CAPÍTULO NUEVE

Funciones de producción

La principal actividad de toda empresa es convertir insumos en bienes . Como los economistas se interesan en las decisiones que la empresa toma para cumplir su objetivo, pero quieren evitar analizar muchas de las minucias de ingeniería contenidas en ello, han optado por elaborar un modelo abstracto de producción. En este modelo la relación entre insumos y productos se formaliza mediante una *función de producción* de la forma

$$q = f(k, l, m, \ldots), \tag{9.1}$$

donde q representa la producción de la empresa de un bien particular durante un periodo,[1] k representa el uso de maquinaria (es decir, de capital) durante ese periodo, l representa horas de insumo de trabajo, m representa las materias primas utilizadas[2] y la notación indica la posibilidad de que otras variables afecten el proceso de producción. Se supone que la ecuación 9.1 da, para cualquier conjunto concebible de insumos, la solución de ingeniería al problema de cuál es la mejor forma de combinar esos insumos para obtener productos.

PRODUCTIVIDAD MARGINAL

En esta sección se examina la variación en la producción, ocasionado por una variación en uno de los insumos productivos. Para los propósitos de este análisis (y en realidad para la mayoría de los propósitos de este libro), será más conveniente usar una función de producción simplificada definida como sigue.

DEFINICIÓN

Función de producción. La *función de producción* de la empresa para un bien particular, q,

$$q = f(k, l), \tag{9.2}$$

muestra la cantidad máxima del bien que puede producirse usando combinaciones alternas de capital (k) y trabajo (l).

Desde luego que la mayor parte de nuestro análisis valdrá para dos insumos cualesquiera del proceso de producción que queramos examinar. Los términos *capital* y *trabajo* se usan sólo por

[1] Aquí se usará una q minúscula para representar la producción de una empresa. Reservaremos la Q mayúscula para representar la producción total en un mercado. Por lo general se supone que una empresa produce sólo un bien o servicio. Asuntos que surgen en empresas de productos múltiples se analizarán en algunas notas y problemas.

[2] En el trabajo empírico los insumos de materias primas suelen desestimarse y la producción, q, se mide en términos de "valor agregado".

conveniencia. De igual forma, sería simple generalizar nuestro análisis a casos que implican más de dos insumos; ocasionalmente, lo haremos. En la mayoría de los casos, sin embargo, será útil limitar el análisis a dos insumos porque podremos mostrar esos insumos en gráficas bidimensionales.

Producto físico marginal

Para estudiar la variación en un insumo definiremos el producto físico marginal como sigue.

DEFINICIÓN

Producto físico marginal. El *producto físico marginal* de un insumo es la producción adicional que es posible generar usando una unidad más de ese insumo, manteniendo constantes todos los demás. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} \text{producto físico marginal de capital} &= PMgk = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k, \\ \text{producto físico marginal de trabajo} &= PMg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Nótese que las definiciones matemáticas del producto marginal usan derivadas parciales, lo cual refleja propiamente el hecho de que el uso de todos los demás insumos se mantiene constante mientras el insumo de interés varía. Por ejemplo, consideremos a un agricultor que contrata a un trabajador más para cosechar el cultivo, pero que mantiene constantes todos los demás insumos. El producto adicional que este trabajador genera es que el producto físico marginal de este peón, medido en cantidades físicas como bushels de trigo, cajas de naranjas o cabezas de lechuga. Podría observarse, por ejemplo, que 50 trabajadores en una granja pueden producir 100 bushels de trigo al año, mientras que 51 trabajadores, con la misma tierra y equipo, pueden producir 102 bushels. El producto físico marginal del trabajador número 51 es entonces de 2 bushels al año.

Productividad marginal decreciente

Cabría esperar que el producto físico marginal de un insumo dependa de cuánto de ese insumo se use. El trabajo, por ejemplo, no puede añadirse indefinidamente a un campo dado (manteniendo fija la cantidad de equipo, fertilizante, etcétera) sin exhibir finalmente un deterioro en su productividad. Matemáticamente el supuesto de productividad física marginal decreciente es un supuesto sobre las derivadas parciales de segundo orden de la función de producción:

$$\begin{aligned} \frac{\partial PMg_k}{\partial k} &= \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0, \\ \frac{\partial PMg_l}{\partial l} &= \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

El supuesto de productividad marginal decreciente fue originalmente propuesto por el economista del siglo XIX, Thomas Malthus, a quien le preocupaba que los rápidos incrementos en la población resultaran en menor productividad laboral. Sus sombrías predicciones para el futuro de la humanidad llevaron a que la economía fuera llamada la "ciencia deprimente". Pero las matemáticas de la función de producción sugieren que ese pesimismo podría ser erróneo. Variaciones en la productividad marginal del trabajo a lo largo del tiempo dependen no sólo de cómo crece el insumo trabajo, sino también las variaciones en otros insumos como el capital. Es decir, también debe interesarnos $\partial PMg_l/\partial k = f_{lk}$. En la mayoría de los casos, $f_{lk} > 0$, así que la productividad laboral decreciente como el *incremento tanto de l como de k* no es una conclusión precedente. En realidad, parece que la productividad del trabajo ha aumentado significativamente desde tiempos de Malthus, principalmente porque los incrementos en los insumos de capital (junto con mejoras técnicas) han neutralizado el impacto de la productividad marginal decreciente.

Productividad física media

En el uso común el término *productividad del trabajo* suele significar *productividad media*. Cuando se dice que cierta industria ha experimentado incrementos de productividad se entiende que su producción por unidad de insumo trabajo se ha incrementado. Aunque el concepto de productividad media no es tan importante en los análisis económicos teóricos como el de productividad marginal, en los análisis empíricos recibe mucha atención. Dado que la productividad media es fácil de medir (digamos, tantos bushels de trigo por insumo de hora-trabajo), a menudo se le usa como medida de eficiencia. Definiremos el producto medio del trabajo (PMe_l) como

$$PMe_l = \frac{\text{producción}}{\text{insumo trabajo}} = \frac{q}{l} = \frac{f(k, l)}{l}. \tag{9.5}$$

Nótese que PMe_l también depende del nivel de capital usado. Esta observación resultará importante al examinar la medición de la variación técnica al final de este capítulo.

EJEMPLO 9.1 Función de producción con dos insumos

Supongamos que la función de producción de matamoscas durante un periodo particular puede representarse con

$$q = f(k, l) = 600k^2l^2 - k^3l^3. \tag{9.6}$$

Para elaborar las funciones productividad marginal y media del trabajo (l) para esta función, debemos suponer un valor particular para el otro insumo, capital (k). Supóngase que $k = 10$. Entonces, la función de producción está dada por

$$q = 60\,000l^2 - 1\,000l^3. \tag{9.7}$$

Producto marginal. La función de productividad marginal $k = 10$ está dada por

$$PMg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 120\,000l - 3\,000l^2, \tag{9.8}$$

que disminuye al incrementar l, volviéndose finalmente negativa. Esto implica que q llega a un valor máximo. Igualar PMg_l con 0,

$$120\,000l - 3\,000l^2 = 0 \tag{9.9}$$

produce

$$40l = l^2 \tag{9.10}$$

o

$$l = 40 \tag{9.11}$$

como el punto en el que q llega a su valor máximo. El insumo trabajo más allá de 40 unidades por periodo en realidad reduce la producción total. Por ejemplo, cuando $l = 40$, la ecuación 9.7 muestra que $q = 32$ millones de matamoscas, mientras que cuando $l = 50$ la producción de matamoscas asciende a sólo 25 millones.

