Las personas de "buena salud natural" tendrán concomitantemente valores más altos de y^*, siempre y cuando elijan óptimamente x_1 y x_2. Pero esto es justo lo que indica el teorema de la envolvente porque, con base en la ecuación 2.44

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} = 1 \tag{2.47}$$

Aumentar el parámetro a aumenta simplemente el valor óptimo de y^* en un monto idéntico (suponiendo de nuevo que las dosis de x_1 y x_2 se eligieron correctamente).

PREGUNTA: Supongamos que se atiende, en cambio, la dosis óptima de x_1 en la ecuación 2.42; es decir, que se usa un parámetro general, digamos b, en vez de 1. Explica en palabras y usando matemáticas por qué, en este caso, $\partial y^*/\partial b$ sería necesariamente igual a 0.

MAXIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Hasta aquí hemos puesto nuestra atención en determinar el valor máximo de una función sin restringir las opciones de las x disponibles. En la mayoría de los problemas económicos, sin embargo, no todos los valores de las x son factibles. En muchas situaciones, por ejemplo, se requiere que todas las x sean positivas. Este es el tipo de problema que enfrenta un gerente al tomar una decisión de producción para maximizar los beneficios; una producción negativa no tendría sentido. En otros casos las x pueden estar limitadas por consideraciones económicas. Por ejemplo, al decidir respecto a los artículos que va a consumir, un individuo no puede optar por cualquier cantidad deseada. Más bien, las opciones están limitadas por el monto del poder de compra disponible; es decir, por su restricción presupuestal. Estas limitaciones pueden reducir el valor máximo de la función por maximizar. Puesto que no podemos elegir libremente entre todas las x, quizá y no sea tan grande como podría. Las restricciones serían "no vinculantes" si pudiéramos obtener el mismo nivel de y con o sin la imposición de la restricción.

Método del multiplicador de Lagrange

Un método para resolver problemas de maximización restringida es el *método del multiplicador de Lagrange* el cual involucra un ingenioso truco matemático que resulta de tener también una útil interpretación económica. La lógica de este método es simple, aunque aquí no intentaremos una presentación rigurosa.[8] En una sección anterior se analizaron las condiciones necesarias para un máximo local. Se demostró que, en el punto óptimo, todas las derivadas parciales de f deben ser iguales a 0. Así, hay n ecuaciones ($f_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$) con n incógnitas (las x). En general, en estas ecuaciones pueden despejarse las x óptimas. Cuando las x están restringidas, sin embargo, hay al menos una ecuación adicional (la restricción), pero no variables adicionales. Por tanto, el conjunto de ecuaciones está sobredeterminado. La técnica de Lagrange introduce una variable adicional (el multiplicador de Lagrange) que no sólo ayuda a resolver el problema en cuestión (porque ahora hay $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas), sino que además tiene una interpretación útil en una variedad de circunstancias económicas.

El problema formal

Más específicamente, supongamos que se desea encontrar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximizan

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.48}$$

[8] Para una presentación detallada, véase A. K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*, 2a. ed. (Oxford University Press, Oxford, 1990), capítulo 2.

sujeta a una restricción que sólo permite usar ciertos valores de las x. Una manera general de escribir esa restricción es

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{2.49}$$

donde la función[9] g representa la relación que debe mantenerse entre todas las x.

Condiciones de primer orden

El método del multiplicador de Lagrange comienza estableciendo la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.50}$$

donde λ es una variable adicional llamada multiplicador de Lagrange. Más adelante interpretaremos esta nueva variable. Pero primero adviértase que al sostenerse la restricción, $\mathscr{L}$ y f tienen el mismo valor [porque $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$]. En consecuencia, si limitamos nuestra atención a los valores de las x que satisfacen la restricción, determinar el valor máximo restringido de f equivale a determinar un valor crítico de $\mathscr{L}$. Procedamos a hacerlo, tratando a λ también como una variable (además de las x). Con base en la ecuación 2.50 las condiciones para un punto crítico son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda g_1 = 0, \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda g_2 = 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} &= f_n + \lambda g_n = 0, \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Las ecuaciones comprendidas en la ecuación 2.51 son entonces las condiciones para un punto crítico de la función $\mathscr{L}$. Nótese que hay $n + 1$ ecuaciones (una por cada x y una última para λ) con $n + 1$ incógnitas. En general en estas ecuaciones es posible despejar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y λ. Tal solución tendrá dos propiedades: 1) las x obedecerán la restricción porque la última ecuación en 2.51 impone esa condición; y 2) entre todos los valores de x que satisfacen la restricción, los que también resuelven la ecuación 2.51 harán a $\mathscr{L}$ (y por tanto a f) tan grande como sea posible (suponiendo que se satisfacen las condiciones de segundo orden). Así, el método del multiplicador de Lagrange ofrece un medio para hallar una solución al problema de maximización restringida que se planteó al principio.[10]

