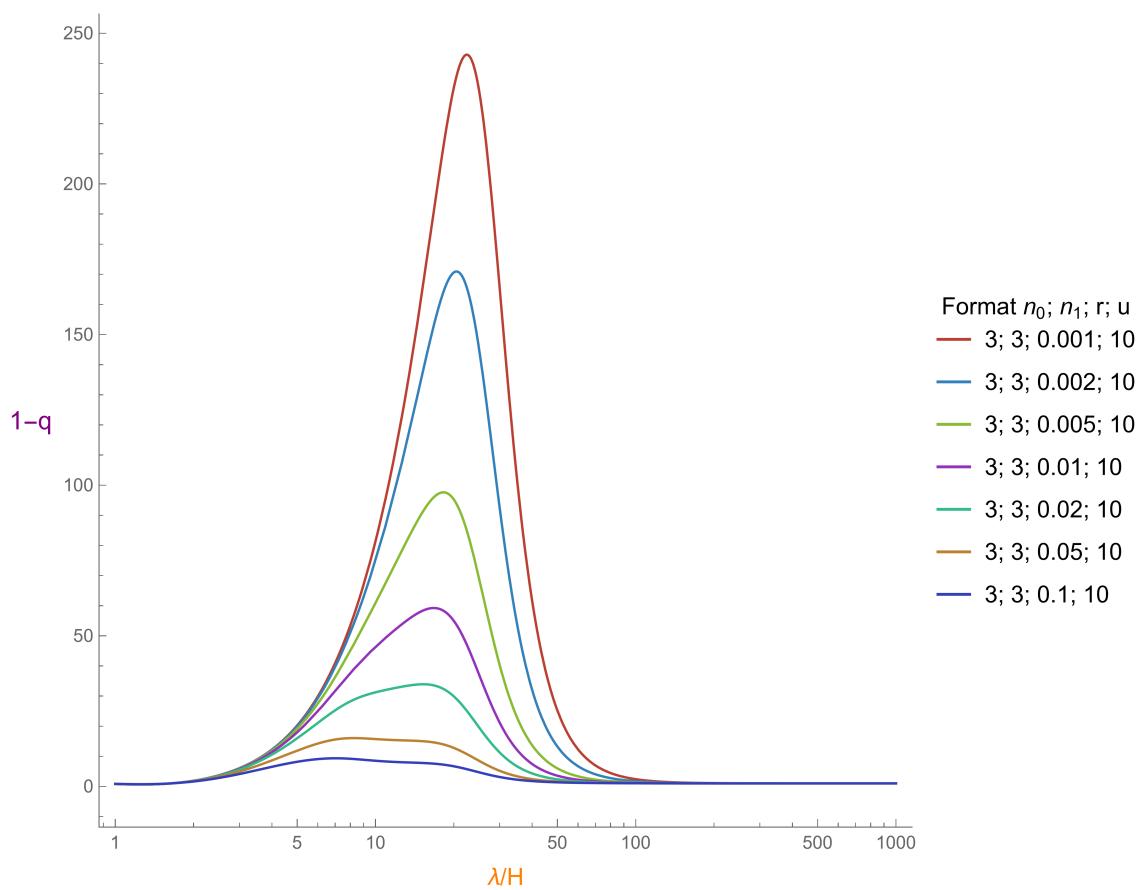
1. Zmiana n_0 (rys. 4.3) powoduje zwiększenie maksimum współczynnika wzrostu oraz zwiększa jego wartość głównie dla długości fali nieco krótszych niż dominująca długości fali.
2. Zmiana n_1 (rys. 4.4) powoduje natomiast zwiększenie głównie długości fali nieco dłuższych niż dominująca.
3. Jeżeli zmieniamy parametr $r = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_0}$ (rys. 4.5), to zauważać można, że im większy kontrast między lepkością ośrodka a warstwy, tym większa maksymalna amplituda



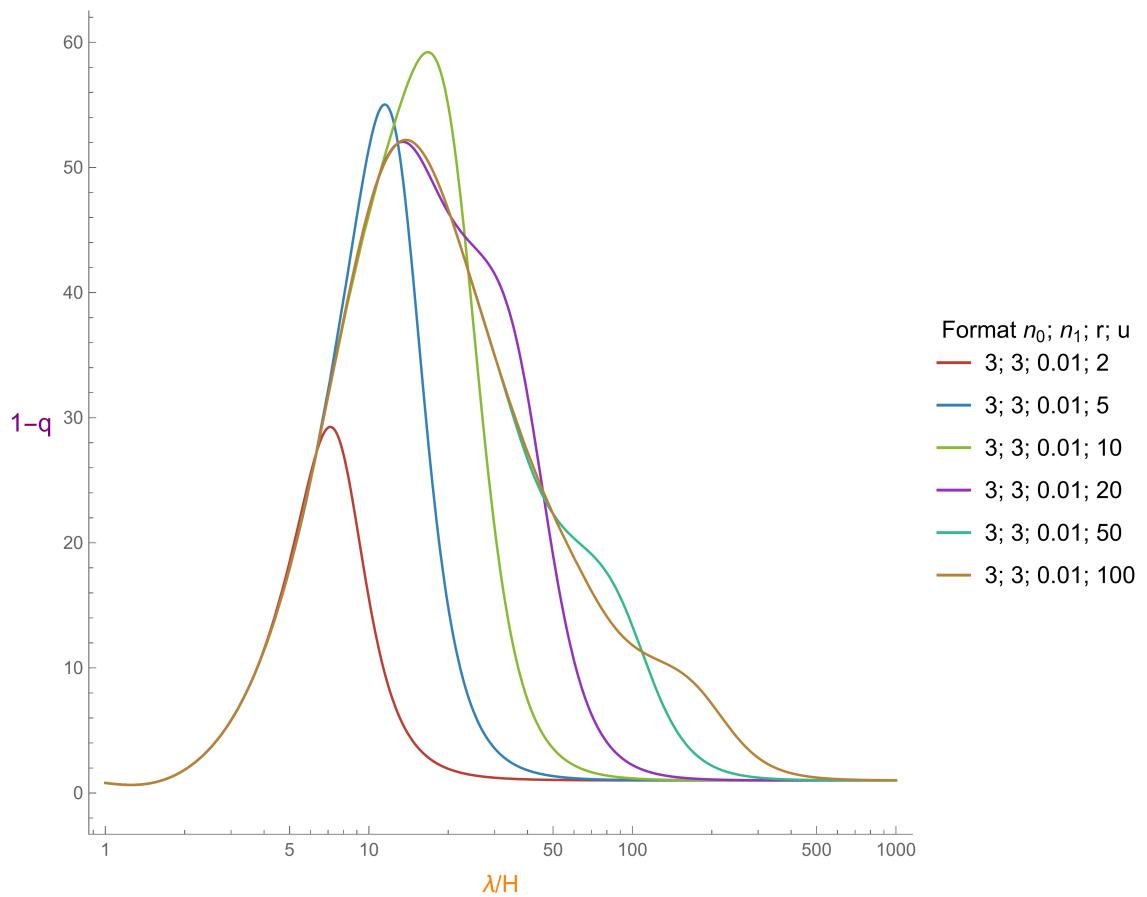
Rysunek 4.3: Zależność współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie od współczynnika nieliniowości relacji konstytutywnych warstwy n_0 .



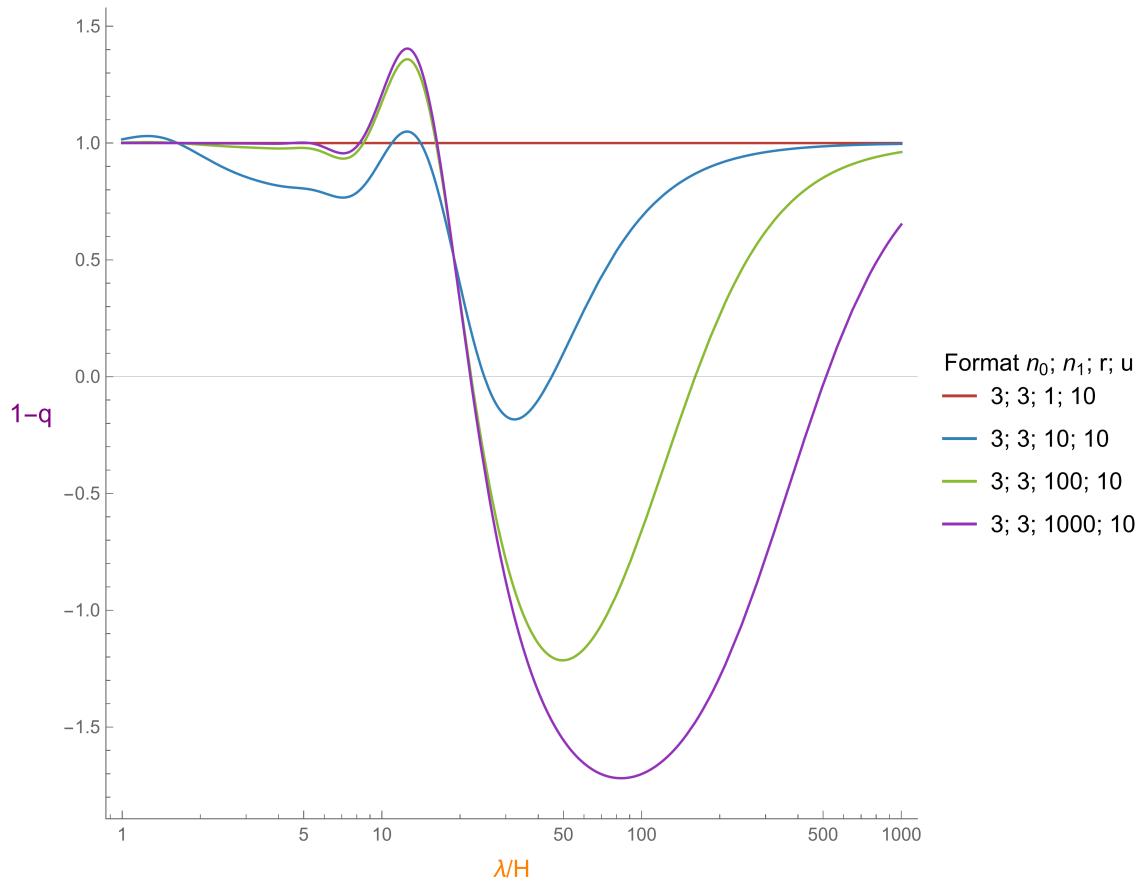
Rysunek 4.4: Zależność współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie od współczynnika nieliniowości relacji konstytutywnych ośrodka n_1 .