Producto medio. Para determinar la productividad media del trabajo en la producción de matamoscas, se divide q entre l, manteniendo todavía $k = 10$:

$$PMe_l = \frac{q}{l} = 60\,000l - 1\,000l^2. \tag{9.12}$$

Nuevamente, esta es una parábola invertida que alcanza su valor máximo cuando

$$\frac{\partial PMe_l}{\partial l} = 60\,000 - 2\,000l = 0, \tag{9.13}$$

lo que ocurre cuando $l = 30$. En este valor para el insumo trabajo, la ecuación 9.12 indica que $PMe_l = 900\,000$, y la ecuación 9.8 indica que PMe_l es también de 900 000. Cuando PMe_l está en un máximo, las productividades media y marginal del trabajo son iguales.[3]

Adviértase la relación entre producción total y productividad media que se ilustra en este ejemplo. Aunque la producción total de matamoscas es mayor con 40 trabajadores (32 millones), que con 30 trabajadores (27 millones), la producción por trabajador es más alta en el segundo caso. Con 40 trabajadores cada trabajador produce 800 000 matamoscas por periodo, mientras que con 30 trabajadores cada trabajador produce 900 000. Como el insumo de capital (prensas de matamoscas) se mantiene constante en esta definición de productividad, la productividad marginal decreciente del trabajo finalmente resulta en un nivel declinante de producción por trabajador.

PREGUNTA: ¿Cómo afectaría aquí un incremento de k de 10 a 11 a las funciones PMg_l y PMe_l? Explica intuitivamente tus resultados.

GRÁFICAS DE ISOCUANTAS Y TASA DE SUSTITUCIÓN TÉCNICA

Para ilustrar la posible sustitución de un insumo por otro en una función de producción se usa su *gráfica de isocuantas*. Estudiaremos de nueva cuenta una función de producción de la forma $q = f(k, l)$, en el entendido de que "capital" y "trabajo" son simplemente ejemplos convenientes de dos insumos cualesquiera que podrían ser de interés. Una isocuanta (de *iso*, que significa "igual") registra las combinaciones de k y l capaces de generar una cantidad dada de producción. Por ejemplo, todas las combinaciones de k y l en la curva denominada "$q = 10$" en la figura 9.1 son capaces de producir 10 unidades de producción por periodo. Esta isocuanta registra entonces el hecho de que hay muchas formas alternas de generar 10 unidades de producción. Una forma podría estar representada por el punto A: usaríamos l_A y k_A para generar 10 unidades de producción. O bien, podríamos preferir usar relativamente menos capital y más trabajo y elegir, por tanto, un punto como B. De ahí que una isocuanta pueda definirse como sigue.

DEFINICIÓN

Isocuanta. Una *isocuanta* muestra las combinaciones de k y l que pueden generar un nivel dado de producción (digamos q_0. Matemáticamente, una isocuanta registra el conjunto de k y l que satisface

$$f(k, l) = q_0. \tag{9.14}$$

Igual que en el caso de las curvas de indiferencia, existen infinitas isocuantas en el plano k-l. Cada isocuanta representa un nivel diferente de producción. Las isocuantas registran niveles sucesivamente más altos de producción conforme nos movemos en dirección noreste. Presumiblemente,

[3] Este resultado es general. Dado que

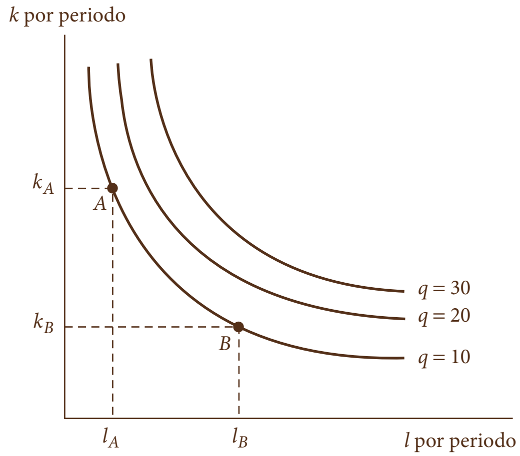
$$\frac{\partial PMe_l}{\partial l} = \frac{l \cdot PMg_l - q}{l^2},$$

en un máximo $l \cdot PMg_l = q$ o $PMg_l = PMe_l$.

FIGURA 9.1

Gráfica de isocuantas.

Las isocuantas registran las combinaciones alternas de insumos que pueden usarse para generar un nivel dado de producción. La pendiente de estas curvas indica la tasa en que l puede ser sustituida por k, manteniendo constante la producción. La negativa de esta pendiente se llama *tasa marginal de sustitución técnica* (*TMST*). En la figura, la *TMST* es positiva y decreciente para insumos de trabajo crecientes.



usar más de cada uno de los insumos permitirá incrementar la producción. Otras dos isocuantas (para $q = 20$ y $q = 30$) se muestran en la figura 9.1. Notarás la semejanza entre una gráfica de isocuantas y el mapa de curvas de indiferencia del individuo analizado en la parte 2. Son, en efecto, conceptos similares porque ambos representan mapas de "líneas de nivel" de una función particular. En el caso de las isocuantas, sin embargo, la denominación de las curvas es mensurable; una producción de 10 unidades por periodo tiene un significado cuantificable. Por tanto a los economistas les interesa más estudiar la forma de las funciones de producción que examinar la forma exacta de las funciones de utilidad.

Tasa marginal de sustitución técnica (*TMST*)

La pendiente de una isocuanta muestra cómo un insumo puede cambiarse por otro, manteniendo constante la producción. Examinar la pendiente proporciona información sobre la posibilidad técnica de sustituir trabajo por capital. He aquí una definición formal.

DEFINICIÓN

Tasa marginal de sustitución técnica. La *tasa marginal de sustitución técnica* (*TMST*) muestra la tasa en la cual trabajo puede ser sustituido por capital, manteniendo constante la producción a lo largo de una isocuanta. En términos matemáticos,

$$TMST\ (l \text{ para } k) = -\left.\frac{dk}{dl}\right|_{q=q_0}. \tag{9.15}$$

En esta definición, la notación pretende ser un recordatorio de que la producción debe mantenerse constante al sustituir l por k. El valor particular de esta tasa dependerá no sólo del nivel de producción, sino también de las cantidades de capital y trabajo en uso. Su valor depende del punto en la gráfica de isocuantas en el cual debe medirse la pendiente.

TMST y productividades marginales

Para examinar la forma de las isocuantas de la función producción es útil comprobar el resultado siguiente: la *TMST* (de l para k) es igual a la razón de la productividad física marginal del trabajo (PMg_l) con la productividad física marginal del capital (PMg_k). Imagina usar la ecuación 9.14 para graficar la isocuanta q_0. Sustituimos una secuencia de valores crecientes de l y vemos cómo k tiene que ajustarse para mantener constante la producción en q_0. La gráfica de la isocuanta es en realidad la gráfica de la función implícita $k(l)$ que satisface

$$q_0 = f(k(l), l). \tag{9.16}$$

Justo como hicimos en la sección sobre funciones contenidas del capítulo 2 (véase en particular la ecuación 2.22), podemos usar la regla de cadena para diferenciar la ecuación 9.16, lo que resulta en

$$0 = f_k \frac{dk}{dl} + f_l = PMg_k \frac{dk}{dl} + PMg_l, \tag{9.17}$$

donde el 0 inicial aparece porque q_0 se mantiene constante; así, la derivada del miembro izquierdo de la ecuación 9.16 respecto a l es igual a 0. Reordenar la ecuación 9.17 da

$$TMST\ (l \text{ para } k) = -\left.\frac{dk}{dl}\right|_{q=q_0} = \frac{PMg_l}{PMg_k}. \tag{9.18}$$

De ahí que la *TMST* esté dada por la razón de las productividades marginales de los insumos.