La solución de la ecuación 2.51 usualmente diferirá de aquella en el caso no restringido (véanse las ecuaciones 2.28). Más que proceder al punto en el que la contribución marginal de cada x es 0, la ecuación 2.51 nos obliga a parar en seco debido a la restricción. Sólo si la restricción no fuera efectiva (en cuyo caso, como se demostrará más adelante, λ sería igual a 0), las ecuaciones restringida y no restringida (y sus respectivas soluciones) coincidirían. Estas condiciones marginales que hemos revisado tienen interpretaciones económicas en muchas situaciones diferentes.

[9] Como ya hemos señalado, cualquier función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puede escribirse de esta forma implícita. Por ejemplo, la restricción $x_1 + x_2 = 10$ puede escribirse como $10 - x_1 - x_2 = 0$. En capítulos posteriores aplicaremos este procedimiento al tratar con restricciones. Las restricciones que examinaremos frecuentemente serán lineales.

[10] En estricto sentido, estas son las condiciones necesarias para un máximo local interior. En algunos problemas económicos es preciso enmendar estas condiciones (en formas muy obvias) para tomar en cuenta la posibilidad de que algunas de las x estén en el límite de la región de x permisibles. Por ejemplo, si se requiere que todas las x sean no negativas, podría ser que las condiciones de la ecuación 2.51 no se sostengan del todo, ya que podrían requerir x negativas. Consideraremos esta situación más adelante.

Interpretación del multiplicador de Lagrange

Hasta aquí hemos usado el multiplicador de Lagrange (λ) sólo como un "truco" matemático para llegar a la solución que deseamos. De hecho, esa variable tiene también una interpretación económica importante que será central para nuestro análisis en muchos puntos de este libro. Para desarrollar esta interpretación, reescribamos la primera de las *n* ecuaciones de 2.51 como

$$\frac{f_1}{-g_1} = \frac{f_2}{-g_2} = \cdots = \frac{f_n}{-g_n} = \lambda. \tag{2.52}$$

En otras palabras, en el punto máximo la razón de f_i respecto a g_i es la misma para todas las x. Los numeradores en la ecuación 2.52 son las contribuciones marginales de cada x a la función f. Muestran el *beneficio marginal* que una unidad más de x_i tendrá para la función maximizada (es decir, para f).

Quizá sea preferible dejar una interpretación completa de los denominadores en la ecuación 2.52 hasta que nos encontremos estas razones en aplicaciones económicas reales. Ahí veremos que estas suelen tener una interpretación de "costo marginal". Es decir, reflejan la carga añadida a la restricción de usar ligeramente más x_i. Como ejemplo, supongamos que la restricción requiere que el gasto total en x_1 y x_2 esté dado por una cantidad fija en dólares, F. Por tanto, la restricción es $p_1x_1 + p_2x_2 = F$ (donde p_i es el costo por unidad de x_i). Usando nuestra presente terminología esta restricción se escribirá en forma implícita como

$$g(x_1, x_2) = F - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \tag{2.53}$$

En esta situación, entonces,

$$-g_i = p_i \tag{2.54}$$

y la derivada $-g_i$ reflejará en efecto el costo marginal por unidad del uso de x_i. Prácticamente todos los problemas de optimización que encontraremos en capítulos posteriores tienen una interpretación similar respecto a los denominadores en la ecuación 2.52.

El multiplicador de Lagrange como razón costo-beneficio

Ahora se le puede dar una interpretación intuitiva a la ecuación 2.52. Esta indica que en las opciones óptimas de las x, la razón del beneficio marginal de incrementar x_i respecto al costo marginal de incrementar x_i debería ser la misma para cada x. Con objeto de ver que esta es una condición obvia para un máximo supongamos que no es cierta, que la "razón costo-beneficio" es mayor para x_1 que para x_2. En este caso, para alcanzar un máximo debería usarse un poco más x_1. Considérese el uso de más x_1, pero renunciando lo suficiente a x_2 para mantener constante a g (la restricción). De ahí que el costo marginal de la x_1 adicional usada iguale el costo ahorrado usando menos x_2. Pero como la razón costo-beneficio (el monto de beneficio por unidad de costo) es mayor para x_1 que para x_2, los beneficios adicionales de usar más x_1 superarían la pérdida en los beneficios de usar menos x_2. Usar más x_1 y propiamente menos x_2 incrementaría entonces y, porque x_1 ofrece mayor "impacto". Sólo si las razones costo marginal-beneficio marginal son iguales para todas las x habrá un máximo local en el que ninguna variación pequeña en las x podrá incrementar el objetivo. En muchos apartados de este libro se desarrollarán aplicaciones concretas de este principio básico. El resultado es fundamental para la teoría microeconómica del comportamiento de optimización.

