CAPÍTULO
CUATRO

Optimización de la utilidad y elección

En este capítulo se examinará el modelo básico de elección que usan los economistas para explicar el comportamiento de los individuos. Este modelo supone que los individuos se ven restringidos por lo limitado de sus ingresos usando su capacidad de poder de compra para alcanzar la máxima utilidad posible. Es decir, se supone que los individuos actúan como si maximizaran la utilidad sujetos a una restricción presupuestal. Aunque las aplicaciones específicas de este modelo son variadas, como lo demostraremos, todas se basan en el mismo modelo matemático fundamental y todas llegan a la misma conclusión general: para optimizar la utilidad los individuos elegirán conjuntos de bienes cuya tasa marginal de sustitución (*TMS*) es igual a la razón de precios en el mercado de bienes. Los precios de mercado dan información a los individuos sobre costos de oportunidad y esta información desempeña un papel importante en el sentido de que afecta las decisiones realmente tomadas.

Optimización de la utilidad y cálculos relámpago

Antes de iniciar el estudio formal de la teoría de la elección sería apropiado eliminar dos quejas que los no economistas suelen plantear sobre el enfoque que adoptaremos. Primero está el reclamo de que ninguna persona real puede hacer la clase de "cálculos relámpago" que requiere la maximización de la utilidad. De acuerdo con esta queja, al recorrer el pasillo de un supermercado la gente sencillamente toma lo que está disponible sin ningún patrón o propósito real en sus acciones. A los economistas no los convence esta queja. Dudan de que la gente se comporte en forma aleatoria (cada persona, después de todo, está sujeta a algún tipo de restricción presupuestal) y consideran equivocada la acusación sobre los cálculos relámpago. Recordemos de nueva cuenta al jugador de billar de Friedman que se menciona en el capítulo 1. Tampoco este jugador puede hacer los cálculos relámpago que se requieren para planear un tiro de acuerdo con las leyes de la física, pese a lo cual dichas leyes no dejan de predecir el comportamiento del jugador. De igual forma, como veremos, el modelo de optimización de la utilidad predice muchos aspectos del comportamiento aunque nadie lleve integrada una computadora ni tenga programada en ella su función de utilidad. Para ser precisos, los economistas suponen que los individuos se comportan *como si* hicieran tales cálculos; así, el argumento de que es imposible realizar esos cálculos es en gran medida irrelevante. De cualquier modo, en tiempos recientes los economistas han tratado cada vez más de modelizar algunas de las complicaciones conductuales que surgen en las decisiones reales que toman los individuos. Estudiaremos algunas de esas complejidades en diversos problemas de este libro.

Altruismo y egoísmo

El segundo reclamo en contra de nuestro modelo de elección es que parece extremadamente egoísta; nadie, según esta queja, tiene objetivos tan exclusivamente egocéntricos. Pese a que probablemente los economistas están dispuestos a aceptar el interés propio como una fuerza motivadora más que otros pensadores más utópicos (Adam Smith observó: "No nos inclinamos a sospechar que alguien padezca deficiencia de egoísmo"),[1] esta acusación también es errónea. Nada en el modelo de optimización de la utilidad impide a los individuos derivar satisfacción de la filantropía, o de "hacer el bien" en general. También es posible suponer que estas actividades ofrecen utilidad. En efecto, los economistas han aplicado extensamente el modelo de optimización de la utilidad para estudiar asuntos como las donaciones de tiempo y dinero a la beneficencia, dejar legados a niños o, incluso, donar sangre. Uno no necesita asumir una posición acerca de si tales actividades son egoístas o desinteresadas, porque los economistas dudan de que los individuos las emprenderían si fueran contrarias a sus mejores intereses, ampliamente concebidos.

SONDEO INICIAL

Los resultados generales de nuestro examen de la optimización de la utilidad pueden enunciarse sucintamente como sigue.

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Optimización de la utilidad. Para optimizar la utilidad, dado un ingreso fijo para gastar, un individuo comprará las cantidades de bienes que agoten su ingreso total y para las cuales la tasa marginal de sustitución entre dos bienes cualesquiera (*TMS*) es igual a la tasa en la cual los bienes pueden intercambiarse entre sí en el mercado.

Obviamente, para la optimización de la utilidad se requiere gastar todo el ingreso individual. Dado que los bienes adicionales brindan utilidad adicional (no hay saciedad), y dado que no existe ningún otro uso para el ingreso, dejar una parte sin gastar impide optimizar la utilidad. Sin embargo, derrochar el dinero no es una actividad optimizadora de la utilidad.

La condición que especifica la igualdad de la tasa marginal de sustitución requiere un poco más de explicación. Puesto que la tasa a la que un bien puede ser intercambiado por otro en el mercado está dada por la razón de los precios de ambos; este resultado puede reformularse diciendo que el individuo igualará la *TMS* (de x por y) con la razón del precio de x respecto al precio de y (p_x/p_y). Esta igualación de una tasa marginal de sustitución personal con una razón de precio determinada por el mercado es un resultado común a todos los problemas de optimización de la utilidad individual (y a muchos otros tipos de problemas de optimización). Lo cual ocurrirá una y otra vez en este texto.

Ilustración numérica

Para ver el razonamiento intuitivo detrás de este resultado supongamos que no es real que un individuo iguala la *TMS* con la razón de los precios de los bienes; específicamente, que la *TMS* del individuo es igual a 1 y que está dispuesto a intercambiar 1 unidad de x por 1 unidad de y, y permanecer en condiciones igualmente buenas. Supongamos, asimismo, que el precio de x es de 2 dólares por unidad y el de y de 1 dólar por unidad. Es fácil demostrar que esta persona podría estar en mejores condiciones. Supongamos que reduce el consumo de x en 1 unidad y que la intercambia en el mercado por 2 unidades de y. Sólo 1 unidad adicional de y sería necesaria para mantener a esta persona tan satisfecha como antes del intercambio; la segunda unidad de y es una adición neta al bienestar. Así, el gasto de este individuo no podría haberse distribuido óptimamente en primer término. Cada vez que la *TMS* y la razón de precio p_x/p_y difieran puede usarse un método similar de razonamiento. La condición para una utilidad óptima debe ser la igualdad de estas dos magnitudes.

[1] Adam Smith, *The Theory of Moral Sentiments* (1759, reimpresión, Arlington House, New Rochelle, Nueva York, 1969), p. 446.

EL CASO DE DOS BIENES: ANÁLISIS GRÁFICO

Esta argumentación parece eminentemente razonable, pero apenas si podría llamársele prueba. Más bien, ahora debemos demostrar el resultado en forma rigurosa y, al mismo tiempo, ilustrar otros importantes atributos del proceso de optimización. Primero realizaremos un análisis gráfico; luego adoptaremos un enfoque más matemático.

Restricción presupuestal

Supongamos que el individuo tiene I dólares por distribuir entre el bien x y el bien y. Si p_x es el precio del bien x y p_y el precio del bien y, el individuo está restringido por

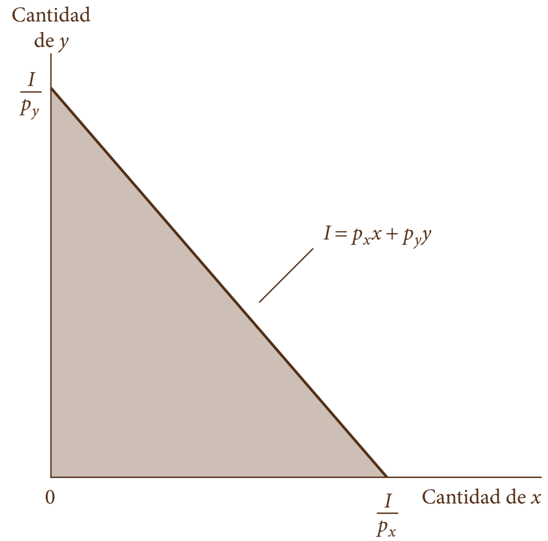
$$p_x x + p_y y \leq I. \tag{4.1}$$

Es decir, en los dos bienes en cuestión no es posible gastar más de I. Esta restricción presupuestal se muestra gráficamente en la figura 4.1. Esta persona sólo puede permitirse elegir combinaciones de x y y en el triángulo sombreado de la figura. Si todo I se gasta en el bien x, esto comprará I/p_x unidades de x. De igual manera, si todo se gasta en y, esto comprará I/p_y unidades de y. Es fácil ver que la pendiente de la restricción es $-p_x/p_y$. Esta pendiente muestra cómo puede intercambiarse y por x en el mercado. Si $p_x = 2$ y $p_y = 1$, entonces 2 unidades de y se intercambiarán por 1 unidad de x.

FIGURA 4.1

Restricción presupuestal del individuo para dos bienes.

Las combinaciones de x y y que el individuo se puede permitir aparecen dentro del triángulo sombreado. Si, como suele suponerse, el individuo prefiere más que menos de cada bien, el límite exterior de este triángulo es la restricción relevante donde todos los fondos disponibles se gastan en x o y. La pendiente de este límite en línea recta está dada por $-p_x/p_y$.



Condiciones de primer orden para un óptimo

Esta restricción presupuestal puede imponerse al mapa de curvas de indiferencia del individuo para mostrar el proceso de optimización de la utilidad. La figura 4.2 ilustra este procedimiento. El individuo sería irracional si eligiera un punto como *A*; con sólo gastar más de su ingreso puede llegar a un nivel de utilidad más alto. El supuesto de no saciedad implica que una persona debe gastar la totalidad de su ingreso para recibir una utilidad máxima. De igual forma, reasignando los gastos el individuo puede estar mejor que en el punto *B*. El punto *D* está fuera de cuestión porque el ingreso no es lo bastante grande para adquirir *D*. Resulta claro que la posición de óptima utilidad es el punto *C*, donde se elige la combinación x^*, y^*. Este es el único punto en la curva de indiferencia U_2 que puede comprarse con *I* dólares; no es posible comprar ningún nivel de utilidad más alto. *C* es un punto de tangencia entre la restricción presupuestal y la curva de indiferencia. Así, en *C* tenemos

$$\text{pendiente de la restricción presupuestal} = \frac{-p_x}{p_y} = \text{pendiente de la curva de indiferencia} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U = \text{constante}} \quad \textbf{(4.2)}$$

o

$$\frac{p_x}{p_y} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U = \text{constante}} = TMS \text{ (de } x \text{ por } y) \quad \textbf{(4.3)}$$

FIGURA 4.2

Demostración gráfica de la optimización de la utilidad.

Dada la restricción presupuestal el punto *C* representa el nivel de utilidad más alto que el individuo puede alcanzar. Así, la combinación x^*, y^* es la forma racional en la cual el individuo debe asignar su poder de compra. Sólo para esta combinación de bienes se mantendrán dos condiciones: todos los fondos disponibles se gastarán y la la tasa marginal de sustitución (*TMS*) será igual a la razón de precios a la cual los bienes pueden intercambiarse en el mercado (p_x/p_y).