La ecuación 9.18 indica que las isocuantas que realmente observamos deben ser de pendiente negativa. Dado que tanto PMg_l como PMg_k son no negativas (ninguna empresa elegiría usar un insumo costoso que redujera la producción), la *TMST* también será positiva (o quizá de cero). Puesto que la pendiente de una isocuanta es la negativa de la *TMST* cualquier empresa que observemos no operará en la porción de pendiente positiva de una isocuanta. Aunque es matemáticamente posible idear funciones de producción cuyas isocuantas tengan pendientes positivas en algunos puntos, para una empresa no tendría sentido económico optar por esas alternativas de insumos.

Razones de una *TMST* decreciente

Las isocuantas de la figura 9.1 se trazan no sólo con una pendiente negativa (como debe ser), sino también como curvas convexas. A lo largo de cualesquiera de las curvas, la *TMST* es *decreciente*. Para razones altas de k para l, la *TMST* es un número positivo grande, lo cual indica que es posible renunciar a gran cantidad de capital si una unidad más de trabajo se vuelve disponible. Por otro lado, cuando ya se usa mucho trabajo, la *TMST* es baja, lo que significa que sólo una pequeña cantidad de capital puede intercambiarse por una unidad adicional de trabajo, si ha de mantenerse constante la producción. Este supuesto parecería tener cierta relación con el supuesto de productividad marginal decreciente. Un uso apresurado de la ecuación 9.18 podría llevarnos a concluir que un incremento en l acompañado de un decremento en k resultaría en un decremento en PMg_l, un incremento en PMg_k y, por tanto, un decremento en la *TMST*. El problema de esta "prueba" rápida es que la productividad marginal de un insumo depende del nivel de *ambos* insumos; variaciones en l afectan a PMg_k y viceversa. No es posible derivar una *TMST* decreciente únicamente del supuesto de productividad marginal decreciente.

Para ver por qué matemáticamente esto es así, supongamos que $q = f(k, l)$ y que f_k y f_l son positivas (es decir, las productividades marginales son positivas). Supóngase también que $f_{kk} < 0$ y $f_{ll} < 0$ (que las productividades marginales son decrecientes). Para demostrar que las isocuantas son convexas, desearemos demostrar que $d(TMST)/dl < 0$. Puesto que $TMST = f_l/f_k$, tenemos

$$\frac{dTMST}{dl} = \frac{d(f_l/f_k)}{dl}. \tag{9.19}$$

Debido a que f_l y f_k son funciones tanto de k como de l debe tenerse cuidado al tomar la derivada de esta expresión:

$$\frac{dTMST}{dl} = \frac{f_k(f_{ll} + f_{lk} \cdot dk/dl) - f_l(f_{kl} + f_{kk} \cdot dk/dl)}{(f_k)^2}. \tag{9.20}$$

Usando el hecho de que $dk/dl = -f_l/f_k$ a lo largo de una isocuanta y el teorema de Young ($f_{kl} = f_{lk}$), tenemos

$$\frac{dTMST}{dl} = \frac{f_k^2 f_{ll} - 2f_k f_l f_{kl} + f_l^2 f_{kk}}{(f_k)^3}. \tag{9.21}$$

Debido a que hemos supuesto $f_k > 0$, el denominador de esta función es positivo. De ahí que la fracción entera sea negativa, si el numerador es negativo. Como se supone que tanto f_{ll} como f_{kk} son negativas, el numerador definitivamente será negativo si f_{kl} es positiva. Si podemos suponer esto, hemos demostrado que $dTMST/dl < 0$ (que las isocuantas son convexas).[4]

Importancia de los efectos de productividad cruzada

Intuitivamente parece razonable que la derivada parcial cruzada $f_{kl} = f_{lk}$ deba ser positiva. Si los trabajadores tuvieran más capital tendrían productividades marginales más altas. Aunque este es probablemente el caso más frecuente, no necesariamente tiene que serlo. Algunas funciones de producción tienen $f_{kl} < 0$, al menos para una gama de valores de insumos. Cuando suponemos una *TMST* decreciente (como lo haremos a lo largo de la mayor parte de nuestro análisis), establecemos un supuesto más firme que el de productividades marginales simplemente decrecientes para cada insumo; específicamente, suponemos que las productividades marginales disminuyen "lo bastante rápido" para compensar cualquier posible efecto negativo de productividad cruzada. Desde luego que, como veremos más adelante, con tres o más insumos las cosas se complican un poco más.

EJEMPLO 9.2 *TMST* decreciente

En el ejemplo 9.1 la función producción de matamoscas fue dada por

$$q = f(k, l) = 600k^2l^2 - k^3l^3. \tag{9.22}$$

Las funciones generales de productividad marginal para esta función de producción son

$$\begin{aligned} PMg_l &= f_l = \frac{\partial q}{\partial l} = 1\,200k^2l - 3k^3l^2, \\ PMg_k &= f_k = \frac{\partial q}{\partial k} = 1\,200kl^2 - 3k^2l^3. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Nótese que cada una de estas depende de los valores de ambos insumos. Simple factorización indica que estas productividades marginales serán positivas para valores de k y l para los cuales $kl < 400$.

Dado que

$$f_{ll} = 1\,200k^2 - 6k^3l$$

y

$$f_{kk} = 1\,200l^2 - 6kl^3, \tag{9.24}$$

está claro que esta función exhibe productividades marginales decrecientes para valores suficientemente grandes de k y l. En efecto, factorizando de nuevo cada expresión es fácil demostrar que $f_{ll}, f_{kk} < 0$ si

[4] Como se señaló en el capítulo 2, las funciones para las cuales el numerador en la ecuación 9.21 es negativo se llaman *funciones* (estrictamente) *cuasi cóncavas*.

$kl > 200$. Sin embargo, aun dentro del rango $200 < kl < 400$ donde las relaciones de productividad marginal para esta función se comportan "normalmente", esta función de producción podría no tener necesariamente una *TMST* decreciente. La diferenciación cruzada de cualesquiera de las funciones de productividad marginal (ecuación 9.23) produce

$$f_{kl} = f_{lk} = 2\,400kl - 9k^2l^2, \qquad \textbf{(9.25)}$$

la cual es positiva sólo para $kl < 266$.

