FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Los problemas económicos rara vez implican funciones de una variable. La mayoría de las metas de interés para los agentes económicos depende de varias variables y las opciones que se establecen entre estas variables. Por ejemplo, la *utilidad* que un individuo recibe de la actividad como consumidor depende de la cantidad de cada bien consumido. Para la *función de producción* de una empresa, la cantidad producida depende de la cantidad de trabajo, capital y tierra dedicada a la producción. En estas circunstancias esta dependencia de una variable (y) respecto a una serie de otras ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) se denota con

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.10}$$

Derivadas parciales

Nos interesan el punto en que y llega a un máximo y las opciones que debemos resolver para llegar a dicho punto. De nuevo resulta conveniente imaginar que el agente cambia las variables que tiene a su disposición (las x) para localizar un máximo. Por desgracia, para una función de varias variables, la idea de *la* derivada no está claramente definida. Así como lo empinado de una cuesta para subir por una montaña depende de la dirección que tomes, la pendiente (o derivada) de la función depende de la dirección en que se le calcule. Usualmente las únicas pendientes direccionales de interés son las que se obtienen incrementando una de las x y manteniendo constantes todas las demás variables (la analogía del ascenso de una montaña podría ser la medición de pendientes sólo en dirección Norte-Sur o Este-Oeste). Estas pendientes direccionales se llaman *derivadas parciales*. La derivada parcial de y respecto a (es decir, en dirección a) x_1 se denota con

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{o} \quad f_{x_1} \quad \text{o} \quad f_1.$$

Se entiende que al calcular esta derivada todas las demás x se mantienen constantes. Cabe enfatizar nuevamente que el valor numérico de esta pendiente depende del valor de x_1 y de los valores (preasignados y constantes) de $x_2, \ldots, x_n$.

Una definición un poco más formal de la derivada parcial es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) - f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{h}, \tag{2.11}$$

donde la notación quiere indicar que $x_2, \ldots, x_n$ se mantienen constantes en los valores preasignados $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ para que sólo pueda estudiarse el efecto de cambiar x_1. Las derivadas parciales respecto a las demás variables $x_2, \ldots, x_n$, se calcularían en forma similar.

Cálculo de derivadas parciales

Es fácil calcular derivadas parciales. La estimación procede, en cuanto a la derivada usual, *tratando* a $x_2, \ldots, x_n$ *como constantes* (lo que en realidad son en la definición de una derivada parcial). Considérense los ejemplos siguientes.

1. Si $y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 2ax_1 + bx_2$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = bx_1 + 2cx_2.$$

Obsérvese que $\partial f/\partial x_1$ es en general una función tanto de x_1 como de x_2; así, su valor dependerá de los valores particulares asignados a estas variables. También depende de los parámetros a, b y c, que no varían cuando x_1 y x_2 sí varían.

2. Si $y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = ae^{ax_1+bx_2}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = be^{ax_1+bx_2}.$$

3. Si $y = f(x_1, x_2) = a \ln x_1 + b \ln x_2$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{a}{x_1}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = \frac{b}{x_2}.$$

Obsérvese aquí que el tratamiento de x_2 como constante en la derivación de $\partial f/\partial x_1$ causa que el término $b \ln x_2$ desaparezca en la diferenciación, porque no varía cuando x_1 varía. En este caso, a diferencia de nuestros ejemplos anteriores, la magnitud del efecto de x_1 en y es independiente del valor de x_2. En otros casos, el efecto de x_1 en y dependerá del nivel de x_2.

Derivadas parciales y el supuesto *ceteris paribus*

En el capítulo 1 se describió la manera en que los economistas usan en sus modelos el supuesto *ceteris paribus* para mantener constantes varias influencias externas, a fin de que la relación particular estudiada pueda explorarse en un marco simplificado. Las derivadas parciales es el modo matemático preciso de representar dicho método; es decir, muestran cómo las variaciones en una variable afectan algún resultado cuando otras influencias se mantienen constantes, justo lo que los economistas necesitan en sus modelos. Por ejemplo, la curva de demanda de Marshall muestra la relación entre precio (p) y cantidad (q) demandada cuando otros factores se mantienen constantes. Usando derivadas parciales podríamos representar la pendiente de esta curva como $\partial q/\partial p$ para indicar los supuestos *ceteris paribus* en vigor. La ley fundamental de la demanda —precio y cantidad se mueven en direcciones opuestas cuando otros factores no cambian— se refleja, por tanto, en el enunciado matemático $\partial q/\partial p < 0$. Una vez más el uso de una derivada parcial sirve como recordatorio de los supuestos *ceteris paribus* en torno a la ley de la demanda.