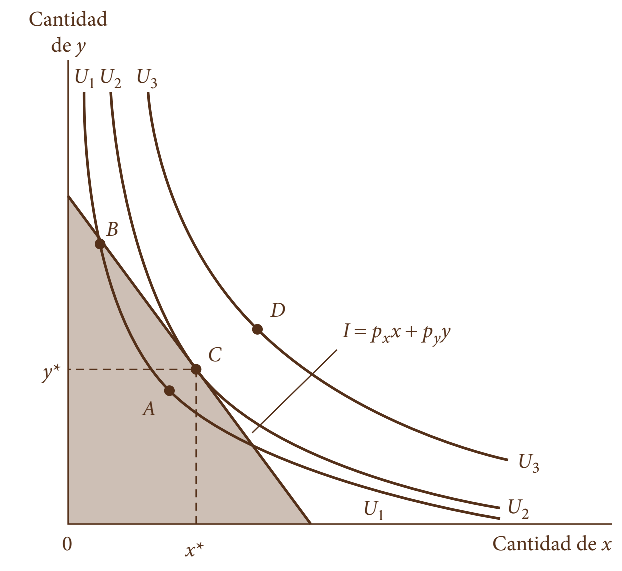
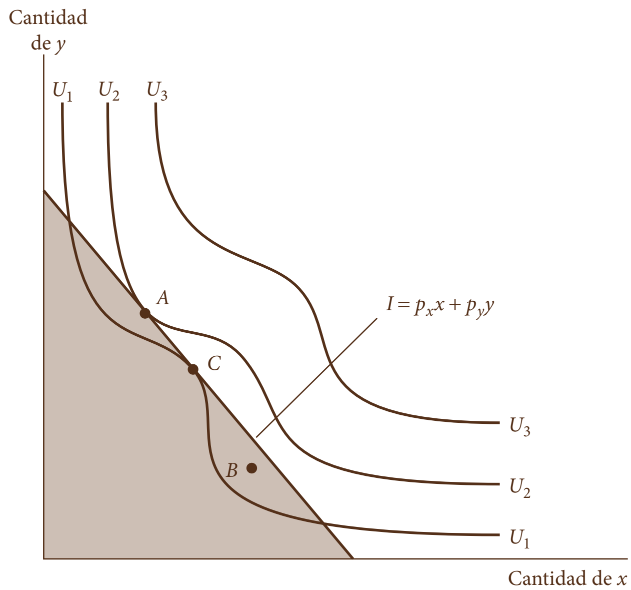


FIGURA 4.3

Ejemplo de mapa de curvas de indiferencia en el que la condición de tangencia no garantiza un óptimo.

Si las curvas de indiferencia no obedecen el supuesto de la *TMS* decreciente, no todos los puntos de tangencia (puntos para los que $TMS - p_x/p_y$) pueden ser verdaderamente puntos de óptima utilidad En este ejemplo el punto de tangencia *C* es inferior a muchos otros puntos que también pueden adquirirse con los fondos disponibles. A fin de que las condiciones necesarias para un óptimo (es decir, las condiciones de tangencia) sean también suficientes, suele suponerse que la *TMS* es decreciente; esto es, que la función de utilidad es estrictamente cuasi cóncava.



Nuestro resultado intuitivo ha quedado comprobado: para un óptimo de utilidad todo el ingreso debe gastarse, y la *TMS* debe ser igual a la razón de los precios de los bienes. Del diagrama se desprende claramente que, si esta condición no se cumple, el individuo podría estar mejor reasignando sus gastos.

Condiciones de segundo orden para un óptimo

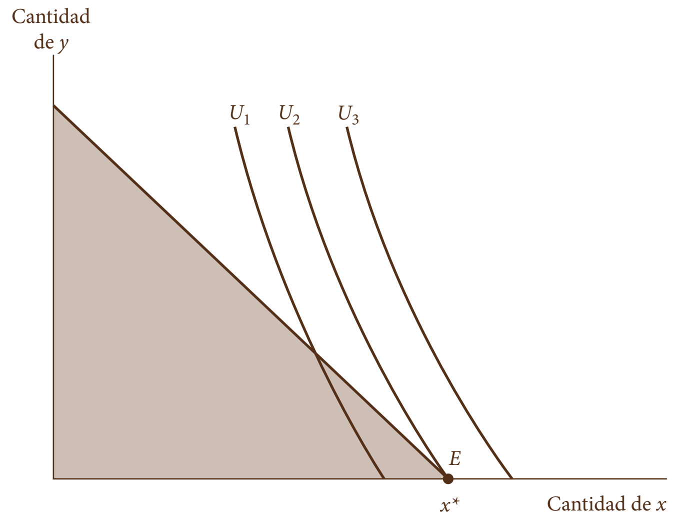
La regla de tangencia es sólo una condición necesaria para un óptimo. Para ver que no es una condición suficiente, consideremos el mapa de curvas de indiferencia que aparece en la figura 4.3. Aquí, un punto de tangencia (*C*) es inferior a un punto de no tangencia (*B*). En efecto, el óptimo verdadero está en otro punto de tangencia (*A*). El hecho de que la condición de tangencia no produzca un óptimo inequívoco puede atribuirse a la forma de las curvas de indiferencia en la figura 4.3. Si las curvas de indiferencia tuvieran la forma de aquellas de la figura 4.2, este problema no emergería. Pero ya se ha demostrado que las curvas de indiferencia de forma "normal" resultan del supuesto de la *TMS* decreciente. Así, si se supone que la *TMS* siempre es decreciente, la condición de tangencia es tanto necesaria como suficiente para un óptimo.[2] Sin este supuesto habría que tener cuidado al aplicar la regla de tangencia.

[2] Como se vio en los capítulos 2 y 3, esto equivale a suponer que la función de utilidad es cuasi cóncava. Puesto que usualmente supondremos cuasi concavidad, las condiciones necesarias para un óptimo de utilidad restringida también serán suficientes.

FIGURA 4.4

Solución de esquina de optimización de la utilidad.

Con las preferencias que muestra este conjunto de curvas de indiferencia, la optimización de utilidad ocurre en E, donde se consumen 0 cantidades del bien y. Las condiciones de primer orden para un óptimo deben modificarse un poco para dar cabida a esta posibilidad.



Soluciones de esquina

El problema de optimización de utilidad que se ilustra en la figura 4.2 resulta en un óptimo "interior", en el que se consumen cantidades positivas de ambos bienes. En algunas situaciones las preferencias de los individuos pueden ser tales que logran obtener un óptimo de utilidad decidiendo no consumir ninguna cantidad de ninguno de los bienes. Si a alguien no le gustan las hamburguesas, no hay razón para asignar ningún ingreso a su compra. Esta posibilidad se refleja en la figura 4.4. Aquí la utilidad se maximiza en E, donde $x = x^*$ y $y = 0$; así, cualquier punto en la restricción presupuestal en el que se consumen cantidades positivas de y produce menor utilidad que el punto E. Nótese que en E la restricción presupuestal no es precisamente tangente a la curva de indiferencia U_2. En cambio, en el punto óptimo la restricción presupuestal es más plana que U_2, lo que indica que la tasa a la que x puede intercambiarse por y en el mercado es menor que la tasa marginal de sustitución del individuo (la *TMS*). A los precios de mercado prevalecientes, el individuo está más que dispuesto a intercambiar y para obtener x extra. Como en este problema es imposible consumir cantidades negativas de y, sin embargo, el límite físico de este proceso es el eje X, a lo largo del cual las compras de y son 0. De ahí que, como se desprende claramente de este análisis, sea necesario enmendar un poco las condiciones de primer orden para un óptimo de utilidad a fin de permitir soluciones de esquina del tipo que se muestra en la figura 4.4. Al continuar con nuestro estudio del caso general de n bienes usaremos las matemáticas del capítulo 2 para mostrar cómo puede cumplirse esto.

EL CASO DE *n* BIENES

Los resultados gráficamente derivados en el caso de dos bienes se trasladan directamente al caso de n bienes. De nueva cuenta es posible demostrar que para un óptimo interior de utilidad, la *TMS* entre dos bienes cualesquiera debe ser igual a la razón de los precios de estos bienes. Para estudiar este caso más general, sin embargo, es mejor usar algunas matemáticas.

Condiciones de primer orden

Con n bienes el objetivo del individuo es optimizar la utilidad de los mismos:

$$\text{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.4}$$

sujeta a la restricción presupuestal[3]

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \tag{4.5}$$

o

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0. \tag{4.6}$$

Siguiendo las técnicas que se desarrollan en el capítulo 2 para optimizar una función sujeta a una restricción establecemos la expresión de Lagrange

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n). \tag{4.7}$$

Igualar a 0 las derivadas parciales de $\mathscr{L}$ (respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y λ) produce $n + 1$ ecuaciones que representan las condiciones necesarias para un óptimo interior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0,\\
&\vdots\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En estas $n + 1$ ecuaciones es posible, en principio, despejar las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ óptimas y λ (véanse los ejemplos 4.1 y 4.2 para comprobar que tal solución es posible).

Las ecuaciones 4.8 son necesarias pero no suficientes para un óptimo. Las condiciones de segundo orden que garantizan un óptimo son relativamente complejas y deben enunciarse en términos matriciales (véanse las extensiones del capítulo 2). Sin embargo, el supuesto de estricta cuasi concavidad (*TMS* decreciente en el caso de dos bienes) es suficiente para garantizar que cualquier punto que obedezca la ecuación 4.8 es, de hecho, un óptimo verdadero.

Implicaciones de las condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden representadas por la ecuación 4.8 pueden reescribirse en varias formas instructivas. Por ejemplo, para dos bienes cualesquiera x_i y x_j tenemos

$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}. \tag{4.9}$$

En el capítulo 3 se demostró que la razón de las utilidades marginales de dos bienes es igual a la tasa marginal de sustitución entre ellos. Así, las condiciones para una distribución óptima del ingreso se convierten en

$$TMS\ (x_i \text{ por } x_j) = \frac{p_i}{p_j}. \tag{4.10}$$

[3] De nuevo, la restricción presupuestal se ha escrito en una igualdad, ya que dado el supuesto de no saciedad resulta claro que el individuo gastará todo el ingreso disponible.

Este es justo el resultado ya gráficamente derivado en este capítulo; para optimizar la utilidad el individuo debe igualar la tasa marginal de sustitución con la razón de precios del mercado.

Interpretación del multiplicador de Lagrange

Otro resultado puede derivarse despejando λ en las ecuaciones 4.8:

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial U/\partial x_n}{p_n} \tag{4.11}$$

Estas ecuaciones establecen que en el punto de optimización de la utilidad cada bien adquirido debe producir la misma utilidad marginal por cada dólar que se haya gastado en el mismo. Así, cada bien debe tener una razón costo (marginal)-beneficio (marginal) idéntica. De no ser así un bien prometería más "disfrute marginal por dólar" que cualquier otro y los fondos no se distribuirían óptimamente.

Aunque se le advierte nuevamente al lector en contra de hablar confiadamente de utilidad marginal, lo que la ecuación 4.11 indica es que un dólar extra debe producir la misma "utilidad adicional" sea cual sea el bien en que se gaste. El valor común de esta utilidad adicional está dado por el multiplicador de Lagrange para la restricción presupuestal del consumidor (es decir, por λ). En consecuencia, λ puede considerarse como la utilidad marginal de un dólar adicional de gasto de consumo (la utilidad marginal del "ingreso").