Por tanto el numerador de la ecuación 9.21 definitivamente será negativo para $200 < kl < 266$, pero para fábricas de matamoscas de mayor escala el caso no es tan claro porque f_{kl} es negativa. Cuando f_{kl} es negativa, los incrementos en el insumo de trabajo reducen la productividad marginal del capital. De ahí que sea incorrecto el argumento intuitivo de que el supuesto de productividades marginales decrecientes produce una predicción inequívoca acerca de lo que pasará con la *TMST* $(= f_l/f_k)$ al incrementarse l y decrecer k. Todo depende de los efectos relativos en las productividades marginales de las productividades marginales decrecientes (que tienden a reducir f_l e incrementar f_k) y los efectos contrarios de las productividades marginales cruzadas (que tienden a incrementar f_l y a reducir f_k). Aun así, para este caso de los matamoscas, es cierto que la *TMST* es decreciente a todo lo largo de la gama de k y l donde las productividades marginales son positivas. Para casos en los que $266 < kl < 400$, las productividades marginales decrecientes exhibidas por la función son suficientes para superar la influencia de un valor negativo de f_{kl} en la convexidad de las isocuantas.

PREGUNTAS: Para casos en los que $k = l$, ¿qué puede decirse de las productividades marginales de esta función de producción? ¿Cómo simplificaría esto el numerador de la ecuación 9.21? ¿Cómo te permite esto evaluar más fácilmente esta expresión para algunos valores más grandes de k y l?

RENDIMIENTOS A ESCALA

Ahora procederemos a caracterizar las funciones de producción. Una primera pregunta que podría hacerse sobre estas es cómo responde la producción a incrementos en todos los insumos juntos. Por ejemplo, supongamos que todos los insumos se duplican: ¿la producción se duplicaría o la relación no sería tan simple? Esta es una pregunta de los *rendimientos a escala* exhibidos por la función de producción que han interesado a los economistas desde que Adam Smith estudió intensivamente la producción de alfileres. Smith identificó dos fuerzas que entraban en operación cuando el experimento conceptual de duplicar todos los insumos se llevaba a cabo. Primero, una duplicación de la escala permite una mayor división del trabajo y especialización de funciones. De ahí que haya cierta presunción de que la eficiencia puede aumentar; la producción podría más que duplicarse. Segundo, la duplicación de los insumos también supone cierta pérdida de eficiencia porque la supervisión gerencial puede dificultarse, dada la mayor escala de la empresa. Cuál de estas dos tendencias tendrá mayor efecto, es una importante pregunta empírica.

Estos conceptos pueden definirse técnicamente como sigue:

DEFINICIÓN

Rendimientos a escala. Si la función de producción está dada por $q = f(k, l)$y si todos los insumos se multiplican por la misma constante positiva t (donde $t > 1$), los *rendimientos a escala* de la función de producción se clasifican como

Efecto en la producción	Rendimientos a escala
$f(tk, tl) = tf(k, l) = tq$	Constantes
$f(tk, tl) < tf(k, l) = tq$	Decrecientes
$f(tk, tl) > tf(k, l) = tq$	Crecientes

En términos intuitivos, si un incremento proporcional en insumos aumenta la producción en la misma proporción la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Si la producción se incrementa menos que proporcionalmente, la función exhibe rendimientos decrecientes a escala. Y si la producción se incrementa más que proporcionalmente, hay rendimientos crecientes a escala. Como veremos, es teóricamente posible que una función exhiba rendimientos constantes a escala, en algunos niveles de uso de insumos y rendimientos crecientes o decrecientes en otros niveles.[5] A menudo, sin embargo, los economistas se refieren a los rendimientos a escala de una función de producción con el entendido implícito de que sólo se toman en cuenta un muy estrecho rango de variación en uso de insumos y el nivel asociado de producción.

Rendimientos constantes a escala

Existen razones económicas por las cuales la función de producción de una empresa puede exhibir rendimientos constantes a escala. Si la empresa opera muchas plantas idénticas, podría aumentar o disminuir su producción simplemente variando el número de ellas en operación corriente. Es decir, la empresa puede duplicar la producción duplicando el número de plantas que opera, y para eso requerirá emplear precisamente el doble de insumos. Estudios empíricos de funciones de producción suelen determinar que los rendimientos a escala son más o menos constantes para las empresas estudiadas (al menos alrededor de producciones cercanas a los niveles de operación establecidos de las empresas; estas pueden exhibir rendimientos crecientes a escala mientras crecen a su tamaño establecido). Por todas estas razones, el caso de rendimientos constantes a escala es digno de ser examinado con mayor detalle.

Cuando una función de producción exhibe rendimientos constantes a escala, satisface la definición de "homogeneidad" que se presenta en el capítulo 2. Es decir, la producción es homogénea de grado 1 en sus insumos porque

$$f(tk, tl) = t^1 f(k, l) = tq. \tag{9.26}$$

En el capítulo 2 se demostró que, si una función es homogénea de grado k, sus derivadas son homogéneas de grado $k - l$. En este contexto lo anterior implica que las funciones de productividad marginal derivadas de una función de producción de rendimientos constantes a escala son homogéneas de grado 0. Es decir,

$$\begin{aligned} PMg_k &= \frac{\partial f(k,\, l)}{\partial k} = \frac{\partial f(tk,\, tl)}{\partial k}, \\ PMg_l &= \frac{\partial f(k,\, l)}{\partial l} = \frac{\partial f(tk,\, tl)}{\partial l} \end{aligned} \tag{9.27}$$

para cualquier $t > 0$. En particular, puede concederse que $t = 1/l$ en las ecuaciones 9.27 y obtener

$$\begin{aligned} PMg_k &= \frac{\partial f(k/l,\, 1)}{\partial k}, \\ PMg_l &= \frac{\partial f(k/l,\, 1)}{\partial l}. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Esto es, la productividad marginal de cualquier insumo sólo depende de la razón de capital con el insumo de trabajo, no de los niveles absolutos de estos insumos. Este hecho es especialmente importante, por ejemplo, para explicar las diferencias en productividad entre industrias o países.

[5] Una medida local de los rendimientos a escala es provista por la elasticidad de escala, definida como

$$e_{q,t} = \frac{\partial f(tk,\, tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(tk,\, tl)},$$

donde esta expresión se debe evaluar en $t = 1$. En principio este parámetro puede adoptar diferentes valores, dependiendo del nivel de uso de los insumos. Para algunos ejemplos con el uso de este concepto, véase el problema 9.9.

Funciones de producción homotéticas

Una consecuencia de las ecuaciones 9.28 es que la $TMST$ ($=PMg_l/PMg_k$) de cualquier función de producción con rendimientos constantes a escala sólo dependerá de la razón de los insumos, no de sus niveles absolutos. Es decir, dicha función será homotética (véase el capítulo 2); sus isocuantas serán expansiones radiales unas de otras. Esta situación se muestra en la figura 9.2. A lo largo de cualquier radio a través del origen (donde la razón k/l no cambia), las pendientes de isocuantas sucesivamente más altas son idénticas. Esta propiedad de la gráfica de isocuantas nos será útil en diversas ocasiones.

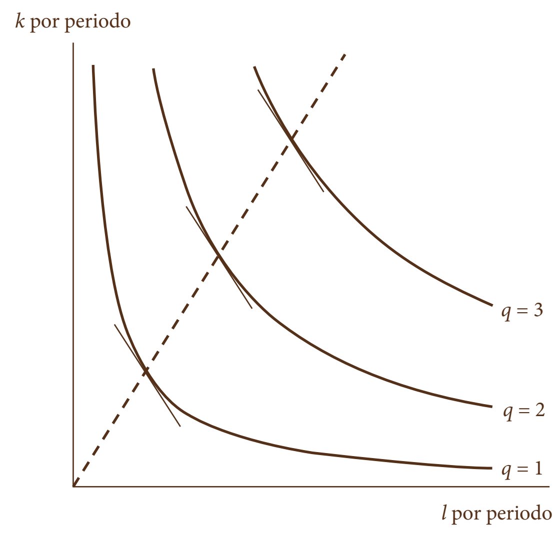
Un simple ejemplo numérico puede brindar cierta intuición sobre este resultado. Supongamos que un gran pedido de pan (consistente en, digamos, 200 hogazas) puede surtirse en un día con tres panaderos trabajando en tres hornos, o con dos panaderos trabajando en cuatro hornos. Por tanto la $TMST$ de los hornos por panaderos es de uno a uno: un horno adicional puede sustituir a un panadero. Si este proceso de producción exhibe rendimientos constantes a escala, dos pedidos grandes de pan (por un total de 400 hogazas) puede surtirse en un día, ya sea con seis panaderos trabajando en seis hornos, o con cuatro panaderos y ocho hornos. En este último caso, dos hornos sustituyen a dos panaderos, así que nuevamente la $TMST$ es de uno a uno. En casos de rendimientos constantes a escala, elevar el nivel de producción no altera las disyuntivas entre insumos; así, las funciones de producción son homotéticas.

Una función de producción puede tener un mapa de curvas de indiferencia homotéticas aun si no exhibe rendimientos constantes a escala. Como se mostró en el capítulo 2 esta propiedad de homotecia es retenida por cualquier transformación monótona de una función homogénea. De ahí que los rendimientos crecientes o decrecientes a escala puedan incorporarse en una función de rendimientos constantes a escala mediante una transformación apropiada. Quizá la más

FIGURA 9.2

Gráfica de isocuantas de una función de producción de rendimientos constantes a escala.

Dado que una función de producción de rendimientos constantes a escala es homotética, la $TMST$ sólo depende de la razón de k con l, no de la escala de producción. En consecuencia, a lo largo de cualquier radio a través del origen (un radio de k/l constante), la $TMST$ será la misma en todas las isocuantas. Un rasgo adicional es que las etiquetas de las isocuantas se incrementan proporcionalmente con los insumos.



común de estas transformaciones sea la exponencial. Por tanto si $f(k, l)$ es una función de producción con rendimientos constantes a escala, puede concederse que

$$F(k, l) = [f(k, l)]^{\gamma}, \tag{9.29}$$

donde γ es cualquier exponente positivo. Si $\gamma > 1$, entonces

$$F(tk, tl) = [f(tk, tl)]^{\gamma} = [tf(k, l)]^{\gamma} = t^{\gamma}[f(k, l)]^{\gamma} = t^{\gamma}F(k, l) > tF(k, l) \tag{9.30}$$

para cualquier $t > 1$. De ahí que esta función de producción transformada exhiba rendimientos crecientes a escala. El exponente γ recoge el *grado* de los rendimientos crecientes a escala. Una duplicación de insumos llevaría a un incremento de cuatro veces en la producción si $\gamma = 2$, pero a un incremento de ocho veces si $\gamma = 3$. Una prueba idéntica demuestra que la función F exhibe rendimientos decrecientes a escala para $\gamma < 1$. Como esta función sigue siendo homotética en todas esas transformaciones, hemos demostrado que hay casos importantes en los que la cuestión de los rendimientos a escala puede separarse de cuestiones contenidas con la forma de una isocuanta. En estos casos, las variaciones en los rendimientos a escala sólo cambiarán las etiquetas de las isocuantas, no su forma. En la sección siguiente se examinará cómo pueden describirse las formas de las isocuantas.

El caso de *n* insumos

La definición de los rendimientos a escala puede generalizarse fácilmente a una función de producción con n insumos. Si esa función de producción está dada por

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{9.31}$$

y si todos los insumos se multiplican por $t > 1$, tenemos

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t^k q \tag{9.32}$$

para alguna constante k. Si $k = 1$, la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Rendimientos decrecientes y crecientes a escala corresponden a los casos $k < 1$ y $k > 1$, respectivamente.

La parte crucial de esta definición matemática es el requerimiento de que todos los insumos aumenten en la misma proporción, t. En muchos procesos de producción de la realidad, esta disposición podría tener poco sentido económico. Por ejemplo, una empresa podría tener sólo un "jefe", y ese número no necesariamente se duplicaría aun si todos los demás insumos lo hicieran. O bien, la producción de una granja podría depender de la fertilidad de la tierra. Podría no ser literalmente posible duplicar los acres sembrados y mantener al mismo tiempo la fertilidad, porque la nueva tierra podría no ser tan buena como la que ya está cultivada. De ahí que algunos insumos tengan que fijarse (o al menos ser imperfectamente variables) para casi todos los efectos prácticos. En esos casos parece probable algún grado de productividad decreciente (resultado del empleo creciente de insumos variables), aunque esto no puede llamarse propiamente "rendimientos decrecientes a escala", debido a la presencia de insumos que se mantienen fijos.

ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN

Otra característica importante de la función de producción es qué tan "fácil" es sustituir un insumo por otro. Esta es una pregunta sobre la forma de una isocuanta, más que sobre la gráfica completa de isocuantas. A lo largo de una isocuanta la tasa marginal de sustitución técnica decrecerá al decrecer la razón capital-trabajo (es decir, al decrecer k/l): ahora deseamos definir algún parámetro que mida este grado de sensibilidad. Si la *TMST* no varía en absoluto para variaciones en k/l, podría decirse que la sustitución es fácil porque la razón de las productividades marginales de los dos insumos no varía al cambiar la mezcla de insumos. O bien, si la *TMST* varía rápidamente respecto a pequeñas varaciones en k/l, diríamos que la sustitución es difícil porque las variaciones pequeñas en la mezcla de insumos tendrán un efecto sustancial en las productividades relativas de los insumos. Una medida sin escala de esta sensibilidad es provista por la *elasticidad de sustitución*, concepto que encontramos informalmente en nuestro análisis de las funciones de utilidad *ESC*. Aquí trabajaremos en el suministro de una definición más formal.

Para variaciones discretas la elasticidad de sustitución está dada por

$$\sigma = \frac{\text{porcentaje de } \Delta(k/l)}{\text{porcentaje de } \Delta TMST} = \frac{\Delta(k/l)}{k/l} \div \frac{\Delta TMST}{TMST} = \frac{\Delta(k/l)}{\Delta TMST} \cdot \frac{TMST}{(k/l)}. \quad \textbf{(9.33)}$$

Más a menudo nos interesará considerar pequeñas variaciones; Por tanto una modificación de la ecuación 9.33 será de más interés:

$$\sigma = \frac{d(k/l)}{d\,TMST} \cdot \frac{TMST}{k/l} = \frac{d\ln(k/l)}{d\ln TMST}. \quad \textbf{(9.34)}$$

La expresión logarítmica se desprende de derivaciones matemáticas a lo largo de las líneas del ejemplo 2.2 del capítulo 2. Todas estas ecuaciones pueden reunirse en la definición formal siguiente.

DEFINICIÓN

Elasticidad de sustitución. Para la función de producción $q = f(k, l)$, la *elasticidad de sustitución* (σ) mide la variación proporcional en k/l en relación con la variación proporcional en la *TMST* a lo largo de una isocuanta. Es decir.

$$\sigma = \frac{\text{porcentaje de } \Delta(k/l)}{\text{porcentaje de } \Delta TMST} = \frac{d(k/l)}{d\,TMST} \cdot \frac{TMST}{k/l} = \frac{d\ln(k/l)}{d\ln TMST} = \frac{d\ln(k/l)}{d\ln(f_l/f_k)}. \quad \textbf{(9.35)}$$

Puesto que a lo largo de una isocuanta k/l y *TMST* se mueven en la misma dirección, el valor de σ siempre es positivo. Gráficamente, este concepto se ilustra en la figura 9.3 como un movimiento del punto *A* al punto *B* en una isocuanta. En este movimiento, tanto la *TMST* como la razón k/l cambiarán; nos interesa la magnitud relativa de estas variaciones. Si σ es alta, la *TMST* no variará mucho en relación con k/l y la isocuanta estará cerca de ser lineal. Por otro lado, un bajo valor de σ implica una isocuanta más bien marcadamente curva; la *TMST* variará en una cantidad sustancial al cambiar k/l. En general, es posible que la elasticidad de sustitución varíe conforme uno se mueve a lo largo de una isocuanta, y conforme a la variación en la escala de producción. Sin embargo, con frecuencia es conveniente suponer que σ es constante a lo largo de una isocuanta. Si la función de producción también es homotética, entonces —dado que todas las isocuantas son meramente extensiones radiales— σ será la misma a lo largo de todas las isocuantas. Encontraremos tales funciones más adelante, y en muchos de los problemas al final de este capítulo.[6]

El caso de *n* insumos

Generalizar la elasticidad de sustitución al caso de muchos insumos puede plantear varias complicaciones. Un método es adoptar una definición análoga a la ecuación 9.35; es decir, definir la

[6] La elasticidad de sustitución puede formularse directamente en términos de la función de producción y sus derivadas en el caso de los rendimientos constantes a escala, como

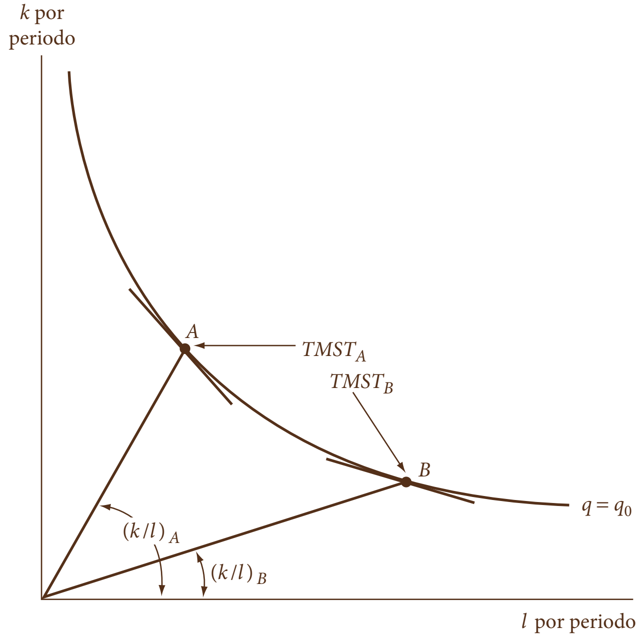
$$\sigma = \frac{f_k \cdot f_l}{f \cdot f_{k,l}}$$

Pero esta forma es complicada. De ahí que por lo general la definición logarítmica de la ecuación 9.35 sea la más fácil de aplicar. Para un breve resumen, véase P. Berck y K. Sydsaeter, *Economist's Mathematical Manual* (Springer-Verlag, Berlín, 1999), cap. 5.

FIGURA 9.3

Descripción gráfica de la elasticidad de sustitución.

Al pasar del punto A al punto B en la isocuanta $q = q_0$, tanto la razón capital-trabajo (k/l) como la *TMST* cambiarán. La elasticidad de sustitución (σ) se define como la razón de estas variaciones proporcionales; es una medida de cuán curvada es la isocuanta.



elasticidad de sustitución entre dos insumos como la variación proporcional en la razón de ambos insumos con la variación proporcional en la *TMST* entre ellos, manteniendo constante la producción.[7] Para completar esta definición es necesario requerir que todos los insumos que no sean los dos bajo examen se mantengan constantes. Sin embargo, este último requisito (que no es relevante cuando hay sólo dos insumos) restringe el valor de esta definición potencial. En procesos de producción de la realidad es probable que cualquier variación en la razón de dos insumos también sea acompañado por variaciones en los niveles de otros insumos. Algunos de estos otros insumos podrían ser complementarios con aquellos que varían, mientras que otros podrían ser sustitutos, y mantenerlos constantes crea una restricción más bien artificial. Por esta razón una definición alterna de la elasticidad de sustitución que permita tal complementariedad y sustitución en la función de costo de la empresa se usa generalmente en el caso de n bienes. Dado que este concepto suele medirse usando funciones de costo, lo describiremos en el capítulo siguiente.

[7] Esto es, la elasticidad de sustitución entre el insumo i y el insumo j podría definirse como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln(x_i/x_j)}{\partial \ln(f_j/f_i)}$$

para movimientos a lo largo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_0$. Nótese que el uso de derivadas parciales en esta definición requiere, en efecto, que todos los insumos que no sean i ni j se mantengan constantes cuando se consideran movimientos a lo largo de la isocuanta q_0.

CUATRO FUNCIONES DE PRODUCCIÓN SIMPLES

En esta sección se ilustrarán cuatro funciones de producción simples, cada una de las cuales está caracterizada por una elasticidad de sustitución diferente. Estas se muestran sólo para el caso de dos insumos, pero la generalización a muchos insumos es fácil de hacer (véanse las extensiones de este capítulo).

Caso 1: ($\sigma = \infty$) lineal

Supongamos que la función de producción está dada por

$$q = f(k, l) = \alpha k + \beta l. \tag{9.36}$$

Es fácil demostrar que esta función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Para cualquier $t > 1$,

$$f(tk, tl) = \alpha tk + \beta tl = t(\alpha k + \beta l) = tf(k, l). \tag{9.37}$$

Todas las isocuantas de esta función de producción son líneas rectas paralelas con pendiente $-\beta/\alpha$. En la figura 9.4a se muestra una gráfica de isocuantas de este tipo. Puesto que la *TMST* es constante a lo largo de cualquier isocuanta en línea recta, el denominador en la definición de σ (ecuación 9.35) es igual a 0, y de ahí que σ sea infinita. Aunque esta función de producción lineal es un ejemplo útil es raro encontrarla en la práctica porque pocos procesos de producción se caracterizan por tal facilidad de sustitución. En realidad, en este caso, capital y trabajo pueden concebirse como sustitutos perfectos entre sí. Una industria caracterizada por tal función de producción podría usar *sólo* capital o *sólo* trabajo, dependiendo de los precios de estos insumos. Es difícil imaginar un proceso de producción así; toda máquina precisa de alguien que apriete sus botones, y todo trabajador requiere algo de equipo de capital, por modesto que sea.

Caso 2: ($\sigma = 0$) de proporciones fijas

Las funciones de producción caracterizadas por $\sigma = 0$ tienen isocuantas en forma de L como las que aparecen en la figura 9.4b. En la esquina de una isocuanta en forma de L, un incremento despreciable en k/l causa un incremento infinito en *TMST*, porque ahí la isocuanta varía repentinamente de horizontal a vertical. Sustituir 0 por la variación en *TMST* en el numerador de la fórmula para σ en la ecuación 9.33 y el infinito por la variación en *TMST* en el denominador contenido que $\sigma = 0$. Una empresa operaría siempre en la esquina de una isocuanta. Operar en cualquier otra parte es ineficiente porque la misma producción podría generarse con menos insumos desplazándose a lo largo de la isocuanta hacia la esquina.

Como se advierte en la figura 9.4, todas las esquinas de las isocuantas se ubican a lo largo del mismo radio desde el origen. Esto ilustra el importante caso especial de una *función de producción de proporciones fijas*. Como la empresa opera siempre en la esquina de alguna isocuanta, y como todas las isocuantas están formadas a lo largo del mismo radio, debe ser el caso de que la empresa use insumos en las proporciones fijas dadas por la pendiente de ese rayo independientemente de cuánto produzca.[8] Los insumos son complementos perfectos en el sentido de que, a partir de la proporción fija, un incremento en un insumo es inútil a menos que el otro se incremente también.

La forma matemática de la función de producción de proporciones fijas está dada por

$$q = \min(\alpha k, \beta l), \alpha, \beta > 0, \tag{9.38}$$

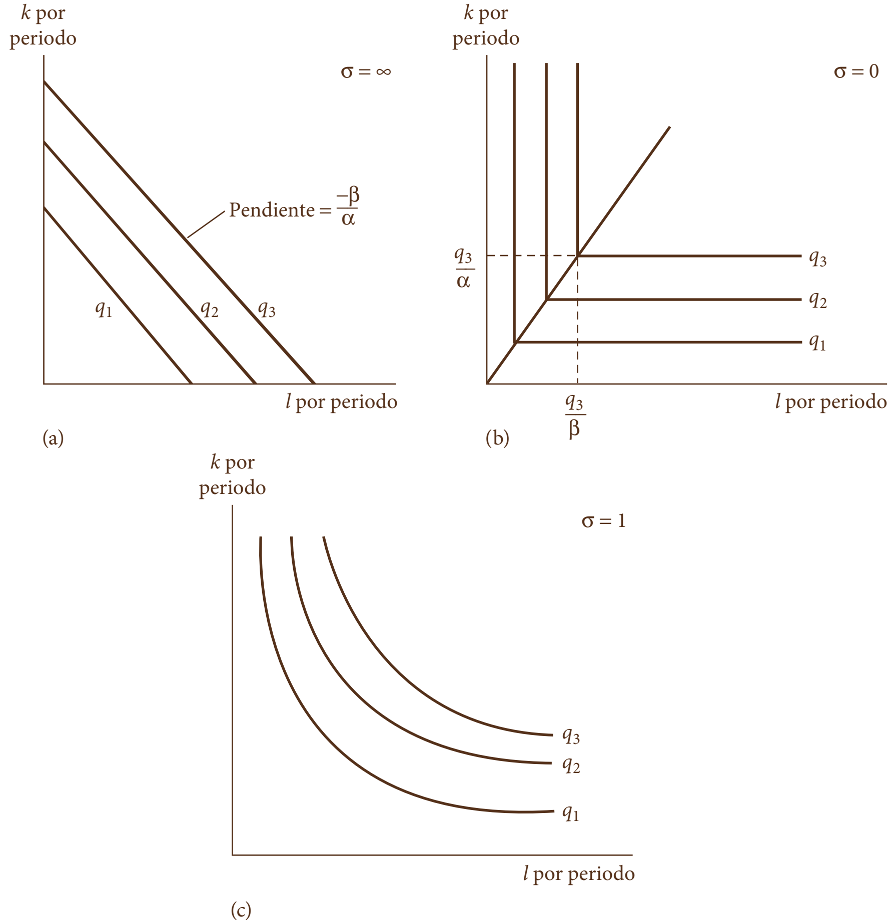
donde el operador "min" significa que q está dada por el menor de los dos valores entre paréntesis. Por ejemplo, supongamos que $\alpha k < \beta l$; entonces $q = \alpha k$ y podemos decir que el capital es la res-

[8] Funciones de producción con $\sigma = 0$ no necesitan ser de proporciones fijas. La otra posibilidad es que las esquinas de las isocuantas se ubiquen a lo largo de una curva no lineal desde el origen, más que alinearse a lo largo de un radio.

FIGURA 9.4

Gráficas de isocuantas de funciones de producción simples con varios valores de σ.

En estas figuras se ilustran tres posibles valores de la elasticidad de sustitución. En a) capital y trabajo son sustitutos perfectos. En este caso, la *TMST* no cambiará al variar la razón capital-trabajo. En b), el caso de proporciones fijas, no es posible ninguna sustitución. La razón capital-trabajo está fija en β/α. Un caso de sustitución limitada se ilustra en c).



tricción vinculante en este proceso de producción. El empleo de más trabajo no incrementará la producción, y de ahí que el producto marginal del trabajo sea de cero; trabajo adicional es superfluo en este caso. De igual forma, si $\alpha k > \beta l$, entonces el trabajo es la restricción vinculante de la producción, y el capital adicional es superfluo. Cuando $\alpha k = \beta l$, ambos insumos son completamente utilizados. Cuando esto sucede, $k/l = \beta/\alpha$, y la producción tiene lugar en un vértice en la gráfica de isocuantas. Si ambos insumos son costosos, este es el único lugar de minimización de costos en el cual operar. El locus de todos esos vértices es una línea recta a través del origen con pendiente dada por β/α.[9]

[9] Con la forma reflejada por la ecuación 9.38 la función de producción de proporciones fijas exhibe rendimientos constantes a escala porque

$$f(tk, tl) = \min(\alpha tk, \beta tl) = t \cdot \min(\alpha k, \beta l) = tf(k, l)$$

para cualquier $t > 1$. Como antes, rendimientos crecientes o decrecientes pueden ser fáciles de incorporar en las funciones, usando una transformación no lineal de esta forma funcional, como $[f(k, l)]^{\gamma}$, donde γ puede ser mayor o menor que 1.

La función de producción de proporciones fijas tiene una amplia gama de aplicaciones. Muchas máquinas, por ejemplo, requieren que cierto número de individuos las operen, pero todo trabajo excedente es superfluo. Consideremos la combinación de capital (una podadora de pasto) y trabajo para podar un jardín. Siempre se necesitará un individuo que opere la podadora, y cualquiera de estos insumos sin el otro no podrá producir nada en absoluto. Puede ser que muchas máquinas sean de este tipo y requieran un complemento fijo de trabajadores por máquina.[10]

Caso 3: ($\sigma = 1$) Cobb-Douglas

La función de producción para la cual ($\sigma = 1$), llamada *función de producción Cobb-Douglas*,[11] ofrece un punto medio entre los dos casos polares previamente analizados. Las isocuantas para el caso de la función Cobb-Douglas tienen la forma convexa "normal" y se muestran en la figura 9.4c. La forma matemática de la función de producción Cobb-Douglas está dada por

$$q = f(k, l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}, \tag{9.39}$$

donde α y β son todas constantes positivas.