El multiplicador de Lagrange (λ) también puede interpretarse a la luz de este análisis. λ es la razón común costo-beneficio de todas las x. Es decir,

$$\lambda = \frac{\text{beneficio marginal de } x_i}{\text{costo marginal de } x_i} \tag{2.55}$$

para cada x_i. Si la restricción se relajara un poco no importaría exactamente cuál x variara (en realidad, todas las x podrían alterarse), porque en el margen cada una promete la misma razón de beneficios en relación con los costos. El multiplicador de Lagrange proporciona entonces una medida de cómo una relajación general de la restricción afecta el valor de y. En esencia, λ asigna un "precio sombra" a la restricción. Una λ alta indica que y puede aumentar sustancialmente, relajando la restricción, porque cada x tiene una alta razón costo-beneficio. Un valor bajo de λ, por otro lado, indica que no hay mucho por ganar relajando la restricción. Si esta no es vinculante λ tendrá un valor de 0, indicando por tanto que la restricción no limita el valor de y. En ese caso, hallar el valor máximo de y sujeto a la restricción sería idéntico a hallar un máximo irrestricto. El precio sombra de la restricción es 0. Esta interpretación de λ también puede demostrarse usando el teorema de la envolvente, como se describirá más adelante.[11]

Dualidad

Este análisis señala que existe una relación clara entre el problema de maximizar una función sujeta a restricciones y el de asignar valores a las restricciones. Esto refleja lo que se conoce como principio matemático de la *dualidad*: todo problema de maximización restringida tiene un problema dual asociado de *minimización* restringida, que dirige su atención a las restricciones del problema original (primordial). Por ejemplo, avanzando un poco en nuestra argumentación, los economistas suponen que los individuos maximizan su utilidad sujetos a una restricción presupuestal. Este es el problema primordial del consumidor. El problema dual para el consumidor es minimizar el gasto necesario para alcanzar un nivel dado de utilidad. O bien, el problema primordial de una empresa puede ser minimizar el costo total de los insumos utilizados para generar un cierto nivel de producción, mientras que el problema dual es maximizar la producción respecto a un costo total dado de insumos adquiridos. En capítulos posteriores se desarrollarán muchos ejemplos similares. Cada cual mostrará que siempre hay dos maneras de examinar cualquier problema de optimización restringida. A veces, adoptar un ataque frontal, analizando el problema primordial, puede llevar a grandes discernimientos. En otros casos el método de "puerta trasera" de examinar el problema dual puede ser más instructivo. Cualquiera que sea la ruta que se siga los resultados, por lo general aunque no siempre, serán idénticos; así, la decisión que se tome será sobre todo cuestión de conveniencia.

EJEMPLO 2.7 Maximización restringida: estado de salud, nuevamente

Volvamos de nuevo a nuestro (quizá tedioso) problema de maximización de la salud. Como ya se dijo, la meta del individuo es maximizar

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5,$$

pero ahora supongamos que las opciones de x_1 y x_2 están restringidas por el hecho de que el individuo sólo puede tolerar una dosis de medicamento al día. Es decir,

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{2.56}$$

o

$$1 - x_1 - x_2 = 0.$$

[11] El análisis en el texto concierne a problemas que involucran una sola restricción. En general, es posible manejar m restricciones ($m < n$) introduciendo simplemente m nuevas variables (multiplicadores de Lagrange) y procediendo en forma análoga a la ya explicada.

Nótese que el punto óptimo original $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ya no es alcanzable, debido a la restricción sobre posibles dosis: hay que hallar otros valores. Para ello primero se establece la expresión lagrangiana:

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - x_1 - x_2). \quad \textbf{(2.57)}$$

La diferenciación de $\mathscr{L}$ respecto a x_1, x_2 y λ da la siguiente condición necesaria para un máximo restringido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= -2x_1 + 2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= -2x_2 + 4 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= 1 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned} \quad \textbf{(2.58)}$$

Ahora, en estas ecuaciones deben despejarse los valores óptimos de x_1, x_2 y λ. El uso de las ecuaciones primera y segunda da

$$-2x_1 + 2 = \lambda = -2x_2 + 4$$

o

$$x_1 = x_2 - 1. \quad \textbf{(2.59)}$$

Sustituir este valor de x_1 en la restricción produce la solución:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1, \\ x_1 &= 0. \end{aligned} \quad \textbf{(2.60)}$$

Es decir, si esta persona puede tolerar sólo una dosis de medicamento debe optar por tomar únicamente el segundo medicamento. Usando cualquiera de las dos primeras ecuaciones, es fácil completar nuestra solución demostrando que

$$\lambda = 2. \quad \textbf{(2.61)}$$

Esta es entonces la solución del problema del máximo restringido. Si $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, entonces y adopta el valor 8. Restringir los valores de x_1 y x_2 para que sumen 1 ha reducido el valor máximo de estado de salud, y, de 10 a 8.