Una última manera de reescribir las condiciones necesarias para un óptimo es

$$p_i = \frac{\partial U/\partial x_i}{\lambda} \tag{4.12}$$

para cada bien *i* adquirido. Para interpretar esta expresión, recordemos (de la ecuación 4.11) que el multiplicador de Lagrange, λ, representa el valor de la utilidad marginal de un dólar adicional de ingreso, sin importar dónde se gaste. Así, la razón en la ecuación 4.12 compara el valor de la utilidad adicional de una unidad más del bien *i* con este valor común de un dólar marginal en el gasto. Para ser adquirido, el valor de la utilidad de una unidad adicional de un bien debe ser equivalente en términos de dólares al precio que la persona debe pagar por él. Por ejemplo, un precio alto del bien *i* sólo puede justificarse si también brinda gran cantidad de utilidad adicional. En el margen, por tanto, el precio de un bien refleja la disposición de un individuo a pagar una unidad más. Este es un resultado de importancia en la economía aplicada del bienestar porque la disposición a pagar puede inferirse de las reacciones del mercado ante los precios. En el capítulo 5 se verá cómo este discernimiento puede usarse para evaluar los efectos de bienestar de los cambios de precio, y en capítulos posteriores se usará esta idea para analizar diversas cuestiones sobre la eficiencia de la asignación de recursos.

Soluciones de esquina

Las condiciones de primer orden de las ecuaciones 4.8 se mantienen exactamente sólo para los óptimos interiores para los cuales se adquiere alguna cantidad positiva de cada bien. Como se explicó en el capítulo 2, cuando aparecen soluciones de esquina (como las ilustradas en la figura 4.4), las condiciones deben modificarse ligeramente.[4] En este caso, las ecuaciones 4.8 se convierten en

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \le 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.13}$$

[4] Formalmente, estas condiciones se llaman condiciones de *Kuhn-Tucker* para programación no lineal.

y si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i < 0, \tag{4.14}$$

entonces

$$x_i = 0. \tag{4.15}$$

Para interpretar estas condiciones la ecuación 4.14 puede reescribirse como

$$p_i > \frac{\partial U/\partial x_i}{\lambda}. \tag{4.16}$$

De ahí que las condiciones óptimas sean las que ya hemos señalado, excepto que cualquier bien cuyo precio (p_i) exceda su valor marginal para el consumidor no será adquirido ($x_i = 0$). Así, los resultados matemáticos se ajustan a la idea común de que los individuos no adquirirán bienes por los cuales no creen que valga su dinero. Aunque el análisis en este libro no se concentra en las soluciones de esquina, el lector debe considerar tanto las posibilidades de que tales soluciones emerjan como la interpretación económica que puede hacerse de las condiciones óptimas en esos casos.

EJEMPLO 4.1 Funciones de demanda Cobb-Douglas

Como se demostró en el capítulo 3, la función Cobb-Douglas está dada por

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}, \tag{4.17}$$

donde, por conveniencia,[5] se supone que $\alpha + \beta = 1$. Ahora es posible despejar los valores de optimización de utilidad de x y y para cualquier precio (p_x, p_y) e ingreso (I). Establecer la expresión lagrangiana

$$\mathcal{L} = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y) \tag{4.18}$$

produce las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda p_x = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tomar la razón de los dos primeros términos indica que

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}, \tag{4.20}$$

o

$$p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x, \tag{4.21}$$

de donde se desprende la última ecuación, ya que $\alpha + \beta = 1$. La sustitución de esta condición de primer orden de la ecuación 4.21 en la restricción presupuestal da

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = p_x x\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} p_x x; \tag{4.22}$$

[5] Como se explicó en el capítulo 3, los exponentes en la función de utilidad Cobb-Douglas siempre pueden normalizarse para que sumen 1 porque $U^{1/(\alpha+\beta)}$ es una transformación monótona.

despejar x produce

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x}, \tag{4.23}$$

y una serie similar de manipulaciones daría

$$y^* = \frac{\beta I}{p_y}. \tag{4.24}$$

Estos resultados indican que un individuo cuya función de utilidad está dada por la ecuación 4.17, optará siempre por distribuir α proporción de su ingreso a comprar el bien x (es decir, $p_x x/I = \alpha$) y β proporción a comprar el bien y ($p_y y/I = \beta$). Aunque esta característica de la función Cobb-Douglas suele facilitar la resolución de problemas simples, sugiere que esta función tiene límites en su capacidad para explicar el comportamiento real de consumo. Como la parte del ingreso dedicada a bienes particulares suele cambiar significativamente en respuesta a las condiciones económicas cambiantes, un modo funcional más general puede ofrecer discernimientos no aportados por la función Cobb-Douglas. Ilustraremos algunas posibilidades en el ejemplo 4.2, mientras que el tema general de las porciones presupuestales se abordará con mayor detalle en las extensiones de este capítulo.

Ejemplo numérico. Primero, sin embargo, examinemos un ejemplo numérico específico del caso Cobb-Douglas. Supongamos que x se vende a 1 dólar y y a 4 dólares, y que el ingreso total es de 8 dólares. Supongamos entonces, sucintamente, que $p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$; asimismo, que $\alpha = \beta = 0.5$, de tal manera que esta persona divide su ingreso equitativamente entre estos dos bienes. Ahora, las ecuaciones de demanda 4.23 y 4.24 implican que

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha I/p_x = 0.5I/p_x = 0.5(8)/1 = 4, \\ y^* &= \beta I/p_y = 0.5I/p_y = 0.5(8)/4 = 1. \end{aligned} \tag{4.25}$$

y, en estas elecciones óptimas,

$$\text{utilidad} = x^{0.5}y^{0.5} = (4)^{0.5}(1)^{0.5} = 2. \tag{4.26}$$

Obsérvese asimismo que se puede calcular el valor del multiplicador de Lagrange asociado con esta asignación del ingreso, usando la ecuación 4.19:

$$\lambda = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}/p_x = 0.5(4)^{-0.5}(1)^{0.5}/1 = 0.25. \tag{4.27}$$

Este valor implica que cada variación en el ingreso incrementará la utilidad en aproximadamente un cuarto de esa cantidad. Supongamos, por ejemplo, que esta persona 1 por ciento más ingreso ($8.08). En este caso elegiría $x = 4.04$ y $y = 1.01$, y la utilidad sería $4.04^{0.5} \cdot 1.01^{0.5} = 2.02$. De ahí que un incremento de $0.08 en el ingreso aumente la utilidad en 0.02, tal como lo predijo el hecho de que $\lambda = 0.25$.

PREGUNTA: ¿Afectaría un cambio en p_y en la cantidad de x demandada en la ecuación 4.23? Explica tu respuesta matemáticamente. Desarrolla también una explicación intuitiva basada en la noción de que la parte del ingreso dedicada al bien y está dada por el parámetro de la función de utilidad, β.

EJEMPLO 4.2 Demanda ESC

Examinemos tres ejemplos específicos de la función ESC para ilustrar casos en los que las porciones presupuestales responden a las circunstancias económicas.

Caso 1: $\delta = 0.5$. En este caso, la utilidad es

$$U(x, y) = x^{0.5} + y^{0.5}. \tag{4.28}$$

Establecer la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = x^{0.5} + y^{0.5} + \lambda(I - p_x x - p_y y) \tag{4.29}$$

produce las siguientes condiciones de primer orden para un óptimo:

$$\begin{aligned} \partial\mathscr{L}/\partial x &= 0.5x^{-0.5} - \lambda p_x = 0, \\ \partial\mathscr{L}/\partial y &= 0.5y^{-0.5} - \lambda p_y = 0, \\ \partial\mathscr{L}/\partial \lambda &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

La división de las dos primeras muestra que

$$(y/x)^{0.5} = p_x/p_y. \tag{4.31}$$

Al sustituir esto en la restricción presupuestal y mediante una manipulación algebraica un poco complicada podemos derivar las funciones de demanda asociadas con esta función de utilidad:

$$x^* = I/p_x\,[1 + (p_x/p_y)], \tag{4.32}$$

$$y^* = I/p_y\,[1 + (p_x/p_y)]. \tag{4.33}$$

Sensibilidad ante la variación en los precios. En estas funciones de demanda nótese que la parte del ingreso gastada en, digamos, el bien x —es decir, $p_x x/I = 1/[1 + (p_x/p_y)]$— no es una constante; depende de la razón del precio p_x/p_y. Cuanto mayor sea el precio relativo de x menor será la parte del ingreso gastada en ese bien. En otras palabras, la demanda de x es tan sensible a su propio precio que un aumento en este reduce el gasto total en x. También puede ilustrarse que la demanda de x es sensible al precio, comparando el exponente contenido en p_x en la función de demanda dada por la ecuación 4.32 (-2) con el exponente de la ecuación 4.23 (-1). En el capítulo 5 se analizará con mayor profundidad esta observación al examinar en detalle el concepto de elasticidad.

Caso 2: $\delta = -1$. Examinemos de manera alterna una función de demanda con menos sustituibilidad[6] que la Cobb-Douglas. Si $\delta = -1$, la función de utilidad está dada por

$$U(x, y) = -x^{-1} - y^{-1}, \tag{4.34}$$

y es fácil demostrar que las condiciones de primer orden para un óptimo requieren

$$y/x = (p_x/p_y)^{0.5}. \tag{4.35}$$

Nuevamente, la sustitución de esta condición en la restricción presupuestal, junto con un poco de álgebra algo complicada, produce las funciones de demanda

$$\begin{aligned} x^* &= I/p_x\,[1 + (p_y/p_x)^{0.5}], \\ y^* &= I/p_y\,[1 + (p_x/p_y)^{0.5}]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Que estas funciones de demanda son menos sensibles al precio puede verse de dos maneras. Primero: ahora la parte del ingreso que se gastó en el bien x —esto es, $p_x x/I = 1/[1 + (p_y/p_x)^{0.5}]$— responde positivamente a incrementos en p_x. Al aumentar el precio de x este individuo reduce sólo modestamente su consumo del bien x; así, el gasto total en ese bien se incrementa. Que las funciones de demanda en la ecuación 4.36 son menos sensibles al precio que las de la función Cobb-Douglas también se ilustra mediante los relativamente reducidos exponentes implicados del precio de cada bien (-0.5).

[6] Una manera de medir la sustituibilidad es con la elasticidad de sustitución, la cual para la función ESC está dada por $\sigma = 1/(1 = \delta)$. Aquí, $\delta = 0.5$ implica que $\sigma = 2$, $\delta = 0$ (la función Cobb-Douglas) implica que $\sigma = 1$, y $\delta = -1$ implica que $\sigma = 0.5$. Véase también el análisis de la función ESC en relación con la teoría de la producción en el capítulo 9.

Caso 3: $\delta = -\infty$. Este es el importante caso en el que x y y deben consumirse en proporciones fijas. Supongamos, por ejemplo, que cada unidad de y debe ser consumida junto con exactamente 4 unidades de x. La función de utilidad que representa esta situación es

$$U(x, y) = \min(x, 4y). \tag{4.37}$$

En esta situación para optimizar la utilidad un individuo sólo elegirá combinaciones de ambos bienes para las cuales $x = 4y$; es decir, la optimización de utilidad implica que esta persona elegirá estar en un vértice de sus curvas de indiferencia en forma de L. Debido a la forma de estas curvas de indiferencia para resolver este problema no se puede usar el cálculo. En cambio, sí es posible adoptar el procedimiento simple de sustituir directamente la condición de optimización de la utilidad en la restricción presupuestal:

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{x}{4} = (p_x + 0.25p_y)x. \tag{4.38}$$

De ahí que

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}, \tag{4.39}$$

y sustituciones similares, producen

$$y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}. \tag{4.40}$$

En este caso la porción del presupuesto de una persona dedicada a, digamos, el bien x aumenta rápidamente al incrementarse el precio de x porque x y y deben consumirse en proporciones fijas. Por ejemplo, si se usan los valores supuestos en el ejemplo 4.1 ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $I = 8$), las ecuaciones 4.39 y 4.40 predecirían $x^* = 4$, $y^* = 1$ y, como antes, la mitad del ingreso del individuo se gastará en cada bien. Si usamos, en cambio, $p_x = 2$, $p_y = 4$ e $I = 8$, entonces $x^* = 8/3$, $y^* = 2/3$ y esta persona gasta dos tercios $[p_x x/I = (2 \cdot 8/3)/8 = 2/3]$ de su ingreso en el bien x. Probar otros números sugiere que la parte del ingreso dedicada al bien x se aproxima a 1 al aumentar el precio de x.[7]

PREGUNTA: ¿Los cambios en el ingreso afectan las porciones de gasto en alguna de las funciones ESC que hemos analizado aquí? ¿Qué relación existe entre el comportamiento de las porciones de gasto y la naturaleza homotética de esta función?