Derivadas parciales y unidades de medida

En matemáticas se presta relativamente poca atención a la forma en que se miden las variables. De hecho, la mayoría de las veces no se hace mención explícita del asunto. Sin embargo, las variables que se usan en economía suelen referirse a magnitudes reales; por tanto, debemos ocuparnos de cómo se miden. Quizá la consecuencia más importante de elegir unidades de medida es que las derivadas parciales suelen usarse para resumir comportamientos económicos que reflejen estas unidades. Por ejemplo, si q representa la cantidad de gasolina demandada por todos los consumidores estadounidenses durante un determinado año (medida en miles de millones de galones) y p representa el precio en dólares por galón, entonces $\partial q/\partial p$ medirá la variación en la demanda (en miles de millones de galones por año) en relación con un cambio de un dólar por galón en el precio. La dimensión numérica de esta derivada depende de cómo se midan q y p. La decisión de medir el consumo en millones de galones por año multiplicaría la dimensión de la derivada por 1 000, mientras que una decisión de medir el precio por galón en centavos la reduciría en un factor de 100.

La dependencia de la dimensión numérica de derivadas parciales respecto a las unidades de medida elegidas plantea problemas para los economistas. Aunque muchas teorías económicas hacen predicciones sobre el signo (dirección) de las derivadas parciales, toda predicción sobre la magnitud numérica de esas derivadas dependerá de cómo los autores eligen medir sus variables. Hacer comparaciones entre estudios podría resultar prácticamente imposible, en especial dada la amplia variedad de sistemas de medición en uso en todo el mundo. Por esta razón los economistas decidieron adoptar un modo diferente, sin uso de unidades, para medir impactos cuantitativos.

Elasticidad, una definición general

Los economistas usan elasticidades para resumir prácticamente todos los impactos cuantitativos de su interés. Puesto que tales medidas se centran en el efecto proporcional de las variaciones de una variable en otra, que no tienen unidades; las unidades "se cancelan" al calcular la elasticidad. Por ejemplo, supóngase que y es una función de x (que podemos denotar con $y(x)$). Así, la elasticidad de y respecto de x (que denotaremos con $e_{y,x}$) se define como

$$e_{y,x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy(x)}{dx} \cdot \frac{x}{y} \tag{2.12}$$

Si la variable y dependiera de varias variables aparte de x (como sucede a menudo), la derivada de la ecuación 2.12 sería reemplazada por una derivada parcial. En cualquier caso nótese cómo las unidades en que se miden y y x se cancelan en la definición de elasticidad; el resultado es una cifra que es un número puro sin dimensiones. Esto hace posible que los economistas comparen elasticidades entre países diferentes o asimismo entre diferentes bienes. Ya debes conocer las elasticidades del precio de la demanda y la oferta, las cuales suelen tratarse en un primer curso de economía. A lo largo de este libro hallarás muchos de estos conceptos.

EJEMPLO 2.2 Elasticidad y forma funcional

La definición en la ecuación 2.12 deja en claro que la elasticidad debe evaluarse en un punto específico de una función. En general, se esperaría que el valor de este parámetro varíe en diferentes rangos de la función. Esta observación aparece claramente en el caso en que y es una función lineal de x de la forma

$$y = a + bx + \text{otros términos.}$$

En este caso,

$$e_{y,x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{y} = b \cdot \frac{x}{a + bx + \ldots}, \tag{2.13}$$

lo que deja en claro que $e_{y,x}$ no es constante. De ahí que para las funciones lineales sea especialmente valioso señalar el punto en el que se estima la elasticidad.

