CAPÍTULO 3

Crecimiento y acumulación

LO MÁS RELEVANTE DEL CAPÍTULO

- El crecimiento económico se debe al crecimiento de factores como trabajo y capital, y a los avances tecnológicos.
- El capital se acumula mediante ahorro e inversión.
- A largo plazo, el nivel de producción por persona depende positivamente de la tasa de ahorro y, negativamente, de la tasa de crecimiento demográfico.
- El modelo neoclásico de crecimiento sostiene que el nivel de vida de los países pobres convergirá con el de los países ricos.

Tenemos ingresos mucho mayores que nuestros bisabuelos. Los pueblos de las naciones industrializadas son significativamente más ricos que aquellos que viven en los países menos desarrollados. En realidad, hace un siglo, los estadounidenses y muchos europeos tenían ingresos como los que se perciben hoy en los países pobres. ¿Qué explica estas diferencias? ¿Qué determinará nuestro nivel de vida en el futuro? Dos herramientas responden esta pregunta: la *contabilidad del crecimiento* y la *teoría del crecimiento*. La primera aclara qué parte del crecimiento de la producción total se debe al incremento de los factores de producción (capital, trabajo, etc.). La segunda sirve para entender la forma en que las decisiones económicas definen la acumulación de los factores de producción; por ejemplo, cómo afecta la tasa de ahorro actual al acervo de capital del futuro.

En la figura 3.1 se muestra el PIB per cápita de cuatro países durante más de un siglo. La gráfica tiene cuatro características sorprendentes. En primer lugar, es notable el crecimiento de Estados Uni-

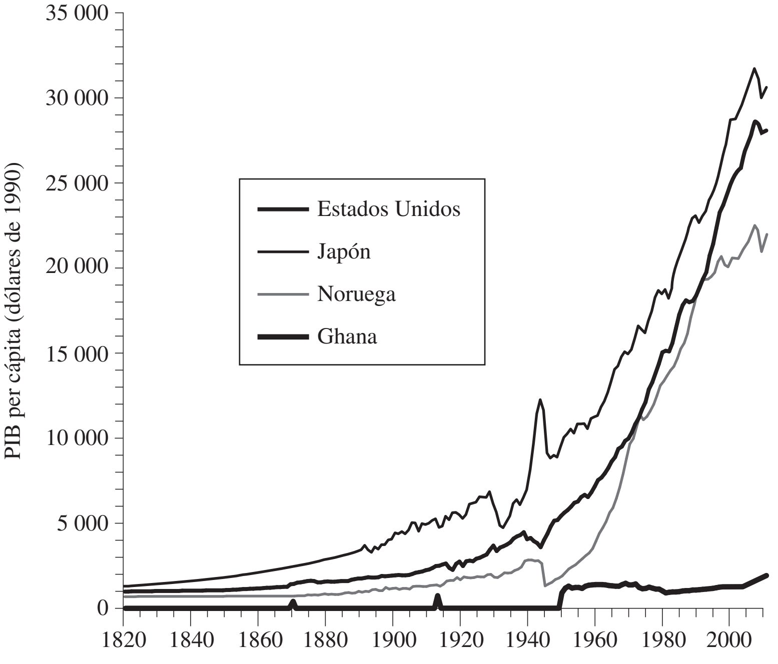

FIGURA 3.1
PIB per cápita de cuatro países, 1820-2010.
Estados Unidos, Japón y Noruega tuvieron un crecimiento del PIB real, mientras que el crecimiento de Ghana fue prácticamente de cero. (Fuente: Bolt, J. y J.L. van Zanden (2013). The First Update of the Madison Project: Re-Estimating Growth before 1820. Madison Project Working Paper 4).

dos a largo plazo, pues su ingreso promedio aumentó casi 20 veces en los siglos XIX y XX. En segundo lugar, Japón, un país moderadamente pobre antes de la Segunda Guerra Mundial, se convirtió en una nación rica con un nivel de vida casi igual al de Estados Unidos. En tercero, en Noruega el ingreso tuvo una racha de crecimiento en las últimas tres décadas. Cuarto, Ghana era muy pobre hace 100 años y, tristemente, hoy sigue así, pese a los últimos años de buen crecimiento.

Nuestro objetivo en este capítulo y el siguiente es explicar la figura 3.1. ¿Por qué el ingreso de Estados Unidos es mucho mayor hoy que hace un siglo? ¿Por qué Japón casi se puso a la par de Estados Unidos, pero Ghana no? Aprenderemos que el crecimiento económico es el resultado de la acumulación de factores de producción, en particular el capital, y del incremento de la productividad. En este capítulo veremos que estos dos factores explican el crecimiento económico, y que las tasas de ahorro y del crecimiento demográfico determinan la acumulación del capital. En el siguiente capítulo abordaremos las causas del aumento de la productividad.

3.1 Contabilidad del crecimiento

En esta sección usaremos la función de producción para estudiar dos fuentes del crecimiento. La producción crece tanto por aumentos de los factores como por aumentos en la productividad, debido a mejoras tecnológicas y a trabajadores más capaces.[1] **La *función de producción* establece un vínculo cuantitativo entre los factores y el nivel de producción.** Para simplificar, supongamos primero que trabajo (N) y capital (K) son los únicos factores de producción importantes. En la ecuación (1) se muestra que la producción (Y) depende de los factores y del nivel tecnológico (A). (Decimos que A representa el nivel tecnológico porque cuanto más elevada sea A, más se produce con determinado nivel de factores. A veces, A solo se llama "productividad", un término más neutro que "tecnología").

$$Y = AF(K, N) \tag{1}$$

Más factores significa más producción. En otras palabras, tanto el *producto marginal del trabajo* (PMT)(*marginal product of labor*, MPL), el aumento de la producción debido a un incremento del trabajo) como el *producto marginal del capital* (PMC)(*marginal product of capital*, MPC), el aumento de la producción debido a un incremento del capital) son positivos.

La ecuación (1) relaciona el nivel de producción con los niveles de insumos y tecnológico. Muchas veces es más fácil trabajar con tasas de crecimiento que con niveles. La función de producción de la ecuación (1) puede transformarse en una relación muy específica entre el crecimiento de los insumos y el crecimiento de la producción, la cual se resume en la *ecuación de contabilidad del crecimiento* (que derivaremos en el apéndice del capítulo):[2]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\Delta Y/Y & = & [(1-\theta) & \times & \Delta N/N] & + & (\theta & \times & \Delta K/K) & + & \Delta A/A \\
\begin{array}{c}\text{Crecimiento de}\\ \text{la producción}\end{array} & = & \left(\begin{array}{c}\text{participación}\\ \text{de trabajo}\end{array}\right. & \times & \left.\begin{array}{c}\text{crecimiento}\\ \text{de trabajo}\end{array}\right) & + & \left(\begin{array}{c}\text{participación}\\ \text{del capital}\end{array}\right. & \times & \left.\begin{array}{c}\text{crecimiento}\\ \text{del capital}\end{array}\right) & + & \begin{array}{c}\text{progreso}\\ \text{técnico}\end{array}
\end{array} \tag{2}$$

donde $(1 - \theta)$ y θ son las participaciones del factor trabajo y del factor capital en el ingreso.[3]

La ecuación (2) resume las aportaciones del crecimiento de los factores de producción y de la mejora de la productividad para el incremento de la producción:

- El trabajo y el capital contribuyen en un monto igual a sus tasas individuales de crecimiento *multiplicadas por la participación de ese factor en el ingreso*.
- La medida del adelanto tecnológico, llamada *progreso técnico* o *crecimiento de la productividad total de los factores*, es el tercer término de la ecuación (2).

[1] Para un estudio elaborado de la contabilidad del crecimiento vea Robert J. Barro, "Notes on Growth Accounting", en *Journal of Economic Growth*, junio de 1999.

[2] Se necesita el supuesto de una economía competitiva para pasar de la ecuación (1) a la (2). En el apéndice analizaremos este supuesto. En el apartado 3.1 presentamos un ejemplo con la función de producción de Cobb-Douglas (el ejemplo continúa en el apéndice), pero la ecuación (2) no exige de ninguna manera esta función específica de producción.

[3] La "participación del trabajo" significa la fracción de la producción total que se destina a pagar a los trabajadores; en otras palabras, sueldos, salarios, etc., dividida entre el PIB.

3.1 ¿Qué más sabemos?

