3. ***Diferenciación respecto a otra variable relevante.*** En algunos casos lo que se desee será integrar una expresión que sea una función de varias variables. En general, esto puede implicar integrales múltiples y la diferenciación podría complicarse. Pero hay un caso simple que cabe mencionar aquí. Supongamos que tenemos una función de dos variables, $f(x, y)$, y deseamos integrar esta función respecto a la variable x. El valor específico para esta integral dependerá obviamente del valor de y, incluso podemos preguntarnos cómo variará ese valor al variar y. En este caso, para obtener un resultado es posible "diferenciar mediante el signo de la integral". Es decir:

$$\frac{d\int_a^b f(x, y)\,dx}{dy} = \int_a^b f_y(x, y)\,dx. \tag{2.147}$$

   Esta expresión señala que primero podemos diferenciar parcialmente $f(x, y)$ respecto de y antes de proceder a calcular el valor de la integral definida. Por supuesto que el valor resultante podría seguir dependiendo del valor específico asignado a y, pero a menudo producirá más discernimientos económicos que el problema original. En el problema 2.8 encontraremos algunos ejemplos adicionales del uso de integrales definidas.

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

Algunos problemas de optimización que se presentan en la microeconomía implican periodos múltiples.[19] Nos interesa determinar la trayectoria temporal óptima para que una variable o un conjunto de variables consigan optimizar alguna meta. Por ejemplo, un individuo podría querer elegir una trayectoria de consumo de por vida que maximice su utilidad. O una empresa podría estar buscando una trayectoria de decisiones de insumos y producción que maximice el valor presente de todos los beneficios futuros. La caracterísitica particular de estos problemas y que los vuelve difíciles es que las decisiones que se toman en un periodo afectan los resultados en periodos posteriores. De ahí que deba tomarse explícitamente en cuenta esta interrelación al seleccionar trayectorias óptimas. Si las decisiones en un periodo no afectaran periodos posteriores, el problema no tendría una estructura "dinámica"; se podrían sencillamente optimizar las decisiones en cada periodo sin considerar qué sucederá después. Aquí, sin embargo, deseamos tomar explícitamente en cuenta consideraciones dinámicas.

El problema del control óptimo

Matemáticos y economistas han desarrollado numerosas técnicas para resolver problemas de optimización dinámica. Las referencias al final de este capítulo ofrecen amplias introducciones a esos métodos. Aquí, sin embargo, sólo nos interesará uno de ellos, con muchas semejanzas con las técnicas de optimización que ya hemos estudiado en este capítulo: el problema del control óptimo. El marco del problema es relativamente simple. Un tomador de decisiones busca determinar la trayectoria temporal óptima para alguna variable $x(t)$ en un intervalo específico $[t_0, t_1]$. Las variaciones en x son gobernados por una ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g[x(t), c(t), t], \tag{2.148}$$

donde la variable $c(t)$ se usa para "controlar" el cambio en $x(t)$. En cada periodo, el tomador de decisiones deriva valor de x y c de acuerdo con la función $f[x(t), c(t), t]$ y su meta de optimizar

[19] En esta sección trataremos los problemas de optimización dinámica como ocurrentes en el tiempo. En otros contextos, las mismas técnicas pueden usarse para resolver problemas de optimización que ocurren en un continuo de empresas o individuos cuando las opciones óptimas para un agente afectan lo que es óptimo para otros. El material de esta sección se usará sólo en algunos pocos apartados de este libro, pero se ofrece aquí como una referencia conveniente.

$\int_{t_0}^{t_1} f[x(t), c(t), t]\, dt$. A menudo este problema también estará sujeto a restricciones de "punto final" sobre la variable x. Estas podrían escribirse como $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$.

Nótese que este problema es "dinámico". Cualquier decisión acerca de cuánto variar x en este periodo afectará no sólo el valor futuro de x, sino también valores futuros de la función resultante f. El problema es entonces cómo mantener $x(t)$ en su trayectoria óptima.

La intuición económica puede ayudar a resolver este problema. Supongamos que sólo nos interesa la función f y elegimos x y c para optimizarla en cada instante. Hay dos dificultades en este enfoque "miope". Primero, en realidad no estamos en libertad de "elegir" x en ningún momento. Más bien, el valor de x estará determinado por su valor inicial x_0 y su historia de variaciones dadas por la ecuación 2.148. Una segunda dificultad con este enfoque miope es que no considera la naturaleza dinámica del problema, pues no cuestiona cómo las decisiones de este periodo afectarán el futuro. Necesitamos una manera de reflejar la dinámica de este problema en las decisiones de un periodo. Asignar el valor (precio) correcto a x en cada instante hará justo eso. Como este precio implícito tendrá muchas semejanzas con los multiplicadores de Lagrange, que ya hemos estudiado en este capítulo, lo llamaremos $\lambda(t)$. El valor de λ es tratado como una función de tiempo pues la importancia de x obviamente puede cambiar en el tiempo.