Si la relación funcional entre y y x es de la forma exponencial

$$y = ax^b,$$

la elasticidad es una constante, independientemente de en qué lugar se mida:

$$e_{y,x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = abx^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b.$$

Una transformación logarítmica de esta ecuación también brinda una conveniente definición alterna de elasticidad. Dado que

$$\ln y = \ln a + b \ln x,$$

tenemos

$$e_{y,x} = b = \frac{d \ln y}{d \ln x}. \quad \textbf{(2.14)}$$

De ahí que las elasticidades puedan calcularse mediante "diferenciación logarítmica". Como veremos, esta es con frecuencia la forma más fácil de proceder al hacer estos cálculos.

PREGUNTA: ¿Existen modos funcionales, además del exponencial, que tengan una elasticidad constante cuando menos en algún rango?

Derivadas parciales de segundo orden

La derivada parcial de una derivada parcial es directamente análoga a la segunda derivada de la función de una variable y se llama *derivada parcial de segundo orden*. Esta puede escribirse como

$$\frac{\partial(\partial f/\partial x_i)}{\partial x_j}$$

o más simplemente como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{ij}. \quad \textbf{(2.15)}$$

En cuanto a los ejemplos ya expuestos:

1. $y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$
   $f_{11} = 2a$
   $f_{12} = b$
   $f_{21} = b$
   $f_{22} = 2c$

2. $y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$
   $f_{11} = a^2 e^{ax_1 + bx_2}$
   $f_{12} = abe^{ax_1 + bx_2}$
   $f_{21} = abe^{ax_1 + bx_2}$
   $f_{22} = b^2 e^{ax_1 + bx_2}$

3. $y = a \ln x_1 + b \ln x_2$
   $f_{11} = -ax_1^{-2}$
   $f_{12} = 0$
   $f_{21} = 0$
   $f_{22} = -bx_2^{-2}$

Teorema de Young

Estos ejemplos ilustran el resultado matemático de que, en condiciones generales, el orden en que se hace la diferenciación parcial para evaluar derivadas parciales de segundo orden no importa. Es decir,

$$f_{ij} = f_{ji} \tag{2.16}$$

para cualquier par de variables x_i, x_j. Este resultado se conoce como *teorema de Young*. Para una explicación intuitiva de este teorema volvamos a la analogía del ascenso de una montaña. En dicho ejemplo el teorema establece que la ganancia en elevación que experimenta un alpinista depende de las direcciones que se tomen y de las distancias recorridas, pero no del orden en que se presenten. Esto es, la ganancia en altitud es independiente de la ruta seguida siempre y cuando el alpinista proceda de una serie de coordenadas cartográficas a otra. Él puede, por ejemplo, avanzar una milla al Norte y luego una al Este, o proceder en el orden opuesto avanzando primero una milla al Este y luego una más al Norte. En cualquier caso, la ganancia en elevación es la misma, porque en ambos casos el alpinista se mueve de un lugar específico a otro. En capítulos posteriores haremos buen uso de este resultado porque brinda una manera conveniente de mostrar algunas de las predicciones que los modelos económicos hacen acerca del comportamiento.[2]

Usos de parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de segundo orden desempeñarán un papel importante en muchas teorías económicas que se desarrollan a lo largo de este libro. Probablemente los ejemplos más relevantes tengan que ver con la parcial "propia" de segundo orden, f_{ii}. Esta función muestra cómo la influencia marginal de x_i en y (es decir, $\partial y/\partial x_i$) cambia al incrementarse el valor de x_i. Un valor negativo de f_{ii} es la manera matemática de indicar la idea económica de efectividad marginal decreciente. De igual forma, la parcial cruzada f_{ij} indica cómo la efectividad marginal de x_i cambia al incrementarse x_j. El signo de este efecto podría ser positivo o negativo. El teorema de Young indica que, en general, esos efectos cruzados son simétricos. Generalmente las derivadas parciales de segundo orden de una función dan información sobre la curvatura de la función. Más adelante veremos cómo esa información desempeña un papel importante en la determinación de si se satisfacen varias condiciones de segundo orden para un máximo. Estas también desempeñan un papel importante en la determinación de los signos de gran número de derivadas relevantes en la teoría económica.

La regla de cadena con muchas variables

Calcular derivadas parciales puede ser más bien complicado en casos en los que algunas variables dependen de otras. Como veremos, en muchos problemas económicos puede ser difícil saber cómo proceder exactamente en la diferenciación de funciones complejas. En esta sección se ilustran casos simples que te ayudarán a hacerte una idea general. Se empezará examinando cómo la "regla de cadena" ya explicada en el contexto de una variable puede generalizarse para muchas variables. Específicamente, supongamos que y es una función de tres variables, $y = f(x_1, x_2, x_3)$. Asimismo, supongamos que cada una de estas x es en sí misma la función de un parámetro, digamos a. De ahí que pueda escribirse $y = f[(x_1(a), x_2(a), x_3(a)]$. Ahora podemos preguntarnos cómo una variación en a afecta el valor de y, usando la regla de cadena:

$$\frac{dy}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{da} \tag{2.17}$$

[2] El teorema de Young implica que la matriz de las derivadas parciales de segundo orden de una función es simétrica. Esta simetría ofrece varios discernimientos económicos. Para una breve introducción a los conceptos matriciales usados en economía, véanse las extensiones de este capítulo.

Es decir, las variaciones en a afectan a cada una de las x, y luego estas variaciones en las x afectan al valor final de y. Por supuesto que algunos de los términos en esta expresión pueden ser iguales a cero. Tal sería el caso si una de las x no fuera afectada por a o si una x particular no tuviera ningún efecto en y (en cuyo caso no debería estar en la función). Pero esta versión de la regla de cadena muestra que a puede influir en y a través de muchas rutas.[3] En nuestros modelos económicos desearemos estar seguros de que todas esas rutas se tomen en cuenta.

EJEMPLO 2.3 Uso de la regla de cadena

Como un ejemplo simple (y quizá poco apetitoso) supongamos que cada semana un fanático de la pizza consume tres tipos de pizza, denotados por x_1, x_2 y x_3. La pizza tipo 1 es una pizza simple de queso que cuesta p por unidad. La pizza tipo 2 consta de dos ingredientes más y cuesta $2p$. La pizza tipo 3 es la especialidad de la casa, incluye cinco ingredientes y cuesta $3p$. Para garantizar un menú (modestamente) diversificado este fanático decide asignar 30 dólares a la semana para cada tipo de pizza. Aquí desearemos examinar cómo el número total de pizzas adquiridas se ve afectado por el precio subyacente p. Nótese que este problema incluye una variable exógena, p, fijada por la pizzería. Las cantidades adquiridas de cada pizza (y las compras totales) son las variables endógenas en el modelo.

Dada la manera en que este fanático presupuesta sus compras de pizza, la cantidad adquirida de cada tipo sólo depende del precio p. Específicamente, $x_1 = 30/p$, $x_2 = 30/2p$, $x_3 = 30/3p$. Ahora las compras totales de pizza (y) están dadas por

$$y = f[x_1(p), x_2(p), x_3(p)] = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p) \tag{2.18}$$

Aplicar la regla de cadena de la ecuación 2.17 a esta función produce:

$$\frac{dy}{dp} = f_1 \cdot \frac{dx_1}{dp} + f_2 \cdot \frac{dx_2}{dp} + f_3 \cdot \frac{dx_3}{dp} = -30p^{-2} - 15p^{-2} - 10p^{-2} = -55p^{-2} \tag{2.19}$$

Podemos interpretar esto con una ilustración numérica. Supongamos que inicialmente $p = 5$. Con este precio, las compras totales de pizza serán de 11 unidades. La ecuación 2.19 implica que cada incremento en el precio unitario reducirá las compras en 2.2 ($= 55/25$) unidades, aunque ese cambio es demasiado grande para que el cálculo (que supone pequeñas variaciones) opere correctamente. Así, supongamos en cambio que p aumenta 5 centavos, a $p = 5.05$. La ecuación 2.19 predice ahora que las compras totales de pizza se reducirán en 0.11 unidades ($0.05 \times 55/25$). Si calculamos directamente las compras por unidades obtenemos $x_1 = 5.94$, $x_2 = 2.97$, $x_3 = 1.98$. De ahí que las unidades compradas sean 10.89; una reducción de 0.11 respecto al nivel original, justo lo que predijo la ecuación 2.19.

PREGUNTA: Debe ser obvio que una manera mucho más fácil de resolver este problema sea definir directamente las compras totales de unidades (y) como una función de p. Aporta una prueba usando este método y luego describe algunas razones por las que este método más simple no puede implementarse siempre.

Aquí podemos explicar con claridad un caso especial de esta regla. Supongamos que $x_3(a) = a$. Es decir, el parámetro a entra directamente en la determinación de $y = f[x_1(a), x_2(a), a]$. En este caso, el efecto de a en y puede escribirse como:[4]

$$\frac{dy}{da} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} \tag{2.20}$$

[3] Si las x en la ecuación 2.17 dependieran de varios parámetros, todas las derivadas en la ecuación serían derivadas parciales para indicar que la regla de cadena examina el efecto de sólo un parámetro a la vez, manteniendo constantes los demás.

[4] La expresión en la ecuación 2.20 se conoce como *derivada total* o *derivada completa* de la función f, aunque su uso no es consistente entre varios campos de las matemáticas aplicadas.

Esto indica que el efecto de a en y puede descomponerse en dos tipos de efectos: 1) un efecto directo (dado por f_a); y 2) un efecto indirecto que sólo opera mediante las formas en que a afecta a las x. En muchos problemas económicos analizar por separado estos dos efectos puede aportar discernimientos importantes.

Funciones implícitas

Si el valor de una función se mantiene constante se crea una relación implícita entre las variables independientes que entran en la función. Es decir, las variables independientes ya no pueden adoptar cualquier valor, sino sólo la serie de valores que resulta de que la función retenga el valor requerido. El examen de estas relaciones implícitas puede ofrecer a menudo otra herramienta de análisis para sacar conclusiones de modelos económicos.

Probablemente el resultado más útil provisto por este método sea la posibilidad de cuantificar las ventajas y desventajas inherentes a la mayoría de los modelos económicos. Aquí trataremos un caso simple. Considérese la función $y = f(x_1, x_2)$. Si mantenemos constante el valor de y hemos creado una relación implícita entre las x que muestra cómo las variaciones en ellas deben estar asociadas con el hecho de mantener constante el valor de la función. De hecho, en condiciones muy generales[5] (la más importante de las cuales es que $f_2 \neq 0$) es posible demostrar que el mantener constante a y permite crear una *función implícita* de la forma $x_2 = g(x_1)$. Aunque a veces calcular esta función puede ser difícil, la derivada de la función g se relaciona de una manera específica con las derivadas parciales de la función original f. Para demostrar esto, primero la función original se iguala con una constante (digamos cero) y se escribe como

$$y = 0 = f(x_1, x_2) + f(x_1, g(x_1)) \tag{2.21}$$

Usar la regla de cadena para diferenciar esta relación respecto a x_1 produce:

$$0 = f_1 + f_2 \cdot \frac{dg(x_1)}{dx_1} \tag{2.22}$$

Reordenar los términos da como resultado final

$$\frac{dg(x_1)}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}. \tag{2.23}$$

Así, hemos demostrado[6] que las derivadas parciales de la función f pueden usarse para derivar una expresión explícita de las disyuntivas entre x_1 y x_2. El ejemplo siguiente nos muestra cómo esto puede facilitar los cálculos en ciertas situaciones.

EJEMPLO 2.4 De nuevo una frontera de posibilidades de producción

En el ejemplo 1.3 se examinó una frontera de posibilidades de producción para dos bienes de la forma

$$x^2 + 0.25y^2 + 200. \tag{2.24}$$

Debido a que esta función se iguala con una constante es posible estudiar la relación entre las variables, usando el resultado de la función implícita:

[5] Para un análisis detallado de este teorema de la función implícita y cómo puede extenderse a varias variables véase Carl P. Simon y Lawrence Blume, *Mathematics for Economists* (W. W. Norton, Nueva York, 1994), capítulo 15.

[6] Un método alterno para comprobar este resultado emplea la diferencial total de f: $dy = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$. Establecer $dy = 0$ y reordenar los términos da el mismo resultado (suponiendo que pueda darse el paso, matemáticamente cuestionable, de dividir entre dx_1).