CAPÍTULO SIETE

Incertidumbre

En este capítulo se exploran algunos de los elementos básicos de la teoría del comportamiento individual en situaciones inciertas. Se analizará por qué a los individuos no les agrada el riesgo, así como los diversos métodos (compra de seguros, adquisición de más información y preservación de opciones) que pueden adoptar para reducirlo. De manera más general, este capítulo pretende ofrecer una breve introducción a asuntos planteados por la posibilidad de que la información sea imperfecta cuando los individuos toman decisiones de optimización de su utilidad. La sección "Extensiones" brinda una aplicación detallada de los conceptos de este capítulo al problema de la cartera, un problema central de economía financiera. Una cuestión que se aplazará hasta el capítulo 18 es aquella referente a cuando un individuo bien informado puede tomar ventaja de otro que esté mal informado en una transacción de mercado (información asimétrica).

ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

Muchas de las herramientas formales para modelizar la incertidumbre en situaciones económicas fueron originalmente desarrolladas en el campo de la estadística matemática. Algunas de estas herramientas se repasaron en el capítulo 2, y en este capítulo se hará amplio uso de los conceptos presentados ahí. Específicamente, a lo largo de este capítulo serán recurrentes cuatro ideas estadísticas.

- ***Variable aleatoria:*** Una variable aleatoria es aquella que registra, en forma numérica, los posibles resultados de un evento aleatorio.[1]
- ***Función de densidad de probabilidad*** (***FDP***): Función $f(x)$ que muestra las probabilidades asociadas con los posibles resultados de una variable aleatoria.
- ***Valor esperado de una variable aleatoria***: Resultado de una variable aleatoria que ocurrirá "en promedio". El valor esperado se denota con $E(x)$. Si x es una variable aleatoria discreta con n resultados, entonces $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$. Si x es una variable aleatoria continua, entonces $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$.
- ***Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria***: Estos conceptos miden la dispersión de una variable aleatoria respecto a su valor esperado. En el caso discreto, $\mathrm{Var}(x) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$; en el caso continuo, $\mathrm{Var}(x) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 f(x)\,dx$. La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

Como veremos, todos estos conceptos entrarán en juego cuando iniciemos nuestro examen del proceso de toma de decisiones de una persona que enfrenta varios resultados inciertos que pueden ser conceptualmente representados por una variable aleatoria.

[1] Cuando sea necesario distinguir entre variables aleatorias y variables no aleatorias se usará la notación $\tilde{x}$ para denotar el hecho de que la variable x es aleatoria en cuanto que adopta un número de resultados posibles aleatoriamente determinados. A menudo, sin embargo, no será necesario hacer esa distinción porque la aleatoriedad será evidente en el contexto del problema.

APUESTAS RAZONABLES E HIPÓTESIS DE LA UTILIDAD ESPERADA

Una apuesta "razonable" es una serie especificada de premios y probabilidades asociadas con un valor esperado de cero. Por ejemplo, si lanzas al aire una moneda con un amigo para ganar un dólar, el valor esperado de esta apuesta es igual a cero porque

$$E(x) = 0.5(+\$1) + 0.5(-\$1) = 0, \tag{7.1}$$

donde los beneficios se registran con un signo de suma y las pérdidas con un signo de resta. De igual forma un juego que prometía hacerte ganar 10 dólares, si el resultado del lanzamiento de una moneda era cara, pero que sólo te costaría 1 dólar, si el resultado era cruz, sería "no razonable" porque

$$E(x) = 0.5(+\$10) + 0.5(-\$1) = \$4.50. \tag{7.2}$$

Sin embargo, este puede convertirse fácilmente en un juego razonable, aportando simplemente una cuota de entrada de 4.50 dólares por el derecho a jugar.

Desde hace mucho se ha reconocido que la mayoría de los individuos preferirían no hacer apuestas razonables.[2] Con fines de entretenimiento las personas pueden apostar unos dólares al lanzar una moneda al aire, pero en general evitarían participar en un juego similar cuyo resultado fuera de $+\$1$ millón o $-\$1$ millón. Uno de los primeros matemáticos en estudiar los motivos de esta renuencia a incurrir en apuestas razonables fue Daniel Bernoulli, en el siglo XVIII.[3] Su examen de la famosa paradoja de San Petersburgo fue el punto de partida para prácticamente todos los estudios del comportamiento de los individuos en situaciones inciertas.

Paradoja de San Petersburgo

En la paradoja de San Petersburgo se propuso la apuesta siguiente: se lanza al aire una moneda hasta que caiga cara. Si cae cara por primera vez en el enésimo lanzamiento, el jugador recibe $\$2^n$. Esta apuesta tiene un número infinito de resultados (una moneda podría ser lanzada al aire constantemente hasta el día del juicio final sin que cayera cara nunca, aunque la probabilidad de esto es reducida), pero los primeros pueden consignarse fácilmente. Si x_i representa el premio concedido cuando cae cara en el intento de orden i, entonces

$$x_1 = \$2, x_2 = \$4, x_3 = \$8, \ldots, x_n = \$2^n. \tag{7.3}$$

La probabilidad de que caiga cara por primera vez en el intento de orden i es de $(\frac{1}{2})^i$; esta es la probabilidad de que caigan $(i - 1)$ cruces y luego cara. De ahí que las probabilidades de los premios dadas en la ecuación 7.3 sean

$$\pi_1 = \frac{1}{2}, \pi_2 = \frac{1}{4}, \pi_3 = \frac{1}{8}, \ldots, \pi_n = \frac{1}{2^n}. \tag{7.4}$$

Así, el valor esperado de la apuesta es infinito:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i (1/2^i) \\ &= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty. \end{aligned} \tag{7.5}$$

[2] Se supone que las apuestas analizadas aquí no producen en el juego más utilidad que la de los precios; de ahí que la observación de que muchas personas apuestan de manera "no razonable" no es necesariamente una refutación de este enunciado. Más bien, de esos individuos puede suponerse, razonablemente, que derivan cierta utilidad de las circunstancias asociadas con la ejecución del juego. Por tanto, es posible diferenciar el aspecto de consumo de apostar del aspecto de riesgo puro.

[3] Esta paradoja debe su nombre a la ciudad en la que se publicó el manuscrito original de Bernoulli. Reimpresión en D. Bernoulli, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica*, núm. 22 (enero de 1954), pp. 23-36.

Cierta introspección, sin embargo, debería convencer a cualquiera de que ningún jugador pagaría mucho (y menos aún el infinito) por hacer esta apuesta. Si se cobraran 1 000 millones de dólares por entrar al juego, indudablemente que no habría jugadores, pese al hecho de que 1 000 millones de dólares es una cantidad considerablemente menor que el valor esperado del juego. Esta es entonces la paradoja: la apuesta de Bernoulli no vale en cierto sentido su (infinito) valor esperado en dólares.

UTILIDAD ESPERADA

La solución de Bernoulli a esta paradoja fue argüir que los individuos no se interesan directamente en los premios en dinero de una apuesta; más bien, responden a la utilidad que el dinero proporciona. Si suponemos que la utilidad marginal de la riqueza decrece al incrementar la riqueza, la apuesta de San Petersburgo puede converger con un valor finito de *utilidad esperada*, aunque su valor monetario esperado sea infinito. Puesto que la apuesta sólo brinda una utilidad esperada finita, los individuos estarían dispuestos a pagar una cantidad finita por hacerla. El ejemplo 7.1 examina algunos asuntos relacionados con la solución de Bernoulli.

EJEMPLO 7.1 Solución de Bernoulli a la paradoja y sus deficiencias

Supón, como hizo Bernoulli, que la utilidad de cada premio en la paradoja de San Petersburgo está dada por

$$U(x_i) = 1\mathrm{n}(x_i). \tag{7.6}$$

Esta función de utilidad logarítmica exhibe una utilidad marginal decreciente (es decir, $U' > 0$ pero $U'' < 0$), y el valor de la utilidad esperada de este juego converge en un número finito:

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln(2^i). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Cierta manipulación de esta expresión resulta[4] en que la utilidad esperada de esta apuesta es 1.39. Por tanto un individuo con este tipo de función de utilidad podría estar dispuesto a invertir recursos que, de lo contrario, producirían hasta 1.39 unidades de utilidad (cierta riqueza de aproximadamente 4 dólares proporciona esta utilidad) comprando el derecho a ejecutar este juego. En consecuencia, la suposición de que los grandes premios prometidos por la paradoja de San Petersburgo encontrarían una utilidad marginal decreciente permitió a Bernoulli ofrecer una solución a la paradoja.

Utilidad ilimitada. Lamentablemente, la solución de Bernoulli a la paradoja de San Petersburgo no resuelve por completo el problema. Mientras no haya un límite superior a la función de utilidad la paradoja puede regenerarse redefiniendo los premios de la apuesta. Por ejemplo, con la función de utilidad logarítmica los premios pueden fijarse como $x_i = e^{2^i}$, en cuyo caso

$$U(x_i) = \ln\left[e^{2^i}\right] = 2^i \tag{7.8}$$

y la utilidad esperada de la apuesta sería nuevamente infinita. Desde luego que los premios en esta apuesta redefinida son grandes. Por ejemplo, si en el quinto lanzamiento cayera cara por primera vez, una persona ganaría $e^{2^5} = 79$ billones de dólares, aunque la probabilidad de ganar esto sería de sólo $1/2^5 = 0.031$.

[4] *Prueba:*

$$\text{utilidad esperada} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} \cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}.$$

Pero es posible demostrar que el valor de esta serie infinita final es de 2. De ahí que la utilidad esperada $= 2 \ln 2 = 1.39$.

A muchos observadores les parece improbable la idea de que los individuos pagarían mucho (digamos billones de dólares) para participar en juegos con pocas probabilidades de obtener premios tan grandes. De ahí que, en muchos sentidos, el juego de San Petersburgo siga siendo una paradoja.

PREGUNTA: He aquí dos soluciones alternas a la paradoja de San Petersburgo. Calcula, para cada una, el valor esperado del juego original.

1. Supón que los individuos asumen que cualquier probabilidad menor que 0.01 es de hecho cero.
2. Supón que la función de utilidad de los premios de San Petersburgo está dada por

$$U(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i \leq 1\,000\,000, \\ 1\,000\,000 & \text{si} \quad x_i > 1\,000\,000. \end{cases}$$

EL TEOREMA VON NEUMANN-MORGENSTERN

Una de las muchas contribuciones importantes a la parte 3 de nuestro texto es el libro de John von Neumann y Oscar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Teoría de los juegos y comportamiento económico), quienes desarrollaron un fundamento matemático para la solución de Bernoulli a la paradoja de San Petersburgo.[5] En particular, elaboraron axiomas básicos de racionalidad y demostraron que cualquier individuo racional, en ese sentido, tomaría decisiones en condiciones de incertidumbre, aunque tuviera una función de utilidad sobre el dinero de $U(x)$ y optimizara el valor esperado de $U(x)$ (más que el valor esperado del mismo beneficio monetario x). Aunque la mayoría de estos axiomas parece eminentemente razonable a primera vista, se han planteado muchas preguntas importantes sobre su sustentabilidad.[6] Sin embargo, aquí no nos ocuparemos de estas cuestiones.

Índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Para comenzar, supongamos que hay n premios posibles que una persona podría ganar participando en una lotería. Concedamos que los premios se denotan con $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y supongamos que estos han sido dispuestos en atractivo orden ascendente. Por tanto, x_1 es el premio con menos preferencia y x_n el más preferible. Ahora asignemos números de utilidad arbitrarios a estos premios extremos. Por ejemplo, es conveniente asignar

$$\begin{aligned} U(x_1) &= 0, \\ U(x_n) &= 1, \end{aligned} \tag{7.9}$$

pero cualquier otro par de números lo haría igualmente bien.[7] Usando estos dos valores de utilidad, el propósito del teorema Von Neumann-Morgenstern es demostrar que existe una forma razonable de asignar números específicos de utilidad a los demás premios disponibles. Supongamos que elegimos otro premio, digamos x_i. Considérese el experimento siguiente. Le pedimos a un individuo enunciar la probabilidad, digamos π_i, en la cual se muestre indiferente entre x_i con *certidumbre* y una *apuesta* que ofreciera premios de x_n con probabilidad de π_i y de x_1 con proba-

[5] J. von Neumann y O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, Princeton, 1944). Los axiomas de racionalidad en situaciones inciertas se analizan en el apéndice de este libro.

[6] Para un estudio de algunas de las cuestiones planteadas en el debate sobre los axiomas de Von Neumann-Morgenstern, especialmente el supuesto de independencia, veáse C. Gollier, *The Economics of Risk and Time* (MIT Press, Cambridge, M.A., 2001), cap. 1.

[7] Técnicamente, un índice de utilidad de Von Neumann-Morgenstern es único sólo hasta una opción de escala y origen; es decir, hasta una "transformación lineal". Este requisito es más estricto que el de que una función de utilidad sea única hasta una transformación monótona.

bilidad $(1 - \pi_i)$. Parece razonable (aunque este es el supuesto más problemático en el enfoque de Von Neumann-Morgenstern) que tal probabilidad exista: un individuo siempre será indiferente entre una apuesta y algo seguro, siempre y cuando se ofrezca una probabilidad lo bastante alta de obtener el mejor premio. También parece probable que π_i será mayor que el x_i más deseable; cuanto mejor sea x_i, mejor debería ser la posibilidad de obtener x_n para inducir al individuo a apostar. Por tanto, la probabilidad de π_i mide cuán deseable es el premio x_i. De hecho, la técnica de Von Neumann-Morgenstern define la utilidad de x_i como la utilidad esperada de la apuesta que el individuo considera igualmente deseable x_i:

$$U(x_i) = \pi_i U(x_n) + (1 - \pi_i)U(x_1). \tag{7.10}$$

Debido a nuestra elección de escala en la ecuación 7.9, tenemos

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1 - \pi_i) \cdot 0 = \pi_i. \tag{7.11}$$

Al elegir con criterio las cifras de utilidad que se asignarán a los mejores y peores premios, hemos podido idear una escala conforme a la cual el índice de utilidad atribuido a cualquier otro premio, es simplemente la probabilidad de obtener el mayor en una apuesta que se considera equivalente al premio en cuestión. Esta elección de índices de utilidad es arbitraria. Otros dos números cualesquiera podrían haberse usado para elaborar esta escala de utilidad, aunque nuestra elección inicial (ecuación 7.9) es particularmente conveniente.

Optimización de la utilidad esperada

En consonancia con la elección de escala y origen, representada por la ecuación 7.9, supongamos que a cada premio x_i se le ha asignado un índice de utilidad π_i. Nótese en particular que $\pi_1 = 0$, $\pi_n = 1$, y que los demás índices de utilidad se ubican entre estos extremos. Al usar estos índices de utilidad es posible demostrar que un individuo "racional" elegirá entre apuestas con base en sus "utilidades" esperadas (es decir, con base en el valor esperado de estos números del índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern).

Como ejemplo, considérense dos apuestas. La apuesta A ofrece x_2 con probabilidad a y x_3 con probabilidad $(1 - a)$. La apuesta B ofrece x_4 con probabilidad b y x_5 con probabilidad $(1 - b)$. Se quiere demostrar que una persona elegirá la apuesta A si y sólo si la utilidad esperada de la apuesta A excede la de la apuesta B. Ahora, para las apuestas:

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada de } A &= aU(x_2) + (1 - a)U(x_3), \\ \text{utilidad esperada de } B &= bU(x_4) + (1 - b)U(x_5). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Sustituir los números del índice de utilidad (es decir, π_2 es la "utilidad" de x_2, y así sucesivamente) da

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada de } A &= a\pi_2 + (1 - a)\pi_3, \\ \text{utilidad esperada de } B &= b\pi_4 + (1 - b)\pi_5. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Se desea demostrar que un individuo preferirá la apuesta A a la apuesta B si y sólo si

$$a\pi_2 + (1 - a)\pi_3 > b\pi_4 + (1 - b)\pi_5. \tag{7.14}$$

Para demostrar esto recuérdense las definiciones del índice de utilidad. El individuo es indiferente entre x_2 y una apuesta que ofrece x_1 con probabilidad $(1 - \pi_2)$ y x_n con probabilidad π_2. Podemos usar este hecho para sustituir las apuestas que sólo implican a x_1 y x_n por todas las utilidades en la ecuación 7.13 (aun cuando el individuo sea indiferente respecto a ellas, el supuesto que esta sustitución puede establecer asume implícitamente que los individuos pueden ver a través de complejas combinaciones de lotería). Luego de un poco de complicada álgebra puede concluirse que la apuesta A es equivalente a una apuesta que promete x_n con probabilidad $a\pi_2 + (1 - a)\,\pi_3$, y que la apuesta B es equivalente a una apuesta que promete x_n con probabilidad $b\pi_4 + (1 - b)\,\pi_5$.

Presumiblemente, un individuo preferirá la apuesta con la mayor probabilidad de obtener el mejor premio. En consecuencia, elegirá la apuesta A si y sólo si

$$a\pi_2 + (1 - a)\pi_3 > b\pi_4 + (1 - b)\pi_5. \tag{7.15}$$

Pero esto es exactamente lo que queríamos demostrar. Por consiguiente, hemos probado que un individuo elegirá la apuesta que proporcione el nivel más alto de utilidad esperada (Von Neumann-Morgenstern). Ahora haremos un uso considerable de este resultado, que puede resumirse como sigue.

PRINCIPIO DE OPTIMIZACIÓN

Optimización de la utilidad esperada. Si los individuos obedecen los axiomas de comportamiento Von Neumann-Morgenstern en situaciones inciertas, entonces actuarán como si eligieran la opción que optimiza el valor esperado de su utilidad Von Neumann-Morgenstern.

AVERSIÓN AL RIESGO

Los economistas han descubierto que los individuos tienden a evitar situaciones riesgosas, aun si la situación equivale a una apuesta razonable. Por ejemplo, pocos individuos considerarían apostar 10 000 dólares por el resultado de lanzar una moneda al aire, aun cuando el beneficio promedio fuera de 0. Lo anterior es debido a que los premios en dinero de la apuesta no reflejan completamente la utilidad provista por los premios. La utilidad que los individuos obtienen de un incremento en el precio del dinero puede incrementar con menos rapidez que el valor en dólares de dichos premios. Una apuesta razonable en términos monetarios puede ser irrazonable en términos de utilidad y, por tanto, será rechazada.