FUNCIÓN DE UTILIDAD INDIRECTA

Los ejemplos 4.1 y 4.2 ilustran el principio de que a menudo es posible manipular las condiciones de primer orden para un problema de optimización de utilidad restringida a fin de despejar los valores óptimos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Estos valores óptimos dependerán en general de los precios de todos los bienes y del ingreso del individuo. Esto es,

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \\ x_2^* &= x_2(p_1, p_2, \ldots, p_n, I), \\ &\vdots \\ x_n^* &= x_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, I): \end{aligned} \tag{4.41}$$

En el capítulo siguiente se analiza con mayor detalle este conjunto de *funciones de demanda* que muestra la dependencia de la cantidad de cada x_i demandada respecto a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e I. Aquí se

[7] Estas relaciones para la función ESC se detallan en el problema 4.9 y en la extensión E4.3.

usan los valores óptimos de las x de la ecuación 4.42 para sustituirlos en la función de utilidad original, lo cual produce

$$\text{utilidad máxima} = U[x_1^*(p_1, \ldots p_n, I), x_2^*(p_1, \ldots p_n, I), \ldots, x_n^*(p_1, \ldots p_n, I)] \qquad \textbf{(4.42)}$$

$$= V(p_1, p_2, \ldots, p_n, I). \qquad \textbf{(4.43)}$$

Es decir, debido al deseo del individuo de optimizar su utilidad, dada una restricción presupuestal, el nivel óptimo de utilidad obtenible dependerá *indirectamente* de los precios de los bienes comprados y de su ingreso. Esta dependencia se refleja en la función de utilidad indirecta V. Si los precios o el ingreso cambiaran, el nivel de utilidad que podría alcanzarse también se vería afectado. Tanto en la teoría del consumo como en muchos otros contextos, a veces es posible usar este método indirecto para estudiar cómo los cambios en las circunstancias económicas afectan diversos tipos de resultados como la utilidad o (más adelante) los costos de las empresas.

PRINCIPIO DE SUMA GLOBAL

Muchos discernimientos económicos se desprenden del reconocimiento de que la utilidad depende, en última instancia, del ingreso y de los precios que enfrentan los individuos. Uno de los discernimientos más importantes es el llamado principio de suma global el cual ilustra la superioridad de los impuestos ante la capacidad del poder de compra de un individuo en relación con los impuestos a determinados bienes. Un discernimiento conexo es que las subvenciones al ingreso general para las personas de bajos ingresos elevarán la utilidad en mayor medida que una cantidad similar de dinero gastado en subsidiar bienes específicos. La intuición detrás de estos resultados se deriva directamente de la hipótesis de optimización de la utilidad; un impuesto o subsidio al ingreso deja al individuo en libertad de decidir cómo distribuir su ingreso final. Por otro lado, los impuestos o subsidios a bienes específicos cambian el poder de compra de una persona y distorsionan sus decisiones debido a los precios artificiales que se incorporan en esos esquemas. De ahí que sean preferibles los impuestos y subsidios al ingreso general, si la eficiencia es un criterio importante en la política social.

En la figura 4.5. se ilustra el principio de la suma global tal como se aplica a la tributación. Inicialmente, esta persona tiene un ingreso de I y elige consumir la combinación x^*, y^*. Un impuesto al bien x elevaría su precio, y la decisión de optimización de la utilidad pasaría a la combinación x_1, y_1. La recaudación de impuestos sería $t \cdot x_1$ (donde t es la tasa tributaria impuesta al bien x). O bien, un impuesto al ingreso que desplazara hacia dentro la restricción presupuestal a I' recaudaría esta misma cantidad de ingresos tributarios.[8] Sin embargo, la utilidad provista por el impuesto al ingreso (U_2) excede la provista por el impuesto a x solamente (U_1). Por tanto, hemos demostrado que la carga para la utilidad del impuesto al ingreso es menor. Un argumento similar puede usarse para ilustrar la superioridad de subvenciones al ingreso sobre subsidios a bienes específicos.

EJEMPLO 4.3 Utilidad indirecta y principio de suma global

En este ejemplo se usará la noción de una función de utilidad indirecta para ilustrar el principio de suma global tal como se aplica a la tributación. Primero debemos derivar las funciones de utilidad indirecta de dos casos ilustrativos.

Caso 1: Cobb-Douglas. En el ejemplo 4.1 se demostró que para la función Cobb-Douglas con $\alpha = \beta = 0.5$, las compras óptimas son

[8] Dado que $I = (p_x + t)x_1 + p_y y_1$, tenemos que $I' = I - tx_1 = p_x x_1 + p_y y_1$, lo cual demuestra que la restricción presupuestal con un impuesto al ingreso de igual magnitud también pasa por el punto x_1, y_1.

$$x^* = \frac{I}{2p_x},$$
$$y^* = \frac{I}{2p_y}. \tag{4.44}$$

Así, la función de utilidad indirecta es, en este caso,

$$V(p_x, p_y, I) = U(x^*, y^*) = (x^*)^{0.5}(y^*)^{0.5} = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}}. \tag{4.45}$$

Adviértase que cuando $p_x = 1$, $p_y = 4$ y $I = 8$, tenemos $V = 8/(2 \cdot 1 \cdot 2) = 2$, es decir, la utilidad que calculamos con anterioridad para esta situación.

Caso 2: Proporciones fijas. En el tercer caso del ejemplo 4.2 se determinó que

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y},$$
$$y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}. \tag{4.46}$$

Así, en este caso la utilidad indirecta está dada por

$$V(p_x, p_y, I) = \min(x^*, 4y^*) = x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}$$
$$= 4y^* = \frac{4}{4p_x + p_y} = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}; \tag{4.47}$$

con $p_x = 1$, $p_y = 4$ e $I = 8$, la utilidad indirecta está dada por $V = 4$, lo que calculamos antes.

El principio de suma global. Consideremos primeramente el uso del caso de de la función Cobb-Douglas para ilustrar el principio de suma global. Supongamos que se aplica un impuesto de 1 dólar al bien x. La ecuación 4.45 muestra que en este caso la utilidad indirecta pasaría de 2 a 1.41 $[= 8/(2 \cdot 2^{0.5} \cdot 2)]$. Puesto que esta persona elige $x^* = 2$ con el impuesto, la recaudación tributaria total será de 2 dólares. Así, un impuesto al ingreso reducirá el ingreso neto a 6 dólares y la utilidad indirecta será de 1.5 $[= 6/(2 \cdot 1 \cdot 2)]$. Por tanto, el impuesto al ingreso es una evidente mejora en la utilidad en el caso en el que sólo se grava x. El impuesto al bien x reduce la utilidad por dos razones: reduce el poder de compra de una persona y sesga sus decisiones alejándolas del bien x. Con el impuesto sobre la renta, sólo se percibe el primer efecto, por lo que el impuesto es más eficiente.[9]

El caso de las proporciones fijas confirma dicha percepción. En este caso, un impuesto de 1 dólar al bien x reduciría la utilidad indirecta de 4 a 8/3 $[= 8/(2 + 1)]$. En esta situación $x^* = 8/3$ y la recaudación tributaria sería de \$8/3. Un impuesto al ingreso que recaudara \$8/3 dejaría a este consumidor con \$16/3 de ingreso neto, y este ingreso produciría una utilidad indirecta de $V = 8/3$ $[= (16/3)/(1 + 1)]$. De ahí que después de impuestos la utilidad sea la misma, tanto en el caso de los impuestos internos como en el de los impuestos al ingreso. La razón por la cual el principio de suma global no se sostiene en este caso es que con la utilidad de las proporciones fijas los impuestos internos no distorsionan las decisiones porque las preferencias son muy rígidas.

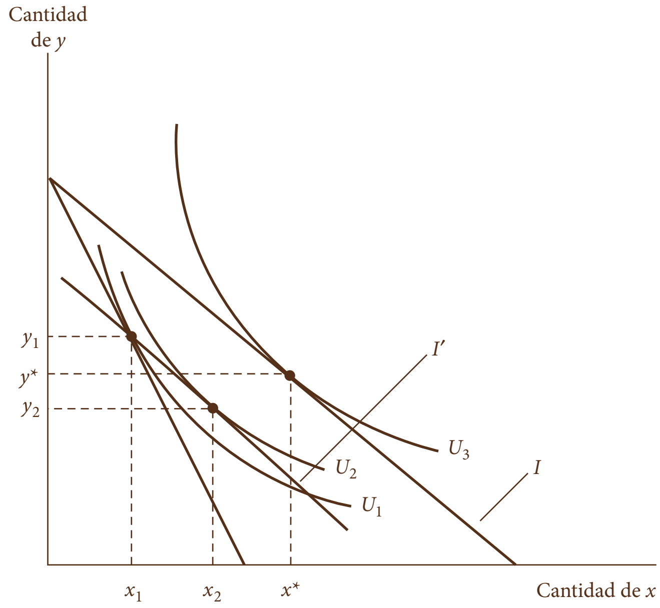
PREGUNTA: Las dos funciones de utilidad indirecta que hemos ilustrado aquí demuestran que la duplicación del ingreso y de todos los precios dejaría sin cambio a la utilidad indirecta. Explica por qué podemos esperar que esta sea una propiedad de todas las funciones de utilidad indirecta. Es decir, explica por qué la función de utilidad indirecta es homogénea de grado cero en todos los precios e ingresos.

[9] Este análisis supone que no hay efectos incentivadores del impuesto sobre la renta, lo cual quizá no es un buen supuesto.

FIGURA 4.5

El principio de suma global de la tributación.

Un impuesto al bien x desplazaría la decisión de optimización de la utilidad de x^*, y^* a x_1, y_1. Un impuesto al ingreso que recaudara el mismo monto desplazaría la restricción presupuestal a I'. La utilidad sería más alta (U_2) con el impuesto al ingreso que con el impuesto a x solamente (U_1).