Función de producción Cobb-Douglas

La fórmula general de la función de producción es $Y = AF(K,N)$. Si prefiere seguir la exposición con una fórmula concreta, puede usar la *función de producción Cobb-Douglas*, $Y = AK^{\theta}N^{1-\theta}$. En Estados Unidos, $\theta \approx 0.25$, hace de la función de producción Cobb-Douglas una buena aproximación a la economía real, así que puede escribirse como $Y = AK^{.25}N^{.75}$. A los economistas les gusta la forma funcional de Cobb-Douglas porque es una descripción precisa de la economía y es muy fácil trabajarla algebraicamente. Por ejemplo, el producto marginal del capital es

$$MPK = \theta AK^{\theta-1}N^{1-\theta} = \theta A(K/N)^{-(1-\theta)} = \theta Y/K$$

La tasa de crecimiento de la productividad total de los factores es el monto en que la producción se incrementaría como resultado de adelantos en los métodos de producción, sin que cambien los factores. En otras palabras, hay crecimiento de la productividad total de los factores cuando obtenemos más productos con los mismos factores de producción.[4]

Ejemplo: supongamos que la participación del capital en el ingreso es de 0.25, y la del trabajo de 0.75. Estos valores corresponden aproximadamente a los valores reales de la economía estadounidense. Además, digamos que el trabajo aumenta 1.2% y que el incremento del acervo de capital es de 3%, y supongamos también que la productividad total de los factores se incrementa a un ritmo de 1.5% anual. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la producción? Si aplicamos la ecuación (2), obtenemos una tasa de crecimiento de $\Delta Y/Y = (0.75\% \times 1.2\%) + (0.25\% \times 3\%) + 1.5\% = 3.15\%$.

Un punto importante de la ecuación (2) es que las tasas de crecimiento del capital y trabajo se ponderan según sus participaciones respectivas en el ingreso. Como la participación del trabajo es mayor, un aumento de un punto porcentual en este eleva más la producción que un cambio de un punto porcentual en el capital. Como las participaciones suman 1, si el capital y el trabajo crecen un punto porcentual más, también se incrementa la producción.

Este punto (el crecimiento de los factores se pondera según su participación en la producción) adquiere relevancia cuando nos preguntamos cuánto crecimiento adicional se alcanza si elevamos la tasa de crecimiento del acervo de capital mediante políticas de oferta. Supongamos que en el ejemplo anterior el crecimiento del capital se hubiera duplicado: 6% en lugar de 3%. Con la ecuación (2) vemos que el crecimiento de la producción pasaría de 3.15 a 3.9%, un aumento de menos de un punto porcentual aunque el capital se haya incrementado en otros tres puntos porcentuales.

Contabilidad del crecimiento en la producción per cápita

La ecuación (2) describe el crecimiento de la producción total; pero, ¿de verdad nos importa el ingreso nacional total o el ingreso promedio por persona, el *PIB per cápita*? Suiza es un país "rico", mientras que la India es una nación "pobre", pese a que el PIB acumulado de la India es mayor. Nuestra noción del "nivel de vida" se refiere al bienestar de los individuos.

El PIB per cápita es el cociente entre el PIB y la población. Cuando se estudia el crecimiento, se acostumbra utilizar letras minúsculas a los valores per cápita, así que definimos $y \equiv Y/N$ y $k \equiv K/N$. La tasa de crecimiento del PIB es igual a la tasa de crecimiento del PIB per cápita más la tasa de crecimiento demográfico: $\Delta Y/Y = \Delta y/y + \Delta N/N$ y $\Delta K/K = \Delta k/k + \Delta N/N$. Para convertir la ecuación de la contabilidad del crecimiento en cifras per cápita, se resta el aumento demográfico, $\Delta N/N$, de los dos lados de la ecuación (2) y se reordenan los términos:

$$\Delta Y/Y - \Delta N/N = \theta \times [\Delta K/K - \Delta N/N] + \Delta A/A \tag{3}$$

La ecuación (3) se rescribe en términos per cápita:

$$\Delta y/y = \theta \times \Delta k/k + \Delta A/A \tag{4}$$

[4] Hay una diferencia entre *productividad del factor trabajo* y productividad total de los factores. La productividad del trabajo es solo el cociente entre producción y trabajo, Y/N. La productividad del trabajo, sin duda, crece como resultado del progreso técnico, pero también se incrementa debido a la acumulación del capital por trabajador.

El número de máquinas por trabajador, k, que también se llama nivel de *capital a trabajo*, es un determinante fundamental del monto de la producción que puede generar un trabajador. Como θ es de alrededor de 0.25, la ecuación (4) indica que un aumento de 1% en el monto del capital disponible para cada trabajador incrementa la producción per cápita apenas un cuarto de 1%.

Convergencia de las economías estadounidense y japonesa en la posguerra

Se llama *convergencia* a la situación en que una economía se pone a la par de otra. Desde el fin de la Segunda Guerra Mundial, el nivel de vida de Japón prácticamente se emparejó con el de Estados Unidos. ¿Qué parte de la notable convergencia de posguerra entre Estados Unidos y Japón se explica mediante una relación de cuentas tan simple como la ecuación (4)? En la tabla 3.1 se brindan los datos necesarios.

En la figura 3.1 se muestra que el ritmo al que Japón se niveló con Estados Unidos fue mayor en los primeros años de posguerra, así que dividiremos el análisis en dos periodos: 1950-1973 y 1973-1992. Veremos primero el segundo periodo, en el cual la mayor velocidad de acumulación de capital en Japón explica mucha de la diferencia de crecimiento de la producción.

Entre 1973 y 1992 (la segunda fila de la tabla 3.1), Japón superó a Estados Unidos en el crecimiento del PIB per cápita en 1.65% anual. Apenas en 20 años, la producción de Japón creció 36% más que la de Estados Unidos. ¿A qué se debe este logro? Si vaciamos las cifras de la tabla 3.1 en la ecuación (4), la diferencia de 3.93% anual del crecimiento per cápita del capital ($\Delta k/k$) de la última columna de la tabla 3.1, predice un diferencial del crecimiento del PIB per cápita de 0.98% ($0.98 = \Delta y/y = \theta \times \Delta k/k = 0.25 \times 3.93$). En otras palabras, algo tan simple como la ecuación (4) explica poco más de la mitad (0.98 de 1.65) de la diferencia observada entre las tasas de crecimiento.

En los primeros años de la posguerra, el crecimiento japonés fue asombroso: 5.59 puntos más que el crecimiento de Estados Unidos. Podemos demostrar que esta diferencia es demasiado grande para explicarla solo mediante acumulación de capital. Si ponemos los datos de la primera hilera de la tabla 3.1 en la ecuación (4), se explican solo 1.54 puntos de diferencia ($1.54 = \Delta y/y = \theta \times \Delta k/k = 0.25 \times 6.17$). Este razonamiento deja 4.05 puntos que se explican mediante diferencias de cambio tecnológico,[5] $\Delta A/A$. En los primeros años de la posguerra, Japón importó mucha tecnología de Occidente. A partir de un nivel tecnológico bajo, el país logró un enorme crecimiento por medio del "emparejamiento tecnológico". A finales del periodo de posguerra, la transferencia de tecnología empezó a funcionar de manera recíproca. En la actualidad, las diferencias entre Japón y Estados Unidos en $\Delta A/A$ son mucho menos importantes que en el pasado.

Con cálculos de este tipo se demuestra que si la acumulación de capital no es el único determinante del PIB, sí es muy importante. Por lo tanto, quisiéramos saber qué define el ritmo de esta acumulación. Cuando más adelante veamos la teoría del crecimiento, examinaremos la forma en que la tasa de ahorro determina el crecimiento del capital.

TABLA 3.1 Tasas de crecimiento anual en la posguerra
(porcentaje)

	PIB per cápita			Acervo de capital no residencial per cápita		
	Estados Unidos	Japón	Diferencia	Estados Unidos	Japón	Diferencia
1950-1973	2.42	8.01	5.59	1.78	7.95	6.17
1973-1992	1.38	3.03	1.65	2.12	6.05	3.93
1950-1992	1.95	5.73	3.78	1.93	7.09	5.16

Fuente: Angus Maddison, *Monitoring the World Economy 1820-1992,* París, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 1995, y cálculos de los autores.

[5] Como veremos después, las mejoras en el capital humano también juegan un rol importante.

3.2 Cálculos empíricos del crecimiento

Los cálculos de la sección anterior mostraron la trascendencia de la acumulación de capital para el crecimiento, aunque también apuntaron a que el progreso técnico puede ser fundamental. En un famoso y temprano estudio, el premio Nobel Robert Solow, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, examinó el periodo 1909-1949 en Estados Unidos, con una versión más elaborada de los cálculos que acabamos de hacer.[6] La asombrosa conclusión de Solow fue que más de 80% del crecimiento de la producción por hora de trabajo, en ese periodo, se debió al progreso técnico.

En concreto, Solow calculó una ecuación del crecimiento del PIB estadounidense semejante a la ecuación (2), que identifica el crecimiento del capital y del trabajo, junto con el progreso técnico, como las fuentes del crecimiento de la producción. Entre 1909 y 1949, el crecimiento anual promedio del PIB total fue de 2.9%. De esta cifra, Solow concluyó que 0.32% era atribuible a la acumulación del capital, 1.09 se debía a incrementos en el trabajo, y el restante 1.49%, obedecía al progreso técnico. La producción per cápita creció 1.81% al año, y 1.49 puntos porcentuales de este incremento se debieron al progreso técnico.

