La función en la ecuación 2.127 también puede usarse para ilustrar la diferencia entre funciones homogéneas y homotéticas. Un incremento proporcional en los dos argumentos de $f$ produciría

$$f(tx_1, tx_2) = t^{2k}x_1x_2 = t^{2k}f(x_1, x_2). \qquad \textbf{(2.128)}$$

De ahí que el grado de homogeneidad para esta función dependa de $k$; es decir, el grado de homogeneidad no se preserva independientemente de qué transformación monótona se use. O bien, la función en la ecuación 2.127 es homotética porque

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{kx_1^{k-1}x_2^k}{kx_1^k x_2^{k-1}} = -\frac{x_2}{x_1}. \qquad \textbf{(2.129)}$$

Es decir, la disyuntiva entre $x_1$ y $x_2$ sólo depende de la razón de estas dos variables y no se ve afectada por el valor de $k$. De ahí que la homoteticidad sea una propiedad ordinal. Como veremos, esta propiedad resulta conveniente cuando se desarrollan argumentos gráficos sobre proposiciones económicas.

**PREGUNTA**: ¿Cómo cambiaría el análisis en este ejemplo si consideráramos transformaciones monótonas de la forma $f(x_1, x_2, k) = x_1x_2 + k$ para varios valores de $k$?

# INTEGRACIÓN

La integración es otra de las herramientas de cálculo que halla varias aplicaciones en la teoría microeconómica. Esta técnica se usa para calcular áreas que miden varios resultados económicos, así como generalmente para brindar un medio con el cual resumir resultados que ocurren en el tiempo o entre individuos. Nuestro tratamiento del tema aquí necesariamente ha de ser breve; los lectores interesados en adquirir bases más completas deberán consultar las referencias al final de este capítulo.

## Antiderivadas

Formalmente la integración es la inversa de la diferenciación. Cuando se te pide calcular la integral de una función, $f(x)$, se te pide encontrar una función que tenga $f(x)$ como su derivada. Si llamamos a esta "antiderivada" $F(x)$, se supone que esta función tiene la propiedad de que

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x). \qquad \textbf{(2.130)}$$

Si esa función existe, se denota como

$$F(x) = \int f(x)\,dx. \qquad \textbf{(2.131)}$$

La razón precisa de esta notación, de apariencia más bien extraña se describirá en detalle más adelante. Primero examinemos algunos ejemplos. Si $fx = x$, entonces

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \textbf{(2.132)}$$

donde $C$ es una "constante de integración" arbitraria que desaparece en la diferenciación. La exactitud de este resultado puede comprobarse fácilmente:

$$F'(x) = \frac{d(x^2/2 + C)}{dx} = x + 0 = x. \qquad \textbf{(2.133)}$$

## Cálculo de antiderivadas

El cálculo de antiderivadas puede ser muy simple, o difícil, o exasperante, o imposible, dependiendo de la $f(x)$ particular especificada. Aquí consideraremos tres métodos simples para hacer dichos cálculos aunque, como es de esperar, no siempre funcionan.

1. ***Conjetura creativa***. Probablemente el modo más común de determinar integrales (antiderivadas) sea el de trabajar hacia atrás, preguntándonos "¿qué función producirá $f(x)$ como su derivada?". He aquí algunos ejemplos obvios:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,\\
F(x) &= \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\\
F(x) &= \int (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C,\\
F(x) &= \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad\qquad \textbf{(2.134)}\\
F(x) &= \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\\
F(x) &= \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln(|x|) + C,\\
F(x) &= \int (\ln x)\,dx = x\ln x - x + C.
\end{aligned}$$

Deberías usar la diferenciación para comprobar que todas estas ecuaciones cumplen la propiedad de que $F'(x) = f(x)$. Nótese que en cada caso la integral incluye una constante de integración porque las antiderivadas son únicas sólo hasta una constante aditiva, que se volvería cero en la diferenciación. En muchos sentidos, los resultados de la ecuación 2.134 (o generalizaciones triviales de ella) serán suficientes para nuestros propósitos en este libro. No obstante, he aquí dos métodos más que pueden funcionar cuando la intuición falla.

2. ***Cambio de variable***. Una redefinición ingeniosa de variables puede hacer a veces que una función sea mucho más fácil de integrar. Por ejemplo, no es del todo obvio cuál es la integral de $2x/(1 + x^2)$. Pero si se concede que $y = 1 + x^2$, entonces $dy = 2xdx$ y

$$\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln(|y|) = \ln(|1 + x^2|). \qquad \textbf{(2.135)}$$

La clave de este procedimiento está en descomponer la función original en un término en $y$ y un término en $dy$. Se necesita mucha práctica para distinguir patrones en los que esto funcionará.

3. ***Integración por partes***. Un método similar para determinar integrales hace uso de la identidad $duv = udv + vdu$ para cualesquiera dos funciones $u$ y $v$. La integración de esta diferencial produce

$$\int duv = uv = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{o} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \textbf{(2.136)}$$

Aquí la estrategia es definir funciones $u$ y $v$ de tal modo que la integral desconocida de la izquierda pueda calcularse mediante la diferencia entre las dos expresiones conocidas de la derecha. Por ejemplo, de ninguna manera es obvio cuál es la integral de $xe^x$. Pero podemos definir $u = x$ (por tanto, $du = dx$) y $dv = e^x dx$ (por tanto, $v = e^x$). De ahí que ahora tengamos

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x\,dx = (x - 1)e^x + C. \qquad \textbf{(2.137)}$$

De nueva cuenta, sólo la práctica puede sugerir patrones útiles en las formas en que $u$ y $v$ pueden definirse.

## Integrales definidas

Las integrales que hemos analizado hasta aquí son integrales "indefinidas"; sólo ofrecen una función general, que es la antiderivada de otra función. Un método algo distinto, aunque conexo, usa la integración para sumar el área bajo una gráfica de una función en un intervalo definido. La figura 2.5 ilustra este proceso. Se desea conocer el área bajo la función $f(x)$ de $x = a$ a $x = b$. Una manera de hacer esto sería dividir el intervalo en fragmentos más pequeños de $x(\Delta x)$ y sumar las áreas de los rectángulos que aparecen en la figura. Es decir:

$$\text{área bajo } f(x) \approx \sum_i f(x_i)\Delta x_i, \qquad \textbf{(2.138)}$$

donde la notación indica que la altura de cada rectángulo es aproximada por el valor de $f(x)$ para un valor de $x$ en el intervalo. Llevar al límite este proceso, contrayendo el tamaño de los intervalos $\Delta x$, rinde una medida exacta del área deseada y se denota con:

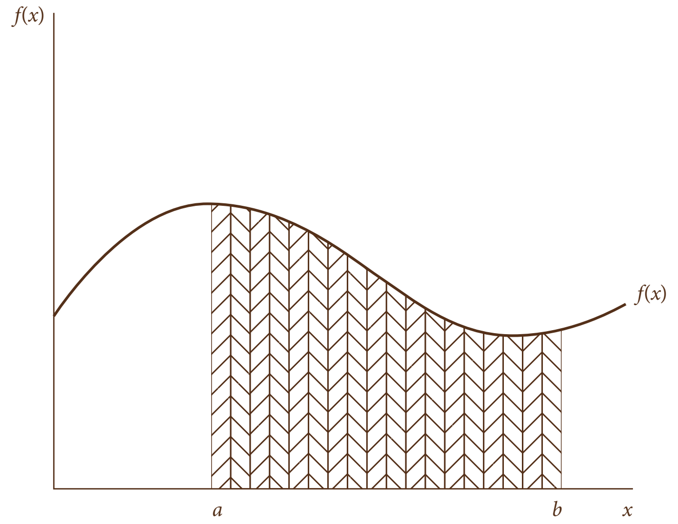
$$\text{área bajo } f(x) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx. \qquad \textbf{(2.139)}$$

Esto explica entonces el origen del peculiar signo de la integral, una S estilizada que indica "suma". Como veremos, integrar es una manera general de sumar los valores de una función continua en un intervalo.

**FIGURA 2.5**

Las integrales definidas muestran las áreas bajo la gráfica de una función.

Las integrales definidas miden el área bajo una curva sumando áreas rectangulares, como se advierte en la gráfica. La dimensión de cada rectángulo es $fx(dx)$.



## Teorema fundamental del cálculo

Evaluar la integral en la ecuación 2.139 es simple si conocemos la antiderivada de $f(x)$, digamos $F(x)$. En este caso tenemos

$$\text{área bajo } f(x) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = F(b) - F(a). \quad \textbf{(2.140)}$$

Es decir, lo único que debemos hacer es calcular la antiderivada de $f(x)$ y restar el valor de esta función en el límite inferior de la integración a su valor en el límite superior de la integración. Este resultado se conoce como *teorema fundamental del cálculo* porque une directamente las dos principales herramientas del cálculo: derivadas e integrales. En el ejemplo 2.13 se demuestra que este resultado es mucho más general que simplemente una forma de medir áreas. Puede usarse para ilustrar uno de los principios conceptuales primarios de la economía: la distinción entre "existencias" y "flujos".

### EJEMPLO 2.13 Existencias y flujos

La integral definida proporciona un medio útil para sumar cualquier función que ofrezca un flujo continuo en el tiempo. Por ejemplo, supongamos que el incremento neto de población de un país (nacimientos menos muertes) puede aproximarse con la función $f(t) = 1\,000e^{0.02t}$. De ahí que el cambio neto de población sea creciente, a una tasa de 2 por ciento al año; es decir, 1 000 personas nuevas en el año 0; 1 020 personas nuevas en el primer año, 1 041 en el segundo y así sucesivamente. Supongamos que deseamos conocer cuánto se incrementará en total la población en 50 años. Esta podría ser una estimación tediosa sin el cálculo, pero usar el teorema fundamental del cálculo ofrece una respuesta fácil:

$$\begin{aligned}\text{incremento de la población } &= \int_{t=0}^{t=50} f(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=50} 1\,000e^{0.02t} dt = F(t)\Big|_0^{50} \\ &= \frac{1\,000e^{0.02t}}{0.02}\Big|_0^{50} = \frac{1\,000e}{0.02} - 50\,000 = 85\,914\end{aligned} \quad \textbf{(2.141)}$$

[donde la notación $|_a^b$ indica que la expresión debe evaluarse como $F(b) - F(a)$]. De ahí que la conclusión sea que la población aumentará en cerca de 86 000 personas en los próximos 50 años. Adviértase cómo el teorema fundamental del cálculo une un concepto de "flujo", el incremento neto de la población (el cual se mide como monto *por año*), con un concepto de "existencias", la población total (la cual se mide en una fecha específica y no tiene una dimensión temporal). Adviértase también que el cálculo de 86 000 se refiere sólo al *incremento* total entre el año 0 y el año 50. Para conocer la población total real en cualquier fecha, tendríamos que sumar el número de personas en la población en el año 0. Esto sería similar a elegir una constante de integración en este problema específico.

Consideremos ahora una aplicación con más contenido económico. Supongamos que los costos totales de una empresa particular están dados por $C(q) = 0.1q^2 + 500$ (donde $q$ representa la producción en cierto periodo). Aquí el término $0.1q^2$ representa costos variables (costos que varían con la producción), mientras que la cifra de 500 representa costos fijos. Los costos marginales de este proceso de producción pueden hallarse por diferenciación —$MC = dC(q)/dq = 0.2q$—, y de ahí que los costos marginales sean crecientes con $q$ y los costos fijos se dejen fuera en la diferenciación. ¿Cuáles son los costos totales asociados con producir, digamos, $q = 100$? Una manera de responder esta pregunta es usar directamente la función de costo total: $C(100) = 0.1(100)^2 + 500 = 1\,500$. Otra sería integrar el costo marginal en el rango de 0 a 100 para obtener el costo variable total:

$$\text{costo variable } = \int_{q=0}^{q=100} 0.2q\ dq = 0.1q^2\Big|_0^{100} = 1\,000 - 0 = 1\,000, \quad \textbf{(2.142)}$$

a lo que habría que sumar los costos fijos de 500 (la constante de integración en este problema) para obtener los costos totales. Claro que este método para arribar al costo total es mucho más laborioso que sólo usar directamente la ecuación de costo total. Pero la derivación demuestra que el costo variable total entre dos niveles cualesquiera de producción puede hallarse por integración como el área bajo la curva de costo marginal, conclusión que nos será útil en algunas aplicaciones prácticas.

**PREGUNTA**: ¿Cómo calcularías el costo variable total asociado con la expansión de la producción de 100 a 110? Explica por qué los costos fijos no entran en este cálculo.

## Diferenciación de una integral definida

Ocasionalmente desearemos diferenciar una integral definida, usualmente en el contexto de maximizar el valor de dicha integral. Aunque hacer tales diferenciaciones puede ser un poco complejo a veces, hay algunas reglas que deberían facilitar el proceso.

1. ***Diferenciación respecto a la variable de integración.*** Esta cuestión es complicada, pero instructiva. Una integral definida tiene un valor constante; de ahí que su derivada sea igual a cero. Es decir:

$$\frac{d \int_a^b f(x)\, dx}{dx} = 0. \tag{2.143}$$

El proceso de suma requerido por la integración se ha efectuado ya una vez que hemos escrito una integral definida. No importa si la variable de integración es $x$, $t$ o cualquier otra. El valor de esta suma integrada no cambiará al variar la variable $x$, sin importar qué sea $x$ (no obstante véase la regla 3, más adelante).

2. ***Diferenciación respecto al límite superior de la integración.*** Cambiar el límite superior de la integración obviamente cambiará el valor de una integral definida. En este caso debe distinguirse entre la variable determinante del límite superior de la integración (digamos $x$) y la variable de integración (digamos $t$). El resultado es entonces una aplicación simple del teorema fundamental del cálculo. Por ejemplo:

$$\frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = \frac{d[F(x) - F(a)]}{dx} = f(x) - 0 = f(x), \tag{2.144}$$

donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$. Remitiéndonos a la figura 2.5 podemos ver por qué esta conclusión tiene sentido: la pregunta es cómo variará el valor de la integral definida si $x$ aumenta ligeramente. La respuesta obvia es que el valor de la integral aumenta en el equivalente a la altura de $f(x)$ (nótese que este valor dependerá en última instancia del valor especificado de $x$).

Si el límite superior de la integración es una función de $x$, este resultado puede generalizarse usando la regla de cadena:

$$\frac{d \int_a^{g(x)} f(t)\, dt}{dx} = \frac{d[F(g(x)) - F(a)]}{dx} = \frac{d[F(g(x))]}{dx} = f\,\frac{dg(x)}{dx} = f(g(x))g'(x), \tag{2.145}$$

donde, nuevamente, el valor específico de esta derivada dependerá del valor supuesto de $x$.

Por último, adviértase que la diferenciación respecto a un límite inferior de la integración sólo modifica el signo de esta expresión:

$$\frac{d \int_{g(x)}^b f(t)\, dt}{dx} = \frac{d[F(b) - F(g(x))]}{dx} = -\frac{dF(g(x))}{dx} = -f(g(x))\, g'(x). \tag{2.146}$$