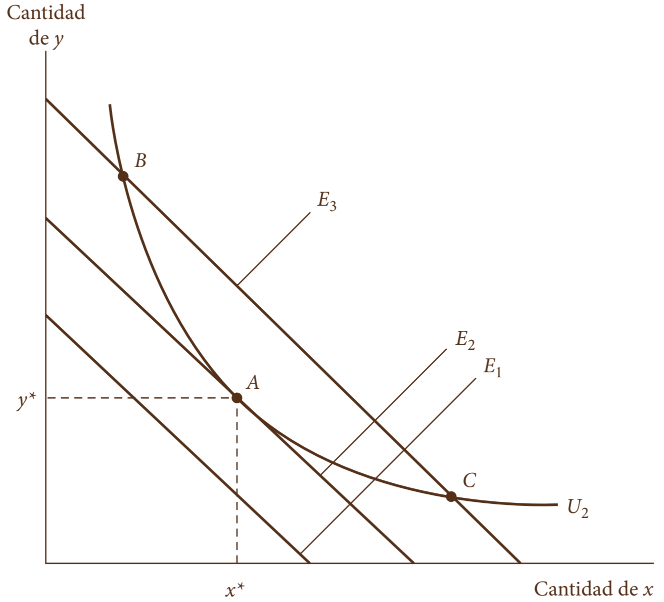
MINIMIZACIÓN DEL GASTO

En el capítulo 2 se señaló que muchos problemas de máximo restringido tienen problemas asociados de mínimo restringido "duales". Para el caso de la optimización de la utilidad el problema asociado dual de minimización concierne a distribuir el ingreso de tal manera que sea posible alcanzar un nivel de utilidad dado con el gasto mínimo. Este problema es evidentemente similar al problema original de optimización de la utilidad, pero los objetivos y restricciones de los problemas se han invertido. La figura 4.6 ilustra este problema dual de minimización del gasto. Ahí, el individuo debe alcanzar el nivel de utilidad U_2; esta es ahora la restricción del problema. Tres posibles montos de gasto (E_1, E_2 y E_3) aparecen en la figura como tres líneas de "restricción presupuestal". El nivel de gasto E_1 es obviamente demasiado reducido para alcanzar U_2; de ahí que no pueda resolverse el problema dual. Con los gastos dados por E_3 el individuo puede llegar a U_2 (en cualesquiera de los dos puntos B o C), pero este no es el nivel de gasto mínimo requerido. En cambio, E_2 ofrece evidentemente los gastos totales suficientes para llegar a U_2 (en el punto A), y esta es de hecho la solución del problema dual. Al comparar las figuras 4.2 y 4.6 resulta obvio que tanto el método primario de optimización de la utilidad como el método dual de minimización del gasto producen la misma solución (x^*, y^*); son simplemente modos alternos de ver el mismo proceso. El método de minimización del gasto suele ser más útil, sin embargo, porque los gastos son directamente observables, mientras que la utilidad no.

FIGURA 4.6

El problema dual de minimización del gasto.

El problema dual de la optimización de la utilidad es alcanzar un nivel de utilidad dado (U_2) con gastos mínimos. Un nivel de gasto de E_1 no permite alcanzar U_2, mientras que E_3 brinda más poder de gasto del estrictamente necesario. Con el gasto E_2, esta persona puede llegar a U_2 consumiendo x^* y y^*.



Enunciación matemática

Más formalmente, el problema dual de minimización del gasto del individuo es elegir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para minimizar

$$\text{gastos totales} = E = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n, \tag{4.48}$$

sujetos a la restricción

$$\text{utilidad} = \bar{U} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.49}$$

Las cantidades óptimas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elegidos en este problema dependerán de los precios de los diversos bienes ($p_1, p_2, \ldots, p_n$) y del nivel de utilidad requerido $\bar{U}$. Si alguno de los precios cambiara o si el individuo tuviera un "objetivo" de utilidad diferente, otro conjunto de bienes sería el óptimo. Esta dependencia puede resumirse como una *función de gasto*.

DEFINICIÓN

Función de gasto. La función de gasto del individuo muestra los gastos mínimos necesarios para alcanzar un nivel de utilidad dado para una serie particular de precios. Es decir,

$$\text{gastos mínimos} = E(p_1, p_2, \ldots, p_n, U). \tag{4.50}$$

Esta definición indica que la función de gasto y la función de utilidad indirecta son funciones inversas entre sí (compárense las ecuaciones 4.43 y 4.50). Ambas dependen de los precios del mercado, pero implican diferentes restricciones (ingreso o utilidad). En el capítulo siguiente se verá que esta relación es útil al permitirnos examinar la teoría de cómo reaccionan los individuos a cambios de precio. No obstante, consideremos primero dos funciones de gasto.

EJEMPLO 4.4 Dos funciones de gasto

Hay dos maneras de calcular una función de gasto. El primer método, más sencillo, sería formular directamente el problema de minimización del gasto y aplicar la técnica de Lagrange. Algunos de los problemas al final de este capítulo te pedirán hacer eso precisamente. Aquí, sin embargo, adoptaremos un procedimiento más ágil, aprovechando la relación entre funciones de gasto y funciones de utilidad indirecta. Dado que estos dos tipos de funciones son inversos entre sí, el cálculo de uno facilita enormemente el del otro. Ya se calcularon las funciones de utilidad indirecta de dos casos importantes en el ejemplo 4.3. Recuperar las funciones de gasto asociadas es cuestión de simple álgebra.

Caso 1: Utilidad Cobb-Douglas. La ecuación 4.45 muestra que la función de utilidad indirecta en el caso de la función Cobb-Douglas de dos bienes es

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{2p_x^{0.5}p_y^{0.5}}. \tag{4.51}$$

Si ahora se intercambia el rol de la utilidad (que ahora trataremos como el "objetivo" de utilidad denotado por U) y del ingreso (que ahora denominaremos "gastos", E, y lo trataremos como una función de los parámetros de este problema), tenemos la función de gasto

$$E(p_x, p_y, U) = 2p_x^{0.5}p_y^{0.5}U. \tag{4.52}$$

Comparando esto con nuestros resultados anteriores, usaremos un objetivo de utilidad de $U = 2$ con, nuevamente, $p_x = 1$ y $p_y = 4$. Con estos parámetros la ecuación 4.52 indica que los gastos mínimos requeridos son de 8 dólares ($= 2 \cdot 1^{0.5} \cdot 4^{0.5} \cdot 2$). No es de sorprender que tanto el problema primordial de optimización de la utilidad como el problema dual de minimización del gasto sean formalmente idénticos.

Caso 2: Proporciones fijas. Para el caso de las proporciones fijas, la ecuación 4.47 dio la función de utilidad indirecta como

$$V(p_x, p_y, I) = \frac{I}{p_x + 0.25p_y}. \tag{4.53}$$

Si intercambiamos nuevamente el rol de la utilidad y los gastos, derivamos rápidamente la función de gasto:

$$E(p_x, p_y, U) = (p_x + 0.25p_y)U. \tag{4.54}$$

Una comprobación de los valores hipotéticos usados en el ejemplo 4.3 ($p_x = 1$, $p_y = 4$, $U = 4$) demuestra nuevamente que llegar al objetivo de utilidad de 4 costaría 8 dólares [$=(1 + 0.25 \cdot 4) \cdot 4$].

Compensación de un cambio de precio. Estas funciones de gasto nos permiten investigar cómo podría ser compensada una persona por un cambio de precio. En específico supongamos que el precio del bien y aumenta de 4 a 5 dólares. Obviamente esto reduciría la utilidad de una persona, así que podría preguntarse qué monto de compensación monetaria mitigaría el daño. Puesto que la función de gasto permite mantener constante la utilidad, esto ofrece una estimación directa de ese monto. Específicamente, en el caso de la función Cobb-Douglas, los gastos tendrían que aumentar de 8 a 8.94 dólares ($= 2 \cdot 1 \cdot 5^{0.5} \cdot 2$) para brindar suficiente poder de compra adicional a fin de compensar precisamente dicho aumento de precio. Con proporciones fijas los gastos tendrían que aumentar de 8 a 9 dólares para compensar el aumento de precio. De ahí que las compensaciones sean casi iguales en estos casos simples.

Hay, sin embargo, una diferencia importante entre ambos ejemplos. En el caso de proporciones fijas, el dólar de compensación adicional permite sencillamente a esta persona volver a su paquete de consumo previo ($x = 4$, $y = 1$). Esta es la única manera de devolver la utilidad a $U = 4$ para esta rígida persona. En el caso de la función Cobb-Douglas, en cambio, esta persona no usará la compensación adicional para retornar a su conjunto de consumo previo. En lugar de ello la optimización de la utilidad requerirá que los 8.94 dólares se distribuyan de tal manera que $x = 4.47$ y $y = 0.894$. Esto seguirá brindando un nivel de utilidad de $U = 2$, pero la persona economizará en el ahora más costoso bien y. En el capítulo siguiente se detalla este análisis de los efectos de bienestar de los cambios de precio.

PREGUNTAS: ¿Cómo debería ser compensada una persona por una reducción de precios? ¿Qué tipo de compensación requerirá, si el precio del bien y disminuye de 4 a 3 dólares?

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE GASTO

Puesto que las funciones de gasto son ampliamente usadas en la economía aplicada, es importante entender algunas de las propiedades compartidas por todas esas funciones. Aquí se estudiarán tres propiedades. Todas ellas se desprenden directamente del hecho de que las funciones de gasto se basan en la optimización de la utilidad individual.

1. *Homogeneidad*. Para las dos funciones ilustradas en el ejemplo 4.4 la duplicación de todos los precios duplicará precisamente el valor de los gastos requeridos. Técnicamente, estas funciones de gasto son "homogéneas de grado uno" en todos los precios.[10] Esta es una propiedad general de las funciones de gasto. Debido a que la restricción presupuestal del individuo es lineal en precios, todo aumento proporcional tanto en precios como en poder de compra le permitirá adquirir el mismo conjunto de bienes elegido que optimice la utilidad antes del aumento de precio. En el capítulo 5 se verá que, por esta razón, las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en todos los precios e ingresos.
2. *Las funciones de gasto son no decrecientes en precios*. Esta propiedad puede resumirse sucintamente con el enunciado matemático

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} \geq 0 \quad \text{para cada bien } i. \tag{4.55}$$

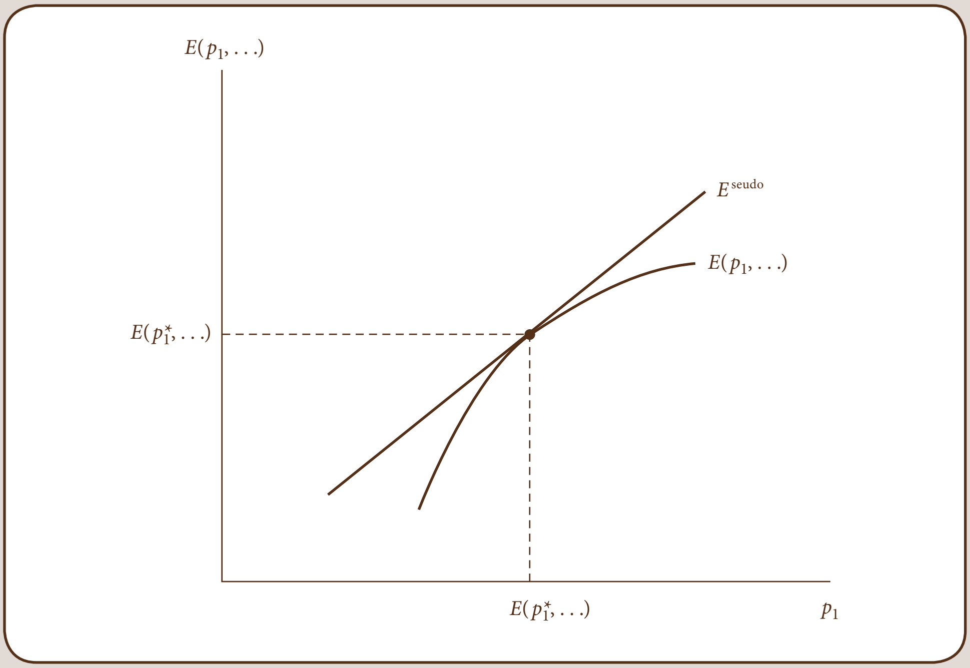
Esto parece intuitivamente obvio. Puesto que la función de gasto reporta el gasto mínimo necesario para llegar a un nivel de utilidad dado, un aumento en cualquier precio debe incrementar ese mínimo. Más formalmente, supongamos que el precio de un bien aumenta y que todos los demás precios se mantienen iguales. Sea que A represente el conjunto de bienes adquirido antes del aumento de precio y B el conjunto adquirido después del aumento de precio. Evidentemente, el conjunto B cuesta más que antes luego del aumento de precio. El único cambio entre ambas situaciones es el aumento en uno de los precios; así, el gasto en ese bien se incrementa y todos los demás gastos permanecen iguales. Sin embargo, también sabemos que antes del aumento de precio el conjunto A costaba menos que el conjunto B, porque A era el conjunto minimizador del gasto. De ahí que los gastos reales, cuando se elige B des-

[10] Como se describió en el capítulo 2, se dice que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado k si $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En este caso, $k = 1$.