En términos más técnicos, dinero adicional puede brindar a los individuos una utilidad marginal decreciente. Un ejemplo sencillo puede ayudar a explicar por qué. Un aumento en el ingreso, digamos, de 40 000 a 50 000 dólares puede incrementar sustancialmente el bienestar de un individuo, garantizándole que no se quedará sin bienes esenciales como alimento y vivienda. Un incremento adicional de 50 000 a 60 000 dólares le permitiría un estilo de vida aún más confortable, quizá al proveerlo de alimentos más sabrosos y una casa más grande, pero la mejora probablemente no sería tan grande como la inicial.

A partir de un patrimonio de 50 000 dólares el individuo sería resistente a apostar 10 000 dólares por el resultado de lanzar una moneda al aire. La posibilidad de 50 por ciento de las mayores comodidades que podría tener con 60 000 dólares no compensa la posibilidad de 50 por ciento de terminar con 40 000 y quizá tenga que privarse de algunas cosas esenciales.

Estos efectos sólo se magnifican con apuestas más arriesgadas, es decir con apuestas con resultados incluso de mayor variabilidad.[8] El individuo con un patrimonio inicial de 50 000 dólares probablemente sería aún más resistente a hacer una apuesta de 20 000 sobre el lanzamiento de una moneda porque enfrentaría la perspectiva de terminar con sólo 30 000 dólares si el lanzamiento le resultara desfavorable, reduciendo severamente los bienes esenciales para vivir. La igual posibilidad de terminar con 70 000 dólares no es compensación suficiente. Por otro lado, una apuesta de sólo 1 dólar sobre el lanzamiento de una moneda es relativamente irrelevante. Aunque de todas maneras uno podría rechazar la apuesta, no se empeñaría mucho en ello, pues su patrimonio último apenas si variaría con el resultado del lanzamiento de la moneda.

Aversión al riesgo y apuestas razonables

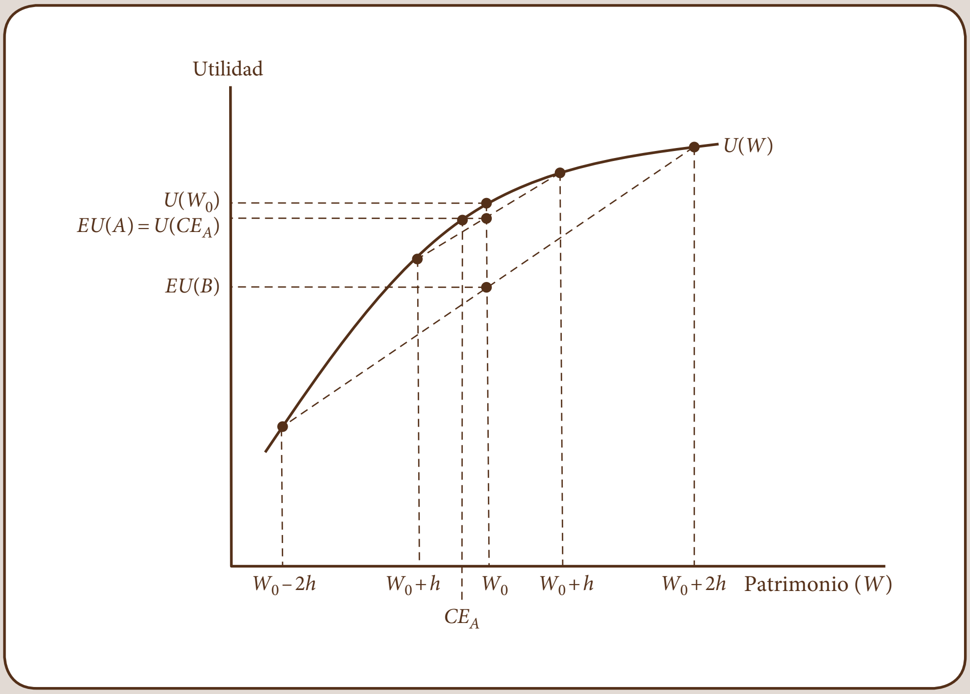
Este argumento se ilustra en la figura 7.1. Aquí W_0 representa el patrimonio corriente de un individuo y $U(W)$ es un índice de utilidad de Von Neumann-Morgenstern (que en adelante llamare-

[8] Con frecuencia los conceptos estadísticos de varianza y desviación estándar se usan para medir. Lo haremos así en varias partes posteriores de este capítulo.

FIGURA 7.1

Utilidad patrimonial de dos apuestas razonables de diferente variabilidad.

Si la función de utilidad patrimonial es cóncava (es decir, si exhibe una utilidad patrimonial marginal decreciente), un individuo rechazará apuestas razonables. Una posibilidad de 50-50 de ganar o perder *h* dólares, por ejemplo, produce menos utilidad esperada [$EU(A)$] que rechazar la apuesta. La razón de esto es que ganar *h* dólares significa menos para este individuo que perder *h* dólares.



mos una función de utilidad) que refleja cómo se siente un individuo respecto a varios niveles de patrimonio.[9] En la figura, $U(W)$ se traza como una función cóncava de W para reflejar el supuesto de una utilidad marginal decreciente. Supongamos ahora que a este individuo se le ofrecen dos apuestas razonables: la apuesta A, que es una posibilidad 50-50 de ganar o perder $\$h$, y la apuesta B, que es una posibilidad 50-50 de ganar o perder $\$2h$. La utilidad del patrimonio corriente es $U(W_0)$, el cual es también el valor esperado del patrimonio corriente porque este es seguro. La utilidad esperada si el individuo participa en la apuesta A está dada por $EU(A)$:

$$EU(A) = \frac{1}{2}U(W_0 + h) + \frac{1}{2}U(W_0 - h), \qquad \textbf{(7.16)}$$

y la utilidad esperada de la apuesta B está dada por $EU(B)$:

$$EU(B) = \frac{1}{2}U(W_0 + 2h) + \frac{1}{2}U(W_0 - 2h). \qquad \textbf{(7.17)}$$

La ecuación 7.16 indica que la utilidad esperada de la apuesta A está a medio camino entre la utilidad del resultado desfavorable $W_0 - h$ y la utilidad del resultado favorable $W_0 + h$. De igual manera, la utilidad esperada de la apuesta B está a medio camino entre las utilidades de los resultados desfavorable y favorable, aunque los beneficios de estos resultados varían más que con la apuesta A.

[9] Técnicamente $U(W)$ es una función de utilidad indirecta porque es el consumo permitido por el patrimonio que brinda utilidad directa. En el capítulo 17 se retomará la relación entre funciones de utilidad, basadas en el consumo y su utilidad indirecta implicada de funciones de patrimonio.

De la figura se desprende claramente que, en términos geométricos,[10]

$$U(W_0) > EU(A) > EU(B) \tag{7.18}$$

Por tanto, este individuo preferirá mantener su patrimonio corriente que hacer cualquiera de las apuestas razonables. Forzada a elegir una apuesta, preferirá la menor (A) a la mayor (B). La razón de esto es que ganar una apuesta razonable es menos disfrutable de lo que duele perder.

Aversión al riesgo y seguros

En la práctica un individuo podría estar dispuesto a pagar una cantidad para no participar en ninguna apuesta. Nótese que cierto patrimonio de CE_A brinda la misma utilidad esperada que participar en la apuesta A. CE_A se denomina *equivalente de certidumbre* de la apuesta A.

El individuo estaría dispuesto a pagar hasta $W_0 - CE_A$ para no participar en la apuesta. Esto explica por qué los individuos compran seguros. Renuncia a un pequeña cantidad segura (la prima del seguro) para evitar el resultado riesgoso contra el que se asegura. La prima que paga un individuo por un seguro contra accidentes automovilísticos, por ejemplo, brinda una póliza en la que se acuerda que en caso de ocurrir un accidente su auto será reparado. El extendido uso de los seguros parecería implicar que la aversión al riesgo es frecuente.

De hecho, el individuo en la figura 7.1 pagaría aún más para no hacer la apuesta mayor, B. Como ejercicio, intenta identificar el equivalente de certidumbre CE_B de la apuesta B y la cantidad que el individuo pagaría para evitar la apuesta B en la figura. El análisis en esta sección puede sintetizarse en la definición siguiente.

DEFINICIÓN

Aversión al riesgo. De un individuo que siempre rechaza apuestas razonables se dice que tiene aversión al riesgo. Si los individuos exhiben una utilidad marginal decreciente de su patrimonio, presentarán aversión al riesgo. En consecuencia, estarán dispuestos a pagar algo para no hacer apuestas razonables.

EJEMPLO 7.2 Disposición a pagar seguros

Para ilustrar la relación entre la aversión al riesgo y los seguros, consideremos a un individuo con un patrimonio corriente de 100 000 dólares que enfrenta la perspectiva de una posibilidad de 25 por ciento de perder su automóvil, con valor de 20 000 dólares, por robo el próximo año. Supongamos también que la función de utilidad Von Neumann-Morgenstern de este individuo es logarítmica; esto es, $U(W) = \ln(W)$.

Si este individuo afronta el año próximo sin seguro, su utilidad esperada será

$$\begin{aligned} EU(\text{sin seguro}) &= 0.75U(100\,000) + 0.25U(80\,000) \\ &= 0.75 \ln 100\,000 + 0.25 \ln 80\,000 \\ &= 11.45714 \end{aligned} \tag{7.19}$$

En esta situación, una prima de seguro razonable sería de 5 000 dólares (25 por ciento de \$20 000, suponiendo que la aseguradora sólo tiene costos de reclamación y que los costos administrativos son de 0 dólares).

[10] Técnicamente, este resultado es consecuencia directa de la desigualdad de Jensen en la estadística matemática. Esta desigualdad establece que si x es una variable aleatoria y $f(x)$ es una función estrictamente cóncava de esa variable, entonces $E[f(x)] < f[E(x)]$. En el contexto de la utilidad esto significa que si esta es cóncava en una variable aleatoria que mide el patrimonio (es decir, si $U'(W) > 0$ y $U''(W) < 0$), la utilidad esperada del patrimonio será menor que la asociada con el valor esperado de W. Con la apuesta A, por ejemplo, $EU(A) < U(W_0)$ porque, como apuesta razonable, A brinda un patrimonio esperado de W_0.

En consecuencia, si este individuo asegura por completo su automóvil, su patrimonio será de 95 000 dólares, independientemente de si se lo roban. En este caso, entonces,

$$\begin{aligned} EU\text{ (seguro razonable)} &= U(95\,000) \\ &= \ln(95\,000) \\ &= 11.46163 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Este individuo está en mejor situación adquiriendo un seguro razonable. En realidad, estaría dispuesto a pagar por el seguro más que la prima razonable. La prima máxima del seguro (x) puede determinarse estableciendo

$$\begin{aligned} EU\text{ (prima máxima del seguro)} &= U(100\,000 - x) \\ &= \ln(100\,000 - x) \\ &= 11.45714 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Despejar x en esta ecuación produce

$$100\,000 - x = e^{11.45714} \tag{7.22}$$

o

$$x = 5\,426. \tag{7.23}$$

Este individuo estaría dispuesto a pagar hasta 426 dólares en costos administrativos a una aseguradora (además de la prima de 5 000 dólares para cubrir el valor esperado de la pérdida). Aun si se pagaran esos costos este individuo estaría en mejores condiciones que si enfrentara el mundo no asegurado.

PREGUNTAS: Supóngase que la utilidad del patrimonio fuera lineal. ¿Este individuo estaría dispuesto a pagar por el seguro algo más que la cantidad actuarialmente razonable? ¿Qué podría decirse del caso en que la utilidad es una función convexa del patrimonio?

MEDICIÓN DE LA AVERSIÓN AL RIESGO

En el estudio de las decisiones económicas en situaciones de riesgo a veces es conveniente tener una medida cuantitativa de qué tan reacio al riesgo es un individuo. La medida de uso más común de aversión al riesgo fue inicialmente desarrollada por J. W. Pratt en la década de 1960.[11] Esta medida de aversión al riesgo, $r(W)$, se define como

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}. \tag{7.24}$$

Dado que el rasgo distintivo de los individuos con aversión al riesgo es una utilidad marginal decreciente de su patrimonio $[U''(W) < 0]$, la medida de Pratt es positiva en esos casos. Esta medida es invariante respecto a las transformaciones lineales de la función de utilidad y, por tanto, no se ve afectada por la ordenación particular Von Neumann-Morgenstern que se use.

Aversión al riesgo y primas de seguros

Un rasgo útil de la medida de aversión al riesgo de Pratt es que es proporcional a la cantidad que un individuo pagará por el seguro contra la realización de una apuesta razonable. Supongamos que los beneficios de esa apuesta razonable se denotan con la variable aleatoria h (la cual adopta

[11] J. W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica* (enero-abril 1964), pp. 122-136.

valores tanto positivos como negativos). Dado que la apuesta es razonable, $E(h) = 0$. Sea ahora p la magnitud de la prima de seguros que volvería al individuo exactamente indiferente entre hacer la apuesta razonable h y pagar p con certidumbre para evitar la apuesta:

$$E\left[U(W + h)\right] = U(W - p), \tag{7.25}$$

donde W es el patrimonio corriente del individuo. Desarrollemos ahora ambas partes de la ecuación 7.25 usando la serie de Taylor.[12] Puesto que p es una cantidad fija, bastará con una aproximación lineal de la expresión del lado derecho de la ecuación:

$$U(W - p) = U(W) - pU'(W) + \text{términos de orden superior} \tag{7.26}$$

En cuanto a la expresión del lado izquierdo necesitamos una aproximación cuadrática que tome en cuenta la variabilidad en la apuesta, h:

$$E[U(W + h)] = E\left[U(W) + hU'(W) + \frac{h^2}{2}U''(W) + \text{términos de orden superior}\right] \tag{7.27}$$

$$= U(W) + E(h)U'(W) + \frac{E(h^2)}{2}U''(W) + \text{términos de orden superior} \tag{7.28}$$

Si se recuerda que $E(h) = 0$, se eliminan los términos de orden superior y se usa la constante k en representación de $E(h^2)/2$, las ecuaciones 7.26 y 7.28 pueden igualarse como

$$U(W) - pU'(W) \cong U(W) - kU''(W) \tag{7.29}$$

o

$$p \cong -\frac{kU''(W)}{U'(W)} = kr(W). \tag{7.30}$$

Es decir, la cantidad que un individuo renuente al riesgo está dispuesto a pagar para evitar una apuesta razonable es aproximadamente proporcional a la medida de aversión al riesgo de Pratt.[13] Puesto que las primas de seguros pagadas son observables en la realidad, a menudo se les usa para estimar los coeficientes de aversión al riesgo o para comparar dichos coeficientes entre grupos de individuos. Por tanto, es posible usar información del mercado para saber un poco sobre las actitudes ante situaciones riesgosas.

Aversión al riesgo y patrimonio

Una cuestión importante es si la aversión al riesgo incrementa o disminuye con la riqueza. Intuitivamente podría pensarse que la disposición a pagar para evitar una apuesta razonable dada disminuye al incrementarse la riqueza, ya que la utilidad marginal decreciente volvería menos serias las pérdidas potenciales para los individuos muy ricos. Sin embargo, esta respuesta intuitiva no es necesariamente correcta porque la utilidad marginal decreciente también vuelve menos atractivos los beneficios de ganar apuestas. Por tanto, el resultado neto es indeterminado; todo depende de la forma precisa de la función de utilidad. En efecto, si la utilidad es cuadrática en el patrimonio,

$$U(W) = a + bW + cW^2, \tag{7.31}$$

[12] La serie de Taylor brinda una manera de aproximar cualquier función diferenciable alrededor de algún punto. Si $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes, es posible demostrar que $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2)f''(x) +$ términos de orden superior. La fórmula de punto y pendiente en álgebra es un ejemplo simple de la serie de Taylor.

[13] En este caso el factor de proporcionalidad también es proporcional a la varianza de h porque $\text{Var}(h) = E[h - E(h)]^2 = E(h^2)$. Para una ilustración en la que esta ecuación se ajusta exactamente, véase el ejemplo 7.3.

donde $b > 0$ y $c < 0$, así que la medida de aversión al riesgo de Pratt es

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}, \quad \textbf{(7.32)}$$

lo cual, contra lo que indica la intuición, se incrementa al aumentar el patrimonio.

Por otro lado, si la utilidad es logarítmica en el patrimonio,

$$U(W) = \ln(W), \quad \textbf{(7.33)}$$

entonces tenemos

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{1}{W}, \quad \textbf{(7.34)}$$

que decrece al incrementarse el patrimonio.

La función exponencial de utilidad

$$U(W) = -e^{-AW} = -\exp(-AW) \quad \textbf{(7.35)}$$

(donde A es una constante positiva) exhibe aversión al riesgo constante absoluta en todos los rangos patrimoniales, porque ahora

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A. \quad \textbf{(7.36)}$$

Este rasgo de la función exponencial de utilidad[14] puede usarse para ofrecer algunas estimaciones numéricas de la disposición a pagar para evitar apuestas, como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7.3 Aversión al riesgo constante

Supongamos que un individuo cuyo patrimonio inicial es W_0 y cuya función de utilidad muestra aversión al riesgo constante absoluta enfrenta una posibilidad de 50-50 de ganar o perder 1 000 dólares. ¿Cuánta (f) pagaría para evitar el riesgo? Para determinar este valor la utilidad de $W_0 - f$ se iguala con la utilidad esperada de la apuesta:

$$\begin{aligned} -\exp[-A(W_0 - f)] &= -0.5\exp[-A(W_0 + 1\,000)] \\ &\quad - 0.5\exp[-A(W_0 - 1\,000)] \end{aligned} \quad \textbf{(7.37)}$$

Debido a que el factor $-\exp(-AW_0)$ está contenido en todos los términos de la ecuación 7.37 ésta puede dividirse, mostrando así que (para la función exponencial de utilidad) la disposición a pagar para evitar una apuesta dada es independiente del patrimonio inicial. Los términos restantes

$$\exp(Af) = 0.5\exp(-1\,000A) + 0.5\exp(1\,000A) \quad \textbf{(7.38)}$$

pueden usarse ahora para despejar f en busca de varios valores de A. Si $A = 0.0001$, entonces $f = 49.9$; un individuo con este grado de aversión al riesgo pagaría aproximadamente 50 dólares para evitar una apuesta razonable de 1 000. O bien, si $A = 0.0003$, este individuo resistente al riesgo pagaría $f = 147.8$ por evitar la apuesta. Como la intuición sugiere que estos valores no son irrazonables, los valores del parámetro de aversión al riesgo A en estos rangos se usan a veces para investigaciones empíricas.

Riesgo normalmente distribuido. La función de utilidad de aversión al riesgo constante puede combinarse con el supuesto de que un individuo enfrenta un impacto aleatorio a su patrimonio, el cual sigue

[14] Dado que la función exponencial de utilidad exhibe aversión al riesgo constante (absoluta), esto suele abreviarse con el término *utilidad ARCA*.

una distribución normal (véase el capítulo 2) para llegar a un resultado particularmente simple. Específicamente, si el patrimonio en riesgo de un individuo sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2, la función de densidad de probabilidad del patrimonio está dada por $f(W) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$, donde $z = [(W - \mu)/\sigma]$. Si este individuo tiene una función de utilidad de su patrimonio dada por $U(W) = -e^{-AW}$, la utilidad esperada de su patrimonio en riesgo es

$$E[U(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(W)f(W)\, dW = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int -e^{-AW}e^{-[(W-\mu)/\sigma]^2/2}\, dW. \tag{7.39}$$

Quizá, sorpresivamente, esta integración no sea demasiado difícil de hacer, aunque requiere paciencia. Realizar esta integración y tomar una variedad de transformaciones monótonas de la expresión resultante produce el resultado final de que

$$E[U(W)] \cong \mu - \frac{A\sigma^2}{2}. \tag{7.40}$$

De ahí que la utilidad esperada sea una función lineal de los dos parámetros de la función de densidad de probabilidad del patrimonio, y que el parámetro de aversión al riesgo del individuo (A) determine la magnitud del efecto negativo de variabilidad en la utilidad esperada. Por ejemplo, supongamos que un individuo ha invertido sus fondos de tal manera que su patrimonio tiene un valor esperado de 100 000 dólares pero una desviación estándar (σ) de \$10 000. Por tanto, con la distribución normal, este individuo podría esperar que su patrimonio decreciera por debajo de los 83 500 dólares en alrededor de 5 por ciento de los casos, y que se incrementara por encima de los 116 500 dólares en una fracción similar de los casos. Con estos parámetros la utilidad esperada está dada por $E[U(W)] = 100\,000 - (A/2)(10\,000)^2$. Si $A = 0.0001 = 10^{-4}$, la utilidad esperada está dada por $100\,000 - 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot (10^4)^2 = 95\,000$. De ahí que este individuo reciba la misma utilidad de su patrimonio en riesgo que la que obtendría de un patrimonio seguro de 95 000 dólares. Un individuo con mayor aversión al riesgo podría tener $A = 0.0003$, y en este caso el equivalente de certidumbre de su patrimonio sería de 85 000 dólares.

PREGUNTA: Supongamos que un individuo tiene dos formas de invertir su patrimonio: asignación 1, $\mu_1 = 107\,000$ y $\sigma_1 = 10\,000$; asignación 2, $\mu_2 = 102\,000$ y $\sigma_2 = 2\,000$. ¿Cómo afectaría su actitud ante el riesgo, su decisión entre estas asignaciones?[15]

Aversión al riesgo relativa

Parece improbable que la disposición a pagar para evitar una apuesta dada sea independiente del patrimonio de un individuo. Un supuesto más atractivo podría ser que esa disposición a pagar es inversamente proporcional al patrimonio y que la expresión

$$rr(W) = Wr(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{7.41}$$

es aproximadamente constante. Siguiendo la terminología propuesta por J. W. Pratt,[16] la función $rr(W)$ definida en la ecuación 7.41 es una medida de *aversión al riesgo relativa*. La función de potencias de utilidad

$$U(W, R) = \begin{cases} W^R/R & \text{si } R < 1,\, R \neq 0 \\ \ln W & \text{si } R = 0 \end{cases} \tag{7.42}$$

[15] Este ejemplo numérico aproxima (más o menos) datos históricos de rendimientos reales de acciones y bonos, respectivamente, aunque los cálculos son meramente ilustrativos.

[16] Pratt, "Aversión al riesgo".

muestra una aversión al riesgo absoluta decreciente,

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(R-1)W^{R-2}}{W^{R-1}} = \frac{1-R}{W}, \tag{7.43}$$

pero aversión al riesgo constante relativa:[17]

$$rr(W) = Wr(W) = 1 - R. \tag{7.44}$$

La evidencia empírica es generalmente congruente con valores de R en el rango de -3 a -1. De ahí que los individuos parezcan algo más renuentes al riesgo de lo que implica la función logarítmica de utilidad, aunque en muchas aplicaciones esta función brinda una aproximación razonable. Cabe señalar que la función de utilidad de aversión al riesgo constante relativa en la ecuación 7.42 tiene la misma forma que la función de utilidad ESC general, descrita en el capítulo 3. Esto brinda cierta intuición geométrica sobre la naturaleza de la aversión al riesgo que se explorará más adelante.

EJEMPLO 7.4 Aversión relativa al riesgo constante

Un individuo cuyo comportamiento se caracteriza por una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante se interesará en beneficio o pérdidas proporcionales de la riqueza. Por tanto, podemos preguntarnos a qué fracción de su patrimonio inicial (f) estaría dispuesto a renunciar para evitar una apuesta razonable de, digamos, 10 por ciento de dicho patrimonio. Primero suponemos $I = 0$, por tanto, la función logarítmica de utilidad es apropiada. Igualar la utilidad del patrimonio restante seguro de este individuo con la utilidad esperada de la apuesta de 10% produce

$$\ln[(1-f)W_0] = 0.5\ \ln(1.1W_0) + 0.5\ \ln(0.9W_0). \tag{7.45}$$

Puesto que cada término contiene W_0, el patrimonio inicial puede eliminarse de esta expresión:

$$\ln(1-f) = 0.5[\ln(1.1) + \ln(0.9)] = \ln(0.99)^{0.5};$$

de ahí que

$$(1-f) = (0.99)^{0.5} = 0.995$$

y

$$f = 0.005. \tag{7.46}$$

Por tanto, este individuo sacrificará hasta 0.5% de su patrimonio para evitar la apuesta de 10%. Un cálculo similar puede usarse para el caso $R = -2$, lo que produce

$$f = 0.015. \tag{7.47}$$

De ahí que este individuo más renuente al riesgo esté dispuesto a renunciar a 1.5% de su patrimonio inicial para evitar una apuesta de 10 por ciento.

PREGUNTA: Con la función de aversión relativa al riesgo constante ¿cómo depende la disposición de este individuo a pagar para evitar una apuesta absoluta dada (de 1 000, por decir algo) de su patrimonio inicial?

[17] Algunos autores escriben la función de utilidad en la ecuación 7.42 como $U(W) = W^{1-a}/(1-a)$ e intentan medir $a = 1 - I$. En este caso, a es la medida de aversión al riesgo relativa. La función de aversión al riesgo constante relativa suele abreviarse como *utilidad ARCR*.

MÉTODOS PARA REDUCIR LA INCERTIDUMBRE Y EL RIESGO

Hemos visto que los individuos con aversión al riesgo evitarán las posibles apuestas y otras situaciones arriesgadas. Pero a menudo es imposible evitar el riesgo por completo. Cruzar la calle implica cierto riesgo de daños. Enterrar el patrimonio propio en el patio trasero no es una estrategia de inversión perfectamente segura, ya que aún existe cierto riesgo de robo (para no hablar de la inflación). Nuestro análisis hasta ahora implica que los individuos estarían dispuestos a pagar algo por reducir al menos esos riesgos si no los puede evitar por entero. En las cuatro secciones siguientes se estudiarán por separado cuatro métodos que pueden seguir los individuos para mitigar el problema del riesgo y la incertidumbre: seguros, diversificación, flexibilidad e información.

SEGUROS

Ya hemos analizado una de estas estrategias: comprar un seguro. Los individuos con aversión al riesgo pagarían una prima para que la aseguradora cubra el riesgo de pérdida. Cada año los estadounidenses gastan más de medio billón de dólares en seguros de todo tipo. Más comúnmente, compran cobertura para su vida, su hogar y sus automóviles y para sus costos de atención a la salud. No obstante es posible comprar un seguro (quizá a un precio alto) para cubrir prácticamente cualquier riesgo imaginable; seguros que van desde aquellos contra sismos para una casa que esté construida sobre una falla tectónica, hasta los de cobertura especial como, por ejemplo, un seguro que cubra a un cirujano contra la posibilidad de lesionarse una o las dos manos.

Un individuo con aversión al riesgo querría comprar siempre seguros razonables para cubrir cualquier riesgo que enfrente. Ninguna aseguradora podría subsistir si ofreciera seguros razonables (en el sentido de que la prima equivalga exactamente al pago esperado por las reclamaciones). Además de cubrir reclamaciones las aseguradoras también deben mantener registros, cobrar primas, investigar fraudes y tal vez devolver beneficios a los accionistas. De ahí que el cliente de seguros siempre pueda esperar pagar más que una prima actuarialmente razonable. Si los individuos son muy resistentes al riesgo, comprarán incluso seguros irrazonables, como se mostró en el ejemplo 7.2; cuanto más resistente al riesgo sea, mayor será la prima que esté dispuesta a pagar.

Varios factores dificultan o imposibilitan proporcionar seguros. Desastres a gran escala, como huracanes y guerras, pueden resultar en pérdidas tan grandes que las aseguradoras quebrarían antes de poder pagar todas las reclamaciones. Sucesos raros e impredecibles (como guerras o accidentes en plantas nucleares) ofrecen a las aseguradoras antecedentes confiables para establecer primas. Otras dos razones de la ausencia de cobertura de seguros tienen que ver con la desventaja informativa que una compañía puede tener en relación con el cliente. En algunos casos un individuo puede saber sobre la probabilidad de sufrir una pérdida más que la aseguradora. Sólo los "peores" clientes (quienes esperan pérdidas mayores o más probables) podrían terminar comprando una póliza de seguros. Este *problema de selección adversa* puede trastornar todo el mercado de los seguros a menos que la compañía encuentre la manera de controlar quién compra (mediante algún tipo de filtramiento o coacción). Otro problema es que tener seguro puede volver menos dispuestos a los clientes a dar los pasos necesarios para evitar pérdidas, conduciendo, por ejemplo, de manera más temeraria al tener un seguro de automóvil o consumiendo alimentos grasosos o fumando al poseer un seguro médico. Ese, así llamado, *problema de riesgo moral* también puede perjudicar al mercado de los seguros, si las aseguradoras no hallan la manera de monitorear a bajo costo el comportamiento de sus clientes. Analizaremos en más detalle los problemas de selección adversa y riesgo moral en el capítulo 18, así como las formas en que las aseguradoras pueden combatirlos, las que además de las estrategias anteriores también incluyen ofrecer sólo un seguro parcial y requerir el pago de deducibles y copagos.

DIVERSIFICACIÓN

Un segundo modo en que los individuos con aversión al riesgo pueden reducir el riesgo es la diversificación. Este es el principio económico detrás del adagio "No pongas todos los huevos en una sola canasta". Disipando convenientemente el riesgo es posible reducir la variabilidad de un resultado sin aminorar el beneficio esperado.

El marco más conocido para la diversificación es la inversión. A los inversionistas se les aconseja rutinariamente "diversificar su cartera". Para comprender lo atinado de este consejo, consideremos un ejemplo en el que un individuo tiene un patrimonio *W* para invertir. Este dinero puede invertirse en dos activos riesgosos independientes, 1 y 2, con igual valor esperado (los rendimientos medios son $\mu_1 = \mu_2$) e igual varianza (las varianzas son $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Un individuo cuya cartera no diversificada, CND, incluye sólo uno de esos activos (poniendo así todos los "huevos" en esa "canasta") obtendría un rendimiento esperado de $\mu_{UP} = \mu_1 = \mu_2$ y enfrentaría una varianza de $\sigma_{CND}^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Supongamos, en cambio, que este individuo elige una cartera diversificada, *CD*. Sea α_1 la fracción invertida en el primer activo y $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ en el segundo. Veremos que a este individuo puede irle mejor que con la cartera no diversificada en el sentido de que obtiene una varianza menor sin variar el rendimiento esperado. El rendimiento esperado de la cartera diversificada no depende de la asignación entre activos y es el mismo que para cualquiera de estos activos en particular:

$$\mu_{CD} = \alpha_1\mu_1 + (1 - \alpha_1)\mu_2 = \mu_1 = \mu_2. \tag{7.48}$$

Para analizar esto remitámonos a las reglas para el cálculo de valores esperados del capítulo 2. La varianza dependerá de la asignación entre los dos activos:

$$\sigma^2{}_{CD} = \alpha_1^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha_1)^2\sigma_2^2 = (1 - 2\alpha_1 + 2\alpha_1^2)\sigma_1^2. \tag{7.49}$$

También este cálculo puede entenderse repasando la sección sobre varianzas del capítulo 2. Ahí podrás estudiar los dos "hechos" que se usan en este cálculo: primero, que la varianza de una constante multiplicada por una variable aleatoria es esa constante al cuadrado por la varianza de una variable aleatoria; segundo, que la varianza de variables aleatorias independientes, debido a que su covarianza es de 0, es igual a la suma de las varianzas.

Elegir α_1 para minimizar la ecuación 7.49 produce $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\sigma_{CD}^2 = \frac{\sigma_1^2}{2}$. Por tanto la cartera óptima divide el patrimonio en partes iguales entre los dos activos, manteniendo el mismo rendimiento esperado que una cartera no diversificada pero reduciendo la varianza a la mitad. La diversificación funciona aquí porque los rendimientos de los activos son independientes. Cuando un rendimiento es bajo existe la posibilidad de que el otro sea alto, y viceversa. De este modo los rendimientos extremos se equilibran en al menos parte del tiempo, reduciendo la varianza general. La diversificación operará de esta manera mientras no haya una correlación perfecta en los rendimientos de los activos de tal manera que, en efecto, no sean el mismo activo. Cuanto menos correlacionados estén los activos mejor funcionará la diversificación para reducir la varianza de la cartera general.

Este ejemplo, elaborado para destacar los beneficios de la diversificación en la forma más simple posible, tiene el elemento artificial de que los rendimientos de los activos se suponen iguales. La diversificación fue en este caso una "comida gratis", en el sentido de que la varianza de la cartera podría reducirse sin reducir el rendimiento esperado en comparación con una cartera no diversificada. Si el rendimiento esperado de uno de los activos (el activo 1, por ejemplo) es más alto que el otro la diversificación dejará de ser, en el otro activo, una "comida gratis" y resultaría en un menor rendimiento esperado. Aun así, los beneficios de reducción del riesgo pueden ser tan grandes como para que un inversionista resistente al riesgo esté dispuesto a poner parte de su patrimonio en el activo con menor rendimiento esperado. Un ejemplo práctico de esta idea se relaciona con el consejo que se le daría al empleado de una empresa con un plan de adquisición de acciones. Aun si el plan permite que los empleados compren títulos de las acciones de capital de la compañía con un generoso descuento en comparación con el mercado, tal vez fuera conveniente recomendarles a los empleados no invertir todos sus ahorros en esas acciones, pues de lo contrario sus ahorros completos —para no hablar de su sueldo e incluso del valor de su casa (en la medida en que el valor de las residencias depende de la solidez de los negocios en la economía local)— estarían atados a la suerte de una sola compañía, lo que generaría un enorme grado de riesgo.

En las extensiones de este capítulo se ofrece un análisis mucho más general del problema de elegir la cartera óptima. Sin embargo, el principio de diversificación se aplica a una gama mucho más amplia de situaciones que los mercados financieros. Por ejemplo, los estudiantes indecisos acerca de sus intereses o respecto a cuáles de sus habilidades les serán útiles en el mercado del empleo harían bien en inscribirse en muy diversos cursos más que en cursos exclusivamente técnicos o artísticos.

FLEXIBILIDAD

La diversificación es un método útil para reducir el riesgo de una persona que puede dividir una decisión, asignando cantidades reducidas de una suma mayor entre varias opciones. En algunas situaciones, sin embargo, una decisión no puede dividirse: es todo o nada. Por ejemplo, al comprar un automóvil, el consumidor no puede combinar los atributos que le agradan de un modelo (digamos eficiencia de combustible) con los de otro (digamos caballos de fuerza o ventanillas eléctricas) comprando la mitad de cada cual; los autos se venden como una unidad. En el caso de decisiones de todo o nada, el tomador de decisiones puede obtener parte del beneficio de la diversificación tomando decisiones flexibles. La flexibilidad permite al individuo ajustar la decisión inicial, dependiendo de cómo se desenvuelva el futuro. Cuanto más incierto es el futuro, más valiosa es la flexibilidad. Esta impide que el consumidor se ate un solo curso de acción y ofrece, en cambio, varias acciones. El consumidor puede elegir la opción que mejor se acomode a las circunstancias posteriores.

Un buen ejemplo del valor de la flexibilidad es considerar los combustibles con que operan los automóviles. Hasta ahora la mayoría de los autos estaban limitados en lo que se refiere a cuánto biocombustible (como el etanol de origen vegetal) podía combinarse con productos (como la gasolina o el diésel). El comprador de un vehículo de ese tipo tendría dificultades si el gobierno aprobara reglamentos que incrementaran el índice de etanol en los combustibles para autos o si prohibieran por entero los productos derivados del petróleo. Ya se han diseñado automóviles capaces de quemar exclusivamente etanol, pero no son útiles en caso de que prevalezcan las condiciones actuales porque en la mayoría de las gasolineras no se vende combustible con altas concentraciones de etanol. Un tercer tipo de vehículos tiene componentes internos que pueden funcionar con varios tipos de combustible, tanto derivados del petróleo como etanol, y en cualquier proporción. Estos autos son costosos de fabricar debido a los componentes especializados implicados, pero un consumidor podría pagar de todas maneras el costo adicional pues el auto sería útil aun si los biocombustibles no se volvieran más importantes durante su periodo de vida útil.[18]

Tipos de opciones

La posibilidad de que los automóviles de "combustible flexible" quemen cualquier combinación de combustibles derivados del petróleo y biocombustibles es valiosa porque brinda a los dueños más opciones en relación con un auto que sólo puede operar con un tipo de combustible. Es probable que ya conozcas la noción de que las opciones son valiosas gracias a otro contexto en el que este término se usa con frecuencia —el de los mercados financieros—, donde se oye hablar de opciones sobre acciones y otras formas de contratos de opciones. Existe una estrecha relación entre la opción contenida en los autos de combustible flexible y estos contratos de opciones que investigaremos con más detalle. Pero antes de analizar las semejanzas entre las opciones surgidas de diferentes contextos, presentaremos algunos términos para distinguirlas.

[18] Aunque la actual generación de automóviles de combustible flexible implica tecnología de punta, el primer coche de esa clase, producido en 1908, fue el Modelo T de Henry Ford, uno de los autos más vendidos de todos los tiempos. La disponibilidad de gasolina de bajo costo quizá haya inclinado el mercado hacia los autos de la competencia, de un solo tipo de combustible lo cual significó la ruina del Modelo T. Para más información sobre la historia de este modelo, véase L. Brooke, *Ford Model T: The Car That Put the World on Wheels* (Motorbooks, Mineápolis, 2008).

DEFINICIÓN

Contrato de opciones financieras. Un *contrato de opciones financieras* ofrece el derecho, aunque no la obligación, de comprar o vender un activo (como un título de acciones de capital) en un periodo futuro a determinado precio.

DEFINICIÓN

Opción real. Una *opción real* es una opción surgida en un marco ajeno a los mercados financieros.

El automóvil de combustible flexible puede verse como un auto ordinario combinado con una opción real adicional de quemar biocombustibles, si estos se vuelven más importantes en el futuro.

Los contratos de opciones financieras se presentan en varias formas, algunas de las cuales pueden ser complejas. También existen muchos tipos de opciones reales, surgidas en diversos ámbitos, lo que a veces dificulta determinar con exactitud qué tipo de opción está inserta en la situación. Aun así, todas las opciones comparten tres atributos fundamentales. Primero, especifican la transacción subyacente, trátese de una acción por negociar, o de un automóvil o combustible por adquirir. Segundo, especifican un periodo en el que la opción puede ejercerse. Una opción sobre acciones puede especificar un periodo de 1 año, por ejemplo. La opción inserta en un auto de combustible flexible preserva la opción del dueño durante la vida operativa del vehículo. Mientras más largo es el periodo cubierto por la opción, más valiosa es ésta, porque mayor es también la incertidumbre que puede resolverse durante ese periodo. Tercero, el contrato de opciones especifica un precio. Una opción sobre acciones podría venderse a un precio de 70 dólares. Si esta se comercia más tarde en una bolsa de valores su precio podría variar de un momento a otro, según el movimiento de los mercados. Las opciones reales no suelen tener precios explícitos, pero a veces pueden calcularse precios implícitos. Por ejemplo, si un auto de combustible flexible cuesta 5 000 dólares más que un auto, por lo demás equivalente, que sólo quema un tipo de combustible, estos 5 000 dólares podrían verse como el precio de la opción.

Modelo de opciones reales

Concedamos que x incorpora toda la incertidumbre en el entorno económico. En el caso del auto de combustible flexible, x podría reflejar el precio de los combustibles fósiles en relación con los biocombustibles o con el rigor de la regulación gubernamental de combustibles fósiles. En términos de la sección sobre estadística del capítulo 2, x es una variable aleatoria (también conocida como "englobadora de cada elemento del espacio muestral") que puede adoptar muchos valores diferentes. Un individuo tiene cierto número, $I = 1, \dots, n$, de opciones a su disposición. Sea $A_i(x)$ los beneficios provistos por la opción i, donde el argumento (x) permite a cada opción brindar un patrón distinto de rendimientos dependiendo de cómo resulte el futuro.

La figura 7.2a ilustra el caso de dos opciones. La primera opción ofrece un beneficio decreciente al incrementarse x, indicado por la pendiente descendente de A_1. Esto podría corresponder a la propiedad de un auto que sólo opera con combustibles fósiles; al volverse más importantes los biocombustibles que los combustibles fósiles, el valor de un vehículo que sólo quema combustibles fósiles decrece. La segunda opción brinda un beneficio creciente, correspondiente tal vez a la propiedad de un auto que sólo opera con biocombustibles. La figura 7.2b traduce los beneficios en utilidades (de Von Neumann-Morgenstern) que el individuo obtiene de los beneficios graficando $U(A_i)$ más que A_i. La inclinación introducida al pasar de beneficios a utilidades refleja la utilidad marginal decreciente de beneficios más altos para un individuo con aversión al riesgo.

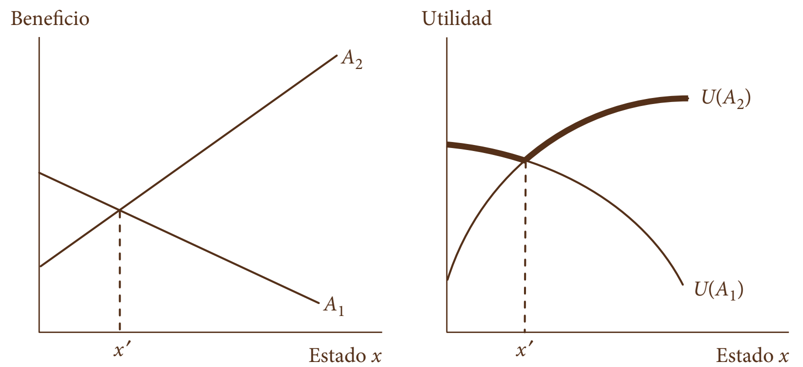
Si un individuo no tiene la flexibilidad provista por una opción real debe tomar la decisión antes de observar cómo resulta el estado x. Este individuo debe elegir la mejor alternativa en promedio. Su utilidad esperada de esta decisión es

$$\max\{E[U(A_1)], \dots, E[U(A_n)]\}. \tag{7.50}$$

FIGURA 7.2

Naturaleza de una opción real.

El panel a) muestra los beneficios y el panel b) las utilidades provistas por dos alternativas a través de las situaciones del mundo (x). Si la decisión debe ser tomada al principio, se elige la curva con la más alta utilidad esperada. Si la opción real de tomar cualquier decisión puede preservarse hasta después, se puede obtener la utilidad esperada de la envolvente superior de las curvas, el cual aparece resaltado.



a) Beneficios de alternativas

b) Utilidades de alternativas

La figura 7.2 no proporciona información suficiente para juzgar cuál utilidad esperada es más alta porque no conocemos las probabilidades de las diferentes x, pero si las x son más o menos igualmente probables, todo indica que el individuo elegiría la segunda alternativa, la cual brinda una utilidad más alta en un rango mayor. La utilidad esperada del individuo procedente de esta decisión es $E[U(A_2)]$.

Si, por otro lado, la opción real puede preservarse para tomar una decisión que indique el espacio muestral en que x ha ocurrido, el individuo estará en mejores condiciones. En la aplicación del automóvil la opción real podría corresponder a comprar un auto de combustible flexible, lo cual no ata al comprador a un solo combustible, sino que permite optar por el combustible que resulte más común o menos costoso en el periodo de vida útil del vehículo. En la figura 7.2, en vez de elegir una sola alternativa, el individuo elegiría la primera opción si $x < x'$, y la segunda si $x > x'$. La utilidad provista por esta estrategia está dada por la curva resaltada, la cual es la "envolvente superior" de las curvas de las opciones particulares. Con un número general (n) de opciones, la utilidad esperada de esta envolvente superior de opciones particulares es

$$E\{\max[U(A_1), \ldots, U(A_1)]\}. \tag{7.51}$$

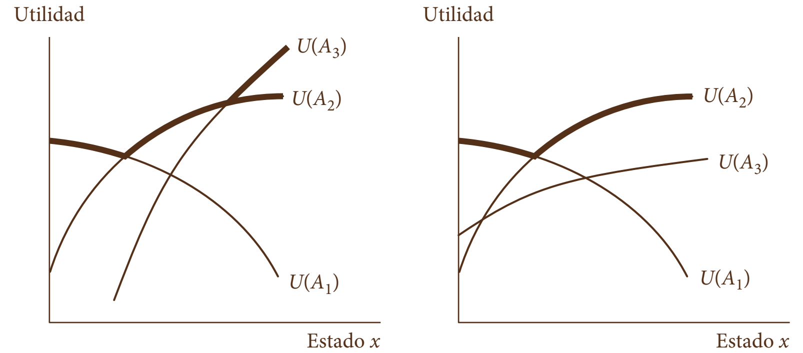
La utilidad esperada en la ecuación 7.51 es más alta que en la 7.50. Esto podría no ser obvio a primera vista, pues parecería que el simple intercambio del orden de las expectativas y los operadores "max" no debería hacer ninguna diferencia. Pero sí la hace. Mientras que la ecuación 7.50 es la utilidad esperada, asociada con la mejor curva de utilidad, la ecuación 7.51 es la utilidad esperada asociada con la envolvente superior de todas las curvas de utilidad.[19]

[19] Este resultado puede comprobarse formalmente usando la desigualdad de Jensen, presentada en la nota 10. En esta última se analizaron las implicaciones de la desigualdad de Jensen para las funciones cóncavas: $E[f(x)] \leq f[E(x)]$. La desigualdad de Jensen tiene la implicación inversa para las funciones convexas: $E[f(x)] \geq f[E(x)]$. En otras palabras, para funciones convexas, el resultado es mayor si el operador de expectativas se aplica fuera de la función que si el orden de ambas se invierte. En el contexto de las opciones el operador "max" tiene las propiedades de una función convexa. Esto puede verse en la figura 7.2b donde tomar la envolvente superior "convexifica" las curvas particulares dándoles más forma de V.

FIGURA 7.3

Más opciones no pueden dejar en peores condiciones al tomador de decisiones.

La adición de una tercera alternativa a las dos representadas en la figura 7.2 es valiosa en a) porque desplaza hacia arriba la envolvente superior (resaltada) de las utilidades. La nueva alternativa es despreciable en b) porque no desplaza la superior, pero el individuo no está en peores condiciones por tenerla.



a) Opción adicional valiosa

b) Opción adicional despreciable

Más opciones son mejores (por lo general)

Añadir opciones nunca puede hacer daño a un tomador de decisiones individual (mientras no se le cobre por ellas), porque las opciones adicionales siempre pueden ser ignoradas. Esta es la esencia de las opciones: dan al tenedor el derecho —pero no la obligación— de elegirlas. La figura 7.3 ilustra este punto, mostrando el efecto de añadir una tercera opción a las dos representadas en la figura 7.2. En el primer panel el individuo se beneficia estrictamente de la tercera opción porque hay algunos espacios muestrales (los valores más altos de x en la figura) para los cuales es mejor que cualquier otra alternativa, desplazando hacia arriba la envolvente superior de las utilidades (la curva resaltada). La tercera opción es despreciable en el segundo panel. Aunque la tercera opción no es la peor para muchos estados o situaciones del espacio muestral, nunca es la mejor, así que tampoco mejora la envolvente superior de las utilidades en relación con la figura 7.2. Aun así la adición de la tercera opción no es perjudicial.

Este discernimiento podría no sostenerse en un marco estratégico con múltiples tomadores de decisiones. En un marco estratégico los actores económicos podrían beneficiarse de la eliminación de algunas de sus opciones. Esto quizá le permita a un actor comprometerse con un curso de acción más estrecho que el que hubiera elegido de otra manera, y este compromiso podría afectar las acciones de otras partes, posiblemente en beneficio de la parte que asumió el compromiso. Una ilustración famosa de este punto es provista en uno de los tratados de estrategia militar más antiguos, cuyo autor es Sun Tzu, general chino que escribió en el año 400 a.C. Parece insensato que un ejército destruya todos los medios de repliegue, quemando puentes tras de sí y hundiendo sus naves, entre otras medidas. Pero esto es lo que Sun Tzu recomendaba como táctica militar. Si el segundo ejército observa que el primero no podrá retirarse y que combatirá a muerte, podría retirarse él mismo antes de trabar combate con el primero. Analizaremos más formalmente cuestiones estratégicas como ésta en el capítulo siguiente que se refiere a la teoría del juego.

Cálculo del valor de las opciones

Podemos llevar más lejos el análisis para derivar una expresión matemática para el valor de una opción real. Sea F la cuota por pagar por la posibilidad de elegir la mejor alternativa después de realizada x en vez de antes. Un individuo estaría dispuesto a pagar esa cuota siempre y cuando

$$E\{\max\,[U(A_1(x) - F), \ldots, [U(A_n(x) - F)]\} \geq \max\{E[U(A_1(x))], \ldots, E[U(A_n(x))]\}. \quad \textbf{(7.52)}$$

La expresión de la derecha es la utilidad esperada de tomar la decisión de antemano, repetida de la ecuación 7.50. La expresión de la izquierda permite que la decisión se tome después de ocurrir x, un beneficio, pero se resta la cuota de la opción a cada beneficio. Naturalmente se supone que la cuota se paga por adelantado, lo que reduce el patrimonio en F sea cual sea la opción que se elija después. El valor de la opción real es la F más alta para la cual la ecuación 7.52 sigue satisfaciéndose, misma que, desde luego, es la F para la cual la condición se mantiene con la igualdad.

EJEMPLO 7.5 Valor de un automóvil de combustible flexible

Determinemos el valor de la opción provista por un automóvil de combustible flexible en un ejemplo numérico. Sea $A_1(x) = 1 - x$ el beneficio de un auto que sólo opera con combustibles fósiles y $A_2(x) = x$ el beneficio de un auto que opera únicamente con biocombustibles. El espacio muestral, x, refleja la relativa importancia de los biocombustibles en comparación con los combustibles fósiles durante el periodo de vida útil del automóvil. Supongamos que x es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1 (la variable aleatoria continua más simple con la cual trabajar aquí). La sección sobre estadística del capítulo 2 brinda ciertos detalles sobre la distribución uniforme, mostrando que la función de densidad de probabilidad (FDP) es $f(x) = 1$ en el caso especial en que la variable aleatoria uniforme va de 0 a 1.

Neutralidad al riesgo. Para facilitar lo más posible los cálculos en un principio, supongamos primero que el comprador del auto es neutral al riesgo, obteniendo un nivel de utilidad igual al nivel de beneficio. Supongamos que el comprador se ve obligado a elegir un auto para biocombustible. Esto ofrece una utilidad esperada de

$$E[A_2] = \int_0^1 A_2(x)f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}, \quad \textbf{(7.53)}$$

donde la integral se simplifica gracias a que $f(x) = 1$. Cálculos similares muestran que la utilidad esperada de la compra de un automóvil para combustibles fósiles también es de 1/2. Así, si sólo se dispone de autos para un solo tipo de combustible, el individuo será indiferente entre ellos, obteniendo una utilidad esperada de 1/2 de cualquiera.

Supongamos ahora que es posible disponer de un auto de combustible flexible, lo cual permite obtener $A_1(x)$ o $A_2(x)$, la que sea más alta en las circunstancias más actuales. La utilidad esperada por el comprador de este auto es

$$\begin{aligned} E[\max(A_1, A_2)] &= \int_0^1 \max(1 - x, x)f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx = x^2\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad \textbf{(7.54)}$$

La segunda línea de la ecuación 7.54 se desprende del hecho de que las dos integrales en la expresión precedente son simétricas. Como la utilidad del comprador es exactamente igual a los beneficios, podemos calcular directamente el valor de la opción del auto de combustible flexible, tomando la diferencia entre los beneficios esperados en las ecuaciones 7.53 y 7.54, que es igual a 1/4. Este es el recargo máximo que un individuo pagaría por el auto de combustible flexible, sobre un auto para un solo tipo de combustible. Si se escalan los beneficios a niveles más realistas multiplicando por, digamos, 10 000 dólares, el recargo sobre el precio (y el valor de la opción) del auto de combustible flexible sería de 2 500 dólares.

Este cálculo muestra el discernimiento general de que las opciones son una manera de enfrentar la incertidumbre que posee valor, aun para individuos neutrales al riesgo. En la parte siguiente de este ejemplo se investigará si la aversión al riesgo vuelve más o menos valiosas las opciones.

Aversión al riesgo. Supongamos ahora que el comprador es resistente al riesgo, con la función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U(x) = \sqrt{x}$. La utilidad esperada del comprador de un auto para biocombustible es

$$E[U(A_2)] = \int_0^1 \sqrt{A_2(x)}\,f(x)\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}, \tag{7.55}$$

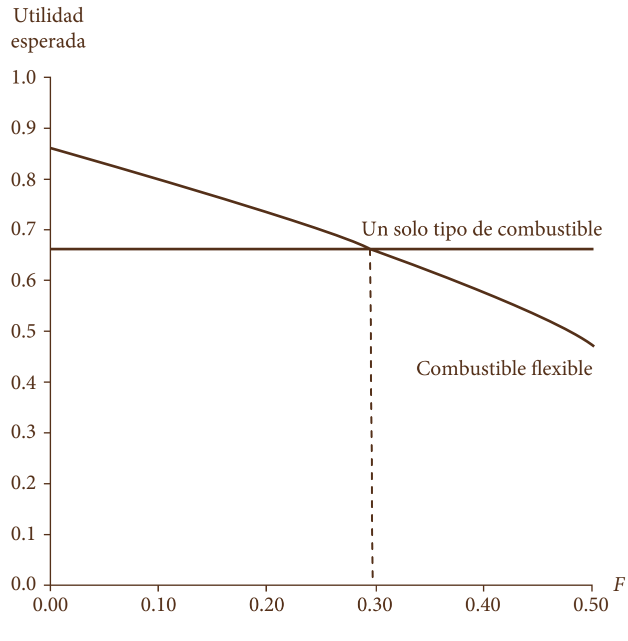
la misma que la de un auto para combustibles fósiles, como demuestran cálculos similares. Por tanto, un auto para un solo tipo de combustible brinda una utilidad esperada de 2/3.

La utilidad esperada de un auto de combustible flexible que cuesta F más que un auto para un solo tipo de combustible es

$$\begin{aligned} E\{\max[U(A_1(x) - F),\, U(A_2(x) - F)]\} &= \int_0^1 \max(\sqrt{1-x-F},\, \sqrt{x-F})f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x-F}\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x-F}\,dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x-F}\,dx \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}-F}^{1-F} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=\frac{1}{2}-F}^{u=1-F} \\ &= \frac{4}{3}\left[(1-F)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2} - F\right)^{\frac{3}{2}}\right]. \end{aligned} \tag{7.56}$$

FIGURA 7.4 Método gráfico para calcular el recargo para un auto de combustible flexible

Para determinar el recargo máximo F que el comprador resistente al riesgo estaría dispuesto a pagar por el auto de combustible flexible se traza la utilidad esperada de un auto para un solo tipo de combustible de la ecuación 7.55 y del auto de combustible flexible de la ecuación 7.56 y se ve el valor de F donde las curvas se cruzan.



Los cálculos implicados en la ecuación 7.56 son algo complejos y requieren, por tanto, cierto análisis. La segunda línea se apoya en la simetría de las dos integrales que aparecen ahí, lo que nos permite colapsarlas en dos veces el valor de una de ellas, y nosotros elegimos la más simple de las dos con estos propósitos. La tercera línea usa el cambio de variables $u = x - F$ para simplificar la integral. (Véase la ecuación 2.135 del capítulo 2 para otro ejemplo del truco de cambio de variables y análisis adicionales.)

Para hallar el recargo máximo que el comprador pagaría por un auto de combustible flexible podemos igualar las ecuaciones 7.55 y 7.56 y despejar F. Lamentablemente, la ecuación resultante es demasiado complicada para resolverla en forma analítica. Un método simple consiste en graficar la última línea de la ecuación 7.56 para un rango de valores de F y mirar de arriba abajo para determinar dónde ofrece la gráfica el valor requerido de 2/3 de la ecuación 7.55. Esto se hace en la figura 7.4, donde vemos que este valor de F es ligeramente menor que 0.3 (0.294 para ser más precisos). Así, el comprador resistente al riesgo está dispuesto a pagar un recargo de 0.294 por el auto de combustible flexible, lo cual es también el valor de la opción de este tipo de automóvil. Al escalar, multiplicando por 10 000 dólares, en busca de valores monetarios más realistas el recargo sobre el precio sería de 2 940 dólares. Esta cifra es superior en 440 dólares a lo que el comprador neutral al riesgo estuvo dispuesto a pagar. En consecuencia, el valor de la opción es mayor en este caso para el comprador resistente al riesgo.

PREGUNTA: ¿La aversión al riesgo incrementa siempre el valor de las opciones? De ser así, explica por qué. De no ser así, modifica el ejemplo con diferentes formas de las funciones de beneficios para ofrecer un ejemplo en el que el comprador neutral al riesgo pagaría más.

Valor de demora de las opciones

La sociedad parece ver con malos ojos a quienes dejan las cosas para después. “No dejes para mañana lo que puedas hacer hoy” es una conocida máxima. Pero la existencia de opciones reales sugiere un posible valor del hecho de posponer. Quizá haya un valor en aplazar grandes decisiones —como la adquisición de un carro— difíciles de revertir después. Aplazar estas grandes decisiones permite al tomador de decisiones preservar el valor de las opciones y reunir más información sobre el futuro. Para el observador externo, quien quizá no entienda todas las incertidumbres implicadas en la situación, podría parecer que el tomador de decisiones es demasiado inerte, por no optar la que parece la decisión correcta en ese momento. De hecho, aplazar puede ser exactamente la decisión correcta frente a la incertidumbre. Elegir un curso de acción descarta cursos posteriores. La demora preserva las opciones. Si las circunstancias siguen siendo favorables, o se vuelven más favorables todavía, la acción puede emprenderse después. Pero si el futuro cambia y la acción es inadecuada, el tomador de decisiones puede haberse ahorrado muchas dificultades gracias a no haber decidido.

El valor de la demora puede verse volviendo a la aplicación del automóvil. Pongamos por caso que en el mercado se dispone únicamente de automóviles para un solo tipo de combustible (sean combustibles fósiles o biocombustible); los autos de combustible flexible no se han inventado aún. Aun si las circunstancias empiezan a favorecer al auto para biocombustible, dado que el número de gasolineras que ofrecen biocombustibles parece descollar, el comprador podría preferir aplazar la compra de un vehículo hasta estar más seguro. Esto puede ser cierto incluso si el comprador renuncia por este motivo a un considerable superávit del consumidor procedente del uso de un auto nuevo durante el periodo de la demora. El problema es que si los biocombustibles no terminan por apoderarse del mercado, el comprador podría quedar en poder de un auto difícil de abastecer de combustible y de reemplazar por uno que queme el otro tipo de combustible. El comprador, así, estaría dispuesto a experimentar costos de demora de hasta F para preservar su flexibilidad.

El valor de la demora gira en torno a la irreversibilidad de la decisión subyacente. Si, en el ejemplo del auto, el fabricante del comprador pudiera recuperar casi el precio de venta, vendiendo el vehículo en el mercado de automóviles usados, no habría razón de demorar la compra. Pero es bien sabido que el valor de un auto nuevo decrece precipitadamente una vez salido de la agencia distribuidora (analizaremos las razones de esto, incluido el “efecto limones” en el capítulo 18); por tanto, podría no ser tan fácil revertir la adquisición de un coche.

Implicaciones para el análisis de costo-beneficio

Para un observador externo la demora podría parecer un síntoma de irracionalidad o ignorancia. ¿Por qué el tomador de decisiones deja pasar la oportunidad de emprender una acción beneficiosa? En este capítulo se han provisto ya varias razones de que un tomador de decisiones racional pueda no querer emprender una acción pese a que los beneficios esperados de la acción excedan los costos esperados. Primero, un individuo con aversión al riesgo podría evitar una apuesta aun si ésta ofreciera un beneficio monetario esperado positivo (a causa de la utilidad marginal decreciente del dinero); y el valor de la opción brinda una razón adicional de que la acción no se lleve a cabo: el tomador de decisiones podría esperar a tener mayor certidumbre sobre los posibles resultados de la decisión.

Muchos de nosotros nos hemos topado con la *regla de costo-beneficio* la cual establece que una acción debe emprenderse si los costos previstos son menores que los beneficios. Esta es una regla generalmente sensata, ya que indica el curso de acción correcto en ámbitos simples sin incertidumbre. Pero debe tenerse cuidado al aplicar esta regla en condiciones que implican incertidumbre. La regla de decisión correcta es más complicada entonces porque se deben tomar en cuenta las preferencias de riesgo (convirtiendo beneficios en utilidades) y el valor de demora de la opción, de estar presente. No aplicar la regla simple de costo-beneficio en condiciones de incertidumbre puede indicar sofisticación antes que irracionalidad.[20]

INFORMACIÓN

El cuarto método para reducir la incertidumbre implicada en una situación es adquirir mejor información sobre el resultado probable. Ya se consideró una versión de esto en la sección anterior, donde se evaluó la estrategia de preservar opciones al tiempo que se aplaza una decisión hasta recibir mejor información. La demora implicó algunos costos, que pueden concebirse como una suerte de "precio de compra" de la información adquirida. Aquí seremos más directos en la consideración de la información como un bien que puede adquirirse directamente y analizaremos en gran detalle por qué y cuánto están dispuestos a pagar los individuos por ella.

La información como un bien

Para este momento ya debería estar claro para el lector que la información es un valioso recurso económico. Ya vimos un ejemplo: un comprador puede tomar una mejor decisión sobre qué tipo de automóvil adquirir si tiene mejor información sobre la clase de combustibles que estarán fácilmente disponibles durante el periodo de vida útil del auto. Pero los ejemplos no terminan ahí. Los compradores que saben dónde adquirir bienes de alta calidad a bajo costo pueden estirar más su presupuesto que aquellos que no tienen este conocimiento; los médicos, por ejemplo, pueden brindar mejor atención si están al día en las investigaciones científicas más recientes.

El estudio de la economía de la información se ha vuelto una de las principales áreas de investigación en la actualidad. Esto implica varios retos. A diferencia de los bienes de consumo que hemos estudiado hasta ahora, la información es difícil de cuantificar. Y aun si se pudiera cuantificar, tiene algunas propiedades técnicas que la vuelven un bien de un tipo inusual. La mayor parte de la información es durable y mantiene su valor después de haber sido usada. A diferencia de un *hot dog*, el cual se consume una sola vez, el conocimiento de una venta especial puede ser usado no sólo por el individuo que la descubre, sino también por cualquier otro con quien se comparta

[20] A los economistas les intriga la renuencia de los consumidores a instalar electrodomésticos eficientes pese a que es probable que los ahorros en energía sufraguen en poco tiempo el precio de compra de esos aparatos. Una explicación procedente de la economía del comportamiento es que los consumidores son demasiado ignorantes para realizar cálculos de costo-beneficio, o demasiado impacientes para esperar a que se acumulen los ahorros de energía. K. Hassett y G. Metcalf, en "Energy Conservation Investment: Do Consumers Discount the Future Correctly?" (*Energy Policy*, junio de 1993, pp. 710-716), sugieren que la inercia de los consumidores puede ser una demora racional ante la fluctuación de los precios de la energía. Véase el problema 7.9 para un ejemplo numérico conexo.

la información. Los amigos pueden beneficiarse entonces de la información aunque no hayan tenido que gastar nada para obtenerla. En efecto, en un caso especial de esta situación, la información tiene la característica de un *bien público* puro (véase el capítulo 19). Es decir, la información es *no rival* en cuanto que otros pueden usarla con cero costos, y *no exclusiva* en cuanto que ningún individuo puede impedir a otros que la usen. El ejemplo clásico de estas propiedades es un descubrimiento científico. Cuando individuos prehistóricos inventaron la rueda, otros pudieron usarla sin demérito del valor del descubrimiento, y todos los que veían la rueda podían copiarla libremente. La información es, asimismo, difícil de vender porque el acto de describir el bien ofrecido a un posible consumidor supone entregárselo.

Estas propiedades técnicas de la información implican que los mecanismos del mercado podrían operar a menudo imperfectamente en la asignación de recursos a la provisión y adquisición de información. Después de todo, ¿para qué invertir en la producción de información cuando es posible adquirirla de otros sin costo alguno? Por tanto los modelos estándar de oferta y demanda podrían ser de uso relativamente limitado para comprender tales actividades. Como mínimo, deben desarrollarse modelos que reflejen atinadamente las propiedades supuestas respecto al entorno informativo. En secciones posteriores de este libro se describirán algunas de las situaciones que requieren esos modelos. Aquí, sin embargo, prestaremos relativamente poca atención a los equilibrios oferta-demanda y nos centraremos en cambio en un ejemplo que ilustra el valor de la información al ayudar a los individuos a tomar decisiones en condiciones de incertidumbre.

Cuantificación del valor de la información

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para cuantificar el valor de la información a partir de la sección sobre el valor de las opciones. Supongamos de nueva cuenta que el individuo está inseguro respecto a cuál será el espacio muestral (x) en el futuro. Debe tomar una de n decisiones hoy (lo que nos permite dejar de lado el valor de demora de las opciones y otras cuestiones que ya estudiamos). Como antes, $A_i(x)$ representa los beneficios provistos por la opción i. Ahora reinterpretemos F como la cuota cobrada por el dato acerca del valor preciso que x adoptará en el futuro (quizá esto sea el sueldo del economista contratado para hacer tales pronósticos).

Los mismos cálculos de la sección sobre las opciones pueden usarse aquí para demostrar que el máximo de F es, nuevamente, el valor con el cual la ecuación 7.52 se mantiene con la igualdad. Así como este fue el valor de la opción real en aquella sección, aquí es el valor de la información. El valor de la información sería menor que esta F si el pronóstico de las condiciones futuras fuera imperfecto más que perfecto, como se supone aquí. Otros factores que afectan el valor de la información para un individuo incluyen el grado de incertidumbre antes de adquirir la información, el número de opciones entre las cuales puede elegir y sus preferencias de riesgo. Cuanta más incertidumbre resuelva la nueva información, más valiosa será esta, desde luego. Si el individuo no tiene mucho margen para responder a la información por tener sólo una gama limitada de decisiones por tomar, la información no será valiosa. El grado de aversión al riesgo tiene efectos ambiguos en el valor de la información (contestar la pregunta del ejemplo 7.5 te dará idea de por qué).

ENFOQUE DE ESTADOS DE PREFERENCIA DE LA ELECCIÓN EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Aunque nuestro análisis en este capítulo ha ofrecido discernimientos sobre varios asuntos, parece algo distinto del enfoque que hemos adoptado en otros capítulos. El modelo básico de la optimización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestal parece haberse perdido. Para avanzar en el estudio del comportamiento en condiciones de incertidumbre, desarrollaremos nuevas técnicas que nos permitirán reinsertar el análisis de esa conducta en el marco teórico estándar de la elección.

Espacios muestrales y mercancías contingentes

Comenzaremos insistiendo en una idea que ya hemos mencionado: pensar en un futuro incierto en términos de *espacios muestrales*. No podemos predecir exactamente qué sucederá mañana, aunque suponemos que es posible clasificar todas las cosas que podrían suceder en un número fijo de *espacios* claramente definidos. Por ejemplo, podría hacerse la burda aproximación de decir que mañana la muestra estará en sólo una de dos situaciones posibles: en un "buen momento" o en un "mal momento". Podría hacerse una gradación mucho más fina del espacio muestral (que implicara incluso millones de espacios posibles), pero casi todo lo esencial de la teoría puede desarrollarse usando sólo dos estados.

Una idea conceptual que puede desarrollarse concurrentemente con la noción de espacio muestral es la de *bienes contigentes*. Se trata de bienes que sólo se proporcionan si ocurre un espacio muestral particular. Como ejemplo, "1 dólar en un buen momento" es un bien contingente que promete al individuo 1 dólar en un buen momento, pero nada si el día de mañana resultara ser un mal momento. Incluso es factible, extendiendo un poco la capacidad intuitiva propia, concebir la posibilidad de adquirir el bien: yo podría comprarle a alguien la promesa de 1 dólar si mañana resultara ser un buen momento. Pero como mañana podría ser un mal momento, este bien probablemente se venda por menos de 1 dólar. Si alguien también estuviera dispuesto a venderme el bien contingente "1 dólar en un mal momento", yo podría cerciorarme de tener 1 dólar mañana, comprando los dos bienes contingentes "1 dólar en un buen momento" y "1 dólar en un mal momento".

Análisis de utilidad

El examen de decisiones de optimización de la utilidad entre bienes contingentes procede formalmente casi de la misma forma en que ya hemos analizado las decisiones. La principal diferencia es que, *a posteriori*, un individuo sólo habrá obtenido un bien contingente (dependiendo de si el momento resulta ser bueno o malo). Antes de resolver la incertidumbre, sin embargo, el individuo tiene dos bienes contingentes entre los cuales elegir y probablemente compre algo de cada uno, porque no sabe qué estado ocurrirá. Denotaremos estos dos bienes contingentes con W_g (patrimonio en un buen momento) y W_b (patrimonio en un mal momento). Suponiendo que la utilidad es independiente del estado que se presente[21] y que la persona cree que probablemente ocurrirá un buen momento π, la utilidad esperada asociada con estos dos bienes contingentes es

$$V(W_g, W_b) = \pi U(W_g) + (1 - \pi)U(W_b). \tag{7.57}$$

Esta es la magnitud que el individuo quiere optimizar dado su patrimonio inicial, W.

Precios de mercancías contingentes

Suponiendo que un individuo puede adquirir 1 dólar de patrimonio en un buen momento para p_g y 1 dólar de patrimonio en un mal momento para P_b, su restricción presupuestal es entonces

$$W = p_g W_g + p_b W_b. \tag{7.58}$$

La razón de precio p_g/p_b muestra cómo este individuo puede cambiar dólares de patrimonio en un buen momento por dólares en uno malo. Si, por ejemplo, $p_g = 0.80$ y $p_b = 0.20$, el sacrificio de 1 dólar de patrimonio en un buen momento le permitiría comprar derechos contingentes que pro-

[21] Este supuesto es insostenible en circunstancias en las que la utilidad del patrimonio depende del espacio muestral. Por ejemplo, la utilidad provista por un nivel dado de patrimonio puede diferir dependiendo de si un individuo está "enfermo" o "sano". Sin embargo, no nos ocuparemos de esas complicaciones aquí. En la mayor parte de nuestro análisis se supone que la utilidad es cóncava en el patrimonio: $U'(W) > 0$, $U''(W) < 0$.

dujeran 4 dólares de patrimonio si el momento resultara ser malo. Que ese canje mejore la utilidad dependerá, desde luego, de los detalles de la situación. Pero estudiar problemas que implican incertidumbre como situaciones en las que se intercambian varios derechos contingentes es el discernimiento clave que ofrece el modelo de estado de preferencia.

Mercados justos de bienes contingentes

Si los mercados de derechos patrimoniales contingentes están firmemente desarrollados y existe un acuerdo general sobre la probabilidad de un buen momento (π), los precios de esos derechos serán actuarialmente justos; es decir, iguales a la probabilidades subyacentes:

$$p_g = \pi,$$
$$p_b = 1 - \pi. \tag{7.59}$$

De ahí que la razón de precio p_g/p_b refleje simplemente las posibilidades en favor de un buen momento:

$$\frac{p_g}{p_b} = \frac{\pi}{1-\pi}. \tag{7.60}$$

En nuestro ejemplo anterior, si $p_g = \pi = 0.8$ y $p_b = (1 - \pi) = 0.2$, entonces $\pi/(1 - \pi) = 4$. En este caso, las posibilidades en favor de un buen momento se enunciarían como "4 a 1". Los mercados justos de derechos contingentes (como los mercados de los seguros) también reflejarán esas posibilidades. Una analogía es provista por las "posibilidades" en las carreras de caballos. Estas posibilidades son "razonables" cuando reflejan las verdaderas probabilidades de que diversos caballos ganen.

Aversión al riesgo

Ahora estamos en posición de mostrar cómo se manifiesta la aversión al riesgo en el modelo de estado de preferencia. Específicamente, es posible demostrar que, si los mercados de derechos contingentes son justos, un individuo optimizador de su utilidad optará por una situación en la que $W_g = W_b$; es decir, dispondrá las cosas de tal manera que el patrimonio finalmente obtenido sea el mismo, sea cual sea el espacio que se presente.

Como en capítulos anteriores, la optimización de la utilidad sujeta a una restricción presupuestal requiere que este individuo iguale la TMS de W_g para W_b con la razón de los precios de estos "bienes":

$$TMS = \frac{\partial V/\partial W_g}{\partial V/\partial W_b} = \frac{\pi U'(W_g)}{(1-\pi)U'(W_b)} = \frac{p_g}{p_b}. \tag{7.61}$$

En vista del supuesto de que los mercados de derechos contingentes son justos (ecuación 7.60), esta condición de primer orden se reduce a

$$\frac{U'(W_g)}{U'(W_b)} = 1$$

o[22]

$$W_g = W_b. \tag{7.62}$$

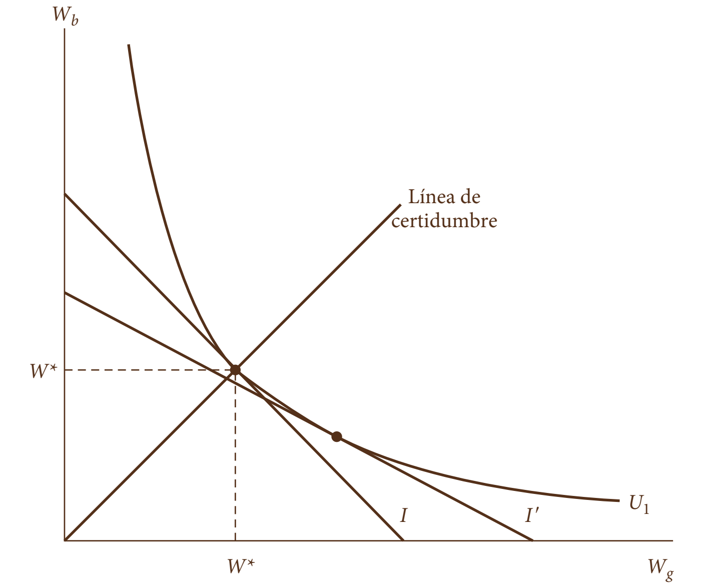
De ahí que un individuo, al enfrentar mercados justos de derechos contigentes sobre el patrimonio, sea resistente al riesgo y elija cerciorarse de que tendrá el mismo nivel de patrimonio independientemente del espacio que ocurra.

[22] Este paso requiere que la utilidad sea independiente del espacio y que $U'(W) > 0$.

FIGURA 7.5

Aversiones al riesgo en el modelo de estado de preferencia.

La línea I representa la restricción presupuestal del individuo para derechos patrimoniales contingentes: $W = p_g W_g + p_b W_b$. Si el mercado de derechos contingentes es actuarialmente justo $[p_g/p_b = \pi/(1 - \pi)]$, la optimización de la utilidad ocurrirá en la línea de certidumbre donde $W_g = W_b = W^*$. Si los precios no son actuarialmente justos, la restricción presupuestal podría parecerse a I', y la optimización de la utilidad ocurrirá en un punto donde $W_g > W_b$.



Análisis gráfico

La figura 7.5 ilustra la aversión al riesgo con una gráfica. Está demostrado que la restricción presupuestal de un individuo (I) es tangente a la curva de indiferencia U_1 donde $W_g = W_b$; un punto en la "línea de certidumbre" en el que el patrimonio (W^*) es independiente del espacio muestral que se presente. En W^* la pendiente de la curva de indiferencia $[\pi/(1 - \pi)]$ es exactamente igual a la razón de precios p_g/p_b.

Si el mercado de derechos patrimoniales contingentes no fuera justo, la optimización de la utilidad podría no ocurrir en la línea de certidumbre. Supongamos, por ejemplo, que $\pi/(1 - \pi) = 4$, pero que $p_g/p_b = 2$, porque asegurar el patrimonio en un mal momento resulta costoso. En este caso la restricción presupuestal se asemejaría a la línea I' en la figura 7.5, y la optimización de la utilidad ocurriría bajo la línea de certidumbre.[23] En este caso el individuo apostaría un poco optando por $W_g > W_b$ porque los derechos sobre W_b son relativamente costosos. El ejemplo 7.6 muestra la utilidad de este enfoque para evaluar algunas de las alternativas que podrían estar disponibles.

EJEMPLO 7.6 Seguros en el modelo de estados de preferencia

El enfoque de estado de preferencia puede ilustrarse reformulando la ilustración del seguro de automóvil del ejemplo 7.2 como un problema que implica los dos bienes contingentes, "patrimonio sin robo" (W_g) y "patrimonio con robo" (W_b). Si, nuevamente, se supone utilidad logarítmica y que la probabilidad de un robo (es decir, $1 - \pi$) es de 0.25, entonces

[23] Dado que (como demuestra la ecuación 7.61) la *TMS* en la línea de certidumbre siempre es $\pi/(1 - \pi)$, tangencias con una pendiente más plana que esta deben ocurrir bajo esa línea.

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75U(W_g) + 0.25U(W_b) \\ &= 0.75 \ln W_g + 0.25 \ln W_b. \end{aligned} \quad \textbf{(7.63)}$$

Si el individuo no emprende ninguna acción, la utilidad está determinada por la dotación patrimonial inicial, $W^*_g = 100\,000$ y $W^*_h = 80\,000$, de modo que

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \ln 100\,000 + 0.25 \ln 80\,000 \\ &= 11.45714 \end{aligned} \quad \textbf{(7.64)}$$

Para estudiar intercambios a partir de estas dotaciones iniciales la restricción presupuestal se escribe en términos de los precios de los bienes contingentes, p_g y p_b:

$$p_g W_g^* + p_b W_b^* = p_g W_g + p_b W_b. \quad \textbf{(7.65)}$$

Suponiendo que estos precios igualan las probabilidades de los dos estados ($p_g = 0.75$, $p_b = 0.25$), esta restricción puede escribirse como

$$0.75(100\,000) + 0.25(80\,000) = 95\,000 = 0.75W_g + 0.25W_b; \quad \textbf{(7.66)}$$

es decir, el valor esperado del patrimonio es de 95 000 dólares, y un individuo puede asignar esta cantidad entre W_g y W_b. Ahora, la optimización de la utilidad respecto a esta restricción presupuestal produce $W_g = W_b = 95\,000$. En consecuencia, el individuo se moverá hacia la línea de certidumbre y recibirá una utilidad esperada de

$$\text{utilidad esperada} = \ln 95\,000 = 11.46163, \quad \textbf{(7.67)}$$

una mejora evidente respecto a no haber hecho nada. Para obtener esta mejora se deben poder transferir 5 000 dólares de patrimonio en un buen momento (sin robo) a 15 000 de patrimonio adicional en un mal momento (robo). Un contrato de seguros razonable permitiría esto porque costaría 5 000 dólares pero devolvería 20 000 si ocurriera un robo (aunque nada si no ocurriera un robo). Nótese aquí que los cambios patrimoniales prometidos por el seguro —$dW_b/dW_g = 15\,000/-5\,000 = -3$— son exactamente iguales a la negativa de la razón de posibilidades $-\pi/(1 - \pi) = -0.75/0.25 = -3$.

Póliza con cláusula de deducible. Otros contratos de seguros podrían mejorar la utilidad en esta situación, aunque no todos ellos llevarían a opciones en la línea de certidumbre. Por ejemplo, una póliza que costara 5 200 dólares y devolviera 20 000 en caso de robo permitiría a un individuo llegar a la línea de certidumbre con $W_g = W_b = 94\,800$ y

$$\text{utilidad esperada} = \ln 94\,800 = 11.45953, \quad \textbf{(7.68)}$$

lo que también excede la utilidad obtenible de la dotación inicial. Una póliza que cuesta 4 900 dólares y requiere que el individuo incurra en los primeros 1 000 dólares de una pérdida por robo produciría

$$\begin{aligned} W_g &= 100\,000 - 4\,900 = 95\,100, \\ W_b &= 80\,000 - 4\,900 + 19\,000 = 94\,100; \end{aligned} \quad \textbf{(7.69)}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \text{utilidad esperada} &= 0.75 \ln 95\,100 + 0.25 \ln 94\,100 \\ &= 11.46004. \end{aligned} \quad \textbf{(7.70)}$$

Esta póliza mejora la utilidad aunque no permite arribar a la línea de certidumbre. El seguro no necesariamente debe ser completo para ofrecer la promesa de mayor utilidad.

PREGUNTA: ¿Cuál es la cantidad máxima que un individuo estaría dispuesto a pagar por una póliza de seguros en la que tuviera que absorber los primeros 1 000 dólares de una pérdida?

Aversión al riesgo y primas de riesgo

El modelo de estado de preferencia también es especialmente útil para analizar la relación entre la aversión al riesgo y la disposición de los individuos a pagar por riesgos. Consideremos a dos individuos, cada uno de los cuales comienza con cierto patrimonio, W^*. Cada individuo busca optimizar una función de utilidad esperada de la forma

$$V(W_g, W_b) = \pi \frac{W_g^R}{R} + (1-\pi)\frac{W_b^R}{R}. \quad \textbf{(7.71)}$$

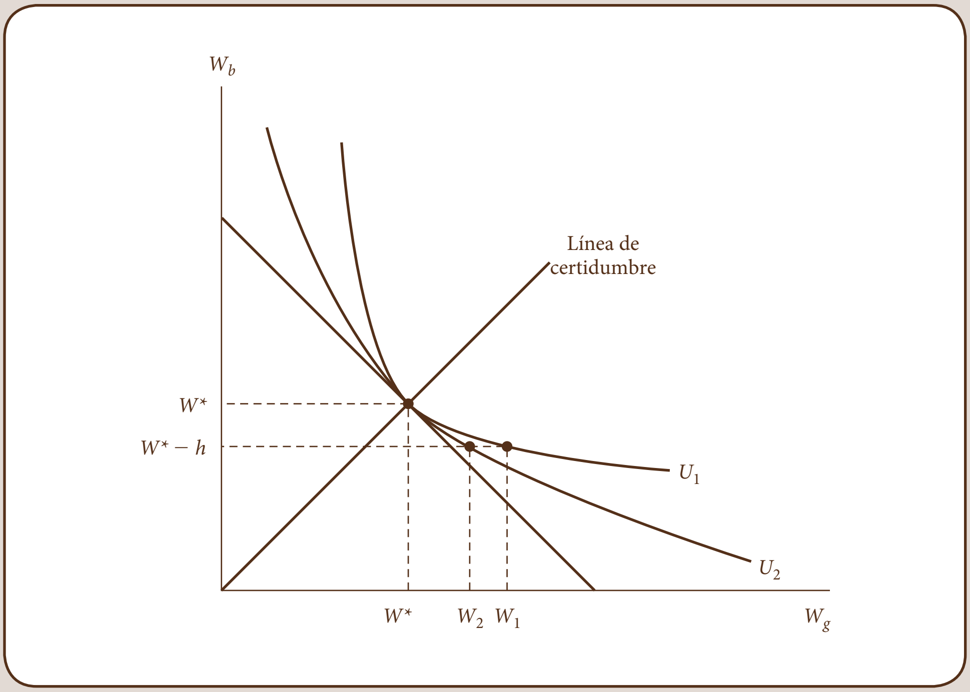
Aquí la función de utilidad exhibe aversión al riesgo constante relativa (véase el ejemplo 7.4). Nótese también que esta función se parece mucho a la función de utilidad ESC que se examinó en el capítulo 3 y otras partes. El parámetro R determina tanto el grado de aversión al riesgo como el grado de curvatura de las curvas de indiferencia implicadas por la función. Un individuo con aversión al riesgo tendrá un gran valor negativo de R y marcadas curvas de indiferencia, como U_1 en la figura 7.6. Un individuo con más tolerancia al riesgo tendrá un valor más alto de R y curvas de indiferencia más planas (como U_2).[24]

Supongamos ahora que estos individuos enfrentan la perspectiva de perder h dólares de patrimonio en un mal momento. Ese riesgo sería aceptable para el individuo 2 si el patrimonio en un buen momento se incrementara de W^* a W_2. Para el individuo 1 resistente al riesgo, sin embargo, el patrimonio tendría que incrementar a W_1 para volver aceptable el riesgo. Por tanto, la diferencia entre W_1 y W_2 indica el efecto de la aversión al riesgo respecto a la disposición a asumir riesgos.

FIGURA 7.6

Aversión al riesgo y primas de riesgo.

La curva de indiferencia U_1 representa las preferencias de un individuo con aversión al riesgo, mientras que el individuo con preferencias representadas por U_2 está dispuesto a asumir más riesgo. Frente al riesgo de perder h en un mal momento, la persona 2 requerirá una compensación de $W_2 - W^*$ en un buen momento, mientras que la persona 1 requerirá una mayor cantidad dada por $W_1 - W^*$.



[24] La tangencia de U_1 y U_2 en W^* está asegurada porque la *TMS* a lo largo de la línea de certidumbre está dada por $\pi/(1-\pi)$ independientemente del valor de R.

Algunos de los problemas de este capítulo hacen uso de este recurso gráfico para mostrar la relación entre preferencias (reflejadas por la función de utilidad en la ecuación 7.71) y el comportamiento en situaciones arriesgadas.

ASIMETRÍA DE INFORMACIÓN

Una implicación obvia del estudio de la adquisición de informativa es que el nivel de información que un individuo compra depende del precio por unidad de los mensajes. A diferencia del precio de mercado de la mayoría de los bienes (que suele suponerse el mismo para todos ellos), hay muchas razones para creer que los costos de la información pueden diferir significativamente entre los individuos. Algunos tendrán habilidades específicas relevantes para la adquisición de información (por ejemplo, podrían ser mecánicos calificados), mientras que otros pueden no poseer dichas habilidades. Habrá quienes tengan otros tipos de experiencias que produzcan información valiosa, mientras que otros podrían carecer de esa experiencia. Por ejemplo, el vendedor de un producto usualmente sabrá más sobre las limitaciones del mismo que un comprador, porque el primero sabe exactamente cómo fue hecho el bien y dónde podrían aparecer los problemas. De igual forma, compradores frecuentes a gran escala de un bien podrían tener mayor acceso a información respecto a los compradores primerizos. Por último, algunos individuos pueden haber invertido en algún tipo de servicio de información (por ejemplo, una liga de computación con una casa de bolsa o mediante una suscripción a *Consumer Reports*) lo cual reduce el costo marginal de obtener información adicional en comparación con alguien sin ese tipo de inversión.

Todos estos factores sugieren que el nivel de información difiere en ocasiones entre los participantes en transacciones en el mercado. Desde luego que en muchos casos los costos de información pueden ser bajos y tales diferencias, menores. La mayoría de los individuos puede evaluar muy bien la calidad de las verduras frescas con sólo mirarlas, por ejemplo. Pero cuando los costos de información son altos y variables entre individuos, es de esperar que resulte ventajoso adquirir diferentes cantidades de información. Pospondremos al capítulo 18 un estudio detallado de estas situaciones.

RESUMEN

El objetivo de este capítulo es proporcionar material básico para el estudio del comportamiento individual en situaciones inciertas. Los conceptos clave cubiertos se enlistan en seguida.

- La forma más común de modelizar el comportamiento en condiciones de incertidumbre es suponer que los individuos tratan de optimizar la utilidad esperada de sus acciones.
- Los individuos que exhiben una utilidad marginal decreciente de su patrimonio presentan aversión al riesgo. Es decir, por lo general rechazan apuestas razonables.
- Los individuos con aversión al riesgo querrán asegurarse por completo contra sucesos inciertos, si las primas de seguros son actuarialmente razonables. Podrían estar dispuestos a pagar primas más que actuarialmente razonables para no correr riesgos.
- Dos funciones de utilidad se han usado ampliamente en el estudio del comportamiento en condiciones de incertidumbre: la función de aversión al riesgo constante absoluta (ARCA) y la función de aversión al riesgo constante relativa (ARCR). Ninguna de éstas es completamente satisfactoria en terrenos teóricos.
- Entre los métodos para reducir el riesgo implicado en una situación se incluyen: transferir el riesgo a quienes pueden soportarlo más eficazmente mediante seguros; dispersar el riesgo entre varias actividades a través de la diversificación, preservar las opciones para hacer frente a los diversos resultados que surjan y adquirir información para determinar qué resultados son más probables.
- Uno de los temas más estudiados en la economía de la incertidumbre es el "problema de cartera", que cuestiona en qué forma dividirá un inversionista su patrimonio entre activos disponibles. Una versión simple de este problema se usa para ilustrar el valor de la diversificación en el texto; las extensiones ofrecen un análisis detallado.

- La información es valiosa porque permite a los individuos tomar mejores decisiones en situaciones inciertas. La información puede ser óptimamente valiosa cuando los individuos tienen cierta flexibilidad en su toma de decisiones.
- El enfoque de estado de preferencia permite abordar la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en un conocido marco teórico de la elección.

Problemas

7.1

Se ve a Jorge hacer una apuesta de 100 000 dólares en favor de los Bulls en la final de la NBA. Si Jorge tiene una función logarítmica de utilidad patrimonial y su patrimonio corriente es de 1 000 000 de dólares, ¿cuál considera que es la mínima probabilidad de que ganen los Bulls?

7.2

Demuestra lo siguiente: si la función de utilidad patrimonial de un individuo es convexa preferirá apuestas razonables a la certeza del ingreso, incluso podría estar dispuesto a aceptar apuestas un tanto irrazonables. ¿Crees que este tipo de comportamiento de asumir riesgos es común? ¿Qué factores podrían tender a limitar su ocurrencia?

7.3

Un individuo adquiere una docena de huevos y debe llevarla a casa. Aunque hacer viajes a casa no tiene costo alguno, hay 50% de posibilidades de que todos los huevos transportados en un viaje se rompan durante el trayecto. El individuo considera dos estrategias: 1) llevar los 12 huevos en un solo viaje o 2) hacer dos viajes con seis huevos cada uno.

a. Enlista los posibles resultados de cada estrategia y las probabilidades de esos resultados. Demuestra que, en promedio, seis huevos permanecerán sin romperse después del viaje a casa en cualquier estrategia.
b. Desarrolla una gráfica para mostrar la utilidad obtenible en cada estrategia. ¿Cuál estrategia será preferible?
c. ¿La utilidad podría mejorar haciendo más de dos viajes? ¿Cómo se vería afectada esta posibilidad, si los viajes adicionales implicaran un costo?

7.4

Supón que hay una posibilidad de 50-50 de que un individuo resistente al riesgo con patrimonio corriente de 20 000 dólares contraiga una enfermedad debilitante y sufra una pérdida de $10 000.

a. Calcula el costo de un seguro actuarialmente razonable en esta situación y usa una gráfica de utilidad patrimonial (como la de la figura 7.1) para mostrar que el individuo preferirá un seguro razonable contra esta pérdida a aceptar la apuesta sin haberse asegurado.
b. Supón que se dispone de dos tipos de pólizas de seguros:
   1) una póliza razonable que cubra la pérdida total y
   2) una póliza razonable que sólo cubra la mitad de cualquier pérdida incurrida.

   Calcula el costo del segundo tipo de póliza y demuestra que, en general, el individuo la considerará inferior a la primera.

7.5

La señorita Fogg planea hacer un viaje alrededor del mundo en el que piensa gastar 10 000 dólares. La utilidad del viaje es una función de cuánto gastará realmente (Y), dada por

$$U(Y) = \ln Y.$$

a. Si hay 25 por ciento de probabilidad de que la señorita Fuentes pierda 1 000 dólares de su dinero en efectivo durante el viaje, ¿cuál es la utilidad esperada de éste?
b. Supón que la señorita Fuentes puede comprar un seguro contra la pérdida de esos 1 000 dólares (comprando, digamos, cheques de viajero) a una prima "actuarialmente razonable" de 250 dólares. Demuestra que su utilidad esperada es más alta si adquiere este seguro, que si enfrenta el riesgo de perder los 1 000 dólares sin seguro.
c. ¿Cuál es la cantidad máxima que la señorita Fuentes estaría dispuesta a pagar para asegurar sus 1 000 dólares?

7.6

Al decidir estacionarse en un sitio prohibido, un individuo sabe que la probabilidad de recibir una infracción es p y que la multa por esa infracción es f. Supón que todos los individuos son resistentes al riesgo (es decir, $U''(W) < 0$ donde W es el patrimonio del individuo).

Un incremento proporcional en la probabilidad de ser sorprendido o un incremento proporcional en la multa ¿será un elemento disuasorio más eficaz para impedir el estacionamiento? *Pista*: Usa la aproximación de la serie de Taylor $U(W - f) = U(W) - fU'(W) + (f^2/2)U''(W)$.