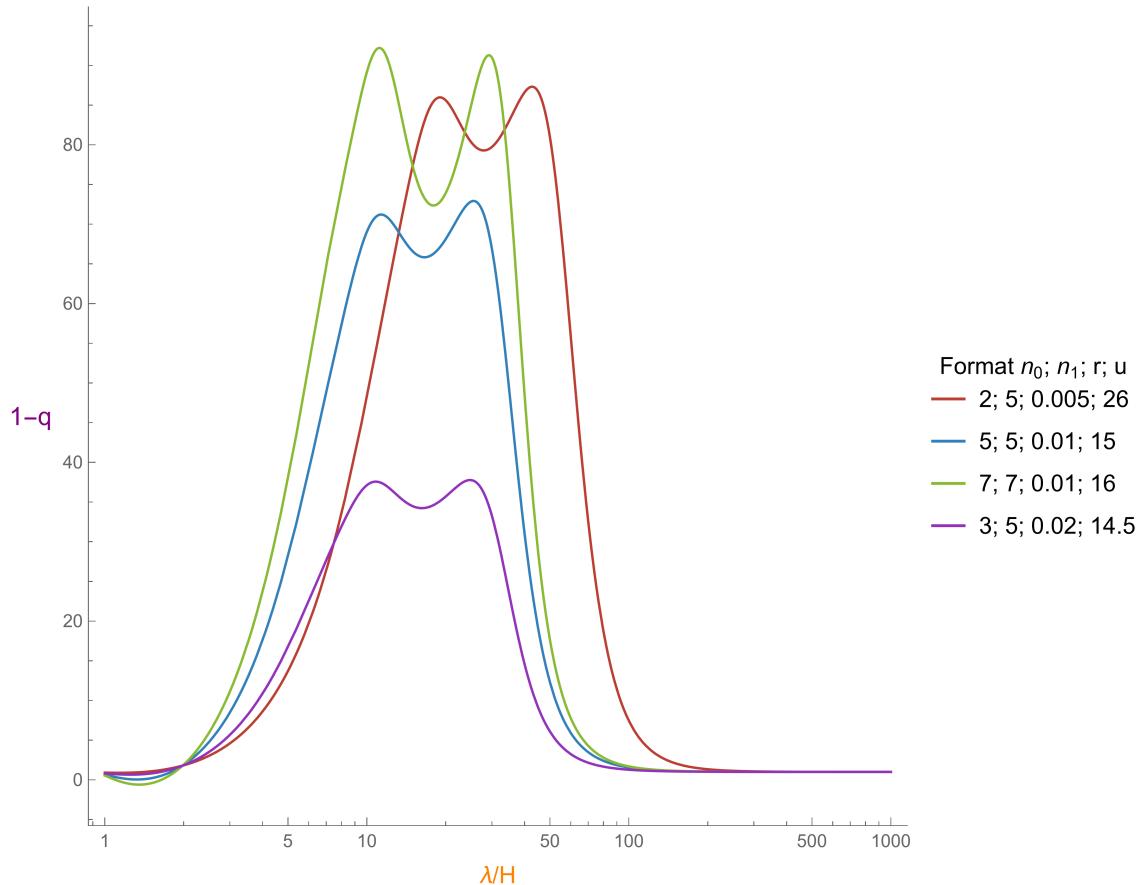
Rysunek 4.5: Zależność współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie od stosunku lepkości ośrodka do warstwy $r = \frac{\mu_1}{\mu_0}$.



Rysunek 4.6: Zależność współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie od stosunku grubości ośrodka do warstwy $u = \frac{d}{h}$ (układ skończony).



Rysunek 4.7: Zależność współczynnika wzrostu dla interfejsów w fazie od stosunku lepkości ośrodka do warstwy $r = \frac{\mu_1}{\mu_0}$. Wykres ciekawostka - pokazujący zachowanie dla $r > 1$, czyli ośrodka bardziej lepkiego od warstwy. Zauważać można, że większość długości fali jest tłumiona, a nie amplifikowana. Nie ma wyraźnie zaznaczonej dominującej długości fali i perturbacja nie narasta w miarę skracania.



Rysunek 4.8: Podwójne maksimum dla różnych kombinacji parametrów interfejsów w fazie.

i wyraźniej zarysowana pojedyncza dominująca długość fali. Dodatkowo dla $r > 1$ (rys. 4.7) zauważać można, że długości fali są tłumione zamiast być amplifikowane i perturbacja nie narasta wraz ze skróceniem, tylko z wydłużaniem (ale też nieznacznie).

- Zmiana u (rys. 4.6) idąc od granicy ośrodka nieskończonego pokazuje lokalne maksimum - odbitą długość fali, która w pewnym momencie nachodzi na dominującą. Dla tej wartości współczynnik wzrostu osiąga maksimum. Później w miarę zmniejszania u dominująca długość fali staje się krótsza, bardziej zarysowana, a maksimum krzywej współczynnika wzrostu jej odpowiadające się zmniejsza.

Wykorzystując te zachowania znaleźć można parametry dla których występują dwa maksima podobnej wysokości (rys. 4.8). Możemy podejrzewać, że dla tej podprzestrzeni parametrów występuwać mogą fałdy pasożytnicze - dwie wyraźnie zaznaczone dominujące długości fali.

4.2. Model SAS

Naszym obecnym celem jest stworzenie analitycznego solvera, który dla początkowej perturbacji interfejsu będzie w stanie ją zamplifikować. Zauważać można, że dla równania ewolucji amplitudy interfejsu:

$$\frac{dA}{dt} = (-1 + q(p, r, n_0, n_1, u)) \bar{D}_{xx} A$$

współczynnik wzrostu q nie jest stały w czasie, ale niejawnie od niego zależy, poprzez parametr $p = kH$, który ewoluje pasywnie zgodnie z równaniem:

$$\frac{dp}{dt} = -2\bar{D}_{xx} p$$

Więc zadany jest w czasie przed $p(t) = p(0)e^{-2\bar{D}_{xx}t}$. W tym miejscu zgodnie z konwencją wprowadzoną w pracy Marty Adamuszek [2] wprowadzamy oznaczenie:

Oznaczenie 4.2.1 Czas bezwymiarowy $\tau = |\bar{D}_{xx}| t$ - znormalizowany czas. Można zauważać, że łatwo wyrazić można go przez skrócenie warstwy $s = \frac{L}{L_0} : \tau = \text{sgn}(\bar{D}_{xx}) \log(s)$

Z jego użyciem możemy zdefiniować zwyczajne równanie różniczkowe ODE:

$$\frac{dA}{d\tau} = (-1 + q(p_0 e^{-2\tau}, r, n_0, n_1, u)) \text{sgn}(\bar{D}_{xx}) A \quad (4.6)$$

W tym momencie warto zauważać, że parametr $u = \frac{d}{h}$ nie ewoluje w czasie:

$$\frac{du}{d\tau} = u \left(\frac{1}{D} \frac{dD}{d\tau} - \frac{1}{H} \frac{dH}{d\tau} \right) = u(e^{-\tau} - e^{-\tau}) = 0$$

Równanie to jest niezwykle trudne do całkowania analitycznie. W związku z tym lepiej rozwiązywać je numerycznie dla konkretnych parametrów początkowych. Zauważać możemy, że:

$$A(\tau) = A(0) e^{\int_0^\tau (-1+q)\text{sgn}(\bar{D}_{xx}) d\tau'}$$

Można wprowadzić:

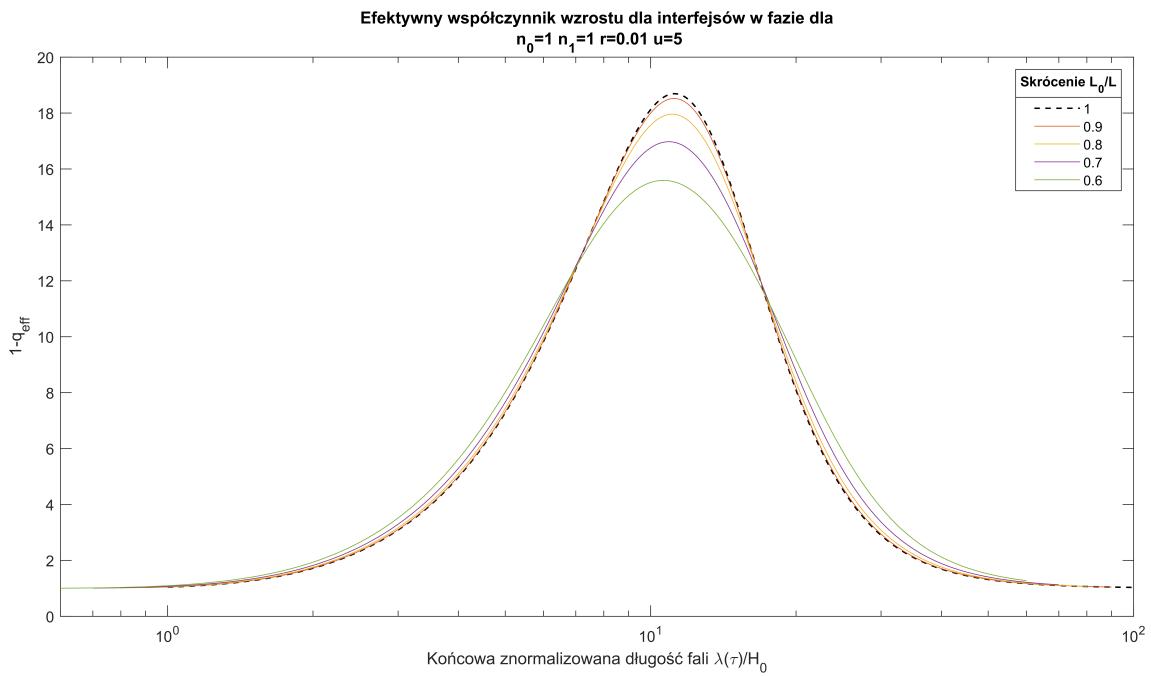
Oznaczenie 4.2.2 Efektywny współczynnik wzrostu

$$q_{eff} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau q(\tau') d\tau'$$

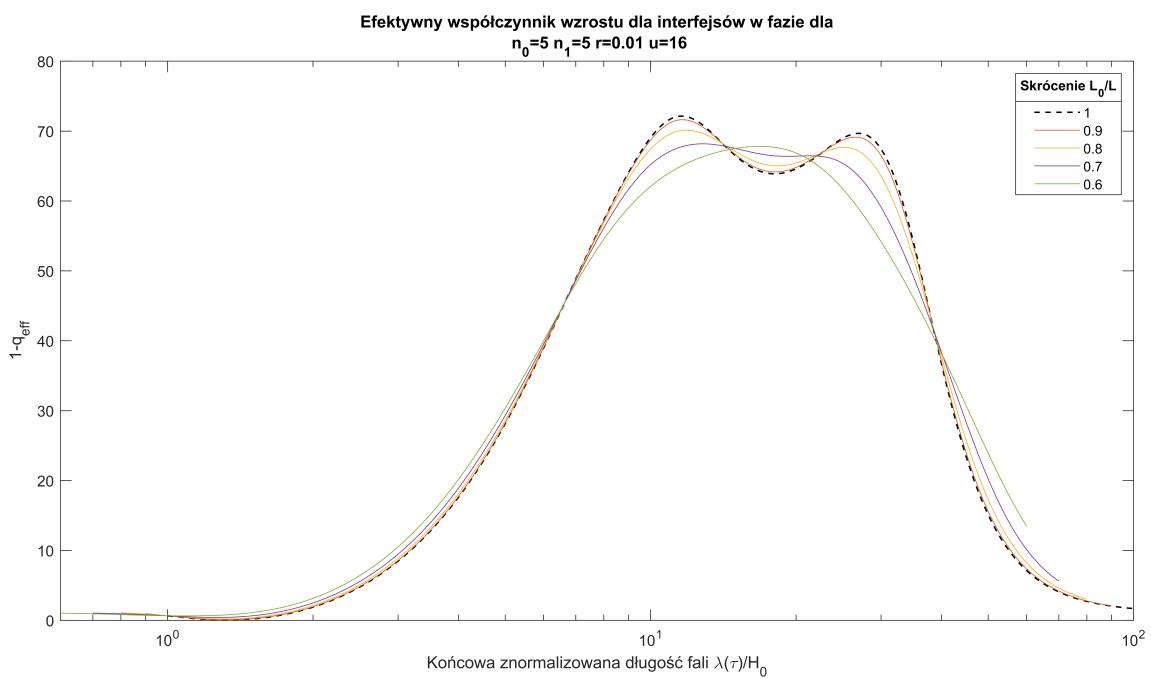
Wtedy

$$A(\tau) = A(0) e^{(-1+q_{eff})\text{sgn}(\bar{D}_{xx})\tau}$$

Można wtedy wygenerować z użyciem solvera ODE wykres efektywnych współczynników wzrostu w funkcji znormalizowanej długości fali po skróceniu (rys. 4.9). Równanie 4.6 nazywamy modelem SAS (Small Amplitude Solution), które numerycznie pozwala wyznaczać amplifikację danej długości fali przy konkretnym skróceniu lub wydłużeniu. Teraz poczytymy ważne spostrzeżenie, dla fałdów pasożytniczych - podwójnego maksimum współczynnika wzrostu w funkcji znormalizowanej długości fali - następuje "wypłaszczenie" i w miarę skracania maksima przestają być rozseparowane i nie obserwujemy amplifikacji dwóch różnych dominujących długości fali



Rysunek 4.9: Efektywny współczynnik wzrostu w funkcji długości fali dla przykładowych wartości parametrów reologicznych warstwy i ośrodka.



Rysunek 4.10: Efektywny współczynnik wzrostu w funkcji długości fali dla parametrów reologicznych odpowiadających podwójnemu maksimum funkcji współczynnika wzrostu.

4.3. Solver SAS

Ze stworzonym modelem SAS (rów. 4.6) możemy przejść do tworzenia narzędzia numerycznego, które dla konkretnej perturbacji początkowej i zadanych parametrów reologicznych warstwy i ośrodka symuluje ewolucję interfejsów w miarę skracania. Narzędzie to będziemy w dalszej części pracy nazywać solverem SAS. Plan działania programu wygląda następująco:

1. Wygenerowanie czerwonego szumu jako początkowej perturbacji dla dwóch interfejsów
2. Rozbiecie krzywych interfejsów na część symetryczną i antysymetryczną
3. Przeprowadzenie dyskretnej transformaty Fouriera (fft) każdej z części
4. Ewolucja amplitudy modów numeru falowego k zgodnie z modelem SAS (rów. 4.6)
5. Odwrotna dyskretna transformata (ifft) części symetrycznej i antysymetrycznej
6. Zrekonstruowanie krzywych interfejsu górnego i dolnego

Powyższy algorytm zaimplementowano w programie Matlab.

4.3.1. Sprawdzenie wyników

Wyniki działania solvera SAS zderzono z numerycznymi krzywymi interfejsów identycznego układu ewoluowanego w programie Folder [1]. Wykorzystuje on metodę FEM (Finite Element Method) do ewolucji całego układu. Przewidujemy, że dla małych skróceń wyniki powinny się niemal pokrywać, podczas gdy dla dużych skróceń model małej perturbacji przestaje być stosowny i wyniki powinny się różnić. Naszym celem jest znalezienie w przybliżeniu tej granicy.

4.3.2. Sprawdzenie działania solvera SAS

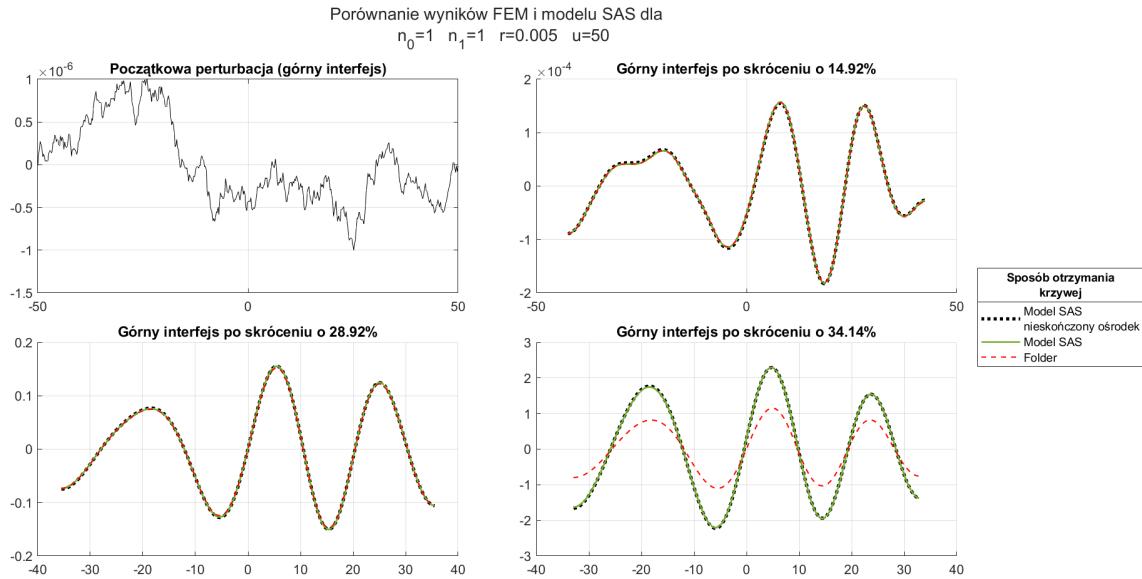
Przeprowadzono symulacje numeryczne skracania dla materiałów liniowych i nieliniowych, dla różnych parametrów reologicznych warstwy i ośrodka.

Ustawienia Foldera

Jako perturbacji początkowej użyto czerwonego szumu o znormalizowanej amplitudzie amplitudzie $\frac{A_0}{H_0} = 10^{-6}$. W celu otrzymania dobrej rozdzielczości numerycznej stosowano 300 kroków czasowych ewolucji. Dla ośrodka w metodzie FEM pole trójkąta określono na 1, natomiast wewnątrz warstwy na 0, 1. Na każdym z interfejsów umieszczono po 800 węzłów. Wyniki przedstawiono na wykresach poniżej. Stosowano 5 iteracji metody Picarda oraz 10 Newtona-Raphsona.

Ustawienia solvera SAS

Solver SAS napisano w programie Matlab. Do numerycznego wyliczania efektywnego współczynnika wzrostu dla każdej z branych pod uwagę długości fali stosowano funkcję Integrate z opcją "Array Valued". Jako, że folder nie ma zaimplementowanych periodycznych warunków brzegowych, a jedynie symetryczne odbicie na brzegu, to przed wykonaniem fft sygnału odbijano go symetrycznie, aby następnie złączyć oryginał z odbiciem i dopiero wtedy przeprowadzić skończoną transformatę Fouriera.



Rysunek 4.11: Porównanie działania modelu SAS z wynikiem numerycznej symulacji FEM w programie folder dla materiału liniowego.

Wyniki przeprowadzonych symulacji

Wyniki przeprowadzonych symulacji przedstawiono na wykresach:

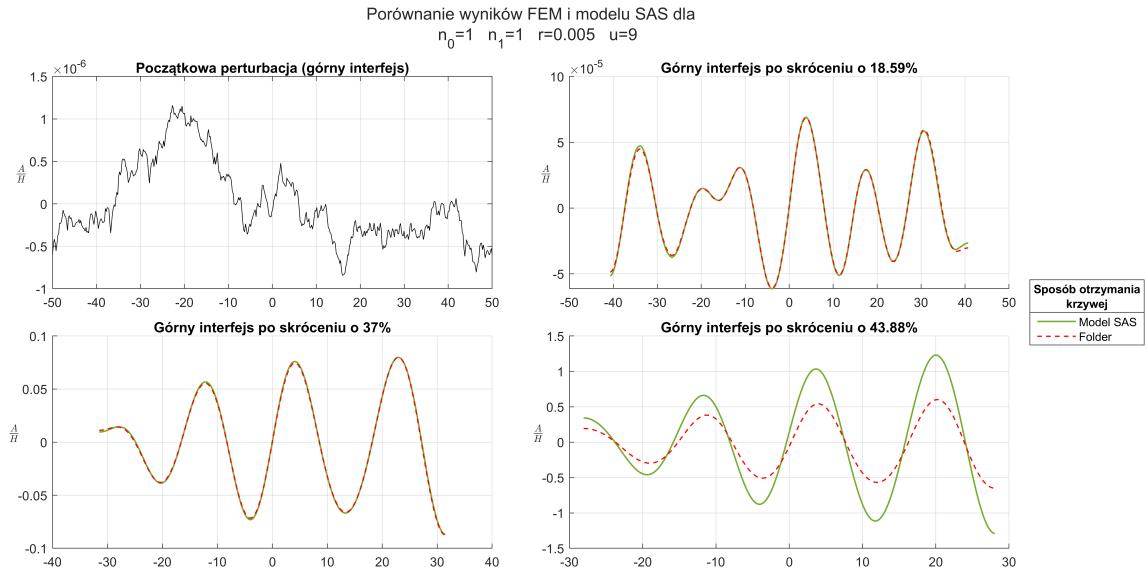
- Dla materiału liniowego, dużego kontrastu lepkości $r = \frac{1}{200}$ i dużego $u = 50$ (rys. 4.11) widać dużą zgodność dla małych amplitud foldera z modelem SAS, także zgodność modelu SAS ze skończonym u , z wynikami dla współczynników wzrostu wyliczanych dla nieskończonej grubości ośrodka (współczynników wzrostu wyliczonych przez Fletchera rów. 3.27).
- Materiał liniowy, duży kontrast lepkości $r = \frac{1}{200}$ i małe $u = 9$ (rys. 4.12)
- Materiał nieliniowy $n_0 = 3$, $n_1 = 2$, spory kontrast lepkości $r = \frac{1}{100}$ i $u = 6$ (rys. 4.13).
- Materiał mocno nieliniowy $n_0 = 4$, $n_1 = 4$, spory kontrast lepkości $r = \frac{1}{100}$ i $u = 14$ (rys. 4.14).

Na koniec przedstawiamy wykres przedstawiający dwa interfejsy po skróceniu o 30%, który jasno potwierdza, że dla skracania charakter dominujący ma mod interfejsów w fazie (rys. 4.15).

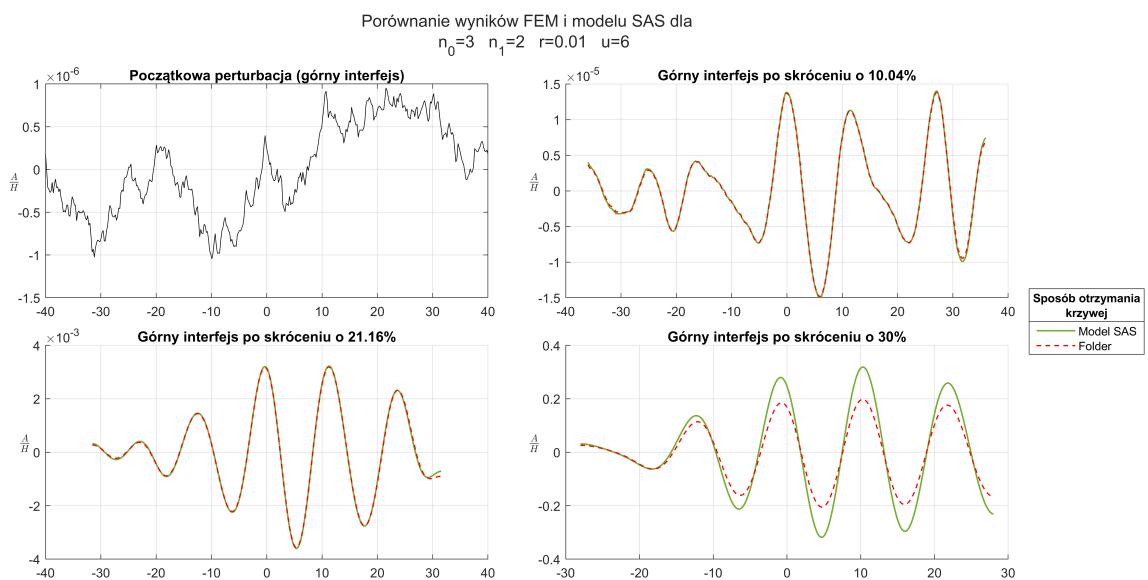
4.3.3. Kiedy wyniki przestają się pokrywać?

Naszym celem jest wyznaczenie amplitud, dla których wyniki otrzymane za pomocą solvera SAS oraz foldera (solvera FEM) przestają się pokrywać. Wnioskując z powyższych wykresów, dzieje się to dla amplitud interfejsu około 0,1. Aby tę hipotezę potwierdzić przeprowadzono analizę. Jako miary pokrywania się krzywych użyto wartości:

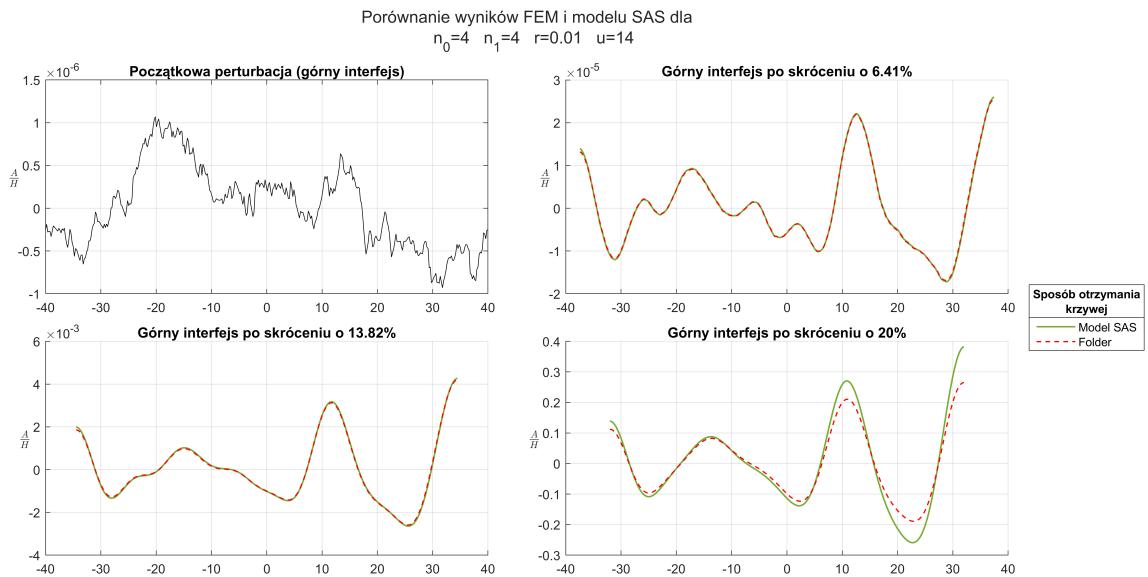
$$diff(\eta_{SAS}, \eta_{FEM}) = \frac{\|\eta_{SAS} - \eta_{FEM}\|}{\|\eta_{FEM}\|} \quad (4.7)$$



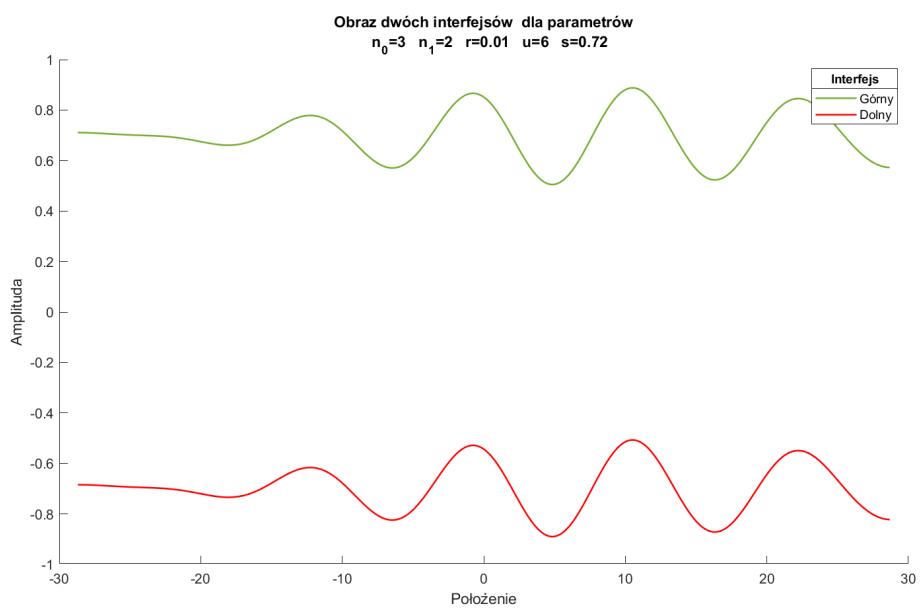
Rysunek 4.12: Porównanie działania modelu SAS z wynikiem numerycznej symulacji FEM w programie folder dla materiału liniowego.



Rysunek 4.13: Porównanie działania modelu SAS z wynikiem numerycznej symulacji FEM w programie folder dla materiału nieliniowego.



Rysunek 4.14: Porównanie działania modelu SAS z wynikiem numerycznej symulacji FEM w programie folder dla materiału mocno nieliniowego.



Rysunek 4.15: Wykres przedstawia dwa interfejsy po skróceniu o 28%. Jak widać przy skracaniu dominujący staje się mod interfejsów w fazie.

Gdzie η_{SAS} to krzywa interfejsu uzyskana dzięki ewolucji solverem SAS, a η_{FEM} to krzywa interfejsu uzyskana z foldera. Jako normy użyto zwykłej normy L_2 :

$$\|\eta\| = \sqrt{\int_{-L}^L |\eta(x)|^2 dx}$$

Gdzie L to długość układu. Oczywiście numerycznie odpowiada to dyskretnej normie:

$$\|\eta\| = \sqrt{\frac{2L}{N} \sum_{k=0}^N \left| \eta \left(-L + \frac{k}{N} 2L \right) \right|^2}$$

Taką względną normę $diff$ obliczano dla każdego kroku czasowego, by następnie wygenerować wykres 4.16. Dodatkowo dla każdego układu znaleziono skrócenie graniczne, od którego solver SAS i solver FEM dają różne wyniki.

Definicja 4.3.1 Skrócenie graniczne - punkt największej lokalnej krzywizny, wyznacza on gwałtowny wzrost względnej normy $diff(\eta_{SAS}, \eta_{FEM})$.

Poprzez numeryczne różniczkowanie i znalezienie krzywizny ze wzoru

$$\kappa(x) = \frac{\eta''(x)}{(1 + \eta'(x))^{\frac{3}{2}}}$$

Znajdowano punkt maksymalnej krzywizny - Punkt graniczny. Dla nich obliczano amplitudę jako

$$\max_k |A_{FEM}(k)|$$

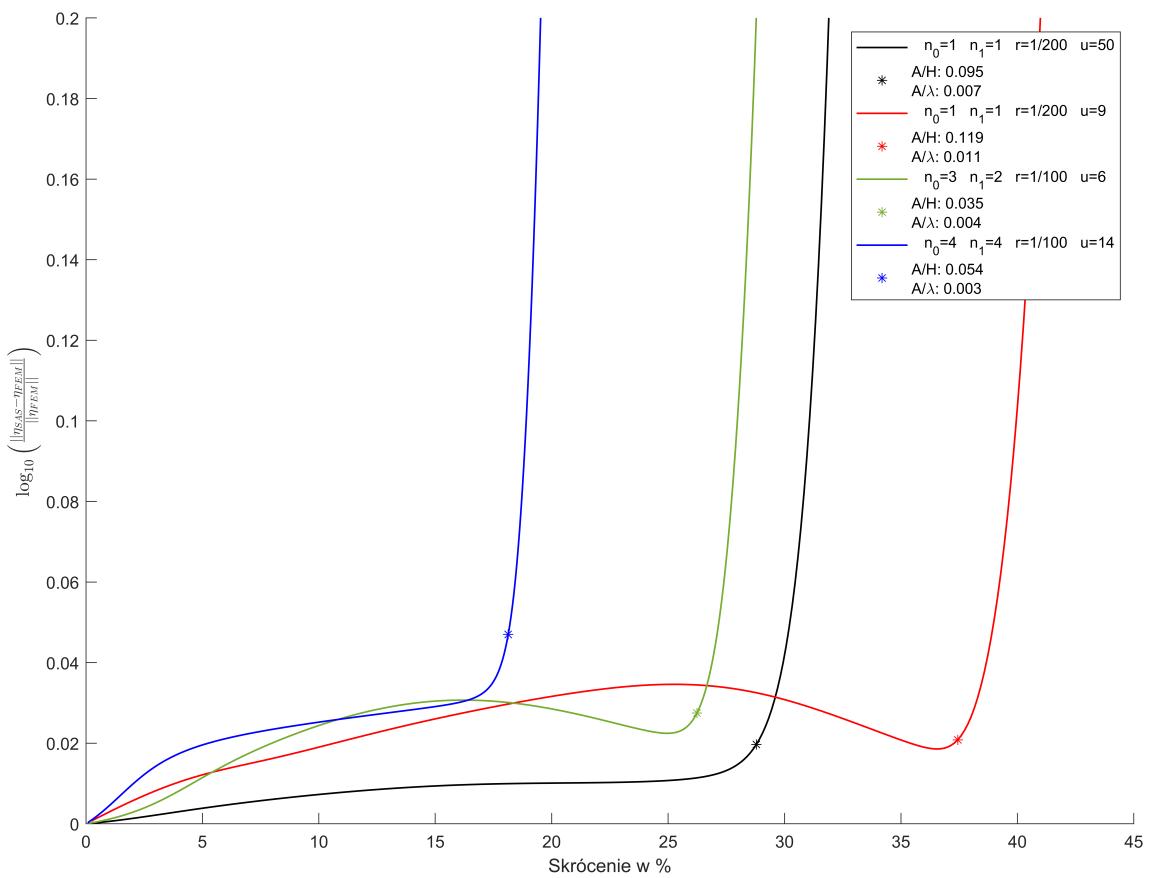
Gdzie $A_{FEM}(k)$ to amplituda modu o liczbie falowej k interfejsu z foldera. Obliczone amplitudy dla kilku układów znaleźć odczytać można z wykresu 4.16. Ewentualnie amplitudy dla skróceń krytycznych mają wartość rzędu 0,01 – 0,1. Ale względna norma dalej jest mała dla wartości nieco powyżej skrócenia krytycznego. Dlatego bezpiecznie oszacować można, że wyniki solvera SAS dają dobre oszacowania dla znormalizowanych amplitud $\frac{A}{H} < 0,1$, oraz nawet nieco większych w przypadku liniowym (we wzorach na współczynnik wzrostu użyto q_{lin} (rów. 4.3)). Można też spojrzeć na nachylenie wtedy oszacować można, że solver SAS daje dobre wyniki dla $\frac{A}{\lambda} < 0,01$.

4.3.4. Dudnienia

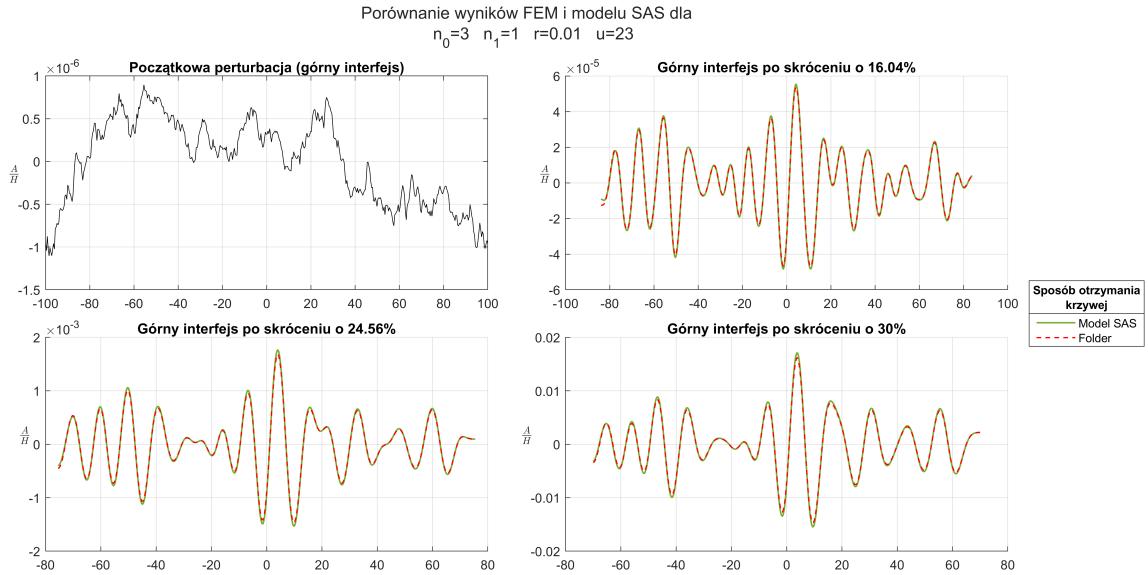
Jak można było zaobserwować na poprzednich wykresach fałdy nie są opisywane w pełni regularną funkcją okresową. Zdają się być modulowane funkcją cos od dużo dłuższej długości fali. Dobrze obrazuje to wykres 4.17. Wynika to z faktu, że krzywa współczynnika wzrostu jest funkcją ciągłą, więc podobnie wzmacniana jest nie tylko dominująca długość fali, ale także długości jej bliskie. Nałożenie funkcji cos o bardzo podobnych numerach falowych skutkuje powstaniem dudnienia. Po znacznym skróceniu sygnał przestawić można w przybliżeniu nie jako czysty mod cos, tylko mod modulowany:

$$\eta(\tau, x) = A(\tau) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_d(\tau)}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{mod}(\tau)}x\right)$$

Gdzie modulująca długość fali jest dużo dłuższa niż dominująca $\lambda_{mod} \gg \lambda_d$. Oczywiście jest to grube przybliżenie i tylko zarysuje charakter rozwiązania. W przyrodzie obserwujemy zazwyczaj fałdy okresowe. Wynika to ze zmiany charakteru ewolucji w miarę wzrostu



Rysunek 4.16: Zależność względnej normy (rów. 4.7) od skrócenia dla kilku różnych wartości parametrów reologicznych. Na wykresach zaznaczono punkty graniczne - wartości skrócenia, powyżej których solver SAS przestaje dawać dobre wyniki.



Rysunek 4.17: Ewolucja dłuższego interfejsu. Widać wyraźnie zarysowaną modulację sygnału - dudnienie.

amplitudy - model SAS się załamuje, a mody zaczynają oddziaływać ze sobą. Wtedy amplifikowana jest już zaznaczona dominująca długość fali [5]. Dodatkowo w przyrodzie obserwowane faldy mają długość rzędu kilku długości fal, więc nie widać efektów dudnienia, ale co ważne mogą mieć one mocny wpływ na amplitudę obserwowanych struktur.

4.4. Problem budinażu

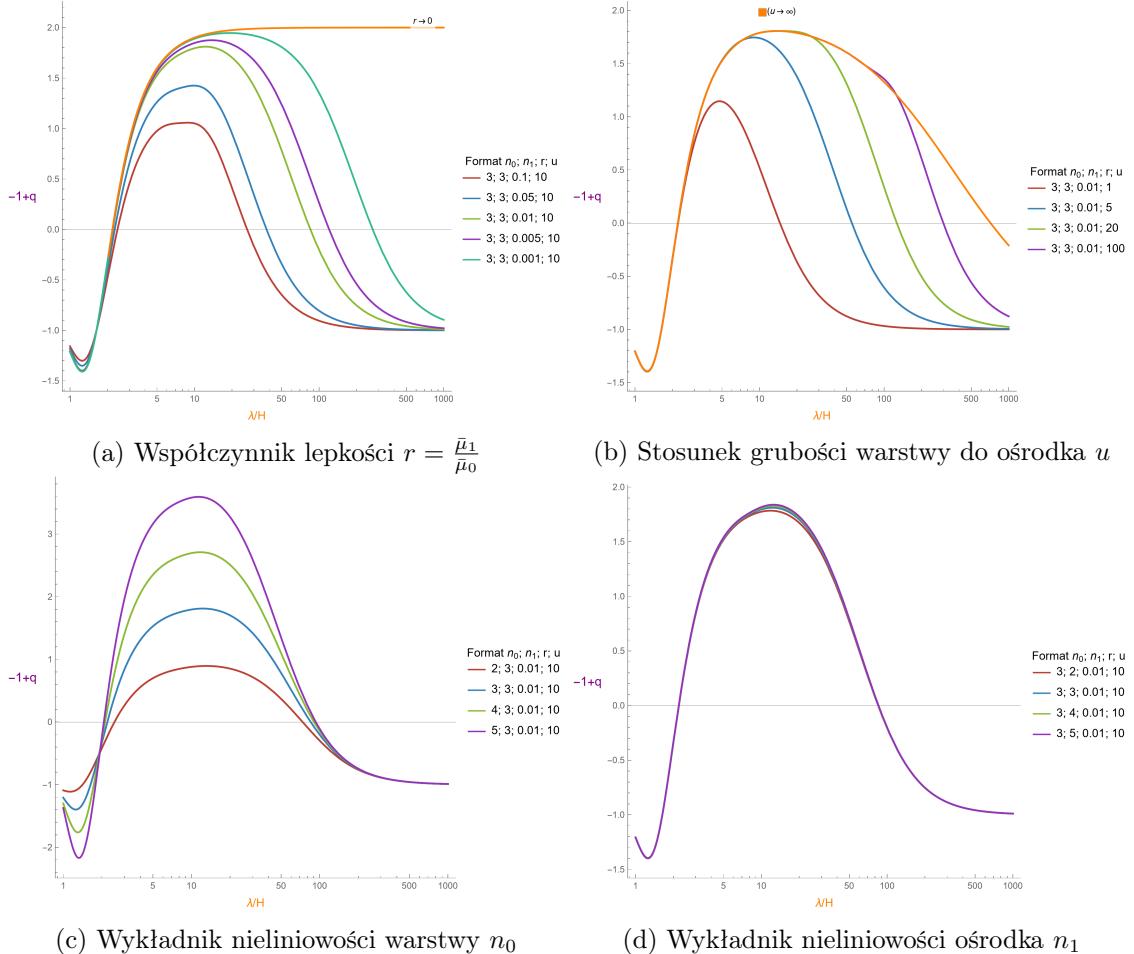
Cała poprzednia analiza i wyniki solvera SAS zaprezentowane były dla skracania warstwy $\operatorname{sgn}(\bar{D}_{xx}) = -1$. Podczas analizy budinażu (rozciągania) pojawiają się pewne problemy.

Porównania

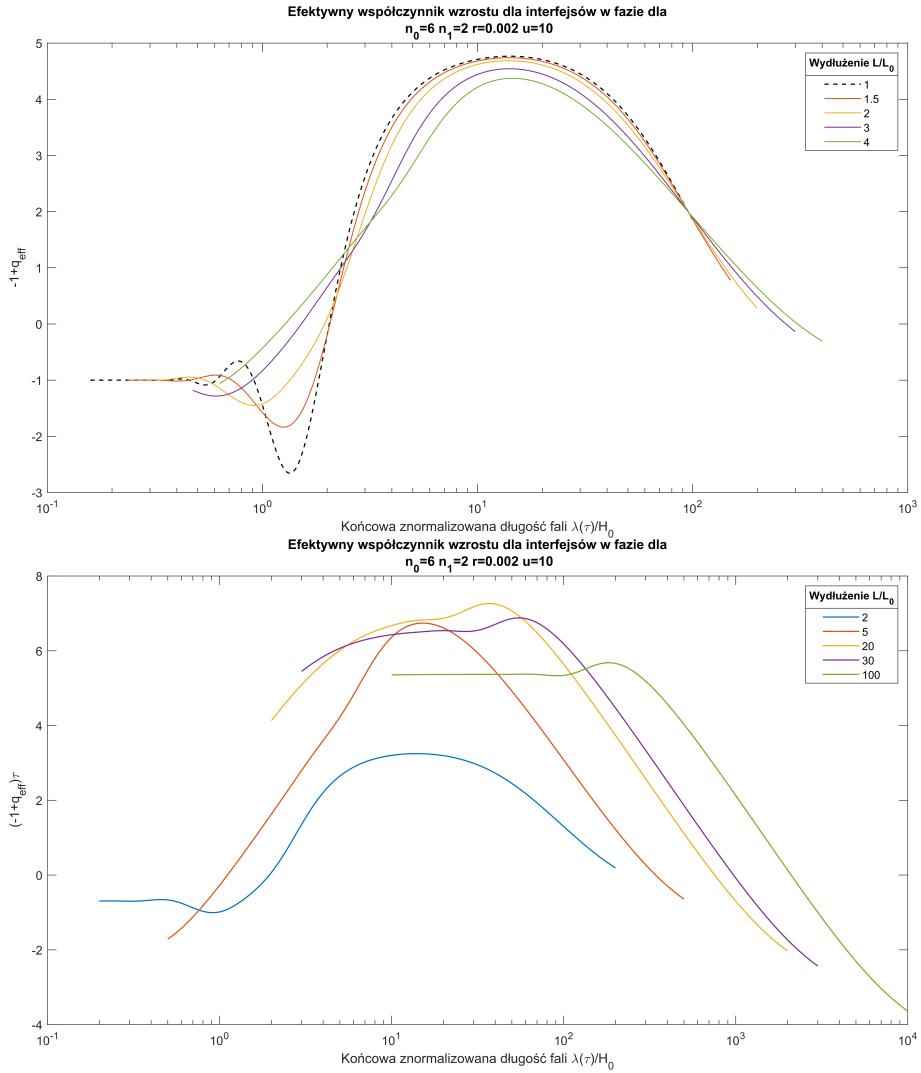
Możemy podobnie jak dla fałdowania rozważyć wpływ poszczególnych parametrów na krzywe współczynnika wzrostu (rys. 1.2). Jak widać wykładnik nieliniowości n_1 prawie nie ma wpływu na kształt krzywej wzrostu, w granicach $r \rightarrow 0$ oraz $u \rightarrow \infty$ osiągamy wysycenie i jedynie zwiększenie udziału niedominujących długości fal *(podczas gdy $r \rightarrow 0$ dla interfejsu w fazie dawało wzrost krzywej współczynnika wzrostu do nieskończoności). Jedynie zwiększenie wykładnika nieliniowości relacji konstytutywnych warstwy n_0 daje w wyniku większą wartość współczynnika wzrostu dla dominującej długości fali. Jednak dalej wartość ta dla interfejsów w przeciwfazie i rozciągania jest około 2 – 3, a nie 80 jak dla interfejsów w fazie i skracania.

Model SAS

Następnie możemy zobaczyć jak wyglądać będą efektywne współczynniki wzrostu q_{eff} z modelem SAS (rów. 4.2.2) dla interfejsów w przeciwfazie. Przeprowadzono analizę identyczną jak dla skracania i otrzymano wykres 4.19. Można teraz przedstawić jego wersję bez normalizacji (wykres $q_{\text{eff}}\tau$). Jak widać ewolucja w czasie nie pomaga i efektywny współczynnik



Rysunek 4.18: Porównania wpływu konkretnych parametrów na krzywą współczynnika wzrostu dla interfejsów w przeciwfazie. Względem podstawowych wartości $r = \frac{1}{100}$, $n_0 = 3$, $n_1 = 3$, $u = 10$.

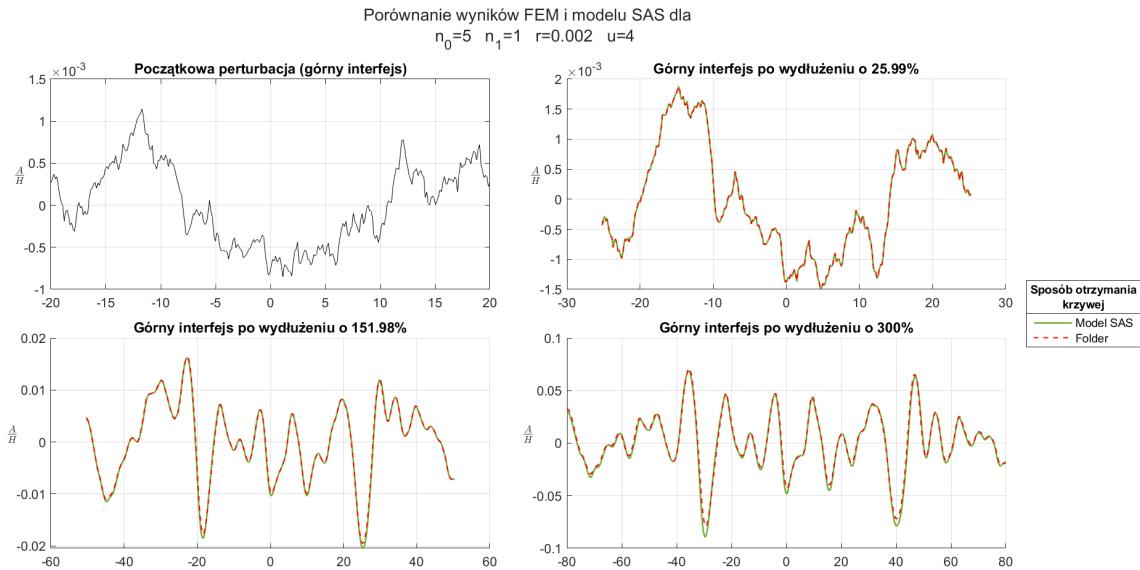


Rysunek 4.19: Wykres przedstawiający efektywny współczynnik wzrostu interfejsów w przeciwfazie w miarę rozciągania układu. Wykres na górze przedstawia po prostu efektywny współczynnik wzrostu, a ten na dole efektywny współczynnik wzrostu bez normalizacji.

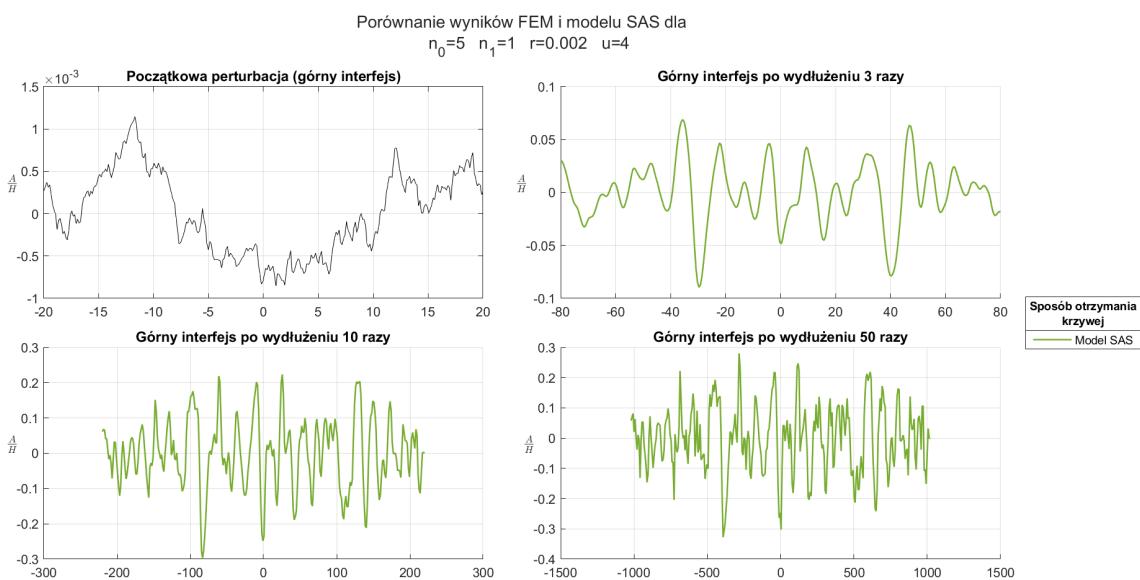
wzrostu wysyca się w pewnym momencie, a więc efektywna amplifikacja dominującej długości fali. W badanym przypadku bardzo wysokiego wykładnika nieliniowości $n_0 = 6$, dobranego specjalnie tak, żeby efektywny współczynnik wzrostu był jak największy i tak daje współczynniki wzrostu rzędu 6. W wyniku niemożliwa jest zbyt duża amplifikacja początkowej perturbacji i w pewnym momencie przestaje ona narastać w miarę dalszego rozciągania.