FIGURA 4.7

Las funciones de gasto son cóncavas en los precios.

En p_1^* esta persona gasta $E(p_1^*, ...)$. Si sigue comprando la misma serie de bienes al cambiar p_1 los gastos estarán dados por E^{seudo}. Como es probable que sus patrones de consumo se modifiquen al cambiar p_1, los gastos reales serán menores que este.



pués del aumento de precio, excedan los gastos en *A* antes del aumento de precio. Una cadena lógica similar podría usarse para demostrar que una reducción de precio debería causar una reducción de gastos (o posiblemente una permanencia en su mismo nivel).

3. *Las funciones de gasto son cóncavas en los precios*. En el capítulo 2 se analizaron las funciones cóncavas las cuales se definen como funciones que siempre se ubican abajo, tangentes a ellas. Aunque las condiciones matemáticas técnicas que describen estas funciones son complicadas, es relativamente simple mostrar cómo se aplica este concepto a las funciones de gasto, considerando la variación en un solo precio. La figura 4.7 muestra los gastos de un individuo como una función del precio p_1. En el precio inicial, p_1^*, los gastos de esta persona están dados por $E(p_1^*, \ldots)$. Considérense ahora precios más altos o más bajos que p_1^*. Si esta persona continuara comprando el mismo conjunto de bienes, los gastos aumentarían o disminuirían linealmente al cambiar el precio. Esto daría origen a la función de seudogasto E^{seudo} en la figura. Esta línea señala un nivel de gastos que permitiría a la persona comprar el conjunto original de bienes, pese al valor cambiante de p_1. Si, como parece más probable, esta persona ajustara sus compras al cambiar p_1, sabemos (a causa de la minimización del gasto) que los gastos reales serían menores que esos seudomontos. De ahí que la función de gasto real, *E*, se ubique en cualquier punto bajo E^{seudo} y que la función sea cóncava.[11] La concavidad de la función de gasto es una propiedad útil para varias aplicaciones, en especial aquellas relacionadas con el efecto de sustitución de cambios de precio (véase capítulo 5).

[11] Un resultado de la concavidad es que $f_{ii} = \partial^2 E/\partial p_i^2 \leq 0$. Esto es precisamente lo que muestra la figura 4.7.

Resumen

En este capítulo se exploró el modelo económico básico de la optimización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestal. Aunque este problema se abordó de distintas maneras todos los enfoques condujeron al mismo resultado básico.

- Para alcanzar un óptimo restringido un individuo debe gastar todo el ingreso disponible y elegir un conjunto de bienes tal que la *TMS* entre dos bienes cualesquiera sea igual a la razón de los precios de mercado de dichos bienes. Esta tangencia básica resultará en que el individuo iguale las razones de la utilidad marginal con el precio de mercado de cada bien efectivamente consumido. Este resultado es común a la mayoría de los problemas de optimización restringida.
- Las condiciones de tangencia, sin embargo, son sólo las condiciones de primer orden para un óptimo restringido. Para garantizar que estas condiciones también sean suficientes el mapa de curvas de indiferencia del individuo debe exhibir una *TMS* decreciente. En términos formales, la función de utilidad debe ser estrictamente cuasi cóncava.
- Las condiciones de tangencia también deben modificarse para tomar en cuenta soluciones de esquina en las cuales el nivel óptimo de consumo de algunos bienes es de cero. En este caso, la razón de la utilidad marginal con el precio de ese bien estará bajo la razón común de costo marginal-beneficio marginal de los bienes efectivamente adquiridos.
- Una consecuencia del supuesto de optimización de utilidad restringida es que las decisiones óptimas del individuo dependerán implícitamente de los parámetros de su restricción presupuestal. Es decir, las decisiones observadas serán funciones implícitas de todos los precios e ingresos. Así, la utilidad también será una función indirecta de dichos parámetros.
- El problema dual de optimización de utilidad restringida es minimizar el gasto requerido para llegar a un nivel de utilidad dado. Aunque este enfoque dual produce la misma solución óptima que el problema primordial de óptimo restringido, también arroja discernimientos adicionales sobre la teoría de la elección. Específicamente, este enfoque conduce a funciones de gasto en las que el gasto requerido para alcanzar un objetivo de utilidad dado depende de los precios de mercado de los bienes. Así, las funciones de gasto son en principio mensurables.

Problemas

4.1

Cada día Paul, quien está en tercer grado, almuerza en la escuela. Sólo le gustan los pastelillos (t) y la soda (s), los cuales le brindan una utilidad de

$$\text{utilidad} = U(t, s) = \sqrt{ts}.$$

a. Si los pastelillos cuestan \$0.10 cada uno y el vaso con soda, \$0.25 ¿cómo debería gastar Paul el dólar que su madre le da, a fin de optimizar su utilidad?
b. Si la escuela intenta desalentar el consumo de pastelillos, aumentando su precio a \$0.40, ¿cuánto tendría que incrementar la madre de Paul la cantidad de dinero para el almuerzo y proporcionarle el mismo nivel de utilidad que recibía en el inciso a)?

4.2

a. Una joven conocedora de vinos tiene \$600 para gastar en la construcción de una pequeña cava. Le gustan dos cosechas en particular: la del Bordeaux francés de 2001 (w_F), a \$40 por botella, y un vino californiano menos costoso de 2005 (w_C) a un precio de \$8. Si su utilidad es

$$U(w_F, w_C) = w_F^{2/3} w_C^{2/3},$$

¿cuánto debería comprar de cada vino?
b. Cuando llegó a la vinatería, nuestra joven enóloga descubrió que el precio del Bordeaux francés había bajado a \$20 la botella, debido a una reducción en el valor del euro. Si el precio del vino californiano se mantiene estable en \$8 por botella, ¿cuánto de cada vino debería comprar nuestra amiga para optimizar su utilidad en estas condiciones alteradas?
c. Explica por qué esta aficionada al vino estaría en mejores condiciones en el inciso b) que en el a). ¿Cómo asignarías un valor monetario a este aumento de utilidad?

4.3

a. En una determinada noche, J. P. disfruta el consumo de puros (c) y brandy (b) de acuerdo con la función

$$U(c, b) = 20c - c^2 + 18b - 3b^2.$$

¿Cuántos puros y copas de brandy consume en una noche? (El costo no es problema para J. P.)

b. Últimamente, sin embargo, sus médicos le han recomendado a J. P. limitar a 5 el total de copas de brandy y puros consumidos. ¿Cuántas copas de brandy y puros consumirá en estas circunstancias?

4.4

a. El señor Omar Excéntrico disfruta los productos x y y de acuerdo con la función de utilidad

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La utilidad del señor Excéntrico se optimiza si $p_x = \$3$, $p_y = \$4$ y tiene \$50 para gastar. *Pista*: Aquí podría ser más fácil optimizar U^2 en lugar de U. ¿Por qué esto no alterará tus resultados?

b. Grafica la curva de indiferencia del señor Excéntrico y su punto de tangencia con su restricción presupuestal. ¿Qué indica esta gráfica sobre el comportamiento del señor Excéntrico? ¿Encontraste un óptimo verdadero?

4.5

El señor A deriva utilidad de martinis (m) en proporción con la cantidad que bebe:

$$U(m) = m.$$

El señor A, sin embargo, es muy especial con los martinis: sólo le gustan preparados con una proporción exacta de dos partes de ginebra (g) por una de vermut (v). De ahí que la función de utilidad del señor A pueda reescribirse como

$$U(m) = U(g, v) = \min\left(\frac{g}{2}, v\right).$$

a. Grafica la curva de indiferencia del señor A en términos de g y v para varios niveles de utilidad. Demuestra que, independientemente de los precios de ambos ingredientes, el señor A nunca alterará la forma en que prepara los martinis.
b. Calcula las funciones de demanda de g y v.
c. Usando los resultados del inciso b), ¿cuál es la función de utilidad indirecta del señor A?
d. Calcula la función de gasto del señor A; para cada nivel de utilidad muestra el gasto como una función de p_g y p_v. *Pista*: Dado que este problema implica una función de utilidad de proporciones fijas, no es posible despejar las decisiones optimizadoras de utilidad usando el cálculo.

4.6

Supón que un fanático de la comida rápida deriva utilidad de tres bienes —refrescos (x), hamburguesas (y) y helados (z)— de acuerdo con la función de utilidad de función Cobb-Douglas

$$U(x, y, z) = x^{0.5}y^{0.5}(1 + z)^{0.5}.$$

Supón también que los precios de estos bienes están dados por $p_x = 1$, $p_y = 4$ y $p_z = 8$ y que el ingreso de este consumidor está dado por $I = 8$.

a. Demuestra que, para $z = 0$ la optimización de la utilidad resulta en las mismas decisiones óptimas que en el ejemplo 4.1. Demuestra, asimismo, que toda decisión que resulte en $z > 0$ (aun para una z fraccionaria) reduce la utilidad desde ese óptimo.
b. ¿Cómo explicas el hecho de que $z = 0$ sea óptimo aquí?
c. ¿Qué tan alto tendría que ser el ingreso de este individuo para poder comprar todas las z?

4.7

El principio de suma global que se ilustra en la figura 4.5 se aplica a la política de transferencias y a la tributación. En este problema se examinará la aplicación de ese principio.

a. Usa una gráfica similar a la de la figura 4.5 para demostrar que una subvención al ingreso para una persona brinda más utilidad que un subsidio al bien x el cual le cuesta la misma cantidad al gobierno.
b. Usa la función de gasto Cobb-Douglas que se presenta en la ecuación 4.52 para calcular el poder de compra adicional necesario para incrementar la utilidad de esta persona de $U = 2$ a $U = 3$.
c. Usa de nuevo la ecuación 4.52 para estimar el grado en el cual el bien x debe subsidiarse para incrementar la utilidad de esta persona de $U = 2$ a $U = 3$. ¿Cuánto le costaría este subsidio al gobierno? ¿Qué resulta de comparar este costo con el calculado en el inciso b)?
d. En el problema 4.10 se te pedirá calcular una función de gasto para una función Cobb-Douglas más general que la que se usa en el ejemplo 4.4. Aplica aquí esa función de gasto para volver a resolver los incisos b) y c) para el caso $\alpha = 0.3$, cifra cercana a la fracción del ingreso que las personas de bajos ingresos gastan en alimentos.
e. ¿Cómo habrían cambiado tus cálculos en este problema si hubiéramos utilizado la función de gasto para el caso de proporciones fijas (ecuación 4.54)?

