CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN Y ÁLGEBRA MATRICIAL

EXTENSIONES

Las condiciones de segundo orden descritas en el capítulo 2 pueden escribirse en formas compactas usando álgebra matricial. En esta extensión se examinará brevemente dicha notación. Volveremos a esta en otras partes de las extensiones y en problemas de capítulos posteriores.

Fundamentos de álgebra matricial

Las extensiones presentadas aquí suponen cierto conocimiento general del álgebra matricial. Un recordatorio sucinto de estos principios podría incluir:

1. Una *matriz* $n \times k$, $\mathbf{A}$, es un arreglo rectangular de términos de la forma

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

   Aquí, $i = 1, n$; $j = 1, k$. Las matrices pueden sumarse, restarse o multiplicarse siempre que sus dimensiones sean acordes.
2. Si $n = k$, $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$. La *matriz de identidad*, $\mathbf{I_n}$, es una matriz cuadrada $n + \mathbf{n}$ donde $a_{ij} = 1$ si $i = j$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
3. La **determinante** de una matriz cuadrada (denotada por $|\mathbf{A}|$) es un escalar (es decir, un término simple) hallado al multiplicar entre sí todos los términos de la matriz. Si $\mathbf{A}$ es de 2×2,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

   Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$|\mathbf{A}| = 2 - 15 = -13.$$

4. La *inversa* de una matriz cuadrada $n \times n$, $\mathbf{A}$, es otra matriz $n \times n$, $\mathbf{A}^{-1}$, de tal manera que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = I_n.$$

   No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\mathbf{A}^{-1}$ es que $|\mathbf{A}| \neq 0$.
5. Los *menores principales* de una matriz cuadrada $n \times n$ $\mathbf{A}$ son la serie de determinantes de las primeras filas y columnas p de $\mathbf{A}$, donde $p = 1, n$. Si $\mathbf{A}$ es de 2×2, el primer menor principal es a_{11} y el segundo es $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
6. Una matriz cuadrada $n \times n$, $\mathbf{A}$, es *definida positiva* si todos sus menores principales son positivos. Es *definida negativa* si sus menores principales alternan en signo, comenzando por uno de resta.[1]
7. Una matriz simétrica particularmente útil es la *matriz de Hesse*, formada por todas las derivadas parciales de segundo orden de una función. Si f es una función continua y dos veces diferenciable de n variables, su matriz de Hesse está dada por

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

Usando estas ideas de notación ahora podemos volver a examinar algunas de las condiciones de segundo orden derivadas en el capítulo 2.

E2.1 Funciones cóncavas y convexas

Una *función cóncava* es la que siempre está por debajo de (o en) cualquier tangente a ella. A su vez, una *función convexa* siempre está sobre (o en) cualquier tangente. La concavidad o convexidad de una función es determinada por su o sus segundas derivadas. Para una función de una variable, $f(x)$, este requisito es simple. Usando la aproximación de Taylor en cualquier punto (x_0).

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx + f''(x_0)\frac{dx^2}{2} + \text{términos de orden superior}$$

Suponiendo que los términos de orden superior son iguales a 0, tenemos

$$f(x_0 + dx) \leq f(x_0) = f'(x_0)dx$$

si $f''(x_0) \leq 0$ y

$$f(x_0 + dx) \geq f(x_0) = f'(x_0)dx$$

[1] Si algunas de las determinantes en esta definición son de 0, se dice que la matriz es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

si $f''(x_0) \geq 0$. Puesto que las expresiones de la derecha de estas desigualdades son, de hecho, la ecuación de la tangente de la función en x_0, resulta claro que la función es (localmente) cóncava si $f''(x_0) \leq 0$ y (localmente) convexa si $f''(x_0) \geq 0$.

Extender esta idea intuitiva a muchas dimensiones es laborioso en términos de notación funcional, pero relativamente simple cuando se usa álgebra matricial. La concavidad requiere que la matriz de Hesse sea definida negativa, mientras que la convexidad requiere que esa matriz sea definida positiva. Al igual que en el caso de una variable, estas condiciones equivalen a requerir que la función se aleje sistemáticamente de cualquier tangente a ella sin importar qué dirección adopte.[2]

Si $f(x_1, x_2)$ es una función de dos variables, la matriz de Hesse está dada por

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Esta es definida negativa si

$$f_{11} < 0 \quad \text{y} \quad f_{11}f_{12} - f_{21}f_{12} > 0,$$

justo la condición descrita en la ecuación 2.98. Las generalizaciones a funciones de tres o más variables siguen el mismo patrón matricial.

Ejemplo 1

Para la función estado de salud del capítulo 2 (ecuación 2.29) la matriz de Hesse está dada por

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

y el primer y segundo menores principales son

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &= -2 < 0 \text{ y} \\ \mathrm{H}_2 &= (-2)(-2) - 0 = 4 > 0. \end{aligned}$$

De ahí que la función sea cóncava.

Ejemplo 2

La función de Cobb-Douglas $x^a y^b$, donde $a, b \in (0, 1)$, se usa para ilustrar funciones de utilidad y funciones de producción en muchas partes de este texto. Las derivadas de primer y segundo orden de la función son

$$\begin{aligned} f_x &= ax^{a-1}y^b, \\ f_y &= bx^a y^{b-1}, \\ f_{xx} &= a(a-1)x^{a-2}y^b, \\ f_{yy} &= b(b-1)x^a y^{b-2}. \end{aligned}$$

De ahí que la matriz de Hesse de esta función sea

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{bmatrix}.$$

El primer menor principal de esta matriz es

$$\mathrm{H}_1 = a(a-1)x^{a-2}y^b < 0,$$

así que la función será cóncava, siempre y cuando

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_2 &= a(a-1)(b)(b-1)x^{2a-2}y^{2b-2} - a^2b^2x^{2a-2}y^{2b-2} \\ &= ab(1-a-b)x^{2a-2}y^{2b-2} > 0. \end{aligned}$$

Esta condición es evidentemente válida si $a + b < 1$. Es decir, en términos de la función de producción, la función debe exhibir rendimientos decrecientes a escala para ser cóncava. Geométricamente, la función debe descender cuando ambos insumos aumentan juntos.

E2.2 Maximización

Como vimos en el capítulo 2 las condiciones de primer orden para un máximo restringido de una función de muchas variables requiere hallar un punto en el que las derivadas parciales sean iguales a cero. Si la función es cóncava estará bajo su plano tangente en este punto; así, el punto será un máximo verdadero.[3] Puesto que la función estado de salud es cóncava, por ejemplo, las condiciones de primer orden para un máximo también son suficientes.

E2.3 Máximos restringidos

Cuando en un problema de maximización o minimización las x están sujetas a restricciones, estas tienen que tomarse en cuenta al enunciar las condiciones de segundo orden. También en este caso el álgebra matricial ofrece un medio compacto (si no es que intuitivo) para denotar estas condiciones. Esta notación implica sumar filas y columnas de la matriz de Hesse en el problema irrestricto y comprobar después las propiedades de esta matriz aumentada.

Específicamente, se quiere maximizar

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

sujeta a la restricción[4]

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

En el capítulo 2 vimos que las condiciones de primer orden para un máximo son de la forma

$$f_i + \lambda g_i = 0,$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange de este problema. Las condiciones de segundo orden para un máximo se basan en la matriz de Hesse aumentada ("limitada")[5]

$$\mathrm{H_b} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}.$$

[2] En el capítulo 21 de Simon y Blume (1994) se muestra una prueba con la versión multivariable de la aproximación de Taylor.

[3] Este será un máximo "local" si la función es cóncava sólo en una región, o "global" si lo es en todas partes.

[4] Aquí sólo se considera el caso de una restricción. La generalización a muchas restricciones es conceptualmente simple pero compleja respecto a la notación. Para una formulación concisa véase Sydsaeter, Strom y Berck (2005), p. 103.

[5] Nótese que si $g_{ij} = 0$ para todas las i y j, entonces $\mathbf{H_b}$ puede considerarse la matriz de Hesse simple asociada con la expresión lagrangiana dada en la ecuación 2.50, la cual es una función de las $n + 1$ variables $\lambda, x_1, \ldots, x_n$.

Para un máximo, $(-1)\mathrm{H_b}$ debe ser definida negativa; es decir, los menores principales de $\mathrm{H_b}$ deben seguir el patrón $- + - + -$ y así sucesivamente, a partir del segundo de esos menores.[6]

Las condiciones de segundo orden para un mínimo requieren que $(-1)\mathrm{H_b}$ sea definida positiva; es decir, que todos los menores principales de $\mathrm{H_b}$ (excepto el primero) sean negativos.

Ejemplo

La expresión lagrangiana para el problema de estado de salud restringido (ejemplo 2.6) es

$$\mathscr{L} = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - x_1 - x_2),$$

y la matriz de Hesse limitada para este problema es

$$\mathrm{H_b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

El segundo menor principal es aquí

$$\mathrm{H_{b2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -1,$$

y el tercero

$$\begin{aligned}\mathrm{H_{b3}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 0 + 0 - (-2) - 0 - (-2) = 4,\end{aligned}$$

así que los menores principales de $\mathrm{H_b}$ tienen el patrón requerido y el punto

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0,$$

es un máximo limitado.

Ejemplo

En el problema de la cerca óptima (ejemplo 2.7), la matriz de Hesse limitada es

$$\mathrm{H_b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{H_{b2}} &= -4, \\ \mathrm{H_{b3}} &= 8,\end{aligned}$$

así que también en este caso los menores principales tienen el patrón de signo requerido para un máximo.

E2.4 Cuasi concavidad

Si la restricción g es lineal las condiciones de segundo orden exploradas en la extensión 2.3 sólo pueden relacionarse con la forma de la función por optimizar, f. En este caso la restricción puede escribirse como

$$g(x_1, \ldots, x_n) = c - b_1x_1 - b_2x_2 - \cdots - b_nx_n = 0,$$

y las condiciones de primer orden para un máximo son

$$f_i = \lambda b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Usando estas condiciones resulta claro que la matriz de Hesse limitada $\mathrm{H_b}$ y la matriz

$$\mathrm{H}' = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

tienen los mismos menores principales excepto por una constante de proporcionalidad (positiva).[7] Las condiciones para un máximo de f, sujeta a una restricción lineal, serán satisfechas siempre que H' siga las mismas convenciones de signo que $\mathrm{H_b}$; es decir, $(-1)\mathrm{H}'$ debe ser definida negativa. Una función f para la cual H' sigue este patrón se llama *cuasi cóncava*. Como veremos, f tiene la propiedad de que el conjunto de puntos x para el cual $f(x) \geq c$ (donde c es cualquier constante) es convexo. Para esa función las condiciones necesarias para un máximo también son suficientes.

Ejemplo

Para el problema de la cerca, $f(x, y) = xy$ y $\mathbf{H}'$ está dada por

$$\mathrm{H}' = \begin{bmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} H_2' &= -y^2 < 0, \\ H_3' &= 2xy > 0, \end{aligned}$$

y la función es cuasi cóncava.[8]

Ejemplo

Más generalmente, si f es una función de sólo dos variables, la cuasi concavidad requiere que

$$\begin{aligned} H_2' &= -(f_1)^2 < 0 \text{ y} \\ H_3' &= -f_{11}f_2^2 - f_{22}f_1^2 + 2f_1f_2f_{12} > 0, \end{aligned}$$

justo la condición enunciada en la ecuación 2.114. De ahí que tengamos una forma muy simple de determinar la cuasi concavidad.

Referencias

Simon, C. P. y L. Blume. *Mathematics for Economists*, W. W. Norton, Nueva York, 1994.

Sydsaeter, R., A. Strom y P. Berck. *Economists' Mathematical Manual*, 3a. ed., Springer-Verlag, Berlín, 2000.

[6] Nótese que el primer menor principal de $\mathbf{H_b}$ es 0.

[7] Esto puede demostrarse señalando que multiplicar una fila (o columna) de una matriz por una constante, multiplica la determinante por esa constante.

[8] Puesto que $f(x, y) = xy$ es una forma de una función de Cobb-Douglas no cóncava, demuestra que no toda función cuasi cóncava es cóncava. Adviértase que una función monótona de f (como $f^{1/3}$) podría, sin embargo, ser cóncava.