Solver SAS

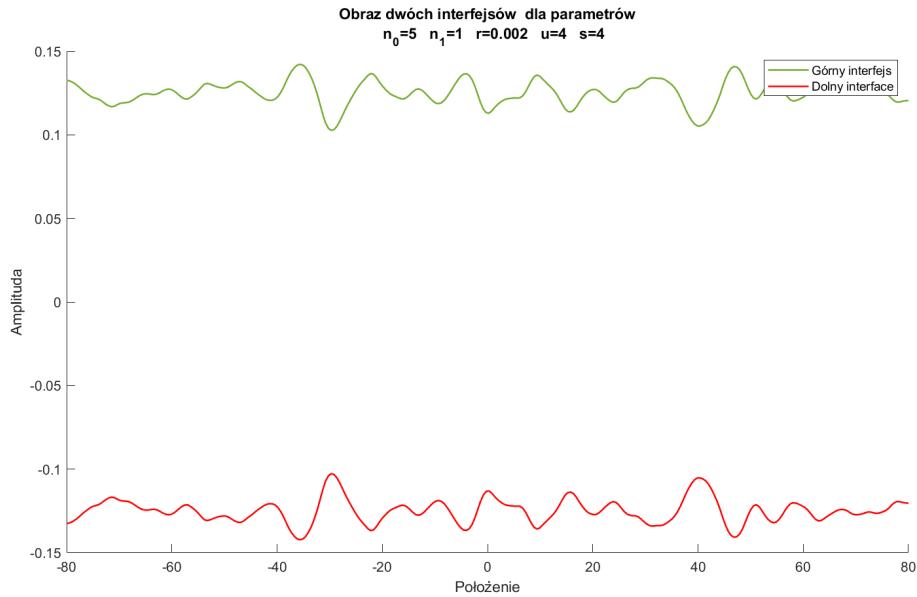
Mając na uwadze wnioski z modelu SAS dla rozciągania przy konstrukcji solvera SAS dla rozciągania przyjęto większą amplitudę początkowej perturbacji jako 10^{-3} . Wynik zdejścia symulacji ewolucji interfejsu solverem SAS z folderem przedstawiono na wykresie 4.20. Jeżeli popatrzymy na przewidywania wzrostu znormalizowanej amplitudy $\frac{A}{H}$ dla dalszego rozciągania (rys. 4.21), to w pewnym momencie się ona już nie zmienia. Możemy też potwierdzić, że przy rozciąganiu narasta jedynie mod w przeciwfazie (rys. 4.22).



Rysunek 4.20: Porównanie ewolucji górnego interfejsu przeprowadzonej za pomocą solvera SAS oraz programu folder (solvera FEM). Widać dużą zgodność wyników nawet dla dużych rozciągnięć układu. Jest to skutkiem wysycenia współczynnika wzrostu, a więc małą amplifikacją początkowej perturbacji. Różnice dla wydłużenia o 300% wynikają z kumulacji błędów numerycznych w modelu FEM (mała ilość punktów na bardzo długim interfejsie).



Rysunek 4.21: Ewolucja górnego interfejsu dla dużych rozciągnięć - modelowana solverem SAS. Widać, że znormalizowana amplituda powyżej pewnych rozciągnięć już nie wzrasta.



Rysunek 4.22: Wykres przedstawiający dwa interfejsy po wydłużeniu o 300%. Jak widać, dominuje mod w przeciwfazie, zgodnie z przewidywaniami.

Wnioski

Jak widać, nawet dla parametrów reologicznych dobranych tak, aby współczynnik wzrostu był jak największy budinaż narasta powoli i w pewnym momencie się wysyca i jego amplituda przestaje się zwiększać. Stąd wniosek, że zaprezentowany model nie wyjaśnia pojawiających się struktur budinażu spotykanych w przyrodzie. Pokazuje on, że pojawić może się struktura o konkretnej długości fali. Później budinaż może narastać w wyniku innych efektów, takich jak zachowania plastyczne, kruszenie, pęknięcie i uskoki. O problemie małych współczynników wzrostu w budinażu więcej przeczytać można w pracy [5].

4.5. Podsumowanie

Odtworzenie modelu z literatury

Celem pracy było stworzenie analitycznego modelu ewolucji pojedynczej warstwy skalnej w skończonym ośrodku. Aby to osiągnąć w pierwszej kolejności odtworzono wyniki osiągnięte przez Raymonda Fletchera dla warstwy w nieskończonym ośrodku [3]. Powtórzono jego wyprowadzenia z dodaniem kilku wyjaśnień metod matematycznych, które zostały pominięte w książce. W wyniku otrzymano krzywe współczynnika wzrostu dla nielinowych relacji konstytutywnych zarówno ośrodka jak i warstwy, które zgadzają się ze wzorami powszechnie stosowanymi w literaturze. Wyprowadzono, że dla skracania warstwy narasta mod interfejsów w fazie (fałdy), natomiast dla rozciągania mod interfejsów w przeciwfazie (budinaż). Wyniki te zgadzają się z symulacjami numerycznymi i obserwacjami struktur występujących w przyrodzie.

Autorskie wyniki

W kolejnej części używając podobnego modelu, ze zmienionymi warunkami brzegowymi, wyprowadzono wzory współczynnika wzrostu dla ośrodka skończonego. Dla tych krzywych zbadano podprzestrzeń parametrów, dla których występowały dwie dominujące długości fali, co sugerowało wytłumaczenie obserwowanych w przyrodzie fałdów pasożytniczych. Tezę tę zweryfikowano tworząc narzędzie do analitycznego rozwiązywania ewolucji dowolnej krzywej w miarę skracania lub rozciągania układu (solver SAS). Okazało się, że w miarę ewolucji podwójne maksimum zanika i w każdym przypadku zarysowuje się pojedyncza dominująca długość fali, stąd nie udało się wykazać występowania fałdów poliharmonicznych w modelu pojedynczej warstwy w ośrodku. Solver SAS rozwinięto dalej, aby dla dowolnej początkowej perturbacji znajdować ewolucję układu w czasie. Wyniki zderzono z narzędziem rozwiązującym numerycznie problem dla konkretnych parametrów reologicznych metodą FEM. Dla małych amplitud odchylenia od warstwowania wzdłuż kierunku skracania przewidywania solvera zgadzały się z wynikami symulacji numerycznych. Znaleziono przybliżone wartości znormalizowanych amplitud i nachyleń, dla których wyniki solvera SAS zaczynają odbiegać od symulacji numerycznych. Wyjaśniono pojawiające się efekty dudnienia, a także pochylono się nad problemem zbyt małej amplifikacji modu w przeciwfazie podczas rozciągania warstwy. Jest to problem opisywany wcześniej w literaturze, model lepkiej deformacji nie jest w stanie wyjaśnić naturalnie występujących struktur budinażu.

Narzędzia

Praca ta opisuje program pozwalający modelować ewolucję pojedynczej warstwy w skończonym ośrodku. Przykładową jego implementację w programie Matlab, jak i inne narzędzia:

- arkusz w programie Mathematica pozwalający wyznaczać współczynniki wzrostu
- arkusz pozwalający na bieżąco generować krzywe współczynnika wzrostu dla danych parametrów reologicznych warstwy oraz ośrodka
- program w Matlabie pozwalający zderzać wyniki program folder z symulacją solvera SAS

Znaleźć można w ogólnodostępnym repozytorium:

<https://github.com/Jerzozwierz88/Licencjat>.

Bibliografia

- [1] Marta Adamuszek, Marcin Dabrowski, and Daniel W. Schmid. Folder: A numerical tool to simulate the development of structures in layered media. *Journal of Structural Geology*, 84:85–101, 2016.
- [2] Marta Adamuszek, Daniel W. Schmid, and Marcin Dabrowski. Theoretical analysis of large amplitude folding of a single viscous layer. *Journal of Structural Geology*, 48:137–152, 2013.
- [3] David D. Pollard and Raymond C. Fletcher. *Fundamentals of Structural Geology*, page 478–496. Cambridge University Press, 2005.
- [4] Neville J. Price and J. W. Cosgrove. *Analysis of geological structures*. Cambridge University Press, 1989.
- [5] S. M. Schmalholz and N. S. Mancktelow. Folding and necking across the scales: a review of theoretical and experimental results and their applications. *Solid Earth*, 7(5):1417–1465, 2016.
- [6] Stefan M. Schmalholz and Yuri Yu. Podladchikov. Finite amplitude folding: transition from exponential to layer length controlled growth. *Earth and Planetary Science Letters*, 181(4):619–633, 2000.