El principio del óptimo

Examinemos ahora el problema del tomador de decisiones en un punto en el tiempo. Este debe interesarse tanto en el valor corriente de la función objetivo $f[x(t), c(t), t]$ como en el cambio implicado en el valor de $x(t)$. Puesto que el valor corriente de $x(t)$ está dado por $\lambda(t)x(t)$, el índice de cambio instantáneo de este valor está dado por:

$$\frac{d[\lambda(t)x(t)]}{dt} = \lambda(t)\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}, \tag{2.149}$$

así que, en cualquier momento t, una medida completa del valor de interés[20] para el tomador de decisiones es

$$H = f[x(t), c(t), t] + \lambda(t)g[x(t), c(t), t] + x(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}. \tag{2.150}$$

Este valor completo representa tanto los beneficios corrientes recibidos como la variación instantánea en el valor de x. Ahora es posible preguntar qué condiciones deben aplicarse a $x(t)$ y $c(t)$ para optimizar esta expresión.[21] Esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= f_c + \lambda g_c = 0 \quad \text{o} \quad f_c = -\lambda g_c; \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= f_x + \lambda g_x + \frac{d\lambda(t)}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad f_x + \lambda g_x = -\frac{d\lambda(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Estas son entonces las dos condiciones óptimas para este problema dinámico. Usualmente se les llama *el principio del óptimo*. Esta solución del problema de control óptimo fue propuesta originalmente por el matemático ruso L. S. Pontryagin y sus colegas, a principios de la década de 1960.

Aunque idealmente la lógica del principio del óptimo se puede ilustrar con las aplicaciones económicas que encontraremos más adelante, un breve resumen de la intuición en su base será útil. La primera condición inquiere sobre la opción óptima de c. Sugiere que, en el margen, la ganancia de c en términos de la función f debe ser compensada por las pérdidas de c en términos

[20] Denotamos esta expresión de valor corriente con H para indicar su semejanza con la expresión de Hamilton que se usa en la teoría formal de la optimización dinámica. Sin embargo, generalmente la expresión de Hamilton no tiene el último término de la ecuación 2.150.

[21] Obsérvese que aquí en realidad la variable x no es una variable selecta; su valor está determinado por la historia. La diferenciación respecto a x puede considerarse como esta pregunta implícita: "Si $x(t)$ fuera óptima, ¿qué características tendría?".

del valor de su capacidad para cambiar x. Es decir, los beneficios presentes deben compararse con los costos futuros.

La segunda condición tiene que ver con las características que debería tener una trayectoria temporal óptima de $x(t)$. Implica que, en el margen, todo beneficio neto de una unidad más de x (ya sea en términos de f o del valor adjunto de variaciones en x) debe ser compensada por variaciones en el valor implicado de x. Es decir, el beneficio neto de una unidad adicional de x debe compararse con el decreciente valor futuro de x.

EJEMPLO 2.14 Asignación de una oferta fija

Como muy simple ilustración del principio del óptimo supongamos que alguien hereda 1 000 botellas de vino de un tío rico y planea consumirlas en los próximos 20 años. ¿Cómo debería hacerlo para optimizar la utilidad?

Supongamos que la función de utilidad de esa persona respecto al vino está dada por $u[c(t)] = \text{In}\ c(t)$. De ahí que la utilidad de beber vino exhiba una utilidad marginal decreciente ($u' > 0$, $u'' < 0$). La meta de esta persona es optimizar

$$\int_0^{20} u[c(t)]\ dt = \int_0^{20} \ln c(t)\ dt. \tag{2.152}$$

Concedamos que $x(t)$ representa el número de botellas de vino que restan en el momento t. Esta serie está restringida por $x(0) = 1\ 000$ y $x(20) = 0$. La ecuación diferencial determinante de la evolución de $x(t)$ adopta la forma simple:[22]

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c(t). \tag{2.153}$$

Es decir, el consumo en cada instante reduce las existencias de botellas. La expresión hamiltoniana de valor corriente para este problema es

$$H = \ln c(t) + \lambda[-c(t)] + x(t)\frac{d\lambda}{dt}, \tag{2.154}$$

y las condiciones de primer orden para un óptimo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= \frac{1}{c} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{d\lambda}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{2.155}$$

