siderar las segundas derivadas parciales de la función. Una primera condición (que se desprende en forma obvia del caso de una variable) es que la segunda derivada parcial propia de cualquier variable f_{ii} debe ser negativa. Si reducimos nuestra atención a movimientos en una sola dirección, un máximo verdadero debe caracterizarse por un patrón en el que la pendiente de la función va de positiva (ascendente) a cero (plana) y a negativa (descendente). Esto es lo que significa la condición matemática $f_{ii} < 0$. Por desgracia, las condiciones que aseguran el valor de los decrementos f para movimientos en cualquier dirección arbitraria involucran a todas las segundas derivadas parciales. Más adelante se analizará un ejemplo de dos variables, pero el caso general se examina idealmente con álgebra matricial (véanse las extensiones de este capítulo). Para la teoría económica, sin embargo, el hecho de que las segundas derivadas parciales propias deban ser negativas para un máximo, suele ser lo más importante.

TEOREMA DE LA ENVOLVENTE

Una de las principales aplicaciones de la idea de las funciones implícitas, que se usará muchas veces en este libro, es el *teorema de la envolvente*, que concierne la forma en que el valor óptimo de una función particular varía cuando un parámetro de la función también varía. Dado que muchos de los problemas económicos que estudiaremos conciernen a los efectos de variar un parámetro (por ejemplo, el efecto que tendrán las variaciones de precio de mercado de un producto respecto a las compras de un individuo), este es un tipo de cálculo que haremos con frecuencia. El teorema de la envolvente suele brindar un cómodo atajo para resolver el problema.

Un ejemplo específico

Quizá la manera más fácil de entender el teorema de la envolvente sea mediante un ejemplo. Supóngase que y es la función de una variable (x) y un parámetro (a), dada por

$$y = x^2 + ax. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Para diferentes valores del parámetro a, esta función representa una familia de parábolas invertidas. Si se le asigna a a un valor específico, la ecuación 2.31 será una función exclusiva de x, y podrá calcularse el valor de x que maximiza a y. Por ejemplo, si $a = 1$, entonces $x^* = \frac{1}{2}$ y, para estos valores de x y a, $y = \frac{1}{4}$ (su valor máximo). De igual manera, si $a = 2$, entonces $x^* = 1$ y $y^* = 1$. De ahí que un incremento de 1 en el valor del parámetro a aumente el valor máximo de y en $\frac{3}{4}$. En la tabla 2.1 se usan valores integrales de a entre 0 y 6 para calcular los valores óptimos de x y los valores asociados del objetivo, y. Nótese que cuando a aumenta, el valor máximo de y también aumenta. Esto se ilustra asimismo en la figura 2.3, la cual muestra que la relación entre a y y^* es cuadrática. Ahora queremos calcular explícitamente cómo variar y^* al variar el parámetro a.

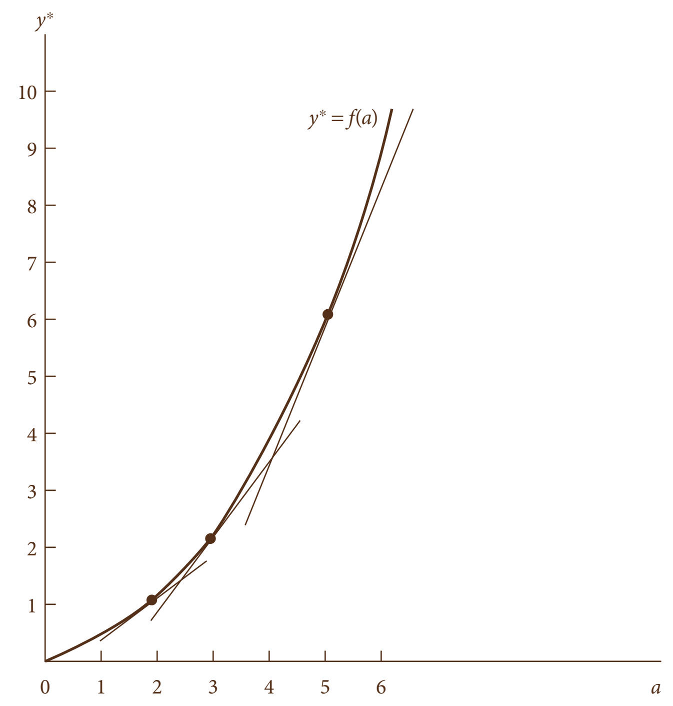
TABLA 2.1 VALORES ÓPTIMOS DE y Y x PARA VALORES ALTERNOS DE a EN $y = -x^2 + ax$

Valor de a	Valor de x^*	Valor de y^*
0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2	1	1
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	2	4
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
6	3	9

FIGURA 2.3

Ilustración del teorema de la envolvente.

El teorema de la envolvente establece que la pendiente de la relación entre y^* (el valor máximo de y) y el parámetro a puede hallarse calculando la pendiente de la relación auxiliar que se determina sustituyendo los valores óptimos respectivos de x en la función objetivo y calculando $\partial y/\partial a$.



Un método directo que toma tiempo

El teorema de la envolvente establece que hay dos formas equivalentes en las que podemos hacer este cálculo. Primero puede calcularse directamente la pendiente de la función en la figura 2.3. Para ello debe despejarse el valor óptimo de x para cualquier valor de a en la ecuación 2.32:

$$\frac{dy}{dx} = -2x + a = 0;$$

de ahí que

$$x^* = \frac{a}{2}.$$

Al sustituir este valor de x^* en la ecuación 2.32 da

$$\begin{aligned} y^* &= -(x^*)^2 + a(x^*) \\ &= -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

justo la relación que se muestra en la figura 2.3. Con base en la ecuación previa es fácil ver que

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} \qquad \textbf{(2.33)}$$

y, por ejemplo, en $a = 2$, $dy^*/da = 1$. Es decir, cerca de $a = 2$ el impacto marginal del aumento de a es incrementar y^*en la misma cantidad. Cerca de $a = 6$, todo pequeño aumento en a incrementará y^* tres veces esa variación. La tabla 2.1 ilustra este resultado.

El atajo de la envolvente

Llegar a esta conclusión fue algo complicado. Tuvimos que hallar el valor óptimo de x para cada valor de a y luego sustituir este valor de x^* en la ecuación para y. En casos más generales esto puede ser oneroso porque requiere maximizar repetidamente la función objetivo. El teorema de la envolvente, al ofrecer otro método, establece que para pequeñas variaciones en a, dy^*/da puede estimarse manteniendo *x en su valor óptimo* y calculando simplemente $\partial y/\partial a$ a partir directamente de la función objetivo.

Proceder de esta manera da

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\bigg|_{x=x^*(a)} = \frac{\partial(-x^2 + ax)}{\partial a}\bigg|_{x=x^*(a)} = x^*(a) \qquad \textbf{(2.34)}$$

La notación aquí es un recordatorio de que la derivada parcial usada en el teorema de la envolvente debe evaluarse en el valor de x el cual es óptimo para el valor particular del parámetro a. En la ecuación 2.32 demostramos que, para cualquier valor de a, $x^*(a)=a/2$. La sustitución en la ecuación 2.34 produce ahora:

$$\frac{dy^*}{da} = x^*(a) = \frac{a}{2} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Este es justo el resultado obtenido con anterioridad. La razón de que estos dos métodos den resultados idénticos se ilustra en la figura 2.3. Las tangentes que aparecen en esta figura reportan valores de y para una x^* *fija*. Las pendientes de las tangentes son $\partial y/\partial a$. Evidentemente en y^* esta pendiente proporciona el valor que buscamos.

Este resultado es general y lo usaremos a lo largo de este libro para simplificar nuestro análisis. En suma, el teorema de la envolvente establece que el cambio en el valor óptimo de una función respecto a un parámetro de dicha función puede hallarse diferenciando parcialmente la función objetivo y manteniendo a x en su valor óptimo. Es decir,

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial y}{\partial a}\{x = x^*(a)\}, \qquad \textbf{(2.36)}$$

donde la notación ofrece nuevamente el recordatorio de que $\partial y/\partial a$ debe calcularse en el valor de x óptimo para el valor específico del parámetro a examinado.

Caso de muchas variables

Un teorema de la envolvente análogo es válido para el caso en que y es una función de diversas variables. Supóngase que y depende de un conjunto de x $(x_1, \ldots, x_n)$ y de un parámetro particular de interés, digamos a:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n, a) \qquad \textbf{(2.37)}$$

Determinar un valor óptimo de y consistiría en resolver n ecuaciones de primer orden de la forma

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \textbf{(2.38)}$$

y una solución de este proceso daría valores óptimos para esas x $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ que dependerían implícitamente del parámetro a. Suponiendo que se satisfacen las condiciones de segundo orden, entonces se aplicaría el teorema de la función implícita el cual garantiza la resolución de cada x_i^* como una función del parámetro a:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(a), \\ x_2^* &= x_2^*(a), \\ &\vdots \\ x_n^* &= x_n^*(a). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Sustituir estas funciones en nuestro objetivo original (ecuación 2.37) produce una expresión en la que el valor óptimo de y (digamos y^*) depende del parámetro a, directa e indirectamente, mediante el efecto de a en las x^*:

$$y^* = f[x_1^*(a), x_2^*(a), \ldots, x_n^*(a), a].$$

La diferenciación total de esta expresión respecto a a produce

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{da} + \frac{\partial f}{\partial a}. \tag{2.40}$$

Pero dadas las condiciones de primer orden todos estos términos, excepto el último, son iguales a 0 si las x están en sus valores óptimos. De ahí que una vez más tengamos el resultado envolvente:

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a}, \tag{2.41}$$

donde esta derivada debe evaluarse en los valores óptimos de las x.

EJEMPLO 2.6 Teorema de la envolvente: el estado de salud examinado

En el ejemplo 2.5 se revisaron los valores máximos de la función estado de salud

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \tag{2.42}$$

y se determinó que

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1, \\ x_2^* &= 2, \end{aligned} \tag{2.43}$$

y

$$y^* = 10.$$

Supongamos ahora que se usa el parámetro arbitrario a en vez de la constante 10 en la ecuación 2.42. Aquí a podría representar una medida de la mejor salud posible para una persona, aunque este valor variaría obviamente de una persona a otra. De ahí que

$$y = f(x_1, x_2, a) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + a \tag{2.44}$$

En este caso los valores óptimos de x_1 y x_2 no dependen de a (siempre son $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$; por tanto, en esos valores óptimos tenemos

$$y^* = a \tag{2.45}$$

y

$$\frac{dy^*}{da} = 1. \tag{2.46}$$