7.7

Un agricultor cree que hay una posibilidad de 50-50 de que la siguiente temporada de cultivo sea especialmente lluviosa. Su función de utilidad esperada tiene la forma

$$\text{utilidad esperada} = \tfrac{1}{2}\ln Y_{NR} + \tfrac{1}{2}\ln Y_R,$$

donde Y_{NR} y Y_R representan el ingreso del agricultor en situaciones de "lluvia normal" y "muy lluvioso", respectivamente.

a. Supón que el agricultor debe elegir entre dos cultivos que prometen las siguientes perspectivas de ingresos:

Cultivo	Y_{NR}	Y_R
Trigo	\$28 000	\$10 000
Maíz	\$19 000	\$15 000

¿Cuál de estos cultivos sembrará?

b. Supón que el agricultor puede sembrar la mitad de su campo con cada cultivo. ¿Elegiría hacerlo? Explica tu resultado.
c. ¿Qué mezcla de trigo y maíz le ofrecería al agricultor el óptimo de utilidad esperada?
d. ¿Asegurar el trigo —algo que está a disposición de los agricultores que sólo siembran trigo y que cuesta 4 000 dólares y rinde 8 000 en caso de una temporada agrícola lluviosa— lo haría cambiar su siembra?

7.8

En la ecuación 7.30 se mostró que la cantidad que un individuo está dispuesto a pagar para evitar una apuesta razonable (h) está dada por $p = 0.5E(h^2)r(W)$, donde $r(W)$ es la medida de aversión al riesgo absoluta en el nivel patrimonial inicial de este individuo. En este problema se analizará la magnitud de dicho pago como una función de la magnitud del riesgo enfrentado y del nivel patrimonial de este individuo.

a. Considera una apuesta razonable (v) de ganar o perder \$1. Para esta apuesta, ¿cuál es $E(v^2)$?
b. Considera ahora variar la apuesta del inciso a), multiplicando cada premio por una constante positiva k. Considera que $h = kv$. ¿Cuál es el valor de $E(h^2)$?
c. Supón que este individuo tiene una función logarítmica de utilidad $U(W) = \ln W$. ¿Cuál es la expresión general para $r(W)$?
d. Calcula la prima de riesgo (p) para $k = 0.5$, 1 y 2 y para $W = 10$ y 100. ¿Qué concluyes de comparar los seis valores?

7.9

Vuelve al ejemplo 7.5, en el que se calculó el valor de la opción real provista por un automóvil de combustible flexible. Sigue suponiendo que el beneficio de un auto que quema combustibles fósiles es $A_1(x) = 1 - x$. Supón ahora que el beneficio del auto para biocombustible es más alto, $A_2(x) = 2x$. Nuevamente, x es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1, lo que recoge la disponibilidad relativa de biocombustibles versus combustibles fósiles en el mercado durante el periodo de vida futura del automóvil.

a. Supón que el comprador es neutral al riesgo con una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U(x) = x$. Calcula el valor de la opción de un auto de combustible flexible que permite al comprador reproducir el beneficio de cualquier auto para un solo tipo de combustible.
b. Repite el cálculo del valor de la opción para un comprador resistente al riesgo con función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$.
c. Compara tus respuestas con las del ejemplo 7.5. Explica cómo el incremento en el valor del auto para biocombustible afecta el valor de la opción provista por el auto de combustible flexible.

Problemas analíticos

7.10 Utilidad ARAA

Las funciones de utilidad ARCA y ARCR pertenecen a una clase más general de funciones de utilidad llamadas funciones de *aversión al riesgo armónica absoluta* (ARAA). La forma general de esta función es $U(W) = \theta(\mu + W/\gamma)^{1-\gamma}$, donde los diversos parámetros obedecen las restricciones siguientes:

- $\gamma \leq 1$,
- $\mu + W/\gamma > 0$,
- $\theta\left[(1 - \gamma)/\gamma\right] > 0$.

Las razones de las dos primeras restricciones son obvias; la tercera se requiere para que $U' > 0$.

a. Calcula $r(W)$ para esta función. Demuestra que la inversa de esta expresión es lineal en W. Este es el origen del adjetivo *armónica* en el nombre de la función.
b. Demuestra que cuando $\mu = 0$ y $\theta = \left[(1 - \gamma)/\gamma\right]^{\gamma-1}$, esta función se reduce a la función ARCR dada en el capítulo 7 (véase la nota 17).
c. Usa tu resultado del inciso a) para demostrar que si $\gamma \to \infty$, entonces $r(W)$ es una constante en esta función.
d. Considera que la constante hallada en el inciso c) está representada por (A). Demuestra que la forma incluida de la función de utilidad en este caso es la función ARCA dada en la ecuación 7.35.
e. Por último, demuestra que una función de utilidad cuadrática puede generarse a partir de la función ARAA simplemente estableciendo $\gamma = -1$.
f. Pese a su aparente generalidad, la función ARAA exhibe varias limitaciones para el estudio del comportamiento en situaciones inciertas. Describe algunas de estas deficiencias.

7.11 Teoría de prospectos

Dos pioneros en el campo de la economía del comportamiento, Daniel Kahneman y Amos Tversky (ganadores del Premio Nobel en economía, en 2002), realizaron un experimento en el que presentaron a diferentes grupos de sujetos con uno de estos dos escenarios:

- Escenario 1: Además de pagar \$1 000 por adelantado, el individuo debe elegir entre dos apuestas. La apuesta *A* ofrece una posibilidad pareja de ganar \$1 000 o nada. La apuesta *B* ofrece \$500 con seguridad.
- Escenario 2: Además de pagar \$2 000 por adelantado, el sujeto debe elegir entre dos apuestas. La apuesta *C* ofrece una posibilidad pareja de perder \$1 000 o nada. La apuesta *D* resulta en la pérdida de \$500 con seguridad.

a. Supón que Norma Ecuánime toma decisiones en condiciones de incertidumbre, de acuerdo con la teoría de la utilidad esperada. Si Ecuánime es neutral al riesgo, ¿qué decisión tomaría en cada escenario?
b. ¿Qué decisión tomaría Stan si es resistente al riesgo?
c. Kahneman y Tversky determinaron que 16% de los individuos eligió *A* en el primer escenario y 68% eligió *C* en el segundo. Con base en tus respuestas precedentes, explica por qué estos hallazgos son difíciles de conciliar con la teoría de la utilidad esperada.
d. Kahneman y Tversky propusieron una alternativa a la teoría de la utilidad esperada, llamada *teoría de prospectos*, para explicar los resultados experimentales. Esta teoría dice que el nivel actual de ingreso de los individuos funciona como un "punto de partida" para ellas. Son resistentes al riesgo frente a beneficios más allá de ese punto, pero sensibles a pérdidas reducidas por debajo de ese punto. Esta sensibilidad a pérdidas reducidas es lo contrario de la aversión al riesgo: un individuo resistente al riesgo sufre desproporcionadamente más por una pérdida grande que por una reducida.
   1) Pedro Prospecto toma decisiones en condiciones de incertidumbre, de acuerdo con la teoría de prospectos. ¿Qué decisiones tomaría en el experimento de Kahneman y Tversky? Explica tu respuesta.
   2) Traza un diagrama esquemático de una curva de utilidad de dinero para Pedro Prospecto en el primer escenario. Traza una curva de utilidad para él en el segundo escenario. ¿La misma curva puede bastar para ambos escenarios, o debe desplazarse? ¿En qué difieren las curvas de utilidad de Pedro de las que se usaron para describir a individuos como Standard Stan?

7.12 Más sobre la función ARCR

Respecto a la función de utilidad ARCR (ecuación 7.42) se demostró que el grado de aversión al riesgo se mide con $1 - I$. En el capítulo 3 se demostró que la elasticidad de sustitución de la misma función está dada por $1/(1 - I)$. De ahí que las medidas sean recíprocas entre sí. Usando este resultado, analiza las preguntas siguientes.

a. ¿Por qué la aversión al riesgo se relaciona con la disposición de un individuo a sustituir patrimonio entre los espacios muestrales? ¿Qué fenómeno recogen ambos conceptos?
b. ¿Cómo interpretarías los casos polares $I = 1$ y $I = -\infty$ en los marcos tanto de aversión al riesgo como de sustitución?

c. Un aumento en el precio de derechos contingentes en un "mal" momento (p_b) inducirá efectos de sustitución e ingreso en las demandas de W_g y W_b. Si el individuo tiene un presupuesto fijo para dedicarlo a estos dos bienes, ¿de qué manera afectan a los bienes estas decisiones? ¿Por qué el aumento o la disminución en W_g podría depender del grado de aversión al riesgo exhibido por el individuo?
d. Supón que los datos empíricos sugieren que un individuo requiere un rendimiento promedio de 0.5% para verse tentado a emplear una inversión que tiene una posibilidad de 50-50 de ganar o perder 5%. Es decir, este individuo recibiría la misma utilidad de W_0 que de una apuesta pareja sobre 1.055 W_0 y 0.955 W_0.
   1) ¿Qué valor de I es congruente con este comportamiento?
   2) ¿Cuánto rendimiento promedio requerirá este individuo para aceptar una posibilidad de 50-50 de ganar o perder 10 por ciento?

   Nota: Este inciso requiere resolver ecuaciones no lineales, así que bastará con soluciones aproximadas. La comparación de la disyuntiva de recompensas de riesgo ilustra lo que se conoce como *enigma de la prima de equidad*, en el sentido de que las inversiones arriesgadas en realidad parecen ganar mucho más que lo congruente con el grado de aversión al riesgo sugerido por otros datos. Véase N. R. Kocherlakota, "The Equity Premium: It's Still a Puzzle", *Journal of Economic Literature* (marzo de 1996), pp. 42-71.

7.13 Gráfica de inversiones arriesgadas

La inversión en activos arriesgados puede examinarse en el marco de la preferencia de estado, suponiendo que W^* dólares invertidos en un activo con cierto rendimiento r producirán $W^*(1 + r)$ en ambos estados del mundo, mientras que una inversión en un activo arriesgado producirá $W^*(1 + r_g)$ en un buen momento y $W^*(1 + r_b)$ en uno malo (donde $r_g > r > r_b$).

a. Grafica los resultados de las dos inversiones.
b. Muestra cómo podría ilustrarse en tu gráfica una "cartera mixta" con activos tanto libres de riesgo como riesgosos. ¿Cómo mostrarías la fracción patrimonial invertida en el activo riesgoso?
c. Muestra cómo las actitudes de los individuos ante el riesgo determinarán la mezcla de activos libres de riesgo y riesgosos que llevarán a cabo. ¿En qué caso un individuo no tendría activos riesgosos?
d. Si la utilidad de un individuo adopta la forma de aversión al riesgo constante relativa (ecuación 7.42), explica por qué ese individuo no cambiará la fracción de activos riesgosos en su poder al incrementar su patrimonio.[25]

7.14 El problema de cartera con un activo riesgoso normalmente distribuido

En el ejemplo 7.3 se demostró que un individuo con una función de utilidad ARCA, que enfrenta un riesgo normalmente distribuido, tendrá una utilidad esperada de la forma $E[U(W)] = \mu_W - (A/2)\sigma_W^2$, donde μ_W es el valor patrimonial esperado y σ_W^2, su varianza. Usa este hecho para despejar la asignación óptima de cartera para un individuo con una función de utilidad ARCA que debe invertir k de su patrimonio en un activo riesgoso normalmente distribuido cuyo rendimiento esperado es μ_r y cuya varianza en rendimiento es σ_r^2 (tu respuesta debería depender de A). Explica tus resultados intuitivamente.

Sugerencias de lecturas adicionales

Arrow, K. J. "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", *Review of Economic Studies*, núm. 31 (1963), pp. 91-96.

Presenta el concepto de preferencia de estado e interpreta los valores bursátiles como derechos sobre mercancías contingentes.

_____. "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care", *Review of Economic Studies*, núm. 53 (1963), pp. 941-973.

Excelente análisis de las implicaciones de bienestar de los seguros. Contiene un apéndice matemático claro y conciso. Debería leerse junto con el artículo de Pauly sobre riesgo moral (véase el capítulo 18).

Bernoulli, D. "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk", *Econometrica*, núm. 22 (1954), pp. 23-36.

Reimpresión del análisis clásico de la paradoja de San Petersburgo.

Dixit, A. K. y R. S. Pindyck. *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.

Se centra principalmente en la decisión de inversión de empresas, pero contiene una buena cobertura de concepto de opciones.

Friedman, M. y L. J. Savage. "The Utility Analysis of Choice", *Journal of Political Economy*, núm. 56 (1948), pp. 279-304.

Analiza por qué los individuos podrían tanto apostar como comprar seguros. Muy legible.

Gollier, Christian. *The Economics of Risk and Time,* MIT Press, Cambridge, MA, 2001.

Contiene un completo tratamiento de muchos de los temas analizados en este capítulo. Especialmente bueno sobre la relación entre asignación en condiciones de incertidumbre y asignación a lo largo del tiempo.

[25] Este problema se basa en J. E. Stiglitz, "The Effects of Income, Wealth, and Capital Gains Taxation in Risk Taking", *Quarterly Journal of Economics* (mayo de 1969), pp. 263-283.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston y Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995, capítulo 6.

Brinda un buen resumen de los fundamentos de la teoría de la utilidad esperada. Examina asimismo en detalle el supuesto de "independencia de estado" y muestra que algunas nociones de aversión al riesgo se aplican a casos de dependencia de estado.

Pratt, J. W. "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econométrica*, núm. 32 (1964), pp. 122-136.

Desarrollo teórico de medidas de aversión al riesgo. Tratamiento muy técnico pero legible.

Rothschild, M. y J. E. Stiglitz. "Increasing Risk: 1. A Definition", *Journal of Economic Theory*, núm. 2 (1970), pp. 225-243.

Desarrolla una definición de economía de lo que significa que una apuesta sea "más arriesgada" que otra. Una secuela en el Journal of Economic Theory *ofrece ilustraciones de la economía.*

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

El capítulo 13 proporciona una buena introducción a la relación entre conceptos estadísticos y maximización de la utilidad esperada. Muestra asimismo en detalle la integración mencionada en el ejemplo 7.3.

EXTENSIONES El problema de la cartera

Uno de los problemas clásicos en la teoría del comportamiento en condiciones de incertidumbre es la cuestión de cuánto de su patrimonio deber asignar un inversionista con aversión al riesgo a un activo riesgoso. Intuitivamente, todo indica que la fracción invertida en activos riesgosos debería ser menor en el caso de inversionistas con aversión al riesgo, y una meta de nuestro análisis en estas extensiones es demostrar esto formalmente. Luego se verá cómo generalizar ese modelo para considerar carteras con muchos de esos activos para abordar finalmente el modelo de valuación de activos de capital, básico en los cursos de economía financiera.

E7.1 Modelo básico con un activo riesgoso

Para comenzar, supón que un inversionista tiene cierto monto patrimonial, W_0, para invertir en uno de dos activos. El primero de ellos produce cierto rendimiento de r_f, mientras que el rendimiento del segundo es una variable aleatoria, r. Si se concede que el monto invertido en el activo riesgoso se denota con k, el patrimonio de este individuo al final de un periodo será

$$W = (W_0 - k)(1 + r_f) + k(1 + r) = W_0(1 + r_f) + k(r - r_f). \quad \textbf{(i)}$$

Adviértanse tres cosas en este patrimonio al final de periodo. Primero, W es una variable aleatoria porque su valor depende de r. Segundo, k puede ser positiva o negativa aquí, dependiendo de si un individuo compra el activo riesgoso o si lo vende rápido. Como veremos, sin embargo, en el caso usual $E(r - r_f) > 0$, y esto implica que $k \geq 0$. Por último, nótese que la ecuación i permite una solución en la que $k > W_0$. En este caso, el inversionista apalancaría su inversión en el activo riesgoso, pidiendo un préstamo a la tasa libre de riesgo r_f.

Si se considera que $U(W)$ representa la función de utilidad del inversionista, el teorema de Von Neumann-Morgenstern establece que elegirá k para maximizar $E[U(W)]$. La condición de primer orden para ese máximo es

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[U(W)]}{\partial k} &= \frac{\partial E[U(W_0(1 + r_f) + k(r - r_f))]}{\partial k} \\ &= E[U' \cdot (r - r_f)] = 0.\end{aligned} \quad \textbf{(ii)}$$

Al calcular la condición de primer orden, podemos diferenciar a través del operador de valor esperado, E. Véase el capítulo 2 para un análisis de la diferenciación de integrales (de la cual un operador de valor esperado es un ejemplo). La ecuación ii implica el valor esperado del producto de la utilidad marginal y el término $r - r_f$. Estos dos términos son aleatorios. Que $r - r_f$ sea positivo o negativo depende de lo bien que los activos riesgosos se desempeñen en el periodo siguiente. Pero el rendimiento de este activo riesgoso también afectará el patrimonio del inversionista al final de periodo, afectando por tanto su utilidad marginal. Si la inversión se desarrolla bien, W será grande y la utilidad marginal relativamente baja (debido a la utilidad marginal decreciente). Si la inversión se desarrolla mal el patrimonio será relativamente bajo y la utilidad marginal relativamente alta. De ahí que en el cálculo del valor esperado en la ecuación ii, los resultados negativos de r $- r_f$ pesen más que los positivos para tomar en cuenta las consecuencias de utilidad de estos resultados. Si el valor esperado en la ecuación ii fuera positivo, un individuo podría incrementar su utilidad esperada invirtiendo más en el activo riesgoso. Si el valor esperado fuera negativo, este individuo podría incrementar su utilidad esperada reduciendo el monto del activo riesgoso en su poder. Sólo cuando la condición de primer orden se cumpla este individuo tendrá una cartera óptima.

Otras dos conclusiones pueden extraerse de la ecuación ii. Primero, mientras $E(r - r_f) > 0$, un inversionista elegirá montos positivos del activo riesgoso. Para ver por qué, adviértase que satisfacer la ecuación ii requerirá que muy grandes valores de U' se atribuyan a situaciones en las que $r - r_f$ resulte negativo. Esto sólo puede ocurrir si el inversionista posee montos positivos del activo riesgoso, de tal modo que su patrimonio al final del periodo sea bajo en muchas situaciones.

Una segunda conclusión de la ecuación ii es que los inversionistas con más aversión al riesgo tendrán montos menores del activo riesgoso. Nuevamente, la razón de esto tiene que ver con la forma de la función U'. Para los inversionistas con aversión al riesgo la utilidad marginal aumenta rápidamente al reducirse el patrimonio. De ahí que necesiten relativamente poca exposición a posibles resultados negativos de tener el activo riesgoso para satisfacer la ecuación ii.

E7.2 Utilidad ARCA

Avanzar en el problema de la cartera requiere elaborar supuestos específicos sobre la función de utilidad del inversionista. Supón que ésta se halla dada por la forma ARCA: $U(W) = -\exp(-AW)$. Entonces, la función de utilidad marginal está dada por $U'(W) = A \exp(-AW)$; sustituyendo para el patrimonio al final del periodo, tenemos

$$\begin{aligned}U'(W) &= A \exp[-A(W_0(1 + r_f) + k(r - r_f))] \\ &= A \exp[-AW_0(1 + r_f)]\exp[-Ak(r - r_f)].\end{aligned} \quad \textbf{(iii)}$$

Es decir, la función de utilidad marginal puede separarse en una parte aleatoria y en una parte no aleatoria (tanto el patrimonio inicial como la tasa libre de riesgo son no aleatorias). De ahí que la condición óptima de la ecuación ii pueda escribirse como

$$E[U' \cdot (r - r_f)] = A \exp[-AW_0(1 + r_f)] \\ E[\exp(-Ak(r - r_f)) \cdot (r - r_f)] = 0. \quad \textbf{(iv)}$$

Ahora es posible dividir entre la función exponencial del patrimonio inicial, lo que deja una condición óptima que sólo involucra los términos en k, A y $r - r_f$. Despejar el nivel óptimo de k en esta condición puede ser difícil en general (véase, sin embargo, el problema 7.14). No obstante, más allá de la solución específica, la ecuación iv muestra que este monto óptimo de inversión será una constante independientemente del nivel patrimonial inicial. De ahí que la función ARCA implique que la fracción del patrimonio que un inversionista mantiene en activos riesgosos debería decrecer al incrementarse el patrimonio, conclusión que parece precisamente opuesta a los datos empíricos, los cuales tienden a mostrar que la fracción del patrimonio mantenida en activos riesgosos se incrementa junto con el patrimonio.

Si supusiéramos, en cambio, que la utilidad adopta la forma ARCR en vez de la forma ARCA, podríamos demostrar (con un poco de paciencia) que todos los individuos con la misma tolerancia al riesgo tendrán la misma fracción patrimonial en activos riesgosos, más allá de sus niveles absolutos de patrimonio. Aunque esta conclusión es ligeramente más consistente con los hechos que la conclusión resultante de la función ARCA, sigue siendo insuficiente para explicar por qué la fracción de patrimonio mantenida en activos riesgosos tiende a incrementarse junto con el patrimonio.

E7.3 Carteras de muchos activos riesgosos

Discernimientos adicionales pueden obtenerse si el modelo se generaliza para tomar en cuenta muchos activos riesgosos. Sea el rendimiento de cada uno de los n activos riesgosos la variable aleatoria r_i ($i = 1,\ldots, n$). Los valores esperados y varianzas de los rendimientos de estos activos están denotados por $E(r_i) = \mu_i$ y $\text{Var}(r_i) = \sigma_i^2$, respectivamente. Un inversionista que invierte una porción de su patrimonio en una cartera con estos activos obtendrá un rendimiento aleatorio (r_p) dado por

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i, \quad \textbf{(v)}$$

donde a_i (≥ 0) es la fracción de la cartera riesgosa mantenida en el activo i y donde $\sum_{i-1}^{n} \alpha_i = 1$. En esta situación el rendimiento esperado de esta cartera será

$$E(r_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i. \quad \textbf{(vi)}$$

Si los rendimientos de cada activo son independientes, la varianza del rendimiento de la cartera será

$$\text{Var}(r_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2. \quad \textbf{(vii)}$$

Si los rendimientos no son independientes la ecuación vii tendrá que modificarse para tomar en cuenta las covarianzas entre rendimientos. Usando esta notación general procederemos ahora a examinar algunos aspectos de este problema de asignación de cartera.

E7.4 Carteras óptimas

Con muchos activos riesgosos el problema de la cartera óptima puede dividirse en dos pasos. El primero es considerar carteras con únicamente los activos riesgosos. El segundo, añadir el menos riesgoso.

Para resolver la cartera óptima con únicamente activos riesgosos puede procederse como en el texto en el cual en la sección sobre diversificación se examinaron ponderaciones de la inversión óptima entre sólo dos activos riesgosos. Aquí se elegirá un conjunto general de ponderaciones de activos (las α_i) para minimizar la varianza (o desviación estándar) de la cartera para cada posible rendimiento esperado. La solución de este problema produce una "frontera de eficiencia" de carteras de activos riesgosos como la representada por la línea *EE* en la figura E7.1. Las carteras ubicadas bajo esta frontera son inferiores a aquellas sobre la frontera porque ofrecen menores rendimientos esperados en relación con cualquier grado de riesgo. Los rendimientos de cartera por encima de la frontera son inalcanzables. Sharpe (1970) analiza las matemáticas asociadas con la elaboración de la frontera *EE*.

Añádase ahora un activo sin riesgo con rendimiento esperado μf y $\sigma_f = 0$, indicado como punto *R* en la figura E7.1. Las carteras óptimas constarán ahora de combinaciones de este activo con los riesgosos. Todas estas carteras se ubicarán a lo largo de la línea *RP* en la figura porque esta señala el rendimiento máximo alcanzable para cada valor de σ para varias asignaciones de cartera. Estas asignaciones sólo contendrán un conjunto específico de activos riesgosos: el representado por el punto *M*. En equilibrio, esta será la "cartera del mercado" integrada por activos de capital, mantenidos en proporción con sus valuaciones de mercado. Esta cartera del mercado ofrecerá un rendimiento esperado de μ_M y una desviación estándar de ese rendimiento de σ_M. La ecuación para la línea *RP* que representa a cualquier cartera mixta está dada por la ecuación lineal

$$\mu_p = \mu_f + \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M} \cdot \sigma_p. \quad \textbf{(viii)}$$

Esto indica que la línea del mercado *RP* permite a los inversionistas individuales "adquirir" rendimientos que exceden el rendimiento sin riesgo ($\mu_M - \mu_f$), asumiendo proporcionalmente más riesgo (σ_P/σ_M). Para opciones en *RP* a la izquierda del punto de mercado *M*, $\sigma_P/\sigma_M < 1$ y $\mu_f < \mu_P < \mu_M$. Puntos de alto riesgo a la derecha de *M* —los cuales pueden obtenerse pidiendo préstamos para producir una cartera apalancada— tendrán $\sigma_P/\sigma_M > 1$ y prometerán un rendimiento esperado superior al provisto por la cartera del mercado ($\mu_P > \mu_M$). Tobin (1958) fue uno de los primeros economistas en reconocer el papel que esos activos sin riesgo desempeñan en la identificación de la cartera del mercado y en el establecimiento de los términos en los cuales los inversionistas pueden obtener rendimientos superiores a los niveles sin riesgo.

E7.5 Decisiones individuales

La figura E7.2 ilustra las decisiones de cartera de varios inversionistas frente a las opciones ofrecidas por la línea *RP*. Esta figura ilustra el tipo de modelo de decisiones de cartera ya descrito en este capítulo. Los individuos con baja tolerancia al riesgo (*I*) optarán por carteras muy inclinadas al activo sin riesgo. Los inversionistas dispuestos a asumir un grado modesto de riesgo (*II*) optarán

FIGURA E7.1

Carteras eficientes.

La frontera *EE* representa combinaciones óptimas de activos riesgosos que minimizan la desviación estándar de la cartera, σ_P, para cada rendimiento esperado, μ_P. Un activo sin riesgo con rendimiento μ_f ofrece a los inversionistas la oportunidad de mantener carteras mixtas a lo largo de *RP* que combinen este activo sin riesgo con la cartera del mercado, *M*.

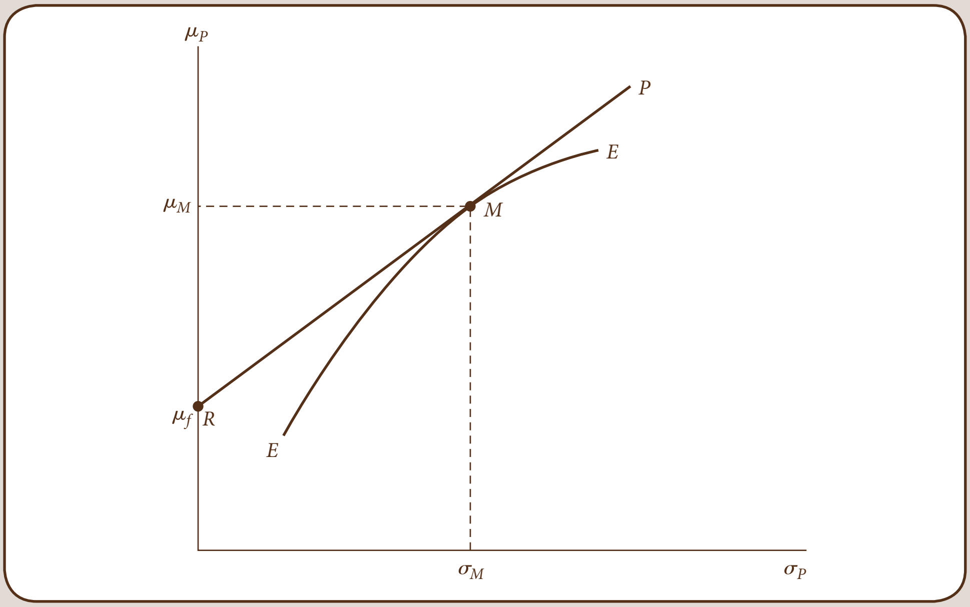
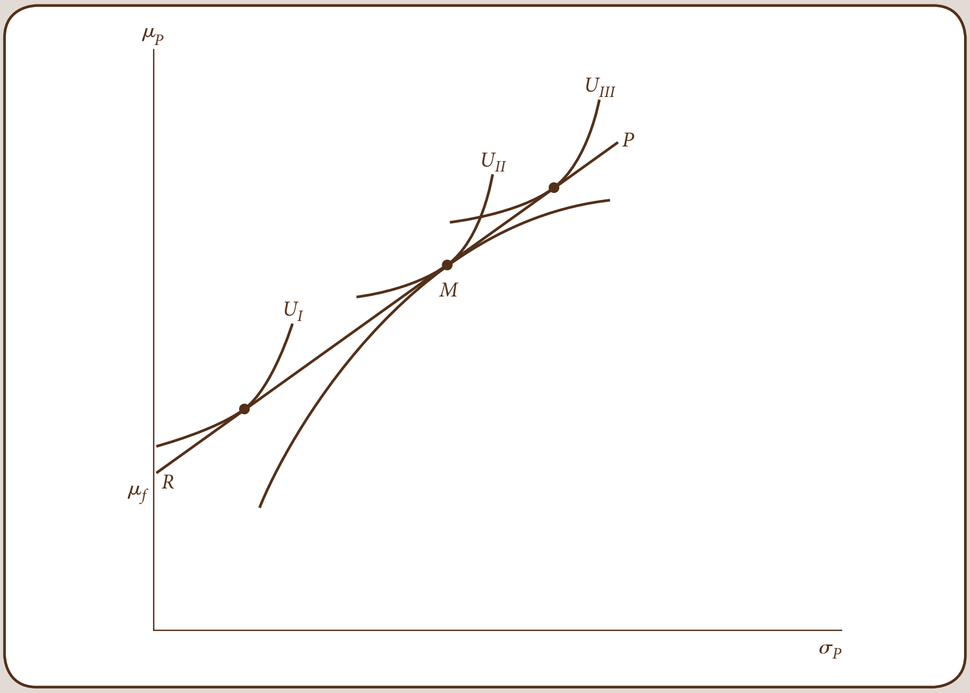


FIGURA E7.2

Comportamiento del inversionista y aversión al riesgo.

Dadas las opciones del mercado *RP*, los inversionistas pueden elegir cuánto riesgo desean asumir. Inversionistas con aversión al riesgo (U_I) mantendrán principalmente activos sin riesgo, mientras que los corredores de riesgos (U_{III}) optarán por carteras apalancadas.



por carteras cercanas a la cartera del mercado. Los inversionistas de alto riesgo (*III*) podrían optar por carteras apalancadas. Nótese que todos los inversionistas enfrentan el mismo "precio" de riesgo ($\mu_M - \mu_f$), mientras que sus rendimientos esperados están determinados por cuánto riesgo relativo (σ_P/σ_M) están dispuestos a correr. Nótese también que el riesgo asociado con la cartera de un inversionista sólo depende de la fracción de la cartera invertida en la cartera del mercado (α) porque $\sigma^2{}_P = \alpha^2\sigma^2{}_M + (1-\alpha)^2 \cdot 0$. De ahí que $\sigma_P/\sigma_M = \alpha$, así que la decisión de cartera del inversionista es equivalente a su decisión de riesgo.

Fondos de inversión mobiliaria

La noción de eficiencia de cartera se ha aplicado ampliamente al estudio de los fondos de inversión mobiliaria. En general, estos fondos son una buena respuesta a las necesidades de diversificación de los pequeños inversionistas. Dado que tales fondos reúnen los fondos de muchos individuos, pueden alcanzar economías de escala en transacciones y costos de manejo de cuenta. Esto les permite a los dueños de los fondos compartir la suerte de una variedad mucho más amplia de valores bursátiles de la que sería posible si cada uno actuara por separado. Sin embargo, los administradores de fondos de inversión mobiliaria tienen sus propios incentivos; así, las carteras en su poder quizá no siempre sean representaciones perfectas de las actitudes ante el riesgo de sus clientes. Por ejemplo, Scharfstein y Stein (1990) desarrollaron un modelo que muestra por qué los administradores de fondos de inversión mobiliaria tienen incentivos para "seguir a la manada" en sus selecciones de inversión. Otros estudios, como la investigación clásica de Jensen (1968), establecen que los administradores de los fondos de inversión mobiliaria rara vez pueden alcanzar rendimientos extra lo bastante grandes para neutralizar los gastos que cobran a los inversionistas. En años recientes esto ha llevado a muchos compradores de fondos de inversión mobiliaria a favorecer fondos "de índice" que buscan simplemente duplicar su promedio del mercado (representado, digamos, por el índice accionario Standard & Poor's 500). Tales fondos tienen gastos bajos y, por tanto, permiten a los inversionistas alcanzar diversificación a un costo mínimo.

E7.6 Modelo de valuación de activos de capital

Aunque el análisis de E7.5 muestra cómo se determinará el precio de una cartera que combina un activo sin riesgo con la cartera del mercado no describe la disyuntiva de riesgo-rendimiento de un activo. Puesto que (suponiendo transacciones sin costo) un inversionista siempre puede evitar el riesgo no asociado con el mercado general, optando por diversificarse con una "cartera del mercado", ese riesgo "asistemático" no garantizará un rendimiento excedente. Sin embargo, un activo obtendrá un rendimiento excedente en la medida en que contribuya al riesgo general del mercado. Un activo que no produce esos rendimientos extra no se mantendría en la cartera del mercado, así que no se le tendría en absoluto. Este es el discernimiento fundamental del modelo de valuación de activos de capital (MVAC).

Para examinar formalmente estos resultados considera una cartera que combina un monto reducido (α) de un activo con rendimiento aleatorio de x con la cartera del mercado (la cual tiene un rendimiento aleatorio de M. El rendimiento de esta cartera (z) estaría dado por

$$z = \alpha x + (1-\alpha)M. \tag{ix}$$

El rendimiento esperado es

$$\mu_z = \alpha\mu_x + (1-\alpha)\mu_M \tag{x}$$

con varianza

$$\sigma_z^2 = \alpha^2\sigma_x^2 + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{x,M}, \tag{xi}$$

donde $\sigma_{x,M}$ es la covarianza entre el rendimiento de x y el rendimiento del mercado.

Pero nuestro análisis previo indica que

$$\mu_z = \mu_f + (\mu_M - \mu_f)\cdot\frac{\sigma_z}{\sigma_M}. \tag{xii}$$

Igualar las ecuaciones x a xii y diferenciar respecto a α arroja

$$\frac{\partial\mu_z}{\partial\alpha} = \mu_x - \mu_M = \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M}\frac{\partial\sigma_z}{\partial\alpha}. \tag{xiii}$$

Al calcular $\partial\sigma_z/\partial\alpha$ de la ecuación xi y tomar el límite conforme α se aproxima a cero, se obtiene

$$\mu_x - \mu_M = \frac{\mu_M - \mu_f}{\sigma_M}\left(\frac{\sigma_{x,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right), \tag{xiv}$$

o, reordenando los términos,

$$\mu_x = \mu_f + (\mu_M - \mu_f)\cdot\frac{\sigma_{x,M}}{\sigma_M^2}. \tag{xv}$$

Nuevamente, el riesgo tiene una recompensa de $\mu_M - \mu_f$, pero ahora la cantidad de riesgo es medida por $\sigma_{x,M}/\sigma_M^2$. Esta razón de la covarianza entre el rendimiento x y el mercado con la varianza del rendimiento del mercado se conoce como coeficiente *beta* del activo. En muchas publicaciones se reportan los coeficientes beta estimados para activos financieros.

Estudios del MVAC

Esta versión del MVAC tiene importantes implicaciones para las determinantes de la tasa esperada de rendimiento de cualquier activo. Debido a esta simplicidad el modelo ha sido sometido a gran número de pruebas empíricas. En general, estas establecen que la medida de riesgo sistémico (beta) del modelo se correlaciona en efecto con los rendimientos esperados, mientras que medidas de riesgo más simples (como la desviación estándar de rendimientos pasados) no. Quizá la prueba empírica temprana más influyente que llegó a esa conclusión sea la de Fama y MacBeth (1973). Pero el MVAC mismo sólo explica una reducida fracción de las diferencias en los rendimientos de varios activos. Y contrariamente al MVAC, varios autores han descubierto que muchos otros factores económicos afectan significativamente los rendimientos esperados. De hecho, un notorio desafío al MVAC procede de uno de sus fundadores originales (véase Fama y French, 1992).

Referencias

Fama, E. F. y K. R. French. "The Cross Section of Expected Stock Returns", *Journal of Finance*, núm. 47 (1992), pp. 427-466.

Fama, E. F. y J. MacBeth. “Risk Return and Equilibrium”, *Journal of Political Economy*, núm. 8 (1973), pp. 607-636.

Jensen, M. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964”, *Journal of Finance* (mayo de 1968), pp. 386-416.

Scharfstein, D. S. y J. Stein. “Herd Behavior and Investment”, *American Economic Review* (junio de 1990), pp. 465-489.

Sharpe, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.

Tobin, J. “Liquidity Preference as Behavior towards Risk”, *Review of Economic Studies* (febrero de 1958), pp. 65-86.