La segunda de estas condiciones requiere que λ (el valor implícito del vino) sea constante en el tiempo. Esto tiene sentido intuitivo: puesto que consumir una botella de vino reduce siempre en una botella las existencias disponibles, cualquier solución en la que el valor del vino difiera en el tiempo ofrecerá un incentivo para variar de comportamiento consumiendo más botellas cuando es barato y menos cuando es caro. Combinar esta segunda condición de un óptimo con la primera implica que $c(t)$ debe ser constante en el tiempo. Si $c(t) = k$, el número de botellas restantes en cualquier momento será $x(t) = 1\ 000 - kt$. Si $k = 50$, el sistema cumplirá las restricciones de punto final $x(0) = 1\ 000$ y $x(20) = 0$. Desde luego que en este problema se podría suponer que el plan óptimo es consumir el vino a razón de 50 botellas por

[22] La forma simple de esta ecuación diferencial (donde dx/dt sólo depende del valor de la variable de control, c) significa que este problema es idéntico al explorado usando el método de "cálculo de variaciones" de la optimización dinámica. En ese caso, es posible sustituir dx/dt en la función f y comprimir las condiciones de primer orden de un óptimo en la ecuación $f_x = df_{dx/dt}/dt$, llamada *ecuación de Euler*. En el capítulo 17 encontraremos muchas ecuaciones de Euler.

año durante 20 años, porque la utilidad marginal decreciente sugiere que uno no desea consumir en exceso en ningún periodo. El principio del óptimo confirma esta intuición.

Utilidad más complicada. Tomemos ahora una función de utilidad más complicada que puede arrojar resultados más interesantes. Supongamos que la utilidad de consumir vino en cualquier fecha, t, está dada por

$$u[c(t)] = \begin{cases} [c(t)^{\gamma}/\gamma & \text{si } \gamma \neq 0, \gamma < 1; \\ \ln c(t) & \text{si } \gamma = 0. \end{cases} \quad \textbf{(2.156)}$$

Supongamos también que el consumidor descuenta el consumo futuro a razón de δ. De ahí que la meta de esta persona sea optimizar

$$\int_0^{20} u[c(t)]\ dt = \int_0^{20} e^{-\delta t}\frac{[c(t)]^{\gamma}}{\gamma}dt \quad \textbf{(2.157)}$$

sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -c(t), \\ x(0) &= 1\,000, \\ x(20) &= 0. \end{aligned} \quad \textbf{(2.158)}$$

Establecer la expresión hamiltoniana de valor corriente produce

$$H = e^{-\delta t}\frac{[c(t)]^{\gamma}}{\gamma} + \lambda(-c) + x(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}, \quad \textbf{(2.159)}$$

y el principio del óptimo requiere que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &= e^{-\delta t}[c(t)]^{\gamma-1} - \lambda = 0 \quad \text{y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= 0 + 0 + \frac{d\lambda}{dt} = 0. \end{aligned} \quad \textbf{(2.160)}$$

Por tanto podemos concluir nuevamente que el valor implícito de las existencias de botellas de vino (λ) debe ser constante en el tiempo (llamemos a esto constante k) y que

$$e^{-\delta t}[c(t)]^{\gamma-1} = k \ \text{ o } \ c(t) \ = k^{1/(\gamma-1)}\ e^{\delta t/(\gamma-1)}. \quad \textbf{(2.161)}$$

Así, el consumo óptimo de botellas debe reducirse en el tiempo para compensar el hecho de que el consumo futuro se descuenta en la mente del consumidor. Si, por ejemplo, concedemos que $\delta = 0.1$ y $\gamma = -1$ (valores "razonables", como se demostrará en capítulos posteriores), entonces

$$c(t) = k^{-0.5}e^{-0.05t} \quad \textbf{(2.162)}$$

Ahora debemos hacer un poco más de labor en la selección de k para satisfacer las restricciones de punto final. Deseamos

$$\begin{aligned} \int_0^{20} c(t)\,dt = \int_0^{20} k^{-0.5}e^{-0.05t}\,dt &= -20k^{-0.5}e^{-0.05t}\Big|_0^{20} \\ &= -20k^{-0.5}(e^{-1}-1) = 12.64k^{-0.5} = 1\,000. \end{aligned} \quad \textbf{(2.163)}$$

Así, por último, tenemos el plan óptimo de consumo como

$$c(t) \approx 79e^{-0.05t}. \quad \textbf{(2.164)}$$