

# Relaciones de demanda entre bienes

En el capítulo 5 se examinó cómo las variaciones de precio de un bien particular (digamos el bien  $x$ ) afectan la cantidad elegida de ese bien. En el análisis se mantuvieron constantes los precios de todos los demás bienes. Debería quedar claro, sin embargo, que una variación en uno de esos otros precios también podría afectar la cantidad elegida de  $x$ . Por ejemplo, si se entiende que  $x$  representa la cantidad de millas que un individuo recorre en automóvil, es de esperar que esta cantidad decrezca cuando el precio de la gasolina se incrementa, o aumente cuando el precio de viajar en avión o autobús se incrementa. En este capítulo se usará el modelo de optimización de la utilidad para estudiar dichas relaciones.

## EL CASO DE DOS BIENES

Iniciaremos nuestro estudio de las relaciones de demanda entre bienes con el caso de dos bienes. Lamentablemente, este caso resulta ser poco interesante porque los tipos de relaciones que pueden ocurrir cuando sólo hay dos bienes son limitados. Aun así, el caso de dos bienes es útil, ya que puede ilustrarse con gráficas bidimensionales. Con la figura 6.1 inicia nuestro examen, mostrando dos ejemplos de cómo la cantidad elegida de  $x$  podría verse afectada mediante un cambio en el precio de  $y$ . En los dos paneles de esta figura  $p_y$  ha decrecido. Esto desplaza la restricción presupuestal hacia fuera, de  $I_0$  a  $I_1$ . En ambos casos la cantidad elegida del bien  $y$  también se ha incrementado de  $y_0$  a  $y_1$  a raíz del decremento en  $p_y$ , como sería de esperar si  $y$  es un bien normal. En cuanto al bien  $x$ , en cambio, los resultados que aparecen en los dos paneles difieren. En a) las curvas de indiferencia tienen casi forma de L, lo cual implica un efecto de sustitución muy pequeño. Un decremento en  $p_y$  no induce un movimiento grande a lo largo de  $U_0$  cuando  $y$  es sustituida por  $x$ . Es decir,  $x$  se reduce relativamente poco a raíz de la sustitución. El efecto de ingreso, sin embargo, refleja el mayor poder de compra ahora disponible, y esto causa que la cantidad total elegida de  $x$  se incremente. De ahí que  $\partial x / \partial p_y$  sea negativa ( $x$  y  $p_y$  se mueven en direcciones opuestas).

En la figura 6.1b esta situación se invierte:  $\partial x / \partial p_y$  es positiva. Las curvas de indiferencia relativamente planas de la figura 6.1a resultan en un gran efecto de sustitución del descenso en  $p_y$ . La cantidad de  $x$  decrece marcadamente cuando  $y$  es sustituida por  $x$  a lo largo de  $U_0$ . Tal como en la figura 6.1a, el poder de compra aumentado por el decremento en  $p_y$  provoca que se compre más de  $x$ , pero ahora el efecto de sustitución predomina y la cantidad de  $x$  decrece a  $x_1$ . En este caso,  $x$  y  $p_y$  se mueven entonces en la misma dirección.

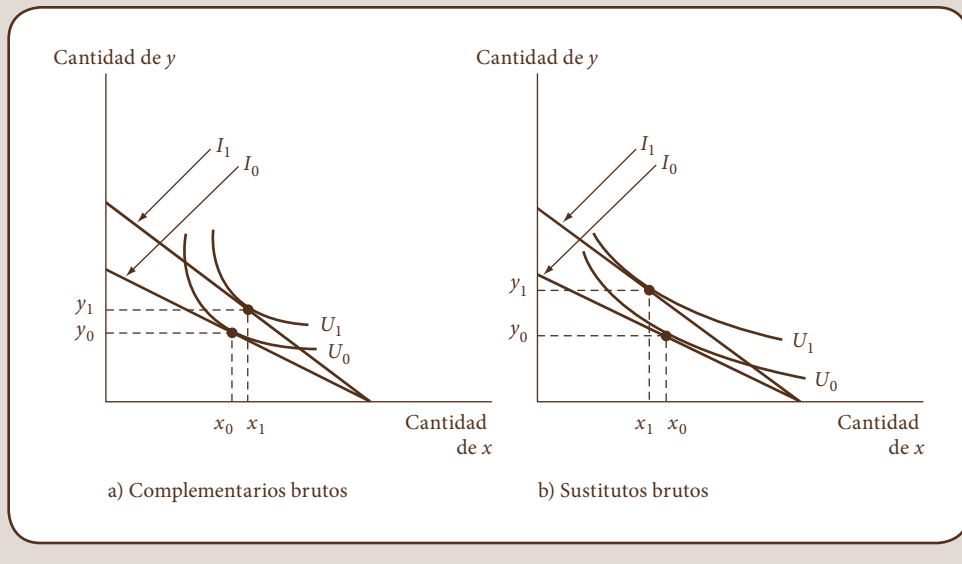
### Tratamiento matemático

La ambigüedad en el efecto de las variaciones en  $p_y$  puede ilustrarse adicionalmente con una ecuación tipo Slutsky. Usando procedimientos similares a los del capítulo 5 es muy simple demostrar que

FIGURA 6.1

Diferentes direcciones de efectos cruzados.

En ambos paneles, el precio de  $y$  ha decrecido. En a) los efectos de sustitución son pequeños; así, la cantidad consumida de  $x$  se incrementa junto con  $y$ . Puesto que  $\partial x/\partial p_y < 0$ ,  $x$  y  $y$  son *complementarios brutos*. En b) los efectos de sustitución son grandes; así, la cantidad elegida de  $x$  decrece. Dado que  $\partial x/\partial p_y > 0$ ,  $x$  y  $y$  se denominan *sustitutos brutos*.



$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \text{efecto de sustitución} + \text{efecto de ingreso} \quad (6.1)$$

$$= \left. \frac{\partial x}{\partial p_y} \right|_{U=\text{constante}} - y \cdot \frac{\partial x}{\partial I},$$

o, en términos de elasticidad,

$$e_{x, p_y} = e_{x^c, p_y} - s_y e_{x, I}. \quad (6.2)$$

Nótese que la magnitud del efecto de ingreso está determinada por la porción del bien  $y$  en las compras de una persona. El impacto de una variación en  $p_y$  sobre el poder de compra está determinado por lo importante que es  $y$  para este individuo.

Para el caso de dos bienes, los términos del miembro derecho de las ecuaciones 6.1 y 6.2 tienen diferentes signos. Suponiendo que las curvas de indiferencia son convexas, el efecto de sustitución  $\partial x/\partial p_y|_{U=\text{constante}}$  es positivo. Si nos limitamos a movimientos a lo largo de una curva de indiferencia, incrementos en  $p_y$  incrementan  $x$  y decrementos en  $p_y$  hacen decrecer la cantidad de  $x$  elegida. Sin embargo, suponiendo que  $x$  es un bien normal, el efecto de ingreso  $(-y \partial x/\partial I \text{ o } -s_y e_{x, I})$  es claramente negativo. De ahí que el efecto combinado sea ambiguo;  $\partial x/\partial p_y$  podría ser positiva o negativa. Aun en el caso de dos bienes la relación de demanda entre  $x$  y  $p_y$  es algo compleja.

### EJEMPLO 6.1 Otra descomposición de Slutsky para efectos cruzados

En el ejemplo 5.4 se examinó la descomposición de Slutsky para el efecto de una variación en el precio de  $x$ . Ahora se considerará el efecto cruzado de una variación en los precios de  $y$  sobre las compras de  $x$ . Recuerdese que las funciones de demanda no compensada y compensada para  $x$  están dadas por

$$x(p_x, p_y, I) = \frac{0.5I}{p_x} \quad (6.3)$$

y

$$x^c(p_x, p_y, V) = V p_y^{0.5} p_x^{-0.5}. \quad (6.4)$$

Como ya se señaló, la función de demanda de Marshall en este caso produce  $\partial x / \partial p_y = 0$ ; es decir, las variaciones en el precio de  $y$  no afectan las compras de  $x$ . Ahora se demostrará que esto ocurre porque los efectos de sustitución y de ingreso de una variación de precio están equilibrados. El efecto de sustitución en este caso está dado por

$$\left. \frac{\partial x}{\partial p_y} \right|_{U=\text{constante}} = \frac{\partial x^c}{\partial p_y} = 0.5 V p_y^{-0.5} p_x^{-0.5}. \quad (6.5)$$

Al sustituir  $V$  a partir de la función de utilidad indirecta ( $V = 0.5 I p_y^{-0.5} p_x^{-0.5}$ ) se obtiene un enunciado final para el efecto de sustitución:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial p_y} \right|_{U=\text{constante}} = 0.25 I p_y^{-1} p_x^{-1}. \quad (6.6)$$

Volviendo a la función de demanda de Marshall para  $y$  ( $y = 0.5 I p_y^{-1}$ ), calcular el efecto de ingreso produce

$$-y \frac{\partial x}{\partial I} = -[0.5 I p_y^{-1}] \cdot [0.5 p_x^{-1}] = -0.25 I p_y^{-1} p_x^{-1}, \quad (6.7)$$

y combinar las ecuaciones 6.6 y 6.7 da el efecto total de variación en el precio de  $y$  como

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = 0.25 I p_y^{-1} p_x^{-1} - 0.25 I p_y^{-1} p_x^{-1} = 0. \quad (6.8)$$

Esto deja en claro que la razón de que las variaciones en el precio de  $y$  no tengan ningún efecto en las compras de  $x$  en el caso de la función Cobb-Douglas, es porque los efectos de sustitución e ingreso de esa variación se neutralizan con exactitud; ninguno de los efectos en particular, sin embargo, es de cero.

Para volver a nuestro ejemplo numérico ( $p_x = 1$ ,  $p_y = 4$ ,  $I = 8$ ,  $V = 2$ ), supóngase ahora que  $p_y$  disminuye a 2. Esto no debería tener ningún efecto en la demanda de Marshall del bien  $x$ . La función de demanda compensada en la ecuación 6.4 indica que la variación de precio provocaría que la cantidad demandada de  $x$  decreciera de 4 a 2.83 ( $= 2\sqrt{2}$ ) cuando  $y$  es sustituida por  $x$  con la utilidad sin cambios. No obstante, el poder de compra aumentado debido al decremento en el precio invierte este efecto con toda precisión.

**PREGUNTAS:** ¿Por qué sería incorrecto argüir que si  $\partial x / \partial p_y = 0$ , entonces  $x$  y  $y$  no tienen posibilidades de sustitución (es decir, deben consumirse en proporciones fijas)? ¿Existe algún caso en el cual se podría llegar a esta conclusión?

## SUSTITUTOS Y COMPLEMENTARIOS

En el caso de una gran cantidad de bienes hay mucho mayor margen para relaciones interesantes entre ellos. Es relativamente fácil generalizar la ecuación de Slutsky para dos bienes cualesquiera  $x_i$ ,  $x_j$  como

$$\frac{\partial x_i(p_1, \dots, p_n, I)}{\partial p_j} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right|_{U=\text{constante}} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial I}, \quad (6.9)$$

y, nuevamente, esto puede traducirse fácilmente en una relación de elasticidad:

$$e_{i,j} = e_{i,j}^c - s_j e_{i,I}. \quad (6.10)$$

Lo anterior indica que el cambio en el precio de cualquier bien (el bien  $j$  en este caso) induce efectos de ingreso y de sustitución que pueden cambiar la cantidad demandada de cada bien. Las

ecuaciones 6.9 y 6.10 pueden usarse para analizar la idea de sustitutos y complementarios. Intuitivamente, estas ideas son más bien simples. Dos bienes son *sustitutos* si, a raíz de un cambio en las condiciones, uno de ellos puede reemplazar en uso al otro. Algunos ejemplos son té y café, hamburguesas y *hot dogs*, mantequilla y margarina. Los *complementarios*, por otro lado, son bienes que “van juntos”, como café y crema, pescado y papas fritas o brandy y puros. En cierto sentido, los “sustitutos” se reemplazan entre sí en la función de utilidad, mientras que los “complementarios” se complementan entre sí.

Hay dos maneras de precisar estas ideas intuitivas. Una se centra en los efectos “brutos” de las variaciones de precio, incluyendo los efectos tanto de ingreso como de sustitución; la otra atiende sólo los efectos de sustitución. Dado que usaremos ambas definiciones, examinemos en detalle cada una de ellas.

Sustitutos y complementarios brutos (de Marshall)

Que dos bienes sean sustitutos o complementarios puede establecerse en referencia a las reacciones observadas respecto al precio, como sigue.

DEFINICIÓN	Sustitutos y complementarios brutos. Se dice que dos bienes, $x_i$ y $x_j$ , son sustitutos brutos si
	$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0 \tag{6.11}$
	y complementarios brutos si
	$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0 \tag{6.12}$

Es decir, dos bienes son sustitutos brutos si un incremento en el precio de uno de ellos provoca que se compre *más* del otro bien. Los bienes son complementarios brutos si un incremento en el precio de uno de ellos hace que se adquiriera menos del otro bien. Por ejemplo, si el precio del café se incrementa, es de esperar que la demanda de té aumente (son sustitutos), en tanto que la demanda de crema podría decrecer (café y crema son complementarios). La ecuación 6.9 deja en claro que es una definición “bruta” en cuanto que incluye los efectos tanto de ingreso como de sustitución, procedentes de las variaciones de precio. Puesto que estos efectos, de hecho, están combinados en cualquier observación de la realidad que podamos hacer, sería razonable siempre hablar sólo de sustitutos “brutos” y complementarios “brutos”.

Asimetría de las definiciones brutas

Sin embargo, hay varios detalles indeseables en las definiciones brutas de sustitutos y complementarios. El más importante es que las definiciones no son simétricas. Es posible, por efecto de las definiciones, que  $x_1$  sea un sustituto de  $x_2$  y que al mismo tiempo  $x_2$  sea un complementario de  $x_1$ . La presencia de efectos de ingreso puede producir resultados paradójicos. Veamos un ejemplo específico.

EJEMPLO 6.2 Asimetría en efectos cruzados
Supongamos que la función de utilidad para dos bienes ( $x$ y $y$ ) tiene la forma cuasi lineal
$U(x, y) = \ln x + y. \tag{6.13}$

Copyright © 2015, CENGAGE Learning. All rights reserved.

Establecer la expresión lagrangiana

$$\mathcal{L} = \ln x + y + \lambda(I - p_x x - p_y y) \quad (6.14)$$

genera las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 1 - \lambda p_y = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= I - p_x x - p_y y = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

El traslado de los términos en  $\lambda$  a la derecha y la división de la primera ecuación entre la segunda produce

$$\frac{1}{x} = \frac{p_x}{p_y}, \quad (6.16)$$

$$p_x x = p_y y. \quad (6.17)$$

La sustitución en la restricción presupuestal permite ahora despejar  $y$  en la función de demanda de Marshall:

$$I = p_x x + p_y y = p_y + p_y y. \quad (6.18)$$

De ahí que

$$y = \frac{I - p_x}{p_y}. \quad (6.19)$$

Esta ecuación indica que un incremento en  $p_y$  debe hacer decrecer el gasto en el bien  $y$  (es decir,  $p_y y$ ). Así, debido a que  $p_x$  e  $I$  se mantienen sin variación, el gasto en  $x$  debe incrementarse. Por tanto,

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} > 0, \quad (6.20)$$

y denominaríamos a  $x$  y  $y$  sustitutos brutos. Por otro lado, la ecuación 6.19 muestra que el gasto en  $y$  es independiente de  $p_x$ . En consecuencia,

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = 0 \quad (6.21)$$

y, visto de esta manera, se diría que  $x$  y  $y$  son independientes entre sí; no son ni sustitutos brutos ni complementarios brutos. Basarse en las respuestas brutas a las variaciones de precio para definir la relación entre  $x$  y  $y$  nos llevaría a la ambigüedad.

**PREGUNTA:** En el ejemplo 3.4 se demostró que una función de utilidad de la forma dada por la ecuación 6.13 no es homotética. La TMS no depende sólo de la razón de  $x$  con  $y$ . ¿Puede surgir asimetría en el caso homotético?

## SUSTITUTOS Y COMPLEMENTARIOS NETOS (DE HICKS)

Debido a las posibles asimetrías implicadas en la definición de sustitutos y complementarios netos, suele usarse una definición alterna centrada exclusivamente en los efectos de sustitución.

## DEFINICIÓN

**Sustitutos y complementarios netos.** Se dice que los bienes  $x_i$  y  $x_j$  son sustitutos netos si

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right|_{U=\text{constante}} > 0 \quad (6.22)$$

y complementarios netos si

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right|_{U=\text{constante}} < 0. \quad (6.23)$$

Estas definiciones<sup>1</sup> entonces sólo consideran los términos de sustitución para determinar si dos bienes son sustitutos y complementarios. Esta definición es intuitivamente atractiva (porque sólo considera la forma de una curva de indiferencia) y teóricamente deseable (porque es inequívoca). Una vez que se ha descubierto que  $x_i$  y  $x_j$  son sustitutos, permanecen como tales, sin importar en qué dirección se aplique la definición. En la práctica las definiciones son simétricas:

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right|_{U=\text{constante}} = \left. \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right|_{U=\text{constante}}. \quad (6.24)$$

El efecto de sustitución de una variación en  $p_i$  sobre el bien  $x_j$  es idéntico al efecto de sustitución de una variación en  $p_j$  sobre la cantidad de  $x_i$  elegida. Esta simetría es importante en el trabajo teórico y empírico.<sup>2</sup>

Las diferencias entre las definiciones de sustitutos y complementarios son fáciles de demostrar en la figura 6.1a. En esa figura,  $x$  y  $y$  son complementarios brutos pero sustitutos netos. La derivada  $\partial x / \partial p_y$  resulta ser negativa ( $x$  y  $y$  son complementarios brutos) porque el efecto de sustitución (positivo) es rebasado por el efecto de ingreso (negativo) (un decremento en el precio de  $y$  causa que el ingreso real se incremente en alto grado y que, en consecuencia, las compras reales de  $x$  se incrementen también). Sin embargo, como lo deja ver claramente la figura, si sólo hay dos bienes entre los cuales elegir deben ser sustitutos netos, aunque puedan ser sustitutos brutos o complementarios brutos. Debido a que se ha supuesto una *TMS* decreciente, el efecto de sustitución del precio debe ser negativo y, en consecuencia, el efecto de sustitución cruzado debe ser positivo.

<sup>1</sup> También se les llama sustitutos y complementarios *de Hicks*, en honor al economista británico John Hicks quien desarrolló originalmente las definiciones.

<sup>2</sup> Esta simetría es fácil de demostrar usando el lema de Shephard. Las funciones de demanda compensada pueden calcularse a partir de las funciones de gasto por diferenciación:

$$x_i^c(p_1, \dots, p_n, V) = \frac{\partial E(p_1, \dots, p_n, V)}{\partial p_i}.$$

De ahí que el efecto de sustitución esté dado por

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right|_{U=\text{constante}} = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i} = E_{ij}.$$

Pero ahora podemos aplicar el teorema de Young a la función de gasto:

$$E_{ij} = E_{ji} = \frac{\partial x_j^c}{\partial p_i} = \left. \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right|_{U=\text{constante}},$$

lo que comprueba la simetría.

## SUSTITUIBILIDAD CON MUCHOS BIENES

Una vez que el modelo de optimización de la utilidad se extiende a muchos bienes, se vuelve posible una amplia variedad de patrones de demanda. Que un par de bienes en particular sean sustitutos netos o complementarios netos depende básicamente de las preferencias de una persona; así, podrían observarse toda suerte de relaciones. Un importante dato teórico de interés para los economistas es saber cuál es más frecuente, si la sustitución o la complementariedad. En la mayoría de los análisis se tiende a considerar los bienes como sustitutos (un incremento de precio en un mercado tiende a incrementar la demanda en la mayoría de los demás mercados). Sería conveniente saber si esta intuición se justifica.

El economista británico John Hicks estudió este tema con cierto detalle hace más de 70 años y llegó a la conclusión de que en su “mayoría” los bienes deben ser sustitutos. Este resultado se resume en lo que se conoce como *segunda ley de la demanda de Hicks*.<sup>3</sup> Una comprobación moderna comienza con la función de demanda compensada para un bien particular:  $x_i^c(p_1, \dots, p_n, V)$ . Esta función es homogénea de grado 0 en todos los precios (si la utilidad se mantiene constante y los precios se duplican, las cantidades demandadas no varían porque las tangencias de optimización de la utilidad tampoco lo hacen). Aplicar el teorema de Euler a esa función produce

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_2} + \dots + p_n \cdot \frac{\partial x_i^c}{\partial p_n} = 0. \quad (6.25)$$

Este resultado puede formularse en términos de elasticidad dividiendo la ecuación 6.25 entre  $x_i$ :

$$e_{i1}^c + e_{i2}^c + \dots + e_{in}^c = 0. \quad (6.26)$$

Pero sabemos que  $e_{ii}^c \leq 0$  debido a la negatividad del efecto de sustitución. De ahí que deba ser el caso de que

$$\sum_{j \neq i} e_{ij}^c \geq 0. \quad (6.27)$$

Es decir, la suma de todas las elasticidades cruzadas, compensadas para un bien particular, debe ser positiva (o de cero). Es en este sentido que la “mayoría” de los bienes son sustitutos. La evidencia empírica parece, en general, congruente con este hallazgo teórico: en los estudios empíricos de la demanda se encuentran relativamente con menos frecuencia casos de complementariedad neta entre bienes.

## BIENES COMPUESTOS

Nuestro análisis en la sección anterior demostró que las relaciones de demanda entre bienes pueden ser complicadas. En el caso más general, un individuo que consume  $n$  bienes tendrá funciones de demanda que reflejen  $n(n+1)/2$  efectos de sustitución diferentes.<sup>4</sup> Cuando  $n$  es grande (como lo es sin duda para todos los bienes específicos que realmente consumen las personas) este caso general puede ser inmanejable. A menudo es mucho más conveniente agrupar los bienes en agregados más extensos como alimentos, ropa, vivienda, etcétera. En el nivel extremo de agregados se podría querer examinar un bien específico (digamos gasolina), que puede llamarse  $x$ , y su

<sup>3</sup> Véase John Hicks, *Value and Capital* (Oxford University Press, Oxford, 1939), apéndices matemáticos. Existe cierto debate acerca de si este resultado debería llamarse segunda o tercera ley de Hicks. De hecho, otras dos leyes, que ya hemos visto, son enlistadas por Hicks: 1)  $\partial x_i^c / \partial p_i \leq 0$  (negatividad del efecto de sustitución) y 2)  $\partial x_i^c / \partial p_j = \partial x_j^c / \partial p_i$  (simetría de efectos de sustitución cruzados). Sin embargo, en el resumen por escrito de sus resultados, él mismo se refiere explícitamente a sólo dos “propiedades”.

<sup>4</sup> Para ver esto nótese que todos los efectos de sustitución,  $s_{ij}$ , podrían registrarse en una matriz  $n \times n$ . Sin embargo, la simetría de los efectos ( $s_{ij} = s_{ji}$ ) implica que sólo los términos sobre y bajo la diagonal principal de esta matriz pueden ser diferentes entre sí. Esto equivale a la mitad de los términos de la matriz ( $n^2/2$ ) más la mitad restante de los términos en la diagonal principal de la matriz ( $n/2$ ).

relación con “todos los demás bienes”, que pueden llamarse  $y$ . Este es el procedimiento que hemos usado en algunas de nuestras gráficas bidimensionales, y seguiremos haciéndolo así en muchos otros apartados de este libro. En esta sección se mostrarán las condiciones en las cuales este procedimiento puede defenderse. En las extensiones de este capítulo se exploran cuestiones más generales que tienen que ver con la agregación de bienes en grupos más extensos.

## Teorema de los bienes compuestos

Supóngase que los consumidores eligen entre  $n$  bienes pero sólo nos interesa específicamente uno de ellos, digamos  $x_1$ . En general, la demanda de  $x_1$  dependerá de los precios particulares de los otros  $n - 1$  bienes. Pero si todos estos precios se mueven juntos, podría tener sentido agruparlos en un solo “bien compuesto”,  $y$ . Formalmente, si se concede que  $p_2^0, \dots, p_n^0$  representan los precios iniciales de estos bienes, entonces suponemos que dichos precios sólo pueden variar juntos. Podrán duplicarse todos, o decrecer todos 50 por ciento, pero los precios relativos de  $x_2, \dots, x_n$  no variarán. Definamos ahora el bien compuesto  $y$  como los gastos totales en  $x_2, \dots, x_n$ , usando los precios iniciales  $p_2^0, \dots, p_n^0$ :

$$y = p_2^0 x_2 + p_3^0 x_3 + \dots + p_n^0 x_n. \quad (6.28)$$

La restricción presupuestal inicial de esta persona está dada por

$$I = p_1 x_1 + p_2^0 x_2 + \dots + p_n^0 x_n = p_1 x_1 + y. \quad (6.29)$$

Por efecto de nuestra suposición, todos los precios  $p_2, \dots, p_n$  varían al mismo tiempo. Supóngase que todos estos precios varían por un factor de  $t$  ( $t > 0$ ). Ahora la restricción presupuestal es

$$I = p_1 x_1 + t p_2^0 x_2 + \dots + t p_n^0 x_n = p_1 x_1 + t y. \quad (6.30)$$

En consecuencia, el factor de proporcionalidad,  $t$ , desempeña en la restricción presupuestal de este individuo la misma función que el precio de  $y$  ( $p_y$ ) en nuestro análisis anterior de dos bienes. Variaciones en  $p_1$  o en  $t$  promueven los mismos tipos de efectos de sustitución que hemos analizado. Mientras  $p_2, \dots, p_n$  se muevan juntos, podemos limitar nuestro examen de la demanda a decisiones entre comprar  $x_1$  o comprar “todo lo demás”.<sup>5</sup> Así, las gráficas simplificadas que presentan estos dos bienes en sus ejes pueden defenderse rigurosamente, siempre y cuando se satisfagan las condiciones del “teorema de bienes compuestos” (es decir, que todos los demás precios se mueven juntos). Adviértase, sin embargo, que este teorema no hace predicciones sobre el comportamiento de las decisiones de  $x_2, \dots, x_n$ ; estas no necesitan moverse al mismo tiempo. El teorema se centra únicamente en el gasto total en  $x_2, \dots, x_n$ , no en la forma en que se distribuye este gasto entre artículos específicos (aunque se supone que dicha distribución se hace a modo de optimizar la utilidad).

## Generalizaciones y limitaciones

El teorema de los bienes compuestos se aplica a cualquier grupo de bienes cuyos precios relativos se mueven juntos. Es posible tener más de uno de esos bienes si hay varios grupos que obedecen este teorema (es decir, gastos en “alimentos”, “ropa”, etcétera). De ahí que hayamos desarrollado la definición siguiente.

Esta definición y el teorema asociado son resultados eficaces. Ayudan a simplificar muchos problemas que, de otra forma, serían irresolubles. Aun así, se debe tener cuidado al aplicar este

<sup>5</sup> La idea de un *bien compuesto* también fue presentada por J. R. Hicks en *Value and Capital*, 2a. ed. (Oxford University Press, Óxford, 1946), pp. 312-313. La prueba de este teorema se basa en la noción de que para alcanzar una utilidad óptima la razón de las utilidades marginales para  $x_2, \dots, x_n$  debe permanecer sin cambios cuando todos los  $p_2, \dots, p_n$  se mueven juntos. De ahí que el problema de  $n$  bienes pueda reducirse al problema bidimensional de igualar la razón de la utilidad marginal de  $x$  con la de  $y$  a la “razón de precio”  $p_1/t$ .

**DEFINICIÓN**

**Bien compuesto.** Un bien compuesto es un grupo de bienes, cuyos precios en su totalidad se mueven juntos. Estos bienes pueden tratarse como un solo “bien” en cuanto que el individuo se comporta como si eligiera entre otros bienes y el gasto total en el grupo compuesto entero.

teorema en la realidad porque sus condiciones son muy estrictas. Hallar una serie de bienes cuyos precios se mueven juntos es raro. Ligeras desviaciones de la estricta proporcionalidad pueden negar el teorema de los bienes compuestos, si los efectos de sustitución cruzada son grandes. En las extensiones de este capítulo se examinan formas de simplificar situaciones en las que los precios se mueven independientemente.

**EJEMPLO 6.3 Costos de vivienda como bien compuesto**

Supongamos que un individuo recibe utilidad de tres bienes: alimentos ( $x$ ), servicios de vivienda ( $y$ ) medidos en cientos de pies cuadrados y operaciones domésticas ( $z$ ) medidas por uso de electricidad.

Si su utilidad está dada por la función ESC de tres bienes

$$\text{utilidad} = U(x, y, z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}, \quad (6.31)$$

se puede usar la técnica de Lagrange para calcular las funciones de demanda de Marshall para estos bienes como

$$\begin{aligned} x &= \frac{I}{p_x + \sqrt{p_x p_y} + \sqrt{p_x p_z}}, \\ y &= \frac{I}{p_y + \sqrt{p_y p_x} + \sqrt{p_y p_z}}, \\ z &= \frac{I}{p_z + \sqrt{p_z p_x} + \sqrt{p_z p_y}}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Si inicialmente  $I = 100$ ,  $p_x = 1$ ,  $p_y = 4$  y  $p_z = 1$ , entonces las funciones de demanda predicen

$$\begin{aligned} x^* &= 25, \\ y^* &= 12.5, \\ z^* &= 25. \end{aligned} \quad (6.33)$$

De ahí que 25 se gaste en alimentos y 75 en necesidades relacionadas con la vivienda. Si suponemos que los precios de los servicios de vivienda ( $p_y$ ) y los precios de las operaciones domésticas ( $p_z$ ) siempre se mueven juntos, podemos usar los precios iniciales para definir el “bien compuesto” vivienda ( $h$ ) como

$$h = 4y + 1z. \quad (6.34)$$

Aquí también definimos (arbitrariamente) como 1 el precio inicial de vivienda ( $p_h$ ). La cantidad inicial de vivienda es simplemente el total de dólares gastados en  $h$ :

$$h = 4(12.5) + 1(25) = 75. \quad (6.35)$$

Además, debido a que  $p_y$  y  $p_z$  siempre se mueven juntos,  $p_h$  siempre estará relacionado con estos precios por

$$p_h = p_z = 0.25p_y. \quad (6.36)$$

Usando esta información puede recalcularse la función de demanda para  $x$  como función de  $I$ ,  $p_x$  y  $p_h$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{I}{p_x + \sqrt{4p_x p_h} + \sqrt{p_x p_h}} \\ &= \frac{I}{p_y + 3\sqrt{p_x p_h}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

De nueva cuenta, inicialmente  $I = 100$ ,  $p_x = 1$  y  $p_h = 1$ ; por tanto,  $x^* = 25$ . El gasto en vivienda puede calcularse más fácil a partir de la restricción presupuestal como  $h^* = 75$  porque el gasto en vivienda representa “todo” lo que no es alimentos.

**Incremento en los costos de vivienda.** Si los precios de  $y$  y  $z$  se incrementaran proporcionalmente a  $p_y = 16$ ,  $p_z = 4$  (con  $p_x$  sin variar en 1), entonces  $p_h$  también se incrementaría a 4. La ecuación 6.37 predice ahora que la demanda de  $x$  decrecería a

$$x^* = \frac{100}{1 + 3\sqrt{4}} = \frac{100}{7} \quad (6.38)$$

y que las compras por concepto de vivienda estarían dadas por

$$p_h h^* = 100 - \frac{100}{7} = \frac{600}{7}, \quad (6.39)$$

o, debido a que  $p_h = 4$ ,

$$h^* = \frac{150}{7}. \quad (6.40)$$

Adviértase que este es justo el nivel de compras por concepto de vivienda predicho por las funciones de demanda originales para los tres bienes en la ecuación 6.32. Con  $I = 100$ ,  $p_x = 1$ ,  $p_y = 16$  y  $p_z = 4$ , estas ecuaciones pueden resolverse como

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{100}{7}, \\ y^* &= \frac{100}{28}, \\ z^* &= \frac{100}{14}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

así que la cantidad total consumida del bien compuesto “vivienda” (de acuerdo con la ecuación 6.34) está dada por

$$h^* = 4y^* + 1z^* = \frac{150}{7}. \quad (6.42)$$

De ahí que obtengamos las mismas respuestas a variaciones de precio independientemente de si elegimos examinar la demanda de los tres bienes  $x$ ,  $y$  y  $z$  o considerar sólo las decisiones entre  $x$  y el bien compuesto  $h$ .

**PREGUNTAS:** ¿Cómo saber que la función de demanda de  $x$  en la ecuación 6.37 continúa garantizando la optimización de la utilidad? ¿Por qué el problema lagrangiano de optimización restringida se mantiene sin variación al hacer las sustituciones representadas por la ecuación 6.36?

## PRODUCCIÓN DOMÉSTICA, ATRIBUTOS DE LOS BIENES Y PRECIOS IMPLÍCITOS

Hasta aquí, en este capítulo, nos hemos concentrado en lo que los economistas pueden saber sobre las relaciones entre bienes, observando el cambiante consumo de los individuos de estos bienes en reacción a las variaciones de los precios en el mercado. En cierto sentido este análisis elude la pregunta central de *por qué* el café y la crema van juntos o *por qué* el pescado y el pollo pueden sustituirse entre sí en la dieta de una persona. Para desarrollar una comprensión más profunda de estas cuestiones los economistas han tratado de explorar actividades dentro de los hogares de los individuos. Es decir, han ideado modelos no mercantiles de tipos de actividades como la atención de los hijos por parte de los padres, la preparación de alimentos, o el bricolaje o “hágalo usted mismo” para entender cómo estas actividades resultan, en última instancia, en demandas de bienes en el mercado. En esta sección se revisarán brevemente algunos de dichos modelos. El objetivo principal es ilustrar algunas de las implicaciones de este enfoque para la teoría tradicional de la elección.

### Modelo de producción doméstica

El punto de partida para la mayoría de los modelos de producción doméstica es suponer que los individuos no reciben utilidad directamente de los bienes que adquieren en el mercado (como hemos supuesto hasta aquí). En cambio, sólo cuando la gente combina los bienes del mercado con aportaciones de tiempo es que se generan productos generadores de utilidad. Desde este punto de vista la carne cruda de res y las papas sin cocer no rinden ninguna utilidad hasta que se cocinan juntas para preparar un guiso. De igual forma, las adquisiciones mercantiles de carne de res y papas sólo pueden entenderse examinando las preferencias de guisos de una persona y la tecnología subyacente para su preparación.

En términos formales, supongamos nuevamente que hay tres bienes que un individuo podría adquirir en el mercado:  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Adquirir estos bienes no brinda ninguna utilidad directa, pero pueden ser combinados para generar uno de dos bienes de producción doméstica:  $a_1$  o  $a_2$ . La tecnología de esta producción doméstica puede ser representada por las funciones de producción  $f_1$  y  $f_2$  (véase el capítulo 9 para un análisis más completo del concepto de función de producción). Así,

$$a_1 = f_1(x, y, z), \quad (6.43)$$

$$a_2 = f_2(x, y, z),$$

y

$$\text{utilidad} = U(a_1, a_2) \quad (6.44)$$

El objetivo de un individuo es elegir  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para optimizar su utilidad sujeta a las restricciones de producción y a una restricción presupuestal financiera:<sup>6</sup>

$$p_x x + p_y y + p_z z = I. \quad (6.45)$$

Aunque no examinaremos en detalle los resultados que pueden derivarse de este modelo general, cabe mencionar dos discernimientos que pueden extraerse de él. Primero, este modelo puede ayudar a esclarecer la naturaleza de las relaciones de mercado entre los bienes. Puesto que las funciones de producción en las ecuaciones 6.43 son, en principio, mensurables usando datos detallados sobre las operaciones domésticas, las familias pueden ser tratadas como empresas “multiproductos” y ser estudiadas usando muchas de las técnicas que emplean los economistas para analizar la producción.

Un segundo discernimiento provisto por el enfoque de producción doméstica es la noción de los precios “implícitos” o “sombra” asociados a los bienes de producción doméstica  $a_1$  y  $a_2$ . Debido

<sup>6</sup> A menudo, la teoría de la producción doméstica también se centra en la asignación de tiempo que hace una persona para producir  $a_1$  y  $a_2$  o para trabajar en el mercado. En el capítulo 16 se analizan algunos modelos simples de este tipo.

a que consumir más de  $a_1$ , por decir algo, requiere el uso de más de los “ingredientes”  $x$ ,  $y$  y  $z$ , esta actividad tiene obviamente un costo de oportunidad en términos de la cantidad de  $a_2$  que se puede producir. Para producir más pan, por ejemplo, una persona no sólo debe disponer de algo de harina, leche y huevos para preparar pastelillos, sino que también tiene que alterar las cantidades relativas de adquisición de estos bienes porque está limitada por una restricción presupuestal general. De ahí que el pan tenga un precio implícito en términos del número de pastelillos a los que se debe renunciar para poder consumir una hogaza más. Ese precio implícito se reflejará no sólo en los precios de mercado de los ingredientes del pan, sino también en la tecnología disponible para la producción doméstica y, en modelos más complejos, en las aportaciones relativas de tiempo requeridas para producir ambos bienes. Como punto de partida, sin embargo, la noción de precios implícitos puede ilustrarse inmejorablemente con un modelo simple.

## Modelo de atributos lineales

Una forma particularmente simple del modelo de producción doméstica fue desarrollada originalmente por K. J. Lancaster para examinar los “atributos” subyacentes de los bienes.<sup>7</sup> En este modelo son los atributos de los bienes los que brindan utilidad a los individuos, y cada bien específico contiene un conjunto fijo de atributos. Si, por ejemplo, nos fijamos únicamente en las calorías ( $a_1$ ) y vitaminas ( $a_2$ ) que aportan diversos alimentos, el modelo de Lancaster supone que la utilidad es una función de estos atributos y que los individuos adquieren diversidad de alimentos sólo con el propósito de obtener las calorías y vitaminas que estos ofrecen. En términos matemáticos, este modelo supone que las ecuaciones de “producción” tienen la forma simple

$$\begin{aligned}a_1 &= a_x^1 x + a_y^1 y + a_z^1 z, \\a_2 &= a_x^2 x + a_y^2 y + a_z^2 z,\end{aligned}\tag{6.46}$$

donde  $a_x^1$  representa el número de calorías por unidad del alimento  $x$ ,  $a_x^2$  representa el número de vitaminas por unidad del alimento  $x$ , y así sucesivamente. En esta forma del modelo no hay ninguna “producción” real en el hogar. Más bien, el problema de decisión es cómo elegir una dieta que provea la combinación óptima de calorías y vitaminas, dado el presupuesto alimentario disponible.

## Ilustración de las restricciones presupuestales

Para iniciar nuestro examen de la teoría de la elección conforme al modelo de atributos, ilustraremos primero la restricción presupuestal. En la figura 6.2 el radio  $0x$  registra las diversas combinaciones de  $a_1$  y  $a_2$  disponibles de cantidades sucesivamente mayores del bien  $x$ . Debido a la tecnología de producción lineal supuesta en el modelo de los atributos estas combinaciones de  $a_1$  y  $a_2$  se tienden a lo largo de una línea recta, aunque en modelos más complejos de producción doméstica ése podría no ser el caso. De igual forma, los radios de  $0y$  y  $0z$  muestran las cantidades de los atributos  $a_1$  y  $a_2$  provistas por diversas cantidades de los bienes  $y$  y  $z$  que podrían adquirirse.

Si esta persona gasta todo su ingreso en el bien  $x$ , la restricción presupuestal (ecuación 6.45) permite la adquisición de

$$x^* = \frac{I}{p_x},\tag{6.47}$$

y esto producirá

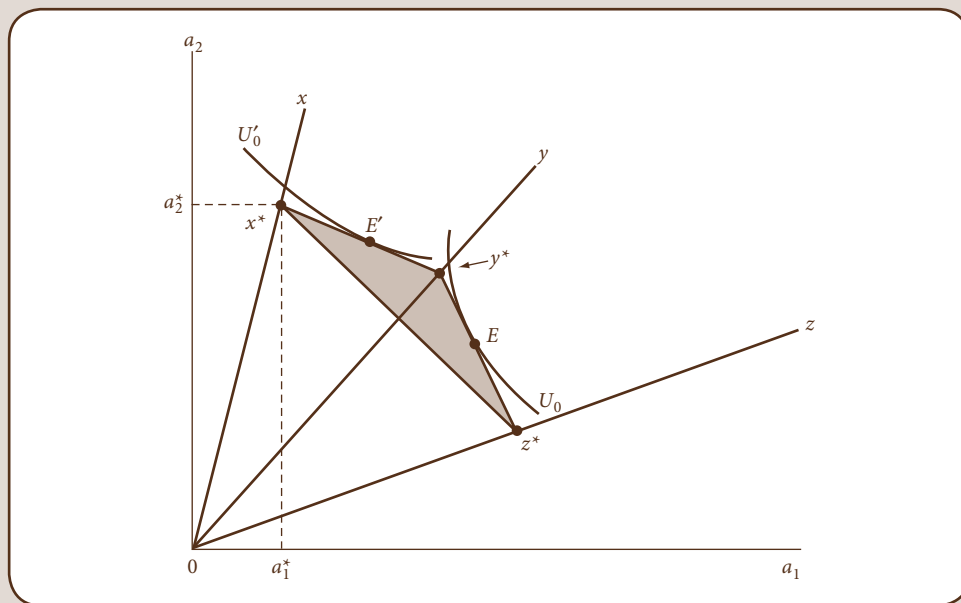
$$\begin{aligned}a_1^* &= a_x^1 x^* = \frac{a_x^1 I}{p_x}, \\a_2^* &= a_x^2 x^* = \frac{a_x^2 I}{p_x}.\end{aligned}\tag{6.48}$$

<sup>7</sup> Véase K. J. Lancaster, “A New Approach to Consumer Theory”, *Journal of Political Economy*, núm. 74 (abril de 1966), pp. 132-157.

FIGURA 6.2

Optimización de la utilidad en el modelo de atributos.

Los puntos  $x^*$ ,  $y^*$  y  $z^*$  indican las cantidades de los atributos  $a_1$  y  $a_2$  que es posible adquirir comprando sólo  $x$ ,  $y$  o  $z$ , respectivamente. El área sombreada muestra todas las combinaciones que se pueden comprar con conjuntos mixtos. Algunos individuos pueden optimizar su utilidad en  $E$ , y otros en  $E'$ .



Este punto se registra como punto  $x^*$  en el radio  $0x$  de la figura 6.2. De igual manera, los puntos  $y^*$  y  $z^*$  representan las combinaciones de  $a_1$  y  $a_2$  que se obtendrían si todo el ingreso se gastara en el bien  $y$  o en el bien  $z$ , respectivamente.

Conjuntos obtenibles de  $a_1$  y  $a_2$  adquiriendo tanto  $x$  como  $y$  (con un presupuesto fijo) son representados por la línea que une a  $x^*$  y  $y^*$  en la figura 6.2.<sup>8</sup> De igual modo, la línea  $x^* z^*$  representa las combinaciones de  $a_1$  y  $a_2$  disponibles de  $x$  y  $z$ , y la línea  $y^* z^*$  muestra las combinaciones disponibles de la mezcla de  $y$  y  $z$ . Todas las combinaciones posibles de la mezcla de los tres bienes del mercado están representadas por el área triangular sombreada  $x^* y^* z^*$ .

## Soluciones de esquina

Un hecho salta inmediatamente a la vista en la figura 6.2: un individuo optimizador de su utilidad nunca consumiría cantidades positivas de los tres bienes. Sólo el perímetro noreste del triángulo  $x^* y^* z^*$  representa las cantidades máximas de  $a_1$  y  $a_2$  a disposición de este individuo, dados su ingreso y los precios de los bienes del mercado. Individuos con una preferencia por  $a_1$  tendrán curvas de indiferencia similares a  $U_0$  y optimizarán su utilidad eligiendo un punto como  $E$ . La combinación de  $a_1$  y  $a_2$  especificada por ese punto puede obtenerse consumiendo sólo los bienes  $y$  y  $z$ . De la misma manera, una persona con preferencias representadas por la curva de indiferencia  $U_0'$  elegirá el punto  $E'$  y consumirá sólo los bienes  $x$  y  $y$ . Así, el modelo de atributos predice que las soluciones de esquina en las cuales los individuos consumen cero cantidades de algunos bienes

<sup>8</sup> Matemáticamente, supongamos que una fracción  $\alpha$  del presupuesto se gasta en  $x$  y  $(1 - \alpha)$  en  $y$ ; entonces,

$$a_1 = \alpha a_1^x + (1 - \alpha) a_1^y,$$

$$a_2 = \alpha a_2^x + (1 - \alpha) a_2^y.$$

La línea  $x^* y^*$  se traza permitiendo que  $\alpha$  varíe entre 0 y 1. Las líneas  $x^* z^*$  y  $y^* z^*$  se trazan en forma similar, lo mismo que el área triangular  $x^* y^* z^*$ .

relativamente comunes, especialmente en casos en que los individuos adjudican valor a menos atributos (dos aquí) que a los bienes del mercado entre los cuales elegir (tres). Si el ingreso, los precios o las preferencias varían, los patrones de consumo también podrían variar abruptamente. Los bienes previamente consumidos podrían dejar de comprarse y bienes previamente omitidos podrían experimentar un incremento significativo en adquisiciones. Esto es resultado directo de los supuestos lineales inherentes a las funciones de producción que hemos asumido aquí. En los modelos de producción doméstica con supuestos de mayor sustitución, esas reacciones discontinuas son menos probables.

## RESUMEN

En este capítulo se usó el modelo de elección de optimización de la utilidad para estudiar relaciones entre bienes de consumo. Aunque estas relaciones pueden ser complejas, el análisis que presentamos aquí ofrece varias maneras de clasificarlas y simplificarlas.

- Cuando hay sólo dos bienes los efectos de ingreso y de sustitución de la variación en el precio de un bien (digamos  $p_y$ ) sobre la demanda de otro bien ( $x$ ) suelen operar en direcciones opuestas. Así, el signo de  $\partial x/\partial p_y$  es ambiguo: su efecto de sustitución es positivo pero su efecto de ingreso, negativo.
- En casos de más de dos bienes las relaciones de demanda pueden especificarse de dos maneras. Dos bienes  $x_i$  y  $x_j$  son “sustitutos brutos” si  $\partial x_i/\partial p_j > 0$  y “complementarios brutos” si  $\partial x_i/\partial p_j < 0$ . Lamentablemente, y debido a que estos efectos de precio incluyen efectos de ingreso, no tienen que ser simétricos. Es decir,  $\partial x_i/\partial p_j$  no necesariamente es igual a  $\partial x_j/\partial p_i$ .

- Atender únicamente los efectos de sustitución de variaciones de precio elimina esta ambigüedad porque los efectos de sustitución son simétricos; esto es,  $\partial x_i/\partial p_j = \partial x_j/\partial p_i$ . Ahora, dos bienes se definen como sustitutos netos (o de Hicks) si  $\partial x_i/\partial p_j > 0$  y como complementarios netos si  $\partial x_i/\partial p_j < 0$ . La “segunda ley de la demanda” de Hicks demuestra que los sustitutos netos son más frecuentes.
- Si un grupo de bienes tiene precios que siempre se mueven al mismo tiempo, los gastos en esos bienes pueden tratarse como un bien “compuesto” cuyo “precio” está dado por la magnitud de la variación proporcional en los precios de los bienes compuestos.
- Otra forma de desarrollar la teoría de la elección entre bienes de mercado es atender los modos en que estos se usan en la producción doméstica para ofrecer atributos aportadores de utilidad lo cual puede brindar discernimientos adicionales sobre las relaciones entre bienes.

## PROBLEMAS

### 6.1

Heidi recibe utilidad de dos bienes: leche de cabra ( $m$ ) y strudel ( $s$ ), de acuerdo con la función de utilidad

$$U(m, s) = m \cdot s.$$

- Demuestra qué incrementos en el precio de la leche de cabra no afectarán la cantidad de strudel que Heidi compra; es decir, que  $\partial s/\partial p_m = 0$ .
- Demuestra asimismo que  $\partial m/\partial p_s = 0$ .
- Usa la ecuación de Slutsky y la simetría de los efectos de sustitución neta para comprobar que los efectos de ingreso implicados en las derivadas de los incisos a) y b) son idénticos.
- Comprueba el inciso c), usando explícitamente las funciones de demanda de Marshall para  $m$  y  $s$ .

### 6.2

Burt el Correoso compra únicamente *whisky* de garrafa y donas con mermelada para mantenerse. Para él, el *whisky* de garrafa es un bien inferior que exhibe la paradoja de Giffen; aunque ese tipo de *whisky* y las donas con mermelada son sustitutos de Hicks en el sentido tradicional. Desarrolla una explicación intuitiva para sugerir por qué un incremento en el precio del *whisky* de garrafa debe generar que se compren menos donas con mermelada. Es decir, estos bienes deben ser complementarios brutos.

## 6.3

Donaldo, un frugal estudiante de posgrado, sólo consume café ( $c$ ) y pan tostado con mantequilla ( $bt$ ). Compra estos productos en la cafetería de la universidad y siempre usa dos porciones de mantequilla por cada rebanada de pan. Donaldo gasta exactamente la mitad de su magro estipendio en café y la otra mitad en pan tostado con mantequilla.

- En este problema el pan tostado con mantequilla puede tratarse como un bien compuesto. ¿Cuál es su precio en términos de los precios de la mantequilla ( $p_b$ ) y el pan tostado ( $p_t$ )?
- Explica por qué  $\partial c / \partial p_{bt} = 0$ .
- Asimismo, ¿es cierto aquí que  $\partial c / \partial p_b$  y  $\partial c / \partial p_t$  son iguales a 0?

## 6.4

La señorita Sarah Viajera no tiene automóvil y sólo viaja en autobús, tren o avión. Su función de utilidad está dada por

$$\text{utilidad} = b \cdot t \cdot p,$$

donde cada letra significa millas recorridas por modo de transporte específico. Supón que la razón del precio del boleto de tren con el del autobús ( $p_t/p_b$ ) no varía nunca.

- ¿Cómo podría definirse un bien compuesto para el transporte terrestre?
- Formula el problema de optimización de Sarah como un problema de elección entre transporte terrestre ( $g$ ) y aéreo ( $p$ ).
- ¿Cuáles son las funciones de demanda de Sarah para  $g$  y  $p$ ?
- Una vez que Sarah decide cuánto gastar en  $g$ , ¿cómo distribuirá esos gastos entre  $b$  y  $t$ ?

## 6.5

Supón que un individuo consume tres bienes,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , y que  $x_1$  y  $x_2$  son bienes similares (es decir, comidas en restaurante baratas y caras), con  $p_2 = kp_3$ , donde  $k < 1$ ; es decir, los precios de los bienes tienen una relación constante entre sí.

- Demuestra que  $x_2$  y  $x_3$  pueden tratarse como un bien compuesto.
- Supón que  $x_2$  y  $x_3$  están sujetos a un costo de transacción de  $t$  por unidad (para algunos ejemplos, véase el problema 6.6). ¿Cómo afectará este costo de transacción el precio de  $x_2$  en relación con el de  $x_3$ ? ¿Cómo variará este efecto con el valor de  $t$ ?
- ¿Puedes predecir cómo un incremento de ingreso compensado en  $t$  afecta los gastos en el bien compuesto  $x_2$  y  $x_3$ ? ¿El teorema de bienes compuestos se aplica estrictamente a este caso?
- ¿Cómo afectará el incremento de ingreso compensado en  $t$ , la forma de asignar el gasto total en el bien compuesto entre  $x_2$  y  $x_3$ ?

## 6.6

Aplica los resultados del problema 6.5 para explicar las observaciones siguientes:

- Es difícil hallar manzanas de alta calidad por comprar en el estado de Washington o buenas naranjas frescas en Florida.
- Los individuos con gastos significativos en la contratación de niñeras tienen más probabilidades de comer en restaurantes caros (antes que hacerlo en sitios baratos) que aquellas sin ese tipo de gastos.
- Los individuos con alto valor de tiempo son más proclives a viajar en el Concorde que aquellos con un bajo valor de tiempo.
- Es más probable que los individuos obtengan gangas de artículos caros que de artículos baratos. *Nota:* Las observaciones b) y d) componen la base de, quizá, los dos únicos casos de homicidio en los que un economista resuelve el crimen; véase Marshall Jevons, *Murder at the Margin* (Asesinato marginal) y *The Fatal Equilibrium* (El equilibrio fatal).

## 6.7

En general, los efectos cruzados no compensados no son iguales, es decir,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \neq \frac{\partial x_j}{\partial p_i}.$$

Usa la ecuación de Slutsky para demostrar que estos efectos son iguales si una persona gasta una fracción constante de su ingreso en cada bien, sin considerar los precios relativos. (Esta es una generalización del problema 6.1.)

## 6.8

En el ejemplo 6.3 se calcularon las funciones de demanda implicadas por la función de utilidad ESC de tres bienes

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

- Usa la función de demanda de  $x$  en la ecuación 6.32 para determinar si  $x$  y  $y$  o  $x$  y  $z$  son sustitutos brutos o complementarios brutos.
- ¿Cómo determinarías si  $x$  y  $y$  o  $x$  y  $z$  son sustitutos netos o complementarios netos?

## Problemas analíticos

### 6.9 Superávit del consumidor con muchos bienes

En el capítulo 5 se demostró cómo los costos de bienestar de las variaciones en un precio pueden medirse usando funciones de gasto y curvas de demanda compensada. En este problema se te pedirá generalizar estas variaciones de precio en dos (o muchos) bienes.

- Supón que un individuo consume  $n$  bienes y que los precios de dos de ellos (digamos  $p_1$  y  $p_2$ ) se incrementan. ¿Cómo usarías la función de gasto para medir la variación compensatoria (VC) para este individuo como resultado del aumento de precio?
- Una forma de mostrar gráficamente estos costos de bienestar sería usar curvas de demanda compensada para los bienes  $x_1$  y  $x_2$ , suponiendo que un precio aumentó antes que el otro. Ilustra este enfoque.
- En tu respuesta al inciso b), ¿es relevante en qué orden consideras las variaciones de precio? Explica tu respuesta.
- En general, ¿crees que la VC para un aumento de precio de estos dos bienes sea mayor si los bienes son sustitutos netos o complementarios netos?, ¿o la relación entre los bienes no tiene ninguna consecuencia en los costos de bienestar?

### 6.10 Utilidad separable

Una función de utilidad se llama separable si puede escribirse como

$$U(x, y) = U_1(x) + U_2(y),$$

donde  $U'_i > 0$ ,  $U''_i < 0$  y  $U_1$ ,  $U_2$  no son necesariamente la misma función.

- ¿Qué supone la separabilidad sobre la derivada parcial cruzada  $U_{xy}$ ? Aporta un análisis intuitivo de lo que significa esta condición y en qué situaciones podría ser verosímil.
- Demuestra que si la utilidad es separable, ningún bien puede ser inferior.
- ¿El supuesto de separabilidad te permite concluir definitivamente si  $x$  y  $y$  son sustitutos netos o complementarios netos? Explica tu respuesta.
- Usa la función de Cobb-Douglas para demostrar que la separabilidad no es invariante respecto a las transformaciones monótonas. *Nota:* Las funciones separables se examinarán con mayor detalle en las extensiones de este capítulo.

### 6.11 Graficar complementarios

Graficar complementarios es complicado porque una relación de complementariedad entre bienes (conforme a la definición de Hicks) no puede ocurrir con únicamente dos bienes. Más bien, la complementariedad implica necesariamente las relaciones de demanda entre tres (o más) bienes. En su revisión de la complementariedad Samuelson ofrece una manera de ilustrar el concepto con un diagrama de curva de indiferencia bidimensional (véase “Sugerencias de lecturas adicionales”). Para examinar este diagrama supón que hay tres bienes entre los cuales puede escoger un consumidor. Las cantidades de estos se denotan con  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Ahora procede como sigue.

- Traza una curva de indiferencia para  $x_2$  y  $x_3$ , manteniendo constante la cantidad de  $x_1$ , en  $x_1^0$ . Esta curva de indiferencia tendrá la forma convexa acostumbrada.
- Traza ahora una segunda curva de indiferencia (más alta) para  $x_2$ ,  $x_3$  manteniendo  $x_1$  constante en  $x_1^0 - h$ . Para esta nueva curva de indiferencia muestra la cantidad de  $x_2$  extra que compensaría a esta persona por la pérdida de  $x_1$ ; designa a este monto  $j$ . De igual manera, muestra la cantidad de  $x_3$  adicional que compensaría la pérdida de  $x_1$ , y llama a esta cantidad  $k$ .
- Supón ahora que un individuo recibe las cantidades  $j$  y  $k$ , lo que le permite moverse a una curva de indiferencia más alta  $x_2$ ,  $x_3$ . Muestra este movimiento en tu gráfica y traza esta nueva curva de indiferencia.
- Samuelson sugiere ahora las definiciones siguientes:
  - Si la nueva curva de indiferencia corresponde a la curva de indiferencia cuando  $x_1 = x_1^0 - 2h$ , los bienes 2 y 3 son independientes.
  - Si la nueva curva de indiferencia brinda más utilidad que cuando  $x_1 = x_1^0 - 2h$ , los bienes 2 y 3 son complementarios.

- Si la nueva curva de indiferencia brinda menos utilidad que cuando  $x_1 = x_1^0 - 2h$ , los bienes 2 y 3 son sustitutos. Demuestra que estas definiciones gráficas son simétricas.
  - e. Analiza cómo es que estas definiciones gráficas se corresponden con las definiciones más matemáticas de Hicks dadas en el texto.
  - f. Al examinar tu gráfica final, ¿crees que este enfoque explica por completo los tipos de relaciones que podrían existir entre  $x_2$  y  $x_3$ ?

## 6.12 Embarque de las manzanas buenas

Los detalles del análisis sugerido en los problemas 6.5 y 6.6 fueron originalmente resueltos por Borcharding y Silberberg (véase “Sugerencias de lecturas adicionales”) con base en una suposición inicialmente propuesta por Alchian y Allen. Estos autores analizan cómo un cargo de transacción afecta la demanda relativa de dos artículos cercanamente sustituibles. Supón que los bienes  $x_2$  y  $x_3$  son sustitutos cercanos y están sujetos a un cargo de transacción de  $t$  por unidad. Supón, asimismo, que el bien 2 es el más costoso de ambos (es decir, “manzanas buenas” en oposición a “manzanas preparadas”). De ahí que el cargo de transacción disminuya el precio relativo del bien más costoso [esto es,  $(p_2 + t)/(p_3 + t)$  decrece al incrementar  $t$ ]. Esto a su vez incrementará la demanda relativa del bien costoso, si  $\partial(x_2^c/x_3^c)/\partial t > 0$  (donde se usan funciones de demanda compensada para eliminar incómodos efectos de ingreso). Borcharding y Silberberg demuestran que este resultado probablemente sería válido, siguiendo estos pasos.

- Usa la derivada de una regla del cociente para desarrollar  $\partial(x_2^c/x_3^c)/\partial t$ .
- Usa tu resultado del inciso a), junto con el hecho de que en este problema  $\partial x_i^c/\partial t = \partial x_i^c/\partial p_2 + \partial x_i^c/\partial p_3$  para  $i = 2, 3$ , para demostrar que la derivada que buscamos puede escribirse como

$$\frac{\partial(x_2^c/x_3^c)}{\partial t} = \frac{x_2^c}{x_3^c} \left[ \frac{s_{22}}{x_2} + \frac{s_{23}}{x_2} - \frac{s_{32}}{x_3} - \frac{s_{33}}{x_3} \right],$$

donde  $s_{ij} = \partial x_j^c/\partial p_i$ .

- Reescribe el resultado del inciso b) en términos de elasticidades de precio compensadas:

$$e_{ij}^c = \frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^c}.$$

- Usa la tercera ley de Hicks (ecuación 2.26) para demostrar que el término entre corchetes en los incisos b) y c) puede escribirse ahora como  $[(e_{22} - e_{23})(1/p_2 - 1/p_3) + (e_{21} - e_{31})/p_3]$ .
- Desarrolla un argumento intuitivo de por qué es probable que la expresión del inciso d) sea positiva en las condiciones de este problema. *Pistas:* ¿Por qué el primer producto entre corchetes es positivo? ¿Por qué es probable que el segundo término entre corchetes sea reducido?
- Vuelve al problema 6.6 y ofrece explicaciones más completas de estos diversos hallazgos.

## SUGERENCIAS DE LECTURAS ADICIONALES

Borchardin, T. E. y E. Silberberg. “Shipping the Good Apples Out—The Alchian-Allen Theorem Reconsidered”, *Journal of Political Economy* (febrero de 1978), pp. 131-138.

Buen análisis de las relaciones entre tres bienes en la teoría de la demanda. Véanse también los problemas 6.5 y 6.6.

Hicks, J. R. *Value and Capital*, 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, 1946. Véanse los capítulos I-III y apéndices asociados.

Prueba del teorema de los bienes compuestos. Ofrece también uno de los primeros tratamientos de sustitutos y complementarios netos.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

Explora las consecuencias de la simetría de los efectos cruzados compensados para varios aspectos de la teoría de la demanda.

Rosen, S. “Hedonic Prices and Implicit Markets”, *Journal of Political Economy* (enero/febrero de 1974), pp. 34-55.

Adecuado tratamiento gráfico y matemático del enfoque de atributos de la teoría del consumo y del concepto de “mercados” de atributos.

Samuelson, P. A. “Complementarity—An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory”, *Journal of Economic Literature* (diciembre de 1977), pp. 1255-1289.

Revisa varias definiciones de complementariedad y muestra las relaciones entre ellas. Contiene un intuitivo análisis gráfico y un apéndice matemático detallado.

Silberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Buen análisis de funciones de gasto y el uso de funciones de utilidad indirecta para ilustrar el teorema de bienes compuestos y otros resultados.

En el capítulo 6 se vio que la teoría de la optimización de la utilidad impone, en su generalidad, pocas restricciones a lo que podría ocurrir. Aparte del hecho de que los efectos netos de sustitución cruzada son simétricos, prácticamente cualquier tipo de relación entre bienes es congruente con la teoría subyacente. Esta situación plantea problemas para los economistas que desean estudiar el comportamiento de consumo en la realidad; la teoría sencillamente no da mucha orientación cuando hay muchos miles de bienes potencialmente disponibles para su estudio.

Existen dos maneras generales de hacer simplificaciones. La primera se sirve del teorema de los bienes compuestos del capítulo 6 para agregar bienes en categorías en las que los precios relativos se mueven juntos. Para situaciones en que los economistas están específicamente interesados en las variaciones en los precios relativos dentro de una categoría de gasto (como variaciones en los precios relativos de varias formas de energía), sin embargo, este proceso no bastará. Una opción es suponer que los consumidores siguen un proceso de dos etapas en sus decisiones de consumo. Primero distribuyen su ingreso a diversos y amplios grupos de bienes (alimentos y ropa, por ejemplo) y luego, dadas estas restricciones de gasto, optimizan su utilidad en cada una de las subcategorías de bienes, usando sólo información sobre los precios relativos de dichos bienes. De esta forma, las decisiones pueden estudiarse en un marco simplificado, considerando únicamente una categoría por cada vez. Este proceso se llama presupuesto en dos etapas. En estas extensiones se examina primero la teoría general del presupuesto en dos etapas para luego analizar algunos ejemplos empíricos.

### E6.1 Teoría de la presupuestación en dos etapas

La cuestión que surge en el presupuesto en dos etapas puede enunciarse sucintamente: ¿existe una división de bienes en  $m$  grupos no empalmados (denotados por  $r = 1, m$ ) y un presupuesto aparte ( $I_r$ ) dedicado a cada categoría, de tal manera que las funciones de demanda de los bienes en una categoría sólo dependan de los precios de los bienes de esa categoría y de la asignación presupuestal a esa misma categoría? Es decir, ¿los bienes pueden dividirse de tal forma que la demanda esté dada por

$$x_i(p_1, \dots, p_m, I) = x_{i \in r}(p_{i \in r}, I_r) \quad (\text{i})$$

para  $r = 1, m$ ? Que esto se puede hacer es algo que se sugiere al comparar el siguiente problema de optimización en dos etapas,

$$V^*(p_1, \dots, p_n, I_1, \dots, I_m) = \max_{x_1, \dots, x_n} U(x_1, \dots, x_n) \text{ s.t. } \sum_{i \in r} p_i x_i \leq I_r, r = 1, m \quad (\text{ii})$$

y

$$\max_{I_1, \dots, I_m} V^* \text{ s.t. } \sum_{r=1}^m I_r = I,$$

con el problema de optimización de la utilidad que hemos estudiado,

$$\max_{x_i} U(x_1, \dots, x_n) \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I. \quad (\text{iii})$$

Sin restricciones adicionales estos dos procesos de optimización producirán el mismo resultado; esto es, la ecuación ii es sencillamente una manera más complicada de formular la ecuación iii. Así, ciertas restricciones deben imponerse a la función de utilidad para garantizar que las funciones de demanda que resultan de resolver el proceso en dos etapas sean de la forma en que se especifica en la ecuación i. Intuitivamente, parece que tal clasificación de bienes debería funcionar siempre y cuando las variaciones en el precio de un bien en una categoría no afecten la asignación de gasto a bienes en cualquier otra categoría que no sea la propia. En el problema 6.9 se mostró un caso en el que esto es cierto para una función de utilidad “aditivamente separable”. Lamentablemente, este resulta ser un caso especial. Las más generales restricciones matemáticas que deben imponerse a la función de utilidad para justificar el presupuesto en dos etapas se han derivado ya (véase Blackorby, Primont y Russell, 1978), pero no son especialmente intuitivas. Claro que los economistas que desean estudiar las decisiones descentralizadas por consumidores (o, quizá sobre todo, por empresas que operan muchas divisiones) deben hacer algo para simplificar las cosas. Estudiemos ahora algunos ejemplos aplicados.

### E6.2 Relación con el teorema de los bienes compuestos

Por desgracia, ninguno de los dos enfoques teóricos disponibles de la simplificación de la demanda es completamente satisfactorio. El teorema de los bienes compuestos requiere que los precios relativos de los bienes de un grupo se mantengan constantes en el tiempo, supuesto que ha sido rechazado durante muy diferentes periodos históricos.

Por otro lado, el tipo de separabilidad y presupuesto en dos etapas, indicado por la función de utilidad en la ecuación i también requiere supuestos firmes sobre cómo las variaciones en los precios de un bien en un grupo afectan el gasto en bienes de cualquier otro grupo. Estos supuestos parecen ser rechazados por los datos (véase Diewert y Wales, 1995).

Los economistas han tratado de idear métodos híbridos aún más elaborados para la agregación entre bienes. Por ejemplo, Lewbel (1996) muestra cómo el teorema de los bienes compuestos podría generalizarse a casos en que los precios relativos en un grupo exhiben variabilidad considerable. Usa esta generalización para agregar gastos de consumo estadounidenses en seis grandes grupos (alimentos, ropa, operación doméstica, atención médica, transporte y recreación). Usando estos agregados concluye que su procedimiento es mucho más acertado que suponer un presupuesto en dos etapas entre esas categorías de gasto.

### E6.3 Funciones homotéticas y demanda de energía

Un modo de simplificar el estudio de la demanda cuando hay muchos bienes es suponer que la utilidad de ciertas subcategorías de bienes es homotética y puede separarse de la demanda de otros bienes. Este procedimiento fue seguido por Jorgenson, Slesnick y Stoker (1997) en su estudio de la demanda de energía por consu-

midores estadounidenses. Suponiendo que las funciones de demanda de tipos específicos de energía son proporcionales al gasto total en energía, los autores pudieron concentrar su estudio empírico en el tema que más les interesaba: estimar las elasticidades precio de la demanda de varios tipos de energía. Llegan a la conclusión de que la mayoría de los tipos de energía (electricidad, gas natural, gasolina) tienen funciones de demanda muy elásticas. La demanda parece ser muy sensible al precio de la electricidad.

## Referencias

- Blackorby, Charles, Daniel Primont y R. Robert Russell. *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North Holland, Nueva York, 1978.
- Diewert, W. Erwin y Terrence J. Wales. "Flexible Functional Forms and Tests of Homogeneous Separability", *Journal of Econometrics* (junio de 1995), pp. 259-302.
- Jorgenson, Dale W., Daniel T. Slesnick y Thomas M. Stoker. "Two-Stage Budgeting and Consumer Demand for Energy", en Dale W. Jorgenson, ed., *Welfare*, vol. 1: *Aggregate Consumer Behavior*, MIT Press, Cambridge, 1997, pp. 475-510.
- Lewbel, Arthur. "Aggregation without Separability: A Standardized Composite Commodity Theorem", *American Economic Review* (junio de 1996), pp. 524-543.