Solow descubrió que los determinantes importantes del crecimiento del PIB son el progreso técnico, aumento de la fuerza laboral y la acumulación del capital, en ese orden. Los determinantes importantes del crecimiento del PIB per cápita son el progreso técnico y la acumulación de capital.

El crecimiento demográfico, en realidad, reduce el PIB per cápita aunque aumente el PIB. Parece confuso, pero las dos conclusiones se extraen de la ecuación (2). Más trabajadores significa más producción, pero la producción no aumenta de manera proporcional. La ecuación (2) indica que cada punto porcentual de incremento de la fuerza laboral genera un aumento de $1 - \theta$ puntos porcentuales de la producción; en particular, alrededor de tres cuartas partes de un punto. Como el incremento es menor que uno, la producción crece menos rápido que el número de los trabajadores y la producción por trabajador cae (el PIB per cápita). Hay otra manera de decirlo: si aumenta el número de trabajadores sin que se acreciente en la misma proporción el número de máquinas, el trabajador promedio será menos productivo porque tendrá menos equipo para trabajar.

Otros factores diferentes al capital y al trabajo

La función de producción y, por consiguiente, las ecuaciones (2) y (4) omiten una lista larga de factores, además de capital y trabajo, en parte porque estos factores son los insumos más importantes, pero también para simplificar la exposición. Desde luego, en momentos y lugares específicos, factores que no son capital ni trabajo tienen mucha importancia. Dos insumos fundamentales son los recursos naturales y el capital humano.

Recursos naturales

Mucha de la prosperidad inicial de Estados Unidos se debió a su abundante y fértil suelo. Entre 1820 y 1870, la extensión de tierras cultivables de Estados Unidos creció a un ritmo de 1.41% anual (lo que contribuyó en buena medida al crecimiento), aunque en los tiempos actuales ese crecimiento ha sido

3.2 ¿Qué más sabemos?

El residuo de Solow

¿Cómo se mide el progreso técnico? Por definición, los cambios de A explican todos los cambios de productividad que no se deben a modificaciones de los factores de producción. Las modificaciones en A se llaman también cambios de la *productividad total de los factores* (*PTF*), un término más neutro que "progreso técnico". Como los factores y los productos son observables directamente pero no A, los economistas miden $\Delta A/A$ al modificar la ecuación (2):

$$\Delta A/A = \Delta Y/Y - [(1-\theta) \times \Delta N/N] - (\theta \times \Delta K/K)$$

y le atribuyen todo lo que queda a las variaciones de la *PTF*. Medidos de esta manera, los cambios de la *PTF* se llaman *residuo de Solow*.

[6] R. Solow, "Technical Change and the Aggregate Production Function", en *Review of Economics and Statistics*, agosto de 1957.

insignificante. La apertura del sector oriental ruso coincidió aproximadamente con la apertura del oeste estadounidense y también aportó al crecimiento económico de Rusia.

Como un ejemplo más actual de la importancia de los recursos naturales, tomemos el reciente aumento notable del PIB de Noruega (vea la figura 3.1). Entre 1970 y 1990, el PIB per cápita de Noruega pasó de 67% del PIB per cápita estadounidense a 80%. Buena parte de este crecimiento acelerado se debió al descubrimiento y explotación de extensas reservas petroleras.[7]

Capital humano

En los países industrializados, el trabajo es menos importante que las destrezas y habilidades de los trabajadores. El acervo de la sociedad de dichas habilidades se acrecienta mediante inversiones en *capital humano*, por ejemplo, en escolarización, capacitación laboral y otros medios, de la misma manera que la inversión física incrementa el capital físico. (En los países pobres, las inversiones en salud contribuyen significativamente a aumentar el capital humano. En épocas de pobreza extrema, la inversión crucial puede ser dar a los trabajadores suficientes calorías para la cosecha). Si agregamos el capital humano, H, a la función de la producción, la escribimos como sigue:

$$Y = AF(K, H, N) \tag{5}$$

La participación del ingreso del capital humano es grande en los países industrializados. En un influyente artículo de Mankiw, Romer y Weil, se postula que la función de producción concuerda con proporciones de los factores en tercios: capital físico, trabajo y capital humano.[8] El crecimiento diferencial de estos tres factores explica alrededor de 80% de las variaciones del PIB per cápita en muchos países, lo que recalca la importante función de la acumulación en el proceso del crecimiento.

Según lo que estudiamos en la sección anterior, las cuantiosas existencias de capital físico (el resultado de una proporción elevada de inversiones) deben acrecentar el PIB. En la figura 3.2*a*) se presenta una gráfica (en una escala logarítmica) del PIB per cápita y la inversión (como fracción del PIB) de algunos países. Es evidente que una inversión elevada genera ingresos altos, pero ¿existe una relación semejante entre el capital humano y la producción? Es difícil medir con precisión el capital humano, pero el promedio de escolaridad puede servir como sustituto del capital humano. En la figura 3.2*b*), vemos que las evidencias respaldan fuertemente una relación positiva entre capital

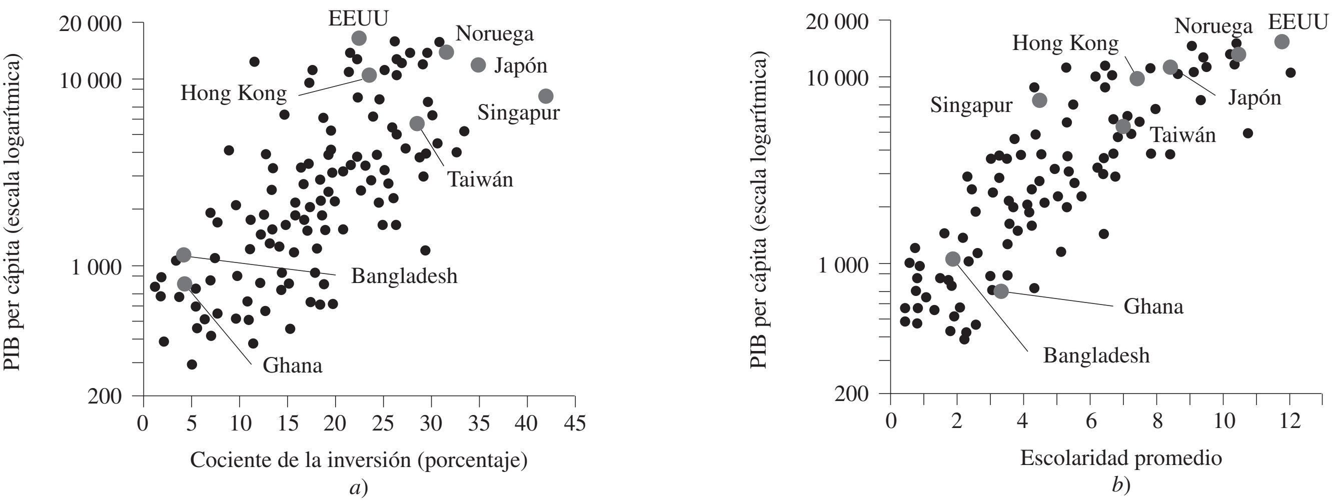

FIGURA 3.2

Relación entre *a*) el cociente de la inversión y *b*) el promedio de escolaridad al PIB.

Cuanto más elevada es la tasa de inversión (en capital físico o humano), mayor es el PIB. (Fuente: Datos tomados de R. Barro y J. Lee, "International Comparisons of Educational Attainment", en *Journal of Monetary Economics*, 1993).

[7] Aunque poseer recursos naturales copiosos contribuye a elevar el nivel de vida, hay pruebas empíricas de que los países con más recursos naturales están, en promedio, en *peores* condiciones. Una explicación es que estas naciones dilapidan su riqueza. Vea Jeffrey D. Sachs y Andrew M. Warner, "The Big Push, Natural Resource Booms and Growth", en *Journal of Development Economics*, 1999.

[8] N. G. Mankiw, D. Romer y D. Weil, "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics,* mayo de 1992.

humano y producción. En el capítulo siguiente observaremos que tanto el capital humano como el físico se acumulan y, por consiguiente, pueden contribuir al crecimiento permanente.

Cualquier cambio en un factor significativo de la producción, repercutirá en esta. En algunos países tropicales, el PIB depende mucho de la llegada de los monzones. La inmigración fomenta la producción per cápita si llegan trabajadores calificados al país, lo que muchas veces ha beneficiado a Estados Unidos. En contraste, a corto plazo, la inmigración de refugiados de guerras deprime la producción per cápita. Sin embargo, un factor de producción se suma al crecimiento solo si la oferta de ese factor también está en crecimiento. Las fluctuaciones de los factores pueden durar años, pero casi nunca pasan de varias décadas (aunque la apertura del oeste estadounidense y el este ruso son excepciones).

En ocasiones, las fluctuaciones a corto plazo de los factores (lo mismo monzones que flujos de refugiados) son muy importantes. Sin embargo, en los grandes movimientos de la historia, los dos componentes esenciales son la acumulación de capital (físico y humano) y el progreso tecnológico. En nuestro estudio de la teoría del crecimiento nos concentramos en estos dos factores.

3.3 Teoría del crecimiento: el modelo neoclásico

Han existido dos periodos de intenso trabajo en la teoría del crecimiento: el primero a finales de la década de 1950 y durante la siguiente; y el segundo, 30 años después, a finales de la década de 1980 y comienzos de la siguiente. De las investigaciones realizadas en el primer periodo surgió la *teoría neoclásica del crecimiento*, la cual se enfoca en la acumulación de capital y en sus relaciones con las decisiones de ahorro y semejantes. El teórico más conocido es Robert Solow.[9] La teoría del crecimiento endógeno, que estudiaremos en el capítulo siguiente, se enfoca en los determinantes del progreso tecnológico.

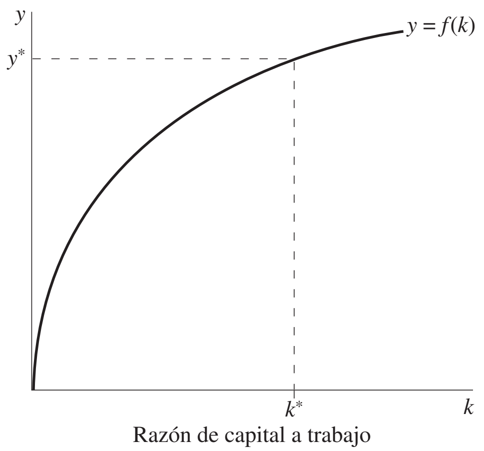

FIGURA 3.3
Función de producción per cápita.
La función de producción $y = f(k)$ es la relación entre la producción per cápita y el nivel de capital a trabajo.

La teoría neoclásica del crecimiento comienza con un supuesto simplificador. Nuestro análisis inicia con la suposición de que no hay progreso tecnológico. Esto implica que la economía alcanza un nivel de producción y capital a largo plazo llamado *equilibrio del estado estacionario*. **El equilibrio del estado estacionario de la economía es la combinación del PIB y capital per cápita en el que la economía está estable, es decir, en el que las variables económicas per cápita no cambian, $\Delta y = 0$ y $\Delta k = 0$.**

La teoría del crecimiento procede mediante tres pasos extensos. En primer lugar, vemos que diversas variables económicas determinan el estado estacionario de la economía. A continuación, estudiamos la transición de la posición actual de la economía a dicho estado estacionario. Como último paso, agregamos al modelo el progreso tecnológico (quizá parezca un rodeo, pero este truco nos permite usar gráficas simples para el análisis, sin riesgo de obtener una respuesta incorrecta).

En la figura 3.3 se presenta la función de producción en términos del PIB per cápita graficada con el nivel de capital a trabajo.[10] La función de producción se escribe, en términos per cápita, así:

$$y = f(k) \tag{6}$$

[9] R. Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth", en *Quarterly Journal of Economics*, febrero de 1956. En la recopilación de trabajos de Joseph Stiglitz e Hirofumi Uzawa (comps.), *Readings in the Theory of Economic Growth* (Cambridge, MIT Press, 1969) se encuentran muchos de los textos más importantes del periodo.

[10] La función de producción definida en la ecuación (1) dio la producción como función del trabajo y el capital. Queremos trabajar con las variables per cápita. Dividimos ambos lados de la función de producción en (1) entre N: $Y/N = AF(K, N)/N$. Luego, tomamos el hecho de los rendimientos constantes a escala (que veremos en el apéndice del capítulo) para escribir $AF(K, N)/N = AF(K/N, N/N)$. Recordando que $K/N \equiv k$ (y como $N/N \equiv 1$), escribimos $AF(K/N, N/N) = AF(k, 1)$. Para tener presente que trabajamos con términos per cápita, la definición convencional es $f(k) \equiv AF(k, 1)$.

La ecuación de Cobb-Douglas en términos per cápita

Si seguimos con el ejemplo de Cobb-Douglas, tenemos

$$Y/N = AKN^{1-\theta}/N = AKN^{-\theta}N/N = A\,(K/N)^{\theta} \text{ o } y = f(k) = Ak^{\theta}$$

Observe la forma que asume la función de producción en la figura 3.3. A medida que aumenta el capital, la producción también lo hace (el producto marginal del capital es positivo); sin embargo, la producción se incrementa menos con niveles elevados de capital que con niveles bajos (disminuye el producto marginal del capital). Cada máquina adicional acrecienta la producción, pero menos que la máquina anterior.[11] Veremos más adelante que el *producto marginal decreciente* es la principal explicación de las causas por las cuales la economía llega a un estado estacionario en lugar de crecer indefinidamente.

Estado estacionario

Una economía se encuentra en su *estado estacionario* cuando el ingreso y el capital per cápita son constantes. Los valores del estado estacionario del ingreso y el capital per cápita,[12] que se denotan por y^* y k^*, son los valores en que la inversión requiere para proporcionar capital a los nuevos trabajadores y reemplazar las máquinas desgastadas es igual al ahorro generado por la economía. Si el ahorro es mayor que este requisito de inversión, el capital por trabajador aumenta con el tiempo y, por consiguiente, también la producción. Si el ahorro es menor que este requisito de la inversión, se reducen el capital y la producción por trabajador. Los valores del estado estacionario y^* y k^* son los niveles de producción y capital en los que se compensan el ahorro y la inversión que se necesita.

Ahora que tenemos y^* y k^* como puntos de referencia, podemos examinar la ruta de transición de la economía desde algún punto arbitrario hasta el estado estacionario. Por ejemplo, si la economía comienza con menos capital que k^* e ingreso menor que y^*, examinamos la forma en que la acumulación del capital mueve la economía, con el paso del tiempo, hacia y^* y k^*.

Inversión y ahorro

La inversión que se requiere para mantener un nivel dado de capital per cápita, k, depende del crecimiento demográfico y de la tasa de depreciación, la tasa a la que se desgastan las máquinas. Primero suponemos que la población crece a un ritmo constante de $n \equiv \Delta N/N$. Por lo tanto, la economía necesita nk de inversión para abastecer de capital a los trabajadores nuevos. En segundo lugar, asumimos que la depreciación es un porcentaje constante, d, del acervo de capital. En concreto, podríamos considerar que la depreciación es de 10% anual, de modo que cada año hay que reemplazar 10% del acervo de capital para compensar el desgaste. Con esto se agrega dk a los requisitos de nueva maquinaria. Así, la inversión requerida para mantener un nivel constante de capital per cápita es $(n + d)k$.

Ahora examinaremos el vínculo entre ahorro y crecimiento de capital. Suponemos que no hay sector gubernamental ni comercio internacional o flujos de capital. También creemos que el ahorro es una fracción constante, s, del ingreso, así que el ahorro per cápita es sy. Como el ingreso es igual a la producción, también podemos escribir $sy = sf(k)$.

El cambio neto del capital per cápita, Δk, es el exceso del ahorro respecto de la inversión que se requiere:

$$\Delta k = sy - (n + d)k \tag{7}$$

El *estado estacionario se define mediante* $\Delta k = 0$, y se presenta cuando los valores de y^* y k^* satisfacen

$$sy^* = sf(k^*) = (n + d)k^* \tag{8}$$

En la figura 3.4 se presenta una solución gráfica del estado estacionario. Cuando los individuos ahorran una fracción constante de su ingreso, la curva sy, que es una proporción constante de la producción, muestra el nivel de ahorro en cada nivel de capital a trabajo. La línea recta $(n + d)k$ ilustra la cantidad de inversión necesaria en cada nivel de capital a trabajo para mantener dicho cociente constante mediante la adición de máquinas y reemplazos de las que se desgastan, así como de trabajadores que entran por primera vez en la fuerza laboral. El ahorro y la inversión que se requieren se

[11] La reducción de la curva es el equivalente gráfico de $\theta < 1$ en la ecuación (2).

[12] Para que el ingreso *por persona* y el capital *por persona* permanezcan sin cambio a pesar de que la población crezca, el ingreso y el capital deben acrecentarse al mismo ritmo que la población. Como símbolo de la tasa de crecimiento demográfico, definimos $n \equiv \Delta N/N$, así que en el estado estacionario $\Delta Y/Y = \Delta N/N = \Delta K/K = n$.

3.3 ¿Qué más sabemos?

¿Por qué unos países tienen mucha más producción por trabajador que otros?

En un influyente artículo (cuyo título tomamos para este apartado), Bob Hall y Chad Jones aplicaron la contabilidad del crecimiento para ayudar a entender las experiencias de crecimiento entre países.* En la primera columna de la tabla 1 se refleja la producción por trabajador de Estados Unidos. En las siguientes dos columnas se muestra la contribución del capital físico y humano para explicar la producción de un país en relación con su contribución a la producción de Estados Unidos. En la última columna se mide la productividad, nuestra *A* en la ecuación (1), en relación con Estados Unidos. Por ejemplo, la producción por trabajador de Canadá fue de 94.1% de la producción por trabajador estadounidense, o en forma equivalente, la producción por trabajador de Canadá fue de 5.9% inferior que la de uno de Estados Unidos. Esta diferencia se explica porque Canadá tiene 0.2% más capital físico por trabajador, 9.2% menos capital humano por trabajador y 3.4% mayor productividad.

Las cifras de la tabla 1 tienen que tomarse con ciertas reservas porque las comparaciones internacionales son notablemente difíciles y porque los datos originales están algo atrasados. Por ejemplo, las medidas actuales del PIB per cápita muestran que China está mucho mejor que la India. A pesar de la imperfección de los datos, se destacan tres puntos:

- Los países ricos están *significativamente* mejor que los pobres (columna 1).
- Las diferencias de capital físico y humano explican buena parte de las diferencias de producción (columnas 2 y 3).
- Las diferencias de productividad explican también, en gran medida, las diferencias de producción (columna 4).

* Robert E. Hall y Charles I. Jones, "Why Do Some Countries Produce So Much More Output per Worker than Others?", en *Quarterly Journal of Economics,* febrero de 1999, pp. 83-116. Los datos para trazar la tabla, y los de muchos otros países, se encuentran en http://emlab.berkeley.edu/users/chad/Hall/Jones400.asc.

TABLA 1 Cálculos de productividad: cocientes de valores respecto de Estados Unidos

País	Producción por trabajador	Capital físico por trabajador	Capital humano por trabajador	Productividad
Estados Unidos	1.000	1.000	1.000	1.000
Canadá	0.941	1.002	0.908	1.034
Australia	0.843	1.094	0.900	0.856
Italia	0.834	1.063	0.650	1.207
Holanda	0.806	1.060	0.803	0.946
Reino Unido	0.727	0.891	0.808	1.011
Hong Kong	0.608	0.741	0.735	1.115
Singapur	0.606	1.031	0.545	1.078
Japón	0.587	1.119	0.797	0.658
Irlanda	0.577	1.052	0.773	0.709
Indonesia	0.110	0.915	0.499	0.242
India	0.086	0.709	0.454	0.267
China	0.060	0.891	0.632	0.106
Ghana	0.052	0.516	0.645	0.218

equilibran con el capital del estado estacionario, k^*, en el punto donde se intersecan las dos líneas, el punto *C*. El ingreso del estado estacionario se interpreta como la función de producción en el punto *D*.

El proceso de crecimiento

En la figura 3.4 se estudia el proceso de ajuste que lleva a la economía, con el paso del tiempo, de un nivel de capital a trabajo a un estado estacionario. Los elementos cruciales de este proceso de transición son la tasa de ahorro e inversión en comparación con la tasa de depreciación y de crecimiento demográfico.

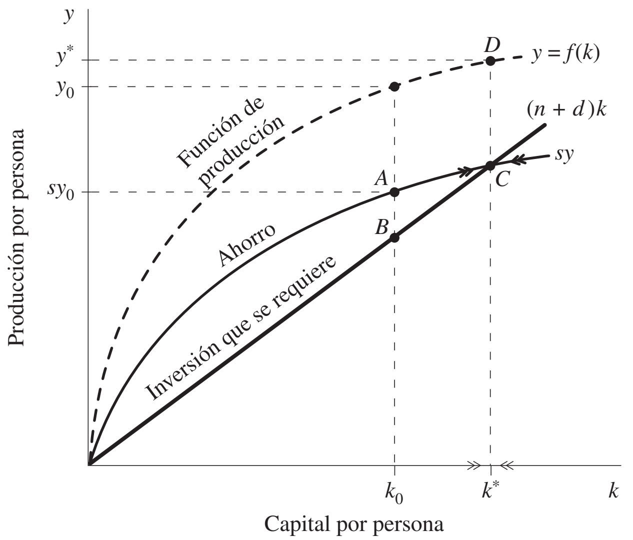

FIGURA 3.4
Producción e inversión de estado estacionario.

La clave para entender el modelo neoclásico de crecimiento es que cuando el ahorro, *sy*, excede la línea de los requisitos de inversión, *k* se incrementa, como lo especifica la ecuación (7). En consecuencia, cuando *sy* excede $(n + d)k$, *k* debe incrementarse, y con el tiempo la economía se mueve a la derecha en la figura 3.4. Por ejemplo, si la economía comienza con una razón de capital a trabajo, k_0, con el ahorro en *A* que excede la inversión necesaria para que *k* se mantenga constante en *B*, la flecha horizontal muestra que *k* aumenta.

El proceso de ajuste se detiene en el punto *C*, en el cual se alcanzó el nivel de capital a trabajo, k^*, para el cual el ahorro asociado con ese cociente corresponde exactamente con los requisitos de inversión. Por la correspondencia precisa entre la inversión real y la que se requiere, el nivel de capital a trabajo no aumenta ni disminuye. Llegamos al estado estacionario.

Observe que este proceso de ajuste lleva al punto *C* desde cualquier nivel inicial de ingreso. Una implicación importante de la teoría neoclásica del crecimiento es que los países con tasas de ahorro, de crecimiento demográfico y tecnología iguales (es decir, la misma función de producción), al final convergen en ingresos similares, aunque la convergencia sea muy lenta.

En el estado estacionario, *k* y *y* son constantes. Con un ingreso per cápita constante, el ingreso agregado crece al mismo ritmo que la población, es decir, a la tasa *n*. **Se deduce que la tasa de ahorro no afecta la tasa de crecimiento en estado estacionario.** Este es uno de los principales resultados de la teoría neoclásica del crecimiento.

Aumento de la tasa de ahorro

¿Por qué la tasa de crecimiento a largo plazo debe ser independiente de la tasa de ahorro? ¿No nos dicen siempre que las bajas tasas de ahorro de los estadounidenses llevan al poco crecimiento de ese país? ¿No es verdad que en una economía en la que se separe 10% del ingreso y se sume al acervo de capital, dicho capital y la producción crecerán más deprisa que en una economía en la que solo se ahorre 5% del ingreso? De acuerdo con la teoría neoclásica del crecimiento, la tasa de ahorro no afecta la tasa de crecimiento *a largo plazo*.[13]

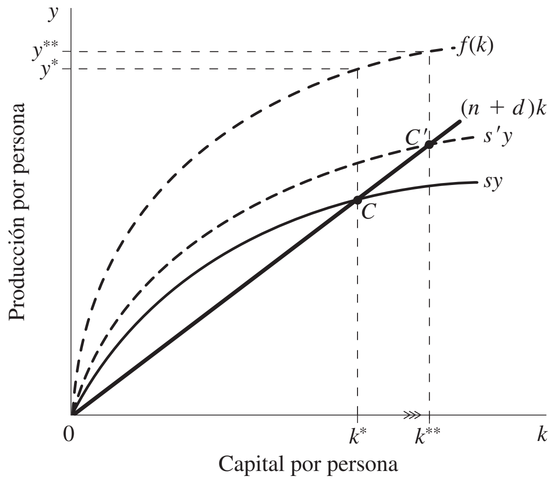

FIGURA 3.5
El incremento de la tasa de ahorro desplaza el estado estacionario.
Si la tasa de ahorro aumenta, se incrementa el nivel de capital a trabajo en el estado estacionario.

En la figura 3.5 se muestra que un incremento de la tasa de ahorro afecta el crecimiento. A corto plazo, dicho aumento acelera el ritmo de crecimiento de la producción. A largo plazo, también generará un aumento del *nivel* del capital y de la producción por persona, y no cambiará *la tasa de crecimiento* de la producción.

En la figura 3.5, la economía está inicialmente en el equilibrio del estado estacionario en el punto *C*, en el que el ahorro corresponde exactamente al requisito de inversión. Ahora supongamos que la gente quiere ahorrar una mayor parte de su ingreso, *s′*, en lugar de *s*. Este cambio causa un desplazamiento ascendente del esquema de ahorro hacia la línea punteada.

En el punto *C*, en el que teníamos un equilibrio del estado estacionario, el ahorro aumentó en relación con el requisito de inversión; por consiguiente, se ahorra más de lo que se requiere para mantener constante el capital por persona. Se ahorra suficiente para incrementar el acervo de capital por persona. El acervo de capital por persona, *k*, seguirá en ascenso hasta que llegue al punto *C′*. En él, la cantidad

[13] En el capítulo 4 repasamos la teoría del crecimiento *endógeno*, la cual postula que, a fin de cuentas, es posible que la tasa de ahorro cumpla una función a largo plazo.

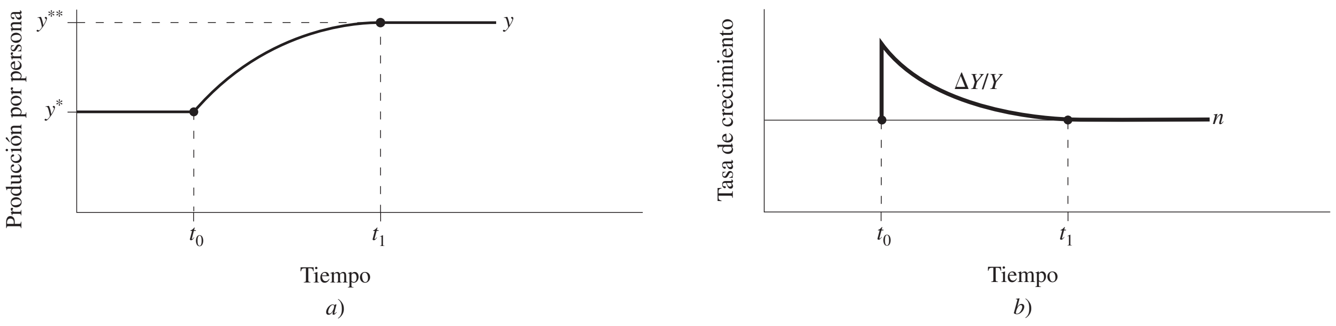

FIGURA 3.6

Ajustes al nuevo estado estacionario.

Las secciones a) y b) muestran el ajuste de la producción y la tasa de crecimiento de la producción después del incremento de la tasa de ahorro representado en la figura 3.5.

mayor de ahorro alcanza exactamente para mantener el acervo de capital más alto. En el punto C' subieron tanto el capital por persona como la producción por persona.

Sin embargo, en este punto la economía regresa a su tasa de crecimiento del estado estacionario, n. Así, de acuerdo con la teoría neoclásica del crecimiento, a largo plazo un aumento de la tasa de ahorro incrementa solo el nivel de la producción y el capital por persona, y no la tasa de crecimiento de la producción por persona.

No obstante, en el proceso de transición, la tasa más elevada de ahorro incrementa la tasa de crecimiento de la producción y la tasa de crecimiento de la producción por persona. Estos aumentos se deducen del hecho de que el nivel de capital a trabajo aumenta de k^* en el estado estacionario inicial a k^{**} en el nuevo estado estacionario. La única manera de incrementar el nivel de capital a trabajo es que el acervo de capital crezca con mayor rapidez que la fuerza de trabajo (y la depreciación).

En la figura 3.6 se resumen los efectos de un incremento de la tasa de ahorro, que equiparan el desplazamiento de la figura 3.5. En la figura 3.6*a*) se muestra el nivel de la producción per cápita. A partir de un equilibrio inicial a largo plazo en el tiempo t_0, el incremento de la tasa de ahorro aumenta el ahorro y la inversión, y crecen el acervo de capital por persona, lo mismo que la producción por persona. El proceso continúa a un ritmo decreciente. En la figura 3.6*b*) se muestra la tasa de crecimiento de la producción; en la sección *a*) se grafica la tasa de crecimiento del nivel de producción. El aumento de la tasa de ahorro eleva inmediatamente la tasa de crecimiento de la producción, porque implica un crecimiento más acelerado del capital y, por consiguiente, de la producción. A medida que el capital se acumula, la tasa de crecimiento disminuye y regresa al nivel del crecimiento demográfico.

3.4 ¿Qué más sabemos?

¿Es beneficioso un ingreso elevado? La regla de oro

Aunque parezca una pregunta extraña, recuerde que nos interesa un ingreso elevado porque aumenta el consumo. Cuanto más elevada sea la tasa de ahorro elegida por una sociedad, mayor será el capital e ingreso del estado estacionario. Pero cuanto mayor es k, más grande es la inversión necesaria solo para mantener el nivel de capital a trabajo, a diferencia de destinarlo al consumo actual. Por consiguiente, una tasa de ahorro demasiado elevada puede significar un ingreso alto, pero un consumo bajo.

El consumo del estado estacionario, c^*, equivale al ingreso del estado estacionario, $y^* = f(k^*)$, menos la inversión del estado estacionario, $(n + d)k^*$:

$$c^* = f(k^*) - (n + d)k^*$$

El consumo del estado estacionario es máximo en el punto en que un incremento marginal del capital genera suficiente producción adicional para cubrir el aumento del requisito de inversión $MPK(k^{**}) = (n + d)$. El capital k^{**}, el *acervo de capital de la regla de oro*, corresponde al mayor nivel de consumo sostenible permanentemente, el nivel en el que podemos "hacer a las generaciones venideras lo que hubiéramos querido que nos hicieran las generaciones anteriores". Sobre el nivel de la regla de oro, podemos reducir más el ahorro y el consumo ahora o más adelante. Debajo de este nivel, podemos aumentar el consumo futuro solo si tomamos la decisión de consumir menos hoy. Las pruebas empíricas apuntan a que hay un nivel de ahorro inferior al de la regla de oro.

Crecimiento demográfico

La exposición anterior sobre el ahorro y la influencia de la tasa de ahorro en el capital y la producción del estado estacionario facilita comentar los efectos del crecimiento demográfico. Un aumento de esta tasa afecta la línea $(n + d)k$ del diagrama, de modo que rota hacia arriba y hacia la izquierda. En los problemas que aparecen al final del capítulo le pediremos que muestre los siguientes resultados:

- Un aumento de la tasa de crecimiento demográfico *reduce* el *nivel* del estado estacionario del capital por persona, k, y la producción por persona, y.
- Un aumento en la tasa de crecimiento demográfico *incrementa* la tasa de crecimiento de la producción *agregada* en el estado estacionario.

Esta mengua en la producción por persona como consecuencia del mayor crecimiento demográfico señala el problema que enfrentan muchos países pobres, como veremos en el capítulo 4.

Crecimiento con cambio tecnológico exógeno

En la figura 3.2 y su análisis, se establece a $\Delta A/A = 0$ como la simplificación para entender el comportamiento en el estado estacionario, pero este recurso eliminó la parte del crecimiento a largo plazo de la teoría del crecimiento. En otras palabras, la teoría, hasta este punto, dice que el PIB per cápita es constante en cuanto la economía alcanza el estado estacionario. Sin embargo, sabemos que la economía crece. Al aceptar que la tecnología avanza con el tiempo, es decir, $\Delta A/A > 0$, reinsertamos el crecimiento en el PIB per cápita.

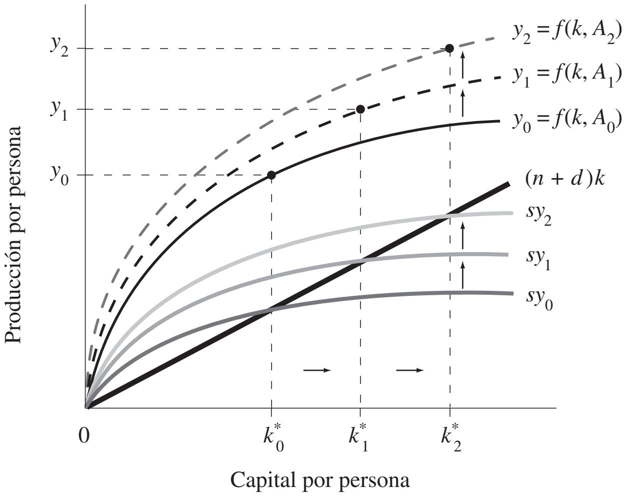

FIGURA 3.7
Cambio tecnológico exógeno.
Un aumento exógeno de la tecnología provoca que la función de producción y la curva del ahorro se eleven. El resultado es un nuevo punto estable con una mayor producción per cápita y mayor nivel de capital a trabajo. Por ello, los aumentos tecnológicos dan por resultado, con el paso del tiempo, un crecimiento de la producción.

La función de producción de la figura 3.2 puede considerarse una foto fija de $y = Af(k)$, tomada en un año en el que A se normaliza en 1. Si la tecnología crece 1% por año, una foto instantánea realizada al año siguiente será $y = 1.01\, f(k)$; dos años después, $y = (1.01)^2 f(k)$, etc. En general, si la tasa de crecimiento se define como $g = \Delta A/A$, la función de producción se incrementa en un porcentaje g cada año, como se muestra en la figura 3.7. La función del ahorro crece de manera paralela. Como resultado, en equilibrio de crecimiento, y y k aumentan con el paso del tiempo.

El parámetro tecnológico A puede entrar en la función de producción en varios lugares. En el caso del análisis matemático, en general, se piensa que la tecnología *impacta exclusivamente al factor trabajo*, de modo que la función de producción puede escribirse como $y = F(K, AN)$ (que "impacta al trabajo" significa que la tecnología nueva incrementa la productividad de los trabajadores). Según esta formulación, la ecuación (4) se modifica para $\Delta y/y = \theta \times \Delta k/k + (1 - \theta) \times \Delta A/A$. En equilibrio de crecimiento, y y k aumentan al ritmo del progreso tecnológico, g (Y y K crecen al ritmo del crecimiento tecnológico más la tasa de crecimiento demográfico, $g + n$). En este modelo, los salarios reales también se incrementan a una tasa g.

3.5 ¿Qué más sabemos?

Función de producción Cobb-Douglas con progreso técnico que impacta exclusivamente al factor trabajo

Cuando incorporamos el progreso técnico que impacta al trabajo en la función de producción Cobb-Douglas, obtenemos la función de producción

$$Y = K^{\theta}(AN)^{1-\theta} = A^{1-\theta}K^{\theta}N^{1-\theta}$$

Observe que el principal factor, A, tiene ahora un exponente de $1 - \theta$, en lugar de un exponente implícito de 1. Esto corresponde a la modificación de la ecuación (4) del texto, para incluir $(1 - \theta) \times \Delta A/A$ en lugar de $\Delta A/A$.

Podemos estimar la tasa de progreso técnico en Estados Unidos durante la posguerra con los datos de la tabla 3.1 y la fórmula

$$g \approx (\Delta y/y - \theta \times \Delta k/k)/(1 - \theta) \tag{4'}$$

A partir de la primera línea de la tabla 3.1, podemos calcular $g \approx (2.42 - 0.25 \times 2.48)/(0.75) = 2.40$. Debido a que el crecimiento de la tecnología, del PIB y del capital per cápita es aproximadamente el mismo, los datos indican que Estados Unidos llegó a un estado estacionario (las cifras deben ser todas iguales a g). El supuesto de que la economía se encontraba en estado estacionario no funciona tan bien en el segundo periodo de posguerra, pues el crecimiento del capital es notablemente mayor que el crecimiento del PIB.

El segundo lugar preferido para insertar la tecnología en la función de producción es, como vimos al comienzo del capítulo, justo al comienzo: $Y = AF(K, N)$. Escrito de esta manera, A se llama *productividad total de los factores*, porque aumenta todos los factores, no solo el trabajo. Aquí, la ecuación (4) funciona como se había especificado, así que $g \approx (\Delta y/y - \theta \times \Delta k/k)$ [la diferencia entre las ecuaciones (4) y (4′) es, en realidad, una diferencia de unidades de medida]. Especificado de esta manera, g se llama *residuo de Solow*, lo que indica que la productividad total de los factores mide todas las fluctuaciones de la producción que no podemos explicar como cambios de los factores.

Volvamos a la figura 3.1. Utilizamos la teoría del crecimiento para explicar la prolongada tendencia ascendente del nivel de vida en Estados Unidos (progreso técnico y acumulación de capital físico y humano), la convergencia del nivel de vida de Japón y Estados Unidos (acumulación de capital de transición y transferencia de tecnología) y la racha de crecimiento de Noruega (el petróleo).

Recapitulación

La teoría neoclásica del crecimiento ofrece cuatro resultados fundamentales:

- Primero, la tasa de crecimiento de producción del estado estacionario es exógena; en este caso, es igual a la tasa de crecimiento demográfico, n, por lo tanto, es independiente de la tasa de ahorro, s.
- Segundo, aunque un incremento de la tasa de ahorro no afecta la tasa de crecimiento del estado estacionario, sí logra aumentar el *nivel* del estado estacionario del ingreso porque incrementa la razón de capital a trabajo.
- Tercero, si incluimos el crecimiento de la productividad, podemos demostrar que, si hay un estado estacionario, en dicho estado la tasa de crecimiento de la producción permanece exógena. La tasa del ingreso per cápita en el estado estacionario se determina mediante la tasa del progreso técnico. La tasa de crecimiento en el estado estacionario de la producción agregada es la suma de la tasa del progreso tecnológico y de la tasa de crecimiento demográfico.
- La última predicción de la teoría neoclásica es la *convergencia*. Si dos países tienen la misma tasa de crecimiento demográfico, la misma tasa de ahorro y acceso a la misma función de producción, con el tiempo llegarán al mismo nivel de ingreso. En este contexto, los países pobres son pobres porque tienen menos capital, pero si tienen la misma tasa de ahorro de los países ricos y tienen acceso a la misma tecnología, con el tiempo los alcanzarán.

Además, si los países tienen diferentes tasas de ahorro, según esta teoría neoclásica simplificada, alcanzarán *niveles* de ingreso diferentes en el estado estacionario; pero si sus ritmos de avance tecnológico y de crecimiento demográfico son equivalentes, sus tasas de crecimiento en el estado estacionario serán las mismas (no obstante, mejor lea el capítulo siguiente).

Resumen

1. La teoría neoclásica del crecimiento explica el crecimiento de la producción como función del aumento de los factores, en particular, capital y trabajo. La importancia relativa de cada insumo depende de su participación.
2. El factor trabajo es el insumo más importante.
3. El crecimiento a largo plazo es resultado de avances de la tecnología.
4. Sin adelantos tecnológicos, la producción por persona terminará por convergir en un valor del estado estacionario. La producción por persona del estado estacionario depende positivamente de la tasa de ahorro y negativamente de la tasa de crecimiento demográfico.
5. La tasa de crecimiento a largo plazo no depende de la tasa de ahorro.

Términos claves

- capital humano
- consumo
- contabilidad del crecimiento
- convergencia
- ecuación de la contabilidad del crecimiento
- equilibrio del estado estacionario
- función de producción
- función de producción Cobb-Douglas
- PIB per cápita
- productividad total de los factores (PTF)
- producto marginal decreciente
- producto marginal del capital (MPK)
- producto marginal del trabajo (MPL)
- nivel de capital a trabajo
- regla de oro del acervo de capital
- residuo de Solow
- tecnología que aumenta el trabajo
- teoría del crecimiento
- teoría neoclásica del crecimiento

Problemas

Conceptuales

1. ¿Qué información proporciona una función de producción?
2. ¿El modelo de Solow explica el fenómeno de convergencia?
3. Considere una función de producción que omita el acervo de recursos naturales. ¿Cuándo tendría consecuencias graves esta omisión?
4. Si en el contexto de una función de producción cualquiera, $Y = F(K, N)$, en la que K representa el capital físico y N el trabajo, ¿cometeríamos un error si interpretáramos el residuo de Solow ($\Delta A/A$) como "progreso tecnológico"? ¿Qué otra cosa podría ser este residuo, además del progreso tecnológico? ¿Cómo ampliaría el modelo para eliminar este problema?
5. La figura 3.4 es una ilustración básica del modelo de crecimiento de Solow. Interprételo, pero tenga cuidado de explicar el significado de las líneas de ahorro y requisito de inversión. ¿Por qué se presenta el estado estacionario donde estas líneas se cruzan?
6. ¿Qué factores determinan la tasa de crecimiento de la producción per cápita del estado estacionario? ¿Hay otros factores que pueden afectar la tasa de crecimiento de la producción *a corto plazo*?
7. Desde mediados de la década de 1990, la economía estadounidense ha mostrado un aumento de la productividad laboral, dado por Y/N. ¿Cuáles son las posibles explicaciones que ofrece la ecuación (2) de este auge?

Técnicos

1. En un escenario simple, con solo dos factores de producción, suponga que la participación del capital en el ingreso es de 0.4, y la participación del trabajo, 0.6; además, que las tasas anualizadas de crecimiento del capital y el trabajo son de 6 y 2%, respectivamente. Suponga que no hay cambios tecnológicos.
   a) ¿A qué tasa crece la producción?
   b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la producción?
   c) Ahora suponga que la tecnología se acrecienta a un ritmo de 2%. Vuelva a calcular las respuestas ***a***) y ***b***).
2. Considere que la producción aumenta 3% anual y que las participaciones del capital y de trabajo en el ingreso son de 0.3 y 0.7, respectivamente.
   a) Si el trabajo y el capital crecen a una tasa de 1%, ¿cuál tendría que ser la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores?
   b) ¿Qué pasaría si el trabajo y el acervo de capital fueran fijos?
3. Piense que la participación del capital en el ingreso y el trabajo es de 0.3 y 0.7, respectivamente.
   a) ¿Cuál sería el efecto (sobre la producción) de aumentar 10% el acervo de capital?
   b) ¿Cuál sería el efecto de incrementar 10% la planta de trabajadores?
   c) Si el aumento del trabajo se debiera íntegramente al crecimiento demográfico, ¿el incremento resultante de la producción tendría efecto en el bienestar de las personas?
   d) ¿Qué pasaría si el incremento del trabajo se debiera, más a la llegada de mujeres a la fuerza de trabajo que al crecimiento demográfico?
4. Imagine que un terremoto destruye una cuarta parte del acervo de capital. Comente el proceso de ajuste de la economía y demuestre con la figura 3.5 lo que ocurre con el crecimiento a corto y a largo plazos.
5. Suponga que aumenta la tasa de crecimiento demográfico.
   a) Muestre gráficamente cómo este incremento afecta la tasa de crecimiento de la producción per cápita y de la producción total en el corto y el largo plazos. (*Sugerencia:* haga un diagrama como la figura 3.5).
   b) Grafique las trayectorias temporales del ingreso per cápita y el acervo de capital per cápita siguientes al cambio. (*Sugerencia:* haga un diagrama como la figura 3.6).
6. Considere la función de producción de la forma $Y = AF(K, N, Z)$, en la que Z es una medida de los recursos naturales usados en la producción. Suponga que esta función de producción tiene rendimientos constantes a escala, pero que cada factor muestra rendimientos decrecientes.
   a) ¿Qué sucederá con la producción por persona si el capital y el trabajo crecen, pero Z no cambia?
   b) Regrese a ***a***), pero agregue el progreso técnico (crecimiento de A).
   c) En la década de 1970 existía el temor de que nos estuviéramos quedando sin recursos naturales y de que esto, posteriormente, limitaría el crecimiento. Comente esta opinión con sus respuestas en ***a***) y ***b***).

7. Considere la siguiente función de producción: $Y = K^{0.5}(AN)^{0.5}$, en la que tanto la población como la planta de trabajadores aumentan a una tasa $n = 0.07$, el acervo de capital se deprecian a una tasa $d = 0.03$ y A se normaliza en 1.

   a) ¿Cuál es la participación del capital y del trabajo en el ingreso?
   b) ¿Cuál es la forma de esta función de producción?
   c) Encuentre los valores del estado estacionario de k y y cuando $s = 0.20$.
   d) ¿A qué tasa el crecimiento de la producción per cápita se encuentra en el estado estacionario? ¿A qué tasa crece la producción total? ¿Qué sucede si la productividad total de los factores aumenta a una tasa de 2% anual ($g = 0.02$)?

8. Suponga que el nivel de tecnología es constante. Luego, alcanza un nivel constante más elevado.

   a) ¿Qué efecto tiene este salto tecnológico en la producción por persona, si se mantiene constante el nivel de capital a trabajo?
   b) Muestre el nuevo equilibrio del estado estacionario. ¿Qué sucedió con el ahorro per cápita y el nivel de capital a trabajo? ¿Qué ocurrió con la producción per cápita?
   c) Trace una gráfica del tiempo de ajuste para llegar a un nuevo estado estacionario. ¿La inversión aumenta durante la transición? Si aumenta, ¿se trata de un efecto temporal?

***9.** En una función de la producción Cobb-Douglas $Y = AK^{\theta}N^{(1-\theta)}$, verifique que $(1 - \theta$ es la proporción del trabajo en el ingreso. [*Sugerencia:* la proporción del trabajo en el ingreso es la fracción del ingreso que es resultado de ese trabajo ($MPL \times N$) dividido entre el ingreso total].

10. Considere una economía en la que la producción se caracteriza por la función neoclásica $Y = K^{0.5}N^{0.5}$. Suponga que tiene una tasa de ahorro de 0.1, una tasa de crecimiento demográfico de 0.02 y una tasa promedio de depreciación de 0.03.

   a) Escriba la función de producción per cápita y encuentre los valores del estado estacionario de k y y.
   b) En el valor del estado estacionario de k, ¿hay más o menos capital que en el nivel de la regla de oro?
   c) Determine qué tasa de ahorro arrojaría el nivel de la regla de oro del capital en este modelo.
   d) En el contexto de este modelo neoclásico de crecimiento, ¿es posible que un país ahorre *en demasía*?

* Un asterisco denota un problema más difícil.

Empíricos

1. Conéctese a http://research.org/fred2 y descargue los datos de la población estadounidense y el empleo total en servicios educativos y de salud en la década de 2002 a 2012. Para realizar esta tarea, haga clic en “Categories”, sección de población, empleo y mercados (“Population, Employment & Labor Markets”. Seleccione “Population” para obtener los datos de la población (“POP”) y “Current Employment Statistics (Establishment Survey)” para los datos de servicios educativos y de salud (“USEHS”). Cuando haya descargado los datos en una hoja de cálculo, determine el promedio de la tasa de crecimiento demográfico de Estados Unidos y el empleo total en servicios educativos durante la década de 2002 a 2012. En igualdad de circunstancias, ¿qué se deduce sobre la calidad promedio de los trabajadores estadounidenses? ¿Tendría implicaciones sobre las perspectivas del crecimiento futuro de este país?

2. Ingrese a http://research.org/fred2, haga clic en “Categories”, y en la sección de población, empleo y mercados (“Population, Employment & Labor Markets”). Seleccione “Current Employment Statistics (Establishment Survey)” y luego el apartado de información (“USINFO”). Con las posibilidades que se ofrecen para trazar gráficas, repase la evolución de las cifras de empleo en los últimos 20 años. ¿Qué hecho podría considerarse para explicar el aumento del valor de la producción de la tecnología de la información en la década de 1990? ¿Qué opina de la disminución del empleo en el siglo XXI?

Apéndice

En este apéndice se muestra brevemente cómo se calcula la ecuación fundamental del crecimiento [en este capítulo, la ecuación (2)]. Comenzamos con la función de producción $Y = AF(K, N)$ y preguntamos cuánto cambia la producción si el trabajo cambia ΔN, el capital cambia ΔK y la tecnología cambia ΔA. El cambio de la producción será:

$$\Delta Y = MPL \times \Delta N + MPK \times \Delta K + F(K, N) \times \Delta A \tag{A1}$$

donde MPL y MPK son los productos marginales del trabajo y el capital, respectivamente. Si dividimos los dos lados de la ecuación entre $Y = AF(K, N)$ y simplificamos, tenemos:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{MPL}{Y}\Delta N + \frac{MPK}{Y}\Delta K + \frac{\Delta A}{A} \tag{A2}$$

Ahora, multiplicamos y dividimos el primer término entre N y el segundo entre K:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left(\frac{MPL \times N}{Y}\right)\frac{\Delta N}{N} + \left(\frac{MPK \times K}{Y}\right)\frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta A}{A} \tag{A3}$$

Estas transformaciones siguen las reglas de las matemáticas. Con el objetivo de obtener lo que falta para llegar a la ecuación (2), tenemos que postular un supuesto sólido y razonable: que la economía es *competitiva.*

En una economía competitiva, los factores pagan sus productos marginales. Así, $MPL = w$, donde w es el salario real. El pago total del trabajo es la tasa salarial multiplicada por el monto del trabajo, $w \times N$; el pago total del trabajo como fracción de todos los pagos (es decir, la "participación del trabajo") es $MPL \times N/Y$ (el argumento del capital es semejante). Ahora sustituimos ($1 - \theta \equiv$ participación del trabajo de $MPL \times N/Y$ y $\theta \equiv$ participación del capital de $MPK \times K/Y$ en la ecuación (A3) para llegar a la ecuación (2):

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Delta Y/Y & = & [(1-\theta) & \times & \Delta N/N] & + & (\theta & \times & \Delta K/K) & + & \Delta A/A \\ \begin{matrix}\text{Crecimiento de}\\ \text{la producción}\end{matrix} & = & \left(\begin{matrix}\text{participación}\\ \text{de trabajo}\end{matrix}\right. & \times & \left.\begin{matrix}\text{crecimiento}\\ \text{de trabajo}\end{matrix}\right) & + & \left(\begin{matrix}\text{participación}\\ \text{del capital}\end{matrix}\right. & \times & \left.\begin{matrix}\text{crecimiento}\\ \text{del capital}\end{matrix}\right) & + & \begin{matrix}\text{progreso}\\ \text{técnico}\end{matrix} \end{array}$$

A3.1 ¿Qué más sabemos?

Seguimos con la función Cobb-Douglas

La frase "rendimientos constantes a escala" (RCAE) significa que si todos los factores aumentan en la misma proporción, la producción se incrementa en igual proporción. Matemáticamente, si multiplicamos los dos insumos por una constante, c, la producción también se multiplica por c: $AF(cK, cN) = cAF(K, N) = cY$. Los RCAE son un supuesto creíble, en virtud del argumento de la repetición: si una fábrica que tiene X trabajadores genera una producción Y, entonces dos fábricas que tengan X trabajadores causarán una producción de $2Y$, tres fábricas que tengan X trabajadores originarán una producción de $3Y$, etc. Además de este atractivo argumento lógico, las pruebas empíricas señalan también que los rendimientos a escala son aproximadamente constantes.

Para comprobar que Cobb-Douglas tiene rendimientos constantes a escala, multiplicamos K y N por c:

$$\begin{aligned} A(cK)^{\theta}(cN)^{1-\theta} &= A(c^{\theta}K^{\theta})(c^{1-\theta}N^{1-\theta}) = c^{\theta}c^{1-\theta}AK^{\theta}N^{1-\theta} \\ &= c^{\theta+(1-\theta)}Y = cY \end{aligned}$$

Para mostrar que la participación del capital es θ, se multiplica el producto marginal del capital de la sección 3.1 "¿Qué más sabemos?" (que es lo que se paga a una unidad de capital en un mercado competitivo) por el número de unidades de capital y se divide entre la producción total:

$$MPK \times K/Y = (\theta Y/K) \times K/Y = \theta$$

Y, sí, el exponente θ de Cobb-Douglas es el mismo θ que aparece en la ecuación de la contabilidad del crecimiento [la ecuación (2)].