Una prueba más definitiva hace uso de las derivadas parciales de la ecuación 2.117. En este caso la condición de concavidad puede expresarse como

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22} - f_{12}^2 &= k^2(k-1)^2 x_1^{2k-2}x_2^{2k-2} - k^4 x_1^{2k-2}x_2^{2k-2} \\ &= x_1^{2k-2}x_2^{2k-2}[k^2(k-1)^2 - k^4] \\ &= x_1^{2k-1}x_2^{2k-1}[k^2(-2k+1)], \end{aligned} \quad \textbf{(2.120)}$$

y esta expresión es positiva (como lo requiere la concavidad) para

$$(-2k+1) > 0 \quad \text{o} \quad k < 0.5.$$

Por otro lado la función es convexa para $k > 0.5$.

Ilustración gráfica. La figura 2.4 ofrece ilustraciones tridimensionales de tres ejemplos específicos de esta función: para $k = 0.2$, $k = 0.5$ y $k = 1$. Adviértase que en los tres casos las curvas de nivel de la función tienen formas convexas hiperbólicas. Es decir, para cualquier valor fijo de y las funciones son similares. Esto indica la cuasi concavidad de la función. Las principales diferencias entre las funciones están ilustradas por la forma en que el valor de y aumenta al aumentar ambas x juntas. En la figura 2.4a (cuando $k = 0.2$), el aumento en y se reduce al incrementarse las x. Esto da a la función una forma redondeada, como una taza, que indica su concavidad. Para $k = 0.5$, y parece aumentar linealmente con incrementos en ambas x. Este es el límite entre concavidad y convexidad. Por último, cuando $k = 1$ (como en la figura 2.4c), los aumentos simultáneos en los valores de ambas x incrementan rápidamente y. La columna vertebral de la función es de forma convexa para reflejar esos rendimientos crecientes.

Un detenido análisis de la figura 2.4a sugiere que toda función cóncava será también cuasi cóncava. En el problema 2.8 se te pedirá demostrar que este es el caso. Este ejemplo muestra que lo contrario a esta afirmación no es real; las funciones cuasi cóncavas no necesariamente son cóncavas. La mayoría de las funciones que encontraremos en este libro ilustrarán asimismo este hecho; la mayoría será cuasi cóncava pero no forzosamente cóncava.

PREGUNTA: Explica por qué las funciones que se muestran en las figuras 2.4a y 2.4c tendrían valores máximos si las x estuvieran sujetas a una restricción lineal, pero sólo la gráfica en la figura 2.4a tendría un máximo restringido.

FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Muchas de las funciones que se desprenden naturalmente de la teoría económica tienen propiedades matemáticas adicionales. Un conjunto particularmente importante de propiedades tiene que ver con el modo en que se comportan las funciones cuando la totalidad (o la mayoría) de sus argumentos aumentan proporcionalmente. Esas situaciones surgen cuando hacemos preguntas como qué pasaría si todos los precios aumentaran 10 por ciento, o cómo cambiaría la producción de una empresa si duplicara todos los insumos que utiliza. Pensar en estas interrogantes conduce naturalmente al concepto de funciones homogéneas. Específicamente, se dice que una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado k si

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad \textbf{(2.121)}$$

Los ejemplos más importantes de funciones homogéneas son aquellos para los cuales $k = 1$ o $k = 0$. Es decir, cuando una función es homogénea de grado uno, una duplicación de todos sus argumentos duplica el valor de la función. Para funciones que son homogéneas de grado cero, una duplicación de todos sus argumentos deja sin variaciones el valor de la función. Las funciones también pueden ser homogéneas para las variaciones en sólo ciertos subconjuntos de sus argumentos; es decir, una duplicación de algunas de las x puede duplicar el valor de la función si los demás argumentos de la función se mantienen constantes. Usualmente, sin embargo, la homogeneidad se aplica a las variaciones en todos los argumentos de una función.

Homogeneidad y derivadas

Si una función es homogénea de grado k y puede diferenciarse, las derivadas parciales de la función serán homogéneas de grado $k - 1$. Una prueba de esto se desprende directamente de la definición de homogeneidad. Por ejemplo, diferenciar la ecuación 2.121 respecto a su primer argumento da

$$\frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial x_1} \cdot t = t^k \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}$$

o

$$f_1(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{k-1} f_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.122}$$

lo que demuestra que f_1 satisface la definición de homogeneidad de grado $k - 1$. Dado que las ideas marginales son tan frecuentes en la teoría microeconómica, esta propiedad indica que algunas propiedades importantes de efectos marginales pueden inferirse de las propiedades de la función subyacente.

Teorema de Euler

Otra caracterísitca útil de las funciones homogéneas puede demostrarse distinguiendo la definición de homogeneidad respecto al factor de proporcionalidad, t. En este caso, diferenciamos primero el miembro derecho de la ecuación 2.121 y luego el miembro izquierdo:

$$kt^{k-1} f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f_1(tx_1, \ldots, tx_n) + \cdots + x_n f_n(tx_1, \ldots, tx_n).$$

Si concedemos que $t = 1$, esta ecuación se convierte en

$$kf(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n f_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.123}$$

Esta ecuación se denomina *teorema de Euler* (en honor al matemático que también descubrió la constante e) para funciones homogéneas. Demuestra que para una función homogénea existe una relación definida entre los valores de la función y los valores de sus derivadas parciales. Varias relaciones económicas importantes entre funciones se basan en esta observación.

Funciones homotéticas

Una función homotética se forma al tomar una transformación monótona de una función homogénea.[18] Las transformaciones monótonas, por definición, preservan el orden de la relación entre los argumentos de una función y el valor de esa función. Si ciertos conjuntos de x producen valores más grandes de f, también producirán valores más grandes para una transformación monótona de f. Puesto que las transformaciones monótonas pueden adoptar muchas formas no es de esperar, sin embargo, que preserven una relación matemática exacta como la incorporada en funciones homogéneas. Consideremos, por ejemplo, la función $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Evidentemente, esta función es homogénea de grado 2; una duplicación de sus dos argumentos multiplicará el valor de la función por 4. Sin embargo, la función monótona que simplemente suma 1.0 a f [es decir, $F(f) = f + 1 = x_1 x_2 + 1$] no es homogénea en absoluto. Así, excepto en casos especiales, las funciones homotéticas no poseen las propiedades de homogeneidad de sus funciones subyacentes. Las funciones homotéticas, sin embargo, preservan una importante característica de las

[18] Dado que un caso limitante de una transformación monótona es dejar sin variaciones la función, todas las funciones homogéneas son también homotéticas.

funciones homogéneas: que las opciones contenidas por la función sólo dependen de la razón de las dos variables en juego, no de sus niveles absolutos. Para demostrar esto, recuérdese que la ecuación 2.23 señala que para una función de dos variables de la forma $y = f(x_1, x_2)$ la opción contenida entre las dos variables requeridas para mantener constante el valor de la función está dada por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Si suponemos que f es homogénea de grado k, sus derivadas parciales serán homogéneas de grado $k - 1$; por tanto, podemos escribir esta disyuntiva como:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{t^{k-1}f_1(tx_1, tx_2)}{t^{k-1}f_2(tx_1, tx_2)} = -\frac{f_1(tx_1, tx_2)}{f_2(tx_1, tx_2)}. \tag{2.124}$$

Sea ahora $t = 1/x_2$, de modo que la ecuación 2.124 se convierte en

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1/x_2, 1)}{f_2(x_1/x_2, 1)}, \tag{2.125}$$

lo que demuestra que las opciones contenidas en f sólo dependen de la razón de x_1 a x_2. Si aplicamos cualquier transformación monótona F (con $F' > 0$) a la función homogénea original f, las opciones contenidas por la nueva función homotética $F[f(x_1, x_2)]$ se mantienen sin variaciones:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F'f_1(x_1/x_2, 1)}{F'f_2(x_1/x_2, 1)} = -\frac{f_1(x_1/x_2, 1)}{f_2(x_1/x_2, 1)}. \tag{2.126}$$

En muchos apartados de este libro resultará instructivo analizar algunos resultados teóricos con gráficas bidimensionales y la ecuación 2.126 se puede usar para dirigir nuestra atención a las razones de las variables clave más que a sus niveles absolutos.

EJEMPLO 2.12 Propiedades cardinales y ordinales

En economía aplicada a veces es importante conocer la relación numérica exacta entre variables. Por ejemplo, en el estudio de la producción podría desearse conocer precisamente cuánta producción extra se generaría contratando otro trabajador. Esta es una pregunta acerca de las propiedades "cardinales" (es decir, numéricas) de la función de producción. En otros casos sólo podría interesar el orden en que se clasifican varios puntos. En la teoría de la utilidad, por ejemplo, suponemos que la gente puede clasificar paquetes de bienes y que seleccionará aquel con la más alta clasificación, pero que no hay valores numéricos únicos asignados a esas clasificaciones. Matemáticamente, las propiedades ordinales de las funciones son preservadas por cualquier transformación monótona porque, por definición, una transformación monótona preserva el orden. Usualmente, sin embargo, las propiedades cardinales no son preservadas por transformaciones monótonas arbitrarias.

Estas distinciones se ilustran con las funciones que se examinaron en el ejemplo 2.11. Ahí se estudiaron transformaciones monótonas de la función

$$f(x_1, x_2) = (x_1x_2)^k \tag{2.127}$$

considerando varios valores del parámetro k. Se demostró que la cuasi concavidad (una propiedad ordinal) fue preservada por todos los valores de k. De ahí que cuando se abordan problemas centrados en maximizar o minimizar esa función sujeta a restricciones lineales no debe preocupar cuál es precisamente la transformación que se usa. Por otro lado, la función en la ecuación 2.127 es cóncava (una propiedad cardinal) sólo para un rango reducido de valores de k. Muchas transformaciones monótonas destruyen la concavidad de f.