PREGUNTA: Supongamos que este individuo puede tolerar dos dosis diarias. ¿Sería esperable que y aumentara? ¿Aumentos en la tolerancia más allá de tres dosis diarias tendrían algún efecto en y?

EJEMPLO 2.8 Cercas óptimas y maximización restringida

Supongamos que un agricultor posee una cerca de cierta extensión, P, y desea rodear la mayor área rectangular posible. ¿Qué forma de área debería elegir? Este es evidentemente un problema de maximización restringida. Para resolverlo, sea x la longitud de un lado del rectángulo y y la longitud del otro. El problema es entonces elegir x y y de tal manera que maximicen el área del terreno (dada por $A = x \cdot y$), sujeta a la restricción de que el perímetro está fijo en $P = 2x + 2y$.

Al establecer la expresión lagrangiana da

$$\mathscr{L} = x \cdot y + \lambda(P - 2x - 2y), \quad \textbf{(2.62)}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange desconocido. Las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= y - 2\lambda = 0,\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= x - 2\lambda = 0,\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= P - 2x - 2y = 0.\end{aligned} \tag{2.63}$$

En las tres ecuaciones 2.63 deben despejarse simultáneamente x, y y λ. Las dos primeras ecuaciones señalan que $y/2 = x/2 = \lambda$, lo cual indica que x debe ser igual a y (el terreno debe ser cuadrado). También implican que x y y deben seleccionarse de tal forma que la razón de los beneficios marginales en relación con el costo marginal sea la misma para ambas variables. El beneficio (en términos de área) de una unidad más de x está dado por y (el área aumenta en $1 \cdot y$), y el costo marginal (en términos del perímetro) es de 2 (el perímetro disponible se reduce en 2 por cada unidad en la que aumenta la longitud del lado x). Las condiciones para un máximo establecen que esta razón debe ser igual para cada una de las variables.

Puesto que ya hemos demostrado que $x = y$, podemos usar la restricción para demostrar que

$$x = y = \frac{P}{4}, \tag{2.64}$$

y dado que $y = 2\lambda$,

$$k = \frac{P}{8}. \tag{2.65}$$

Interpretación del multiplicador de Lagrange. Si al agricultor le interesara saber cuánto terreno más podría rodear añadiendo una yarda de cerca, el multiplicador de Lagrange sugiere que podría saberlo dividiendo el actual perímetro entre 8. Algunos números específicos podrían aclarar esto. Supongamos que el terreno tiene un perímetro de 400 yardas. Si el agricultor ha planeado "óptimamente", este terreno será un cuadrado de 100 yardas ($= P/4$) por lado. El área circundada será entonces de 10 000 yardas cuadradas. Supongamos ahora que el perímetro (es decir, la cerca disponible) se extiende una yarda más. Así, la ecuación 2.65 "predecirá" que el área total aumentaría en aproximadamente 50 ($= P/8$) yardas cuadradas. Que este es el caso en efecto puede demostrarse como sigue: dado que el perímetro es ahora de 401 yardas, cada lado del cuadrado será de 401/4 yardas. Por tanto, el área total del terreno es $(401/4)^2$, lo que, según la calculadora de los autores, equivale a 10 050.06 yardas cuadradas. De ahí que la "predicción" de un incremento de 50 yardas cuadradas provista por el multiplicador de Lagrange resulte muy próxima. Como en todos los problemas de maximización restringida, aquí el multiplicador de Lagrange ofrece información útil sobre el valor implícito de la restricción.

Dualidad. El dual de este problema de maximización restringida es que, respecto a un área dada de un terreno rectangular el agricultor desea minimizar la cerca requerida para rodearlo. Matemáticamente, el problema es minimizar

$$P = 2x + 2y, \tag{2.66}$$

sujeta a la restricción de

$$A = x \cdot y. \tag{2.67}$$

Establecer la expresión lagrangiana

$$\mathcal{L}^D = 2x + 2y + \lambda^D(A - x \cdot y) \tag{2.68}$$

(donde la D denota el concepto dual) produce las siguientes condiciones de primer orden para un mínimo: