

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MINERA

DISEÑO DE MÁQUINAS

Práctica 2

Concentradores de esfuerzo

Estudiante:

Isaac Jesán Velázquez

Reséndiz

DNI - G34624960

Profesor:

Francisco A. Diaz Garrido

20 de marzo de 2022



Universidad de Jaén



Índice

1. Objetivos	3
1.1. Objetivos generales	3
1.2. Objetivos específicos	3
2. Introducción	3
2.1. Factor de concentración de tensiones	3
2.2. DIC	4
2.3. Círculo de Mohr	7
3. Materiales y Métodos	8
3.1. Materiales y equipos	8
3.2. Metodología	8
4. Resultados	9
4.1. Mapas de tensiones y deformaciones	9
4.2. Factor de concentración teórico y experimental	11
4.3. Estado tensorial máximo	12
4.4. Estado tensorial a 1cm de la perforación	13
5. Análisis de resultados	13
6. Conclusión	14

Índice de figuras

1. Gráfico del factor K para una placa delgada con un agujero de diámetro d y anchura w	4
2. Escala de grises en probeta y posicionamiento de equipo	5
3. Rejilla de interés en la imagen de referencia (izquierda) y vector de desplazamiento de la imagen deformada (derecha)	5
4. Esquema de la faceta de referencia antes (izquierda) y después de la deformación (derecha)	6
5. Círculo de Mohr	7
6. Dimensiones de la probeta empleada para la realización del ensayo mediante DIC (a) y máquina electromecánica empleada para la realización del ensayo (b)	8
7. Mapas de deformaciones unitarias de la probeta de policarbonato	10
8. Mapas de tensiones de la probeta de policarbonato	11
9. Método gráfico del círculo de Mohr	13

Índice de tablas

1.	Materiales y equipos	8
2.	Resultados experimentales y teóricos	12

Resumen

La práctica consistirá en la realización de un ensayo consistente en la aplicación de distintos niveles de carga sobre una probeta rectangular de policarbonato con un taladro en su parte central. Así, para cada nivel de carga se capturará una imagen, de tal forma que se obtendrán los mapas de desplazamientos y deformaciones en las inmediaciones de la zona del taladro mediante el procesamiento digital de las imágenes empleando DIC. De esta forma, se pretende determinar la distribución experimental de las tensiones y comparar estos resultados con los obtenidos analíticamente a partir del empleo del factor teórico de concentración de tensiones.

Palabras clave: Concentrador de esfuerzo, DIC, deformación

1. Objetivos

1.1. Objetivos generales

- Introducir al alumno en la medida experimental en concentradores de tensiones empleando la técnica de campo completo de correlación digital de imágenes (DIC-Digital Image Correlation).

1.2. Objetivos específicos

- Mapear las distribuciones de tensiones a partir de los mapas de deformaciones
- Calcular de manera experimental y teórica las tensiones y deformaciones

2. Introducción

2.1. Factor de concentración de tensiones

El factor de concentración de tensiones es utilizado para relacionar el esfuerzo máximo real en la discontinuidad con el esfuerzo nominal. Esta definido como

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}, \quad (1)$$

donde σ_{max} es el esfuerzo máximo, σ_0 es el esfuerzo nominal y K el factor de concentración. Cabe destacar que este factor depende de la geometría del material, y este

también se puede obtener numéricamente mediante el gráfico de la figura 1. De esta geometría se tiene que el esfuerzo nominal se puede definir como

$$\sigma_0 = \frac{F}{(w - d)t}, \quad (2)$$

donde w es la anchura, d el diámetro del agujero y t el grosor.

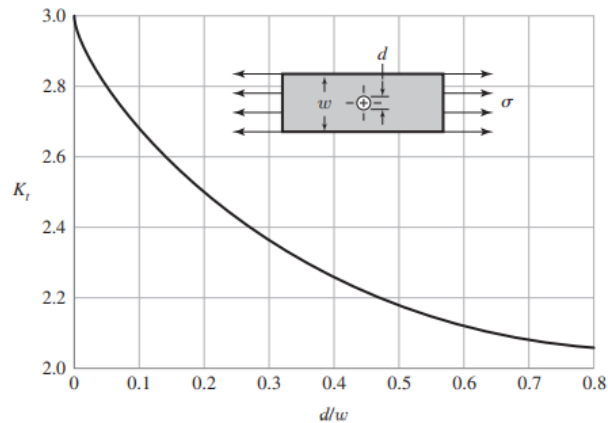


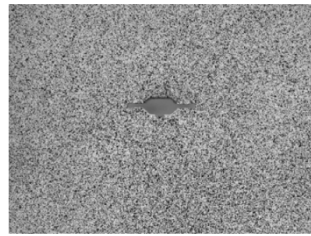
Figura 1: Gráfico del factor K para una placa delgada con un agujero de diámetro d y anchura w

2.2. DIC

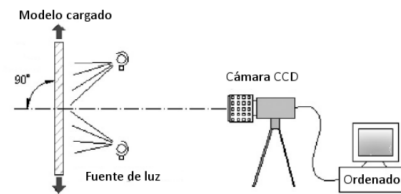
La técnica de correlación digital de imágenes (DIC) se utiliza para medir desplazamientos y deformaciones en elementos mecánicos de manera experimental. Para esto se analizan una secuencia de imágenes, en donde se toma de referencia una imagen de la probeta sin deformar y, después de aplicar esfuerzo sobre ella y recopilar mas imágenes, se comparan con la de referencia.

El proceso a seguir para la implementación de esta técnica es:

1. **Preparación del modelo y equipo:** La superficie del modelo debe tener tonalidades de grises para un buen funcionamiento, por lo que se pinta una parte de la probeta de blanco y se dibujan puntos negros en toda la probeta, ver figura 2(a). Por otro lado, la cámara deberá enfocarse con su eje perpendicular a la superficie de la probeta, ver figura 2(b).
2. **Captura de una secuencia de imágenes:** Se capturan imágenes desde el estado inicial de la probeta (sin deformación) hasta el estado final (deformado) para después comparar el estado final con el inicial.



(a) Escala de grises



(b) Preparación inicial del equipo para el DIC

Figura 2: Escala de grises en probeta y posicionamiento de equipo

3. **Procesamiento de imágenes:** En este punto se pueden utilizar diferentes softwares para el análisis de las imágenes. El objetivo es calcular el desplazamiento de cada punto en la probeta para poder comprar los diferentes estados.

Recordemos que las imágenes están compuestas de píxeles los cuales, en este caso, tienen un valor numérico específico debido a la tonalidad de grises. También existen las facetas, que forman una malla virtual uniforme en la imagen para describir a la imagen con valores numéricos dependiendo el tono de grises; parecido a los píxeles. Cada faceta tiene una posición específica en el mallado, por lo que se puede encontrar una similitud con una matriz. De esta manera, podemos descomponer la imagen en una matriz que nos da información acerca de la imagen, ver figura ??.

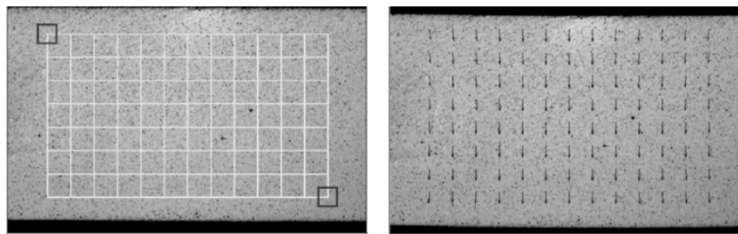


Figura 3: Rejilla de interés en la imagen de referencia (izquierda) y vector de desplazamiento de la imagen deformada (derecha)

Un conjunto de facetas forma una rejilla, la cual puede o no situarse en la región de interés. Si está colocada en la zona de interés, los puntos de la malla serán desplazados cuando la probeta sea deformada, por lo que se puede calcular el desplazamiento y la deformación.

Para calcular estos desplazamientos se elige una faceta de $(2M+1) \times (2M+1)$ píxeles centrada en el punto $P(x_0, y_0)$ de la imagen de referencia, la cual será seguida cuando se deforme. Para evaluar la similitud entre la faceta de referencia y la deformada se

necesita definir un criterio de correlación; algunos ejemplos son la Correlación Cruzada y la Suma de diferencias cuadradas. De esta manera, el valor de la correlación indica el desplazamiento del punto P , ver figura 4.

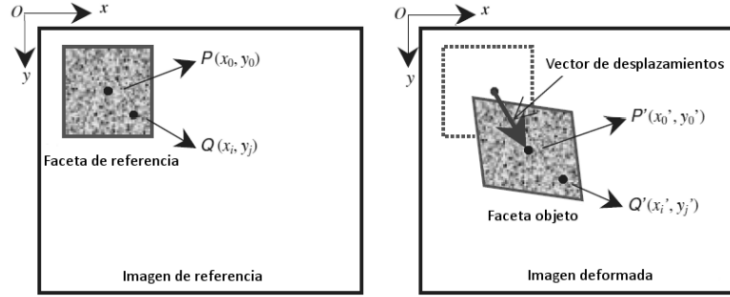


Figura 4: Esquema de la faceta de referencia antes (izquierda) y después de la deformación (derecha)

El desplazamiento de los puntos no se mide con la vista, se tienen ecuaciones que definen los nuevos puntos acorde al desplazamiento y deformación sufridas. Si suponemos que el movimiento es de un sólido rígido (desplazamiento de los puntos es el mismo) tenemos que el desplazamiento de los puntos es el mismo

$$\varepsilon_0(x_i, y_j) = u \quad (3)$$

$$\eta_0(x_i, y_j) = v \quad (4)$$

a esto se le llama función de orden cero. El orden de las funciones aumenta y su exactitud aumenta con ellas, sin embargo, no explicaremos a detalle la forma que tienen.

Para calcular las deformaciones unitarias se tiene que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

Ahora bien, para poder obtener los esfuerzos a partir de las deformaciones en x y y , se hace uso de las ecuaciones de Lamé, en donde se obtiene un resultado en forma de matriz y cada valor corresponde a una posición de la faceta en específico. Las ecuaciones de Lamé son

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

$$\sigma_x = \lambda e_3 + 2\mu \varepsilon_x \quad \sigma_y = \lambda e_3 + 2\mu \varepsilon_y \quad \sigma_z = \lambda e_3 + 2\mu \varepsilon_z \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (8)$$

2.3. Círculo de Mohr

El método del círculo de Mohr es utilizado para calcular las tensiones principales y las direcciones principales de un estado tensorial plano, los cuales se pueden determinar analíticamente y gráficamente.

Gráficamente se dibuja un círculo en el plano $\tau - \sigma$ donde el radio del círculo estará determinado por los puntos (σ_x, τ_{xy}) y (σ_y, τ_{yx}) . Estos dos últimos puntos se unen con una línea recta que pase por el centro de la circunferencia, después se mide el ángulo entre esta línea y el eje σ para obtener la dirección principal de los esfuerzos, ángulo ρ ; a este ángulo se le suman 45° para obtener la dirección principal de la tensión normal, ángulo α . Trazada la línea entre los puntos de las tensiones σ_x y σ_y , se analiza la intersección de esta con el eje de las tensiones para obtener el valor del esfuerzo promedio σ_{prom} . Para obtener el valor de la tensión normal máximo se traza una línea con el ángulo α y se analiza la intersección con la circunferencia. Para obtener los valores máximo y mínimos de los esfuerzos se analizan los dos cortes de la circunferencia sobre el eje σ .

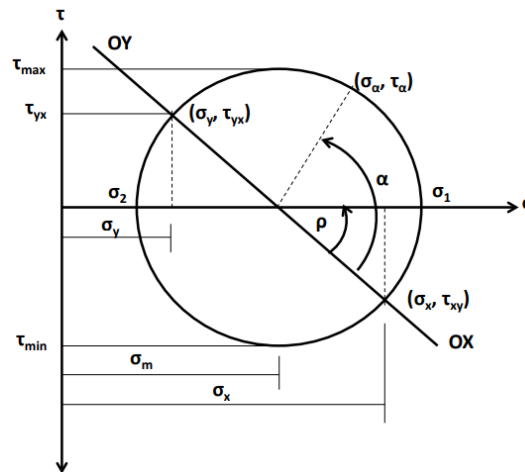


Figura 5: Círculo de Mohr

Para el método analítico se tienen las siguientes ecuaciones

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (9)$$

$$\sigma_{max,min} = \sigma_{prom} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (11)$$

3. Materiales y Métodos

3.1. Materiales y equipos

Materiales	Cantidad
Probeta de policarbonato de 4mm de espesor	1
Software comercial Vic-2D (Correlated Solutions)	1
Máquinas electromecánica MTS Criterion (modelo 43)	1
Cámara	1

Tabla 1: Materiales y equipos

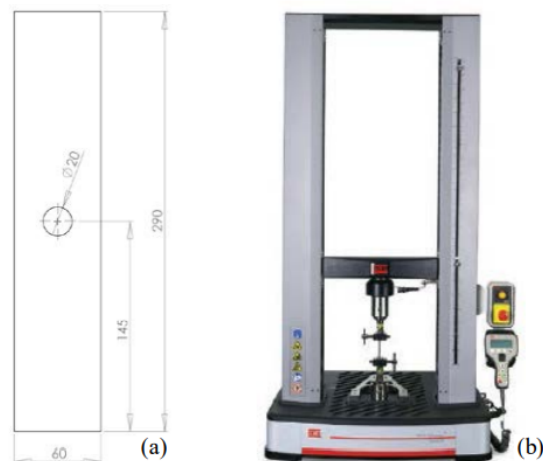


Figura 6: Dimensiones de la probeta empleada para la realización del ensayo mediante DIC (a) y máquina electromecánica empleada para la realización del ensayo (b)

3.2. Metodología

La técnica utilizada será la correlación digital de imágenes (DIC-Digital Images Correlation) ya que permite un análisis experimental basado en el tratamiento de imágenes digitales, permitiendo calcular tanto los desplazamiento verticales como horizontales. El análisis de imágenes consiste en tomar de referencia el estado inicial de la probeta, en donde no está deformada, y compararlo con el estado final, donde se encuentra deformada.

El proceso a seguir fue el siguiente:

1. Se colocó la probeta de aluminio en la máquina universal de manera que la superficie con escala de grises estuviera de frente a la cámara
2. La cámara fue posicionada frente a la probeta y se enfocó de tal manera que el punto negro del centro se ubicara en medio de la imagen.
3. Se inició el proceso de deformación con una primera carga de 100 N para preparar la probeta. Esta fuerza tuvo una duración de 10 segundos. Simultáneamente se tomó una foto, siendo esta la imagen de referencia.
4. Después de los 10 segundos con la carga de preparación, se aumentaron 600 N con una duración de 10 segundos. Al mismo tiempo se tomó una foto para tener memoria de la deformación con 700 N.
5. Después de aumentar los anteriores 600 N se ha llegado a 700 N de carga. En adelante se aumentaron las fuerzas aplicadas de forma escalonada de 600 en 600 N hasta llegar a 2500 N; donde cada carga tenía una duración de 10 segundos. A la par, también se tomaron fotos para guardar memoria de los estados de la probeta.
6. Finalmente, se obtuvieron cinco fotos, la primera con carga de 100 N, la segunda con 700 N, la tercera con 1 300 N, la cuarta con 1 900 N y la quinta con 2500 N.
7. Posteriormente, con el uso del software Vic-2D se analizaron las imágenes y se obtuvieron campos de deformaciones.

Para el análisis que se hará no se tomarán los resultados de la probeta de aluminio debido a la falta de claridad en los mismos, se tomarán los resultados de un experimento con una probeta de policarbonato con una perforación de un taladro en el centro.

4. Resultados

Para el manejo de los datos se utilizó el lenguaje de programación *python* con ayuda del compilador *jupyter notebook*. Las libretas se encuentran adjuntas en el archivo *.zip* enviado en la carpeta *notebooks*.

4.1. Mapas de tensiones y deformaciones

Los **mapas de las deformaciones** se muestran en la figura 7. Se aprecia que las deformaciones a lo largo de la dirección x son negativas, o sea que se está comprimiendo, figura 7(a). En la dirección xy tenemos que las deformaciones tienen valores positivos y negativos, figura 7(b). Mientras que en la dirección y , figura 7(c) los valores de las

deformaciones siempre son positivos, teniendo un valor más alto a la derecha e izquierda del círculo hecho por el taladro.

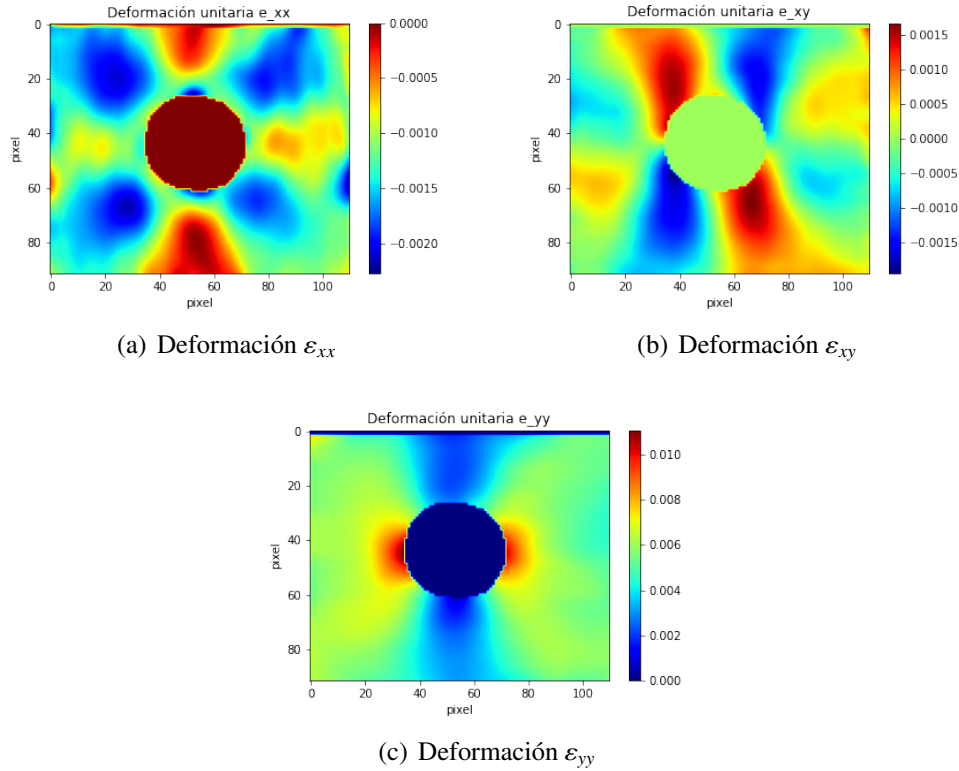


Figura 7: Mapas de deformaciones unitarias de la probeta de policarbonato

Para calcular los **mapas de tensiones** se utilizaron las ecuaciones de Lamé 6, 7 y 8. De esta manera, las matrices obtenidas de las deformaciones se manejaron con python para obtener la matriz del coeficiente de Poisson para después calcular las matrices de los coeficientes λ y μ . En consecuencia, las matrices de las tensiones σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} fueron calculadas. **Los mapas del comportamiento de las tensiones** se puede analizar en la figura 8.

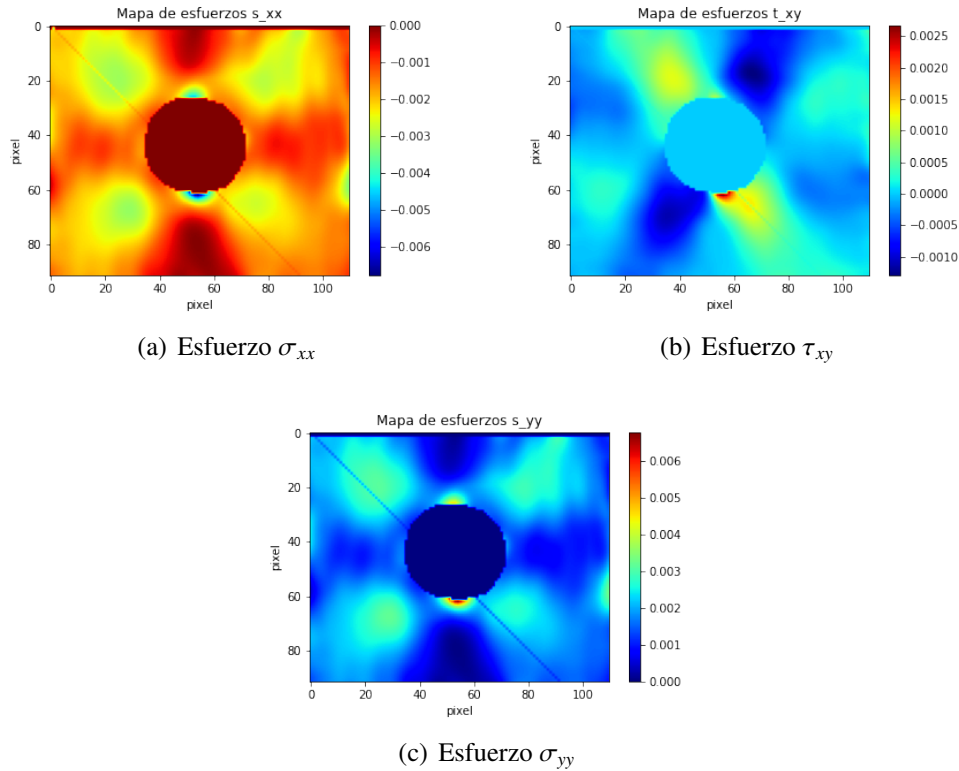


Figura 8: Mapas de tensiones de la probeta de policarbonato

4.2. Factor de concentración teórico y experimental

Para calcular el **factor de concentración teórico** la base será la geometría y en la ecuación 2

$$\sigma_0 = \frac{2500N}{(0.06 - 0.02)(0.004)m^2} = 15.625 \text{ MPa.}$$

Ahora bien, tomando de base la figura 1 primero tenemos que $\frac{d}{w} = \frac{1}{3} \approx 0.33$, por lo que el **factor de concentración de tensiones teórico** es

$$K_t \approx 2.38 \quad (12)$$

Por lo tanto, el **esfuerzo máximo teórico** es

$$\sigma_{max,t} = (2.38)(15.625 \text{ MPa}) \rightarrow \sigma_{max,t} = 37.1875 \text{ MPa} \quad (13)$$

Para el cálculo del **factor de concentración de tensiones experimental** se tiene el mismo valor de carga nominal, lo único que cambia es la tensión máxima, que fue

obtenida a partir de las matrices de tensiones. El valor **máximo de las tensiones experimentales** fue

$$\sigma_{max,e} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \rightarrow \boxed{\sigma_{max,e} = 13.6 \text{ MPa}} \quad (14)$$

Con lo cual el **factor de concentración de tensiones experimental** es

$$K_e = \frac{13.6 \text{ MPa}}{15625 \text{ MPa}} \rightarrow \boxed{K_e = 0.87} \quad (15)$$

Para tener los resultados experimentales y teóricos obtenidos de una manera más organizada se tiene la tabla 2.

Variable	Experimental	Teórico
σ_{max}	13.6 MPa	37.1875 MPa
K	0.87	2.38

Tabla 2: Resultados experimentales y teóricos

4.3. Estado tensorial máximo

Para el cálculo del estado tensorial máximo se utilizó la paquetería de Numpy para obtener el valor máximo de las tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} . Los valores encontrados fueron

$$\sigma_x \approx -6.8 \text{ MPa} \quad \sigma_y \approx 6.8 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} \approx 2.7 \text{ MPa}$$

La ubicación de este estado tensorial se encuentra en la parte superior del agujero, Si tomamos de referencia las imágenes tomadas, estaría a 33.5 mm hacia abajo comenzando desde la parte superior y a 29.2 mm a la derecha comenzando desde la parte izquierda de la imagen. Esto nos lleva a la parte superior del agujero.

Obteniendo el esfuerzo promedio se tiene que $\sigma_{prom} \approx 0$, por lo que el esfuerzo máximo y mínimo solo depende del término de la raíz cuadrada, ecuación 10. De esta manera

$$\boxed{\sigma_{max} \approx 7.32 \text{ MPa}} \quad (16)$$

$$\boxed{\sigma_{min} \approx -7.32 \text{ MPa}} \quad (17)$$

También tenemos que la tensión normal máximo tiene el mismo valor que el esfuerzo máximo debido a que el promedio del esfuerzo es cero,

$$\boxed{\tau_{max} \approx 7.32 \text{ MPa}} \quad (18)$$

Utilizando la ecuación 11 tenemos que el ángulo es

$$\boxed{2\theta_p \approx 158.34^\circ} \quad (19)$$

El método gráfico se muestra en la figura 9(b).

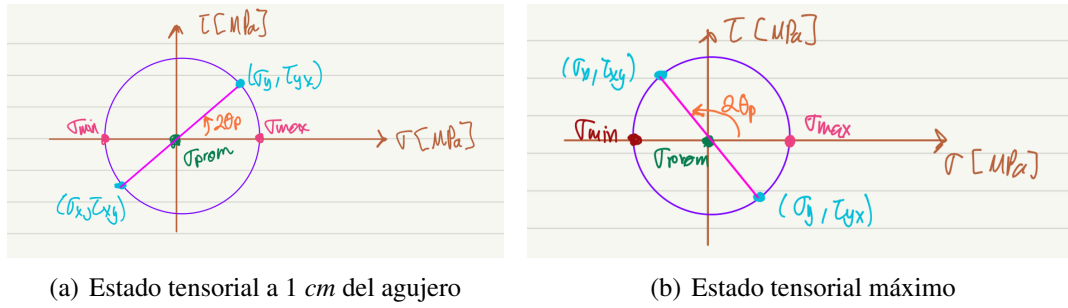


Figura 9: Método gráfico del círculo de Mohr

4.4. Estado tensorial a 1cm de la perforación

Para el cálculo del estado tensorial a 1 cm del agujero se utilizó la paquetería de Numpy para el manejo de matrices y la relación de $1.85 \frac{\text{pixel}}{\text{mm}}$ para calcular la posición exacta. De esta manera los valores obtenidos fueron

$$\sigma_x \approx -800 \text{ kPa} \quad \sigma_y \approx 800 \text{ kPa} \quad \tau_{xy} \approx -45.4 \text{ kPa}$$

Obteniendo el esfuerzo promedio se tiene que $\sigma_{prom} \approx 0$, por lo que el esfuerzo máximo y mínimo solo depende del término de la raíz cuadrada, ecuación 10. De esta manera

$$\sigma_{max} \approx 801.3 \text{ kPa} \quad (20)$$

$$\sigma_{min} \approx -801.3 \text{ kPa} \quad (21)$$

También tenemos que la tensión normal máximo tiene el mismo valor que el esfuerzo máximo debido a que el promedio del esfuerzo es cero,

$$\tau_{max} \approx 801.3 \text{ kPa} \quad (22)$$

Utilizando la ecuación 11 tenemos que el ángulo es

$$2\theta_p \approx 3.25^\circ \quad (23)$$

El método gráfico se muestra en la figura 9(a).

5. Análisis de resultados

El mapa de deformaciones ε_{xx} , figura 7(a), muestra el alargamiento de la probeta de policarbonato ya que todos los valores de las deformaciones en la zona analizada

son negativos. Esto tiene sentido ya que se le está aplicando una fuerza de estiramiento a lo largo del eje y , por lo que tiene que existir una reducción de longitud en el eje x . En añadidura, el mapa de esfuerzos en el eje x , figura 8(a), muestra valores negativos; en otras palabras, muestra tensiones de compresión, lo cual corrobora que existe una reducción en la longitud a lo largo de este eje.

Por su parte, las deformaciones en la dirección y , figura 7(c), son todas positivas. La probeta está sufriendo una fuerza de alargamiento a lo largo del eje y , por lo que se tiene que presentar un alargamiento en el mismo eje, el cual se muestra claramente en este mapa. Las máximas deformaciones se encuentran a los costados del agujero debido a que es un concentrador de tensiones. Además, el mapa de esfuerzos a lo largo del eje y , figura ??, muestra valores positivos y los máximos se encuentran arriba y abajo del agujero, cercanos a donde se está aplicando la fuerza. Esto corrobora la existencia del alargamiento a lo largo de esta dirección.

Las tensiones máximas encontradas difieren bastante, la teórica es 2.7 veces mayor que la experimental. Sin embargo, no hay que olvidar que la experimental fue obtenida a partir de la aplicación de 2500 N a la probeta. Para llegar al valor de del esfuerzo máximo teórico tendríamos que aplicar una fuerza de

$$F = \sigma_{max,t}(w - d)t = (37.1875 \text{ MPa})(0.06 - 0.02)(0.004)m^2 \approx 5.95 \text{ kN}.$$

Por lo que la diferencia entre los valores de esos esfuerzos tiene razones fundamentadas. En consecuencia, el factor de concentración de esfuerzos tiene una diferencia de igual a la de los esfuerzos. El K teórico es 2.7 veces más grande que el experimental. Esta diferencia se puede deber a la fuerza aplicada durante el experimento.

El estado tensorial máximo encontrado coincide con la posición teórica de los valores máximos, por lo que los resultados son correctos y coherentes. Los resultados del estado tensorial a 1 cm del agujero también son correctos, y esto se asegura debido a la diferencia de valores que tienen con el estado máximo.

El estado tensorial máximo tiene valores casi 10 veces más grandes que el estado tensorial a 1 cm del agujero, lo cual es lógico, ya que a 1 cm del agujero los mapas muestran valores muy pequeños de esfuerzos.

6. Conclusión

Los mapas de tensiones y deformaciones hacen sentido con la teoría vista en la clase, donde los esfuerzos máximos de estiramiento se encuentran en el eje y y más cercanos al punto donde se está aplicando la fuerza. También se tiene que a lo largo del

eje x existe una compresión en consecuencia del alargamiento del eje y .

El estado tensorial máximo corresponde al teórico, por lo que se puede concluir que el experimento fue llevado a cabo de buena manera. Por su parte, el estado tensorial a 1 *cm* del agujero muestra que los mayores esfuerzo están cercano al agujero y no lejanos.

Además, los valores obtenidos de estos estados tensoriales para las tensiones en el eje y son positivos, correspondiendo a un alargamiento. Mientras que los valores para el eje x son negativos, correspondientes a una compresión.

Esta práctica fue muy útil para revisar y aplicar conceptos del círculo de Mohr, tensiones y direcciones principales y deformaciones. Además, se introdujo al alumno al DIC y se aprendieron los conceptos básicos para realizar este proceso y mapear distribuciones de tensiones y deformaciones.

Referencias

- [1] Mecánica de materiales. Edición: 4ª ed.. Autor: Beer, Ferdinand P. (Ferdinand Pierre), 1915-2003.. Editorial: McGraw-Hill
- [4] Diseño en ingeniería mecánica de Shigley Richard Budynas, J. Keith Nisbett.. Edición: Décima edición.. Autor: Budynas, Richard.. Editorial: McGraw-Hill Interamericana
- [3] karlossantiuste. (2015, 23 septiembre). ERM: 4.3. Ecuaciones de Lamé [Vídeo]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=5AVDdbYBf6k>
- [4] NumPy. (s. f.). Numpy. Recuperado 15 de marzo de 2022, de <https://numpy.org/>.