4.8

Dos de las funciones de utilidad más simples son:

1. Proporciones fijas: $U(x, y) = \min[x, y]$.
2. Sustitutos perfectos: $U(x, y) = x + y$

   a. Para cada una de estas funciones de utilidad, calcula lo siguiente:
      - Funciones de demanda de x y y
      - Función de utilidad indirecta
      - Función de gasto

   b. Analiza las formas particulares de las funciones que calculaste; ¿por qué adoptan esas formas específicas?

4.9

Supón que se tiene una función de utilidad que implica dos bienes y que es lineal de la forma $U(x, y) = ax + by$. Calcula la función de gasto de esta función de utilidad. *Pista*: La función de gasto tendrá problemas en varias razones de precio.

Problemas analíticos

4.10 Utilidad Cobb-Douglas

En el ejemplo 4.1 se examinó la función Cobb-Douglas $U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Este problema ilustra algunos atributos más de esa función.

a. Calcula la función de utilidad indirecta para este caso de la función Cobb-Douglas.
b. Calcula la función de gasto de este caso.
c. Demuestra explícitamente cómo la compensación requerida para neutralizar el efecto de un aumento en el precio de x se relaciona con la magnitud del exponente α.

4.11 Utilidad ESC

La función de utilidad ESC que se utilizó en este capítulo está dada por

$$U(x, y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta}.$$

a. Demuestra que las condiciones de primer orden para un máximo de utilidad restringida con esta función requiere que los individuos elijan bienes en la proporción

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{1/(\delta-1)}.$$

b. Demuestra que el resultado del inciso a) implica que los individuos distribuirán sus fondos en partes iguales entre x y y para el caso Cobb-Douglas ($\delta = 0$), como se demostró anteriormente en varios problemas.

c. ¿Cómo depende la razón $p_x x/p_y y$ del valor de δ? Explica intuitivamente tus resultados. (Para más detalles sobre esta función, véase la extensión E4.3.)
d. Deriva las funciones de utilidad indirecta y gasto de este caso y comprueba tus resultados describiendo las propiedades de homogeneidad de las funciones que calculaste.

4.12 Utilidad de Stone-Geary

Supón que los individuos requieren cierto nivel de alimentos (x) para mantenerse vivos. Concedamos que esta cantidad está dada por x_0. Una vez adquirido x_0 los individuos obtienen la utilidad de los alimentos y otros bienes (y) de la forma

$$U(x, y) = (x - x_0)^{\alpha} y^{\beta},$$

donde $\alpha + \beta = 1$.

a. Demuestra que si $I > p_x x_0$, el individuo maximizará su utilidad gastando $\alpha(I - p_x x_0) + p_x x_0$ en el bien x y $\beta(I - p_x x_0)$ en el bien y. Interpreta este resultado.
b. ¿Cómo cambian las razones $p_x x/I$ y $p_y y/I$ al aumentar el ingreso en este problema? (Véase también la extensión E4.2 para más detalles sobre esta función de utilidad.)

4.13 Funciones de utilidad indirecta ESC y de gasto

En este problema se usará una forma más estándar de la función de utilidad ESC para derivar funciones de utilidad indirecta y de gasto. Supón que la utilidad está dada por

$$U(x, y) = (x^{\delta} + y^{\delta})^{1/\delta}$$

[en esta función la elasticidad de sustitución $\sigma = 1/(1 - \delta)$].

a. Demuestra que la función de utilidad indirecta de la función de utilidad que acaba de darse es

$$V = I(p_x^r + p_y^r)^{-1/r},$$

donde $r = \delta/(\delta - 1) = 1 - \sigma$.
b. Demuestra que la función derivada en el inciso a) es homogénea de grado cero en precios e ingreso.
c. Demuestra que esta función es estrictamente creciente en ingreso.
d. Demuestra que esta función es estrictamente decreciente en cualquier precio.
e. Demuestra que la función de gasto para este caso de utilidad ESC está dada por

$$E = V(p_x^r + p_y^r)^{1/r}.$$

f. Demuestra que la función derivada en el inciso e) es homogénea de grado uno en los precios de los bienes.
g. Demuestra que esta función de gasto es creciente en cada uno de los precios.
h. Demuestra que la función es cóncava en cada precio.

4.14 Altruismo

Michele quien tiene un ingreso relativamente alto I demuestra altruismo hacia Sofía quien vive en una pobreza tal que en esencia no tiene ningún ingreso. Supongamos que las preferencias de Michele están representadas por la función de utilidad

$$U_1(c_1, c_2) = c_1^{1-a} c_2^{a},$$

donde c_1 y c_2 son los niveles de consumo de Michele y Sofía los cuales aparecen como bienes en una función Cobb-Douglas. Supón que Michele puede gastar su ingreso en su propio consumo, o en el de Sofía (mediante donativos de beneficencia), y que \$1 compra una unidad de consumo para cualquiera de las dos (así, los "precios" de consumo son $p_1 = p_2 = 1$).

a. Argumenta que el exponente a puede tomarse como una medida del grado del altruismo de Michele, ofreciendo una interpretación de los valores extremos $a = 0$ y $a = 1$. ¿Qué valor la convertiría en una perfecta altruista (considerando a los demás igual que a sí misma)?
b. Despeja las decisiones óptimas de Michele y muestra cómo cambian con a.
c. Despeja las decisiones óptimas de Michele bajo un impuesto al ingreso con tasa t. ¿Cómo cambian sus decisiones si hay una deducción a la beneficencia (de manera que el ingreso que se gastó en donativos no es gravado)? ¿La deducción a la beneficencia tiene mayor efecto de incentivo en las personas más altruistas o en las menos altruistas?

d. Para mayor simplicidad vuelve al caso sin impuestos. Supón ahora que el altruismo de Michele está representado por la función de utilidad

$$U_1(c_1, U_2) = c_1^{1-a}U_2^a,$$

la cual es similar a la representación del altruismo en la extensión E3.4 del capítulo anterior. De acuerdo con esta especificación, Michele se ocupa directamente del nivel de utilidad de Sofía y sólo indirectamente de su nivel de consumo.

1. Despeja las decisiones óptimas de Michele, si la función de utilidad de Sofía es simétrica respecto a la de Michele: $U_2(c_2, U_1) = c_2^{1-a}U_1^a$. Compara tu respuesta con el inciso b). ¿Michele es más o menos caritativa bajo la nueva especificación? Explica tu respuesta.
2. Repite el análisis previo suponiendo que la función de utilidad de Sofía es $U_2(c_2) = c_2$.

Sugerencias de lecturas adicionales

Barten, A. P. y Volker Böhm. "Consumer Theory", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, North-Holland, Ámsterdam, 1982.

Las secciones 10 y 11 tienen resúmenes compactos de muchos de los conceptos cubiertos en este capítulo.

Deaton, A. y J. Muelbauer. *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

La sección 2.5 ofrece un buen tratamiento geométrico de conceptos de dualidad.

Dixit, A. K. *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

El capítulo 2 brinda varios análisis lagrangianos centrados en la función de utilidad Cobb-Douglas.

Hicks, J. R. *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1946.

El capítulo II y el apéndice matemático proporcionan algunas sugerencias tempranas acerca de la importancia de la función de gasto.

Luenberger, D. G. *Microeconomic Theory*, McGraw Hill, Nueva York, 1992.

En el capítulo 4 este autor muestra varias relaciones interesantes entre su "función de beneficio" (véase el problema 3.15) y la función de gasto, más estándar. Ese capítulo también ofrece ideas sobre varias estructuras inusuales de preferencias.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

El capítulo 3 contiene un completo análisis de funciones de utilidad y de gasto.

Samuelson, Paul A. *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, 1947.

El capítulo V y el apéndice A ofrecen un sucinto análisis de las condiciones de primer orden para un óptimo de utilidad. Tal apéndice brinda asimismo una buena cobertura de condiciones de segundo orden.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3a. ed., Irwing/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Útil aunque muy difícil tratamiento de la dualidad en la teoría del consumo.

Theil, H., *Theory and Measurement of Consumer Demand*, North-Holland, Ámsterdam, 1975.

Buen resumen de teoría básica de la demanda junto con implicaciones para la estimación empírica.

PORCIONES PRESUPUESTALES

EXTENSIONES

El economista del siglo XIX Ernst Engel fue uno de los primeros científicos sociales en estudiar a fondo los patrones de gasto reales de los individuos. Se concentró específicamente en el consumo de alimentos. Su hallazgo de que la fracción del ingreso que se gasta en alimentos disminuye al aumentar el ingreso llegó a conocerse como *ley de Engel* y se ha confirmado en muchos estudios. La ley de Engel es de tal regularidad empírica que algunos economistas han propuesto medir la pobreza por la fracción del ingreso que se gasta en alimentos. Hay otras dos aplicaciones interesantes: 1) el estudio de Hayashi (1995) el cual demuestra que la porción del ingreso dedicada a los alimentos que prefieren los ancianos es mucho más alta en familias de dos generaciones que en familias de una sola generación, y 2) los hallazgos de Behrman (1989), procedentes de países menos desarrollados, que demuestran que los deseos de la gente de llevar una dieta más variada, al aumentar sus ingresos, pueden resultar de hecho en una reducción de la fracción del ingreso que se gasta en nutrientes particulares. En el resto de esta extensión se examinarán algunas evidencias sobre las porciones presupuestales (denotadas por $s_i = p_i x_i / I$) junto con algo más de teoría sobre el tema.

E4.1 La variabilidad de las porciones presupuestales

En la tabla E4.1 aparecen datos actualizados de las porciones presupuestales de Estados Unidos. En esta tabla la ley de Engel es evidente: al aumentar el ingreso las familias gastan en alimentos una menor proporción de sus fondos. Otras variaciones importantes en la tabla incluyen la porción decreciente del ingreso que se gasta en cubrir necesidades de atención a la salud y una mayor porción del ingreso que los individuos de ingresos más altos dedican a planes de retiro. Curiosamente, las porciones del ingreso dedicadas a vivienda y transporte son relativamente constantes en el rango de ingreso que se muestra en la tabla; al parecer, individuos de altos ingresos compran casas y automóviles más grandes.

Las porciones variables del ingreso, en la tabla E4.1 ilustran por qué la función Cobb-Douglas no es útil para estudios empíricos detallados respecto al comportamiento de las familias. Cuando la utilidad está dada por $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ (donde $\alpha + \beta = 1$), las ecuaciones de demanda implicadas son $x = \alpha I / p_x$ y $y = \beta I / p_y$. Así,

$$s_x = p_x x / I = \alpha \quad \text{y} \qquad \textbf{(i)}$$
$$s_y = p_y y / I = \beta,$$

y las porciones presupuestales son constantes para todos los niveles de ingreso y precios relativos observados. Debido a esta deficiencia los economistas han investigado otras formas posibles de la función de utilidad que permitan mayor flexibilidad.

E4.2 Sistema de gasto lineal

Una generalización de la función Cobb-Douglas que incorpora la idea de que ciertos montos mínimos de cada bien deben

TABLA E4.1 PORCIONES PRESUPUESTALES DE FAMILIAS ESTADOUNIDENSES, 2008

	Ingreso anual		
	$10 000-$14 999	$40 000-$49 999	Más de $70 000
Concepto de gastos			
Alimentos	15.7	13.4	11.8
Vivienda	23.1	21.2	19.3
Servicios públicos y combustible	11.2	8.6	5.8
Transporte	14.1	17.8	16.8
Seguro médico	5.3	4.0	2.6
Otros gastos de atención a la salud	2.6	2.8	2.3
Entretenimiento (bebidas alcohólicas incluidas)	4.6	5.2	5.8
Educación	2.3	1.2	2.6
Seguro y pensiones	2.2	8.5	14.6
Otros (electrodomésticos, aseo personal, otros gastos de vivienda y varios)	18.9	17.3	18.4

Consumer Expenditure Report, 2008, página en internet de la Bureau of Labor Statistics, http://www.bls.gov.

ser comprados por un individuo (x_0, y_0) es la función de utilidad

$$U(x, y) = (x - x_0)^{\alpha}(y - y_0)^{\beta} \quad \textbf{(ii)}$$

para $x \geq x_0$ y $y \geq y_0$ donde, nuevamente, $\alpha + \beta = 1$.

Las funciones de demanda pueden derivarse de esta función de utilidad en forma similar al caso de la función Cobb-Douglas, introduciendo el concepto de ingreso supernumerario (I^*) el cual representa el monto de poder de compra restante después de adquirir el paquete mínimo

$$I^* = I - p_x x_0 - p_y y_0. \quad \textbf{(iii)}$$

Usando esta notación las funciones de demanda son

$$\begin{aligned} x &= (p_x x_0 + \alpha I^*)/p_x, \\ y &= (p_y y_0 + \beta I^*)/p_y. \end{aligned} \quad \textbf{(iv)}$$

En este caso el individuo gasta entonces una fracción constante de ingreso supernumerario en cada bien, una vez adquirido el conjunto mínimo. La manipulación de la ecuación iv produce las ecuaciones de porciones

$$\begin{aligned} s_x &= \alpha + (\beta p_x x_0 - \alpha p_y y_0)/I, \\ s_y &= \beta + (\alpha p_y y_0 - \beta p_x x_0)/I, \end{aligned} \quad \textbf{(v)}$$

que muestran que este sistema de demanda no es homotético. La revisión de la ecuación v exhibe el previsible resultado de que la porción presupuestal de un bien se relaciona positivamente con la cantidad mínima necesaria de dicho bien, y negativamente con la cantidad mínima del otro bien requerido. Puesto que la noción de compras necesarias parece estar acorde con la observación de la realidad, este sistema de gasto lineal (SGL), inicialmente desarrollado por Stone (1954), es de uso muy común en estudios empíricos. La función de utilidad en la ecuación ii también se conoce como función de utilidad de Stone-Geary.

Compras tradicionales

Uno de los usos más interesantes del SGL es examinar cómo cambia esta noción de compras necesarias al cambiar también las condiciones. Por ejemplo, Oczkowski y Philip (1994) estudian cómo el acceso a bienes de consumo modernos puede afectar la parte del ingreso que los individuos en economías de transición dedican a los artículos locales tradicionales. Estos autores demuestran que los lugareños de Papúa, Nueva Guinea, reducen significativamente esas porciones al acceder cada vez más a bienes del exterior. De ahí que adelantos, como mejores carreteras para el transporte de bienes, sean una de las formas en las que se socavan las prácticas culturales tradicionales.

E4.3 Utilidad ESC

En el capítulo 3 se presentó la función de utilidad ESC

$$U(x, y) = \frac{x^{\delta}}{\delta} + \frac{y^{\delta}}{\delta} \quad \textbf{(vi)}$$

para $\delta \leq 1$, $\delta \neq 0$. El principal uso de esta función es ilustrar posibilidades alternas de sustitución (que se reflejan en el valor del parámetro δ. Las porciones presupuestales implicadas por esta función de utilidad aportan variados discernimientos de este tipo. La manipulación de las condiciones de primer orden para un óptimo de utilidad restringida con la función ESC rinde las ecuaciones de porciones

$$\begin{aligned} s_x &= 1/[1 + (p_y/p_x)^K], \\ s_y &= 1/[1 + (p_x/p_y)^K], \end{aligned} \quad \textbf{(vii)}$$

donde $K = \delta/(\delta - 1)$.

La naturaleza homotética de la función ESC se demuestra por el hecho de que estas expresiones de porciones sólo dependen de la razón de precio, p_x/p_y. El comportamiento de estas porciones en respuesta a los cambios en precios relativos depende del valor del parámetro K. Para el caso Cobb-Douglas, $\delta = 0$, así que $K = 0$ y $s_x = s_y = 1/2$. Cuando $\delta > 0$ las posibilidades de sustitución son grandes y $K < 0$. En este caso, la ecuación vii demuestra que s_x y p_x/p_y se mueven en direcciones opuestas. Si p_x/p_y aumenta, la persona sustituye y por x en tal grado que s_x disminuye. O bien, si $\delta < 0$, entonces las posibilidades de sustitución son limitadas, $K > 0$, y s_x y p_x/p_y se mueven en la misma dirección. En este caso, un incremento en p_x/p_y sólo causa una sustitución menor de y por x, y s_x en realidad se incrementa debido al precio relativamente más alto del bien x.

Libre comercio en América del Norte

Las funciones de demanda ESC se usan, la mayoría de las veces, en modelos por computadora a gran escala de equilibrio general (véase el capítulo 13), mismos que los economistas usan para evaluar el impacto de importantes cambios económicos. Puesto que el modelo ESC subraya que las porciones responden a cambios en los precios relativos, tal modelo es particularmente apropiado para examinar innovaciones como cambios en política tributaria o en restricciones al comercio internacional, donde los cambios en precios relativos son probables. Un área importante de tal investigación ha sido el impacto del Tratado de Libre Comercio de América del Norte para Canadá, México y Estados Unidos. En general, estos modelos determinan que es de esperar que todos los países involucrados se beneficien con ese tratado, pero que los beneficios para México podrían ser los mayores, ya que este país está experimentando el mayor cambio en los precios relativos. Kehoe y Kehoe (1995) presentan varios modelos de equilibrio computables que los economistas han usado en estos exámenes.[1]

E4.4 El sistema de demanda casi ideal

Otra manera de estudiar las porciones presupuestales es a partir de una función de gasto específica. Este método es especialmente conveniente porque el teorema de la envolvente demuestra que las porciones presupuestales pueden derivarse directamente de las funciones de gasto a través de la diferenciación logarítmica (para más detalles véase el capítulo 5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E(p_x, p_y, V)}{\partial \ln p_x} &= \frac{1}{E(p_x, p_y, V)} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial \ln p_x} \\ &= \frac{x p_x}{E} = s_x. \end{aligned} \quad \textbf{(viii)}$$

[1] En las extensiones del capítulo 13 se analiza con más detalle la investigación sobre el Tratado de Libre Comercio de América del Norte.

Deaton y Muellbauer (1980) hacen amplio uso de esta relación para estudiar las características de una clase particular de funciones de gasto que denominan *sistema de demanda casi ideal* (SDCI). Su función de gasto adopta la forma

$$\begin{aligned}\ln E(p_x, p_y, V) = a_0 + a_1 \ln p_x + a_2 \ln p_y \\ + 0.5b_1(\ln p_x)^2 + b_2 \ln p_x \ln p_y \\ + 0.5b_3(\ln p_y)^2 + Vc_0 p_x^{c_1} p_y^{c_2}.\end{aligned} \quad \textbf{(ix)}$$

Esta forma aproxima cualquier función de gasto. Para que la función sea homogénea de grado uno en los precios sus parámetros deben cumplir las restricciones $a_1 + a_2 = 1$, $b_1 + b_2 = 0$, $b_2 + b_3 = 0$ y $c_1 + c_2 = 0$. El uso de los resultados de la ecuación viii muestra que para esta función

$$\begin{aligned}s_x = a_1 + b_1 \ln p_x + b_2 \ln p_y + c_1 V c_0 p_x^{c_1} p_y^{c_2}, \\ s_y = a_2 + b_2 \ln p_x + b_3 \ln p_y + c_2 V c_0 p_x^{c_1} p_y^{c_2}.\end{aligned} \quad \textbf{(x)}$$

Nótese que, dadas las restricciones de los parámetros, $s_x + s_y = 1$. Hacer uso de la relación inversa entre las funciones de utilidad indirecta y de gasto, así como de cierta manipulación algebraica adicional, simplifica estas ecuaciones de porciones presupuestales de una manera adecuada para la estimación econométrica:

$$\begin{aligned}s_x = a_1 + b_1 \ln p_x + b_2 \ln p_y + c_1(E/p), \\ s_y = a_2 + b_2 \ln p_x + b_3 \ln p_y + c_2(E/p),\end{aligned} \quad \textbf{(xi)}$$

donde p es un índice de precios definido por

$$\begin{aligned}\ln p = a_0 + a_1 \ln p_x + a_2 \ln p_y + 0.5b_1(\ln p_x)^2 \\ + b_2 \ln p_x \ln p_y + 0.5b_3(\ln p_y)^2.\end{aligned} \quad \textbf{(xii)}$$

En otras palabras, las ecuaciones de porciones del SDCI establecen que las porciones presupuestales son lineales en los logaritmos de precios y en los gastos totales reales. En la práctica, los índices de precios más simples suelen sustituirse por el más bien complejo índice dado en la ecuación xii, aunque existe cierta controversia sobre esta práctica (véanse las extensiones del capítulo 5).

Patrones de gasto británicos

Entre 1954 y 1974, Deaton y Muellbauer aplican este sistema de demanda al estudio de los patrones de gasto británicos. Determinan que los alimentos y la vivienda tienen coeficientes negativos de gastos reales, lo que implica que la porción del ingreso que se dedica a esos conceptos disminuye (al menos en Gran Bretaña) a medida que la gente enriquece. Estos autores detectan asimismo efectos significativos de los precios relativos en muchas de sus ecuaciones de porciones, además de que los precios tienen efectos especialmente grandes en la explicación de la parte de los gastos que se asignan a transporte y comunicación. Al aplicar el modelo del SDCI a datos reales, estos autores también encuentran varias dificultades econométricas, la más importante de las cuales es que muchas de las ecuaciones no parecen cumplir las restricciones necesarias para la homogeneidad. Abordar este tipo de asuntos ha sido un tema relevante en investigaciones adicionales sobre este sistema de demanda.

Referencias

Behrman, Jere R. "Is Variety the Spice of Life? Implications for Caloric Intake", *Review of Economics and Statistics* (noviembre de 1989), pp. 666-672.

Deaton, Angus y John Muellbauer. "An Almost Ideal Demand System", *American Economic Review* (junio de 1980), pp. 312-326.

Hyashi, Fumio. "Is the Japanese Extended Family Altruistically Linked? A Test Based on Engel Curves", *Journal of Political Economy* (junio de 1995), pp. 661-674.

Kehoe, Patrick J. y Timothy J. Kehoe. *Modeling North American Economic Integration*, Kluwer Academic Publishers, Londres, 1995.

Oczkowski, E. y N. E. Philip. "Household Expenditure Patterns and Access to Consumer Goods in a Transitional Economy", *Journal of Economic Development* (junio de 1994), pp. 165-183.

Stone, R. "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis", *Economic Journal* (septiembre de 1954), pp. 511-527.