La función Cobb-Douglas puede exhibir cualquier grado de rendimientos a escala, dependiendo de los valores de α y β. Supóngase que todos los insumos aumentaran en un factor de t. Por tanto

$$\begin{aligned} f(tk, tl) &= A(tk)^{\alpha}(tl)^{\beta} = At^{\alpha+\beta}k^{\alpha}l^{\beta} \\ &= t^{\alpha+\beta}(k, l). \end{aligned} \tag{9.40}$$

De ahí que si $\alpha + \beta = 1$, la función Cobb-Douglas exhibe rendimientos constantes a escala porque la producción también se incrementa por un factor de t. Si $\alpha + \beta > 1$, la función exhibe rendimientos crecientes a escala, mientras que $\alpha + \beta < 1$ corresponde al caso de los rendimientos decrecientes a escala. Todo se reduce a mostrar que la elasticidad de sustitución es de 1 para la función Cobb-Douglas.[12] Este hecho ha llevado a los investigadores a usar la versión de rendimientos constantes a escala de esta función para una descripción general de relaciones de producción agregada en muchos países.

La función Cobb-Douglas también ha demostrado ser útil en muchas aplicaciones, porque es lineal en logaritmos:

$$\ln q = \ln A + \alpha \ln k + \beta \ln l. \tag{9.41}$$

La constante α es entonces la elasticidad de producción respecto al insumo de capital, y β es la elasticidad de producción respecto al insumo de trabajo.[13] A veces estas constantes pueden esti-

[10] El ejemplo de la podadora de pasto señala otra posibilidad, sin embargo. Presumiblemente, hay cierto margen al elegir qué tamaño de podadora comprar. De ahí que antes de la compra real, la razón capital-trabajo en el corte de pasto pueda considerarse variable: cualquier dispositivo puede elegirse, desde un par de tijeras hasta una podadora enorme. Una vez adquirida la podadora, sin embargo, la razón capital-trabajo se vuelve fija.

[11] Así llamada en honor de C. W. Cobb y P. H. Douglas. Véase P. H. Douglas, *The Theory of Wages* (Macmillan Co., Nueva York, 1934), pp. 132-135.

[12] Para la función Cobb-Douglas,

$$TMST = \frac{f_l}{f_k} = \frac{\beta Ak^{\alpha}l^{\beta-1}}{\alpha Ak^{\alpha-1}l^{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{k}{l}$$

o

$$\ln TMST = \ln(\beta/\alpha) + \ln(k/l).$$

De ahí que

$$\sigma = \frac{\partial \ln k/l}{\partial \ln TMST} = 1.$$

[13] Véase el problema 9.5.

marse a partir de datos reales, y tales estimaciones pueden usarse para medir rendimientos a escala (examinando la suma $\alpha + \beta$) y para otros propósitos.

Caso 4: Función de producción ESC

Una forma funcional que incorpora los tres casos anteriores y permite que σ adopte también otros valores es la función de producción de elasticidad de sustitución constante (ESC), originalmente presentada por Arrow *et al.*, en 1961.[14] Esta función está dada por

$$q = f(k, l) = [k^{\rho} + l^{\rho}]^{\gamma/\rho} \tag{9.42}$$

para $\rho \leq 1$, $\rho \neq 0$ y $\gamma > 0$. Esta función se parece mucho a la función de utilidad ESC que se analizó en el capítulo 3, aunque ahora hemos añadido el exponente γ/ρ para permitir la introducción explícita de factores de rendimientos a escala. Para $\gamma > 1$ la función exhibe rendimientos crecientes a escala, mientras que para $\gamma < 1$ exhibe rendimientos decrecientes.

La aplicación directa de la definición de σ a esta función[15] da el importante resultado de que

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}. \tag{9.43}$$

De ahí que las proporciones lineales fijas y los casos de la función Cobb-Douglas correspondan a $\rho = 1$, $\rho = -\infty$ y $\rho = -0$, respectivamente. La prueba de este resultado para los casos de proporciones fijas y de la función Cobb-Douglas requiere un argumento límite.

A menudo la función ESC se usa con una ponderación distributiva, $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$, para indicar la significación relativa de los insumos:

$$q = f(k, l) = [\alpha k^{\rho} + (1-\alpha) l^{\rho}]^{\gamma/\rho}. \tag{9.44}$$

Con rendimientos constantes a escala y $\rho = 0$, esta función converge a la forma de la función Cobb-Douglas

$$q = f(k, l) = k^{\alpha} l^{1-\alpha}. \tag{9.45}$$

EJEMPLO 9.3 Función de producción de Leontief generalizada

Supóngase que la función de producción de un bien está dada por

$$q = f(k, l) = k + l + 2\sqrt{k \cdot l}. \tag{9.46}$$

[14] K. J. Arrow, H. B, Chenery, B. S. Minhas y R. M. Solow, "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics* (agosto de 1961), pp. 225-250.

[15] Para la función ESC tenemos

$$TMST = \frac{f_l}{f_k} = \frac{(\gamma/\rho) \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho l^{\rho-1}}{(\gamma/\rho) \cdot q^{(\gamma-\rho)/\gamma} \cdot \rho k^{\rho-1}} = \left(\frac{l}{k}\right)^{\rho-1} = \left(\frac{k}{l}\right)^{1-\rho}.$$

Aplicar la definición de la elasticidad de sustitución produce entonces

$$\sigma = \frac{\partial \ln (k/l)}{\partial \ln TMST} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Adviértase en este cálculo que el factor ρ cancela las funciones de productividad marginal, garantizando por tanto que estas productividades marginales sean positivas aun si ρ es negativa (como lo es en muchos casos). Esto explica por qué ρ aparece en dos lugares diferentes en la definición de la función ESC.

Esta función es un caso especial de una clase de funciones llamada así en honor del economista ruso-estadounidense Wassily Leontief.[16] La función exhibe claramente rendimientos constantes a escala porque

$$f(tk, tl) = tk + tl + 2t\sqrt{kl} = tf(k, l). \tag{9.47}$$

Las productividades marginales de la función de Leontief son

$$\begin{aligned} f_k &= 1 + (k/l)^{-0.5}, \\ f_l &= 1 + (k/l)^{0.5}. \end{aligned} \tag{9.48}$$

De ahí que las productividades marginales sean positivas y decrecientes. Como era de esperar (ya que su función exhibe rendimientos constantes a escala), la *TMST* aquí sólo depende de la razón de los dos insumos

$$TMST = \frac{f_l}{f_k} = \frac{1 + (k/l)^{0.5}}{1 + (k/l)^{-0.5}}. \tag{9.49}$$

La *TMST* disminuye al reducirse k/l, así que las isocuantas tienen la forma convexa usual.

Hay dos maneras en las que puedes calcular la elasticidad de sustitución para esta función de producción. Primero, puedes advertir que en este caso especial la función puede factorizarse como

$$q = k + l + 2\sqrt{kl} = (\sqrt{k} + \quad l)^2 = (k^{0.5} + l^{0.5})^2, \tag{9.50}$$

lo que deja en claro que esta función tiene una forma ESC con $\rho = 0.5$ y $\gamma = 1$. De ahí que la elasticidad de sustitución aquí sea $\sigma = 1/(1 - \rho) = 2$.

Desde luego que en la mayoría de los casos no es posible hacer una factorización tan simple. Un enfoque más exhaustivo es aplicar la definición de la elasticidad de sustitución dada en la nota 6 de este capítulo:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{f_k f_l}{f \cdot f_{kl}} = \frac{[1 + (k/l)^{0.5}][1 + (k/l)^{-0.5}]}{q \cdot (0.5/\sqrt{kl})} \\ &= \frac{2 + (k/l)^{0.5} + (k/l)^{-0.5}}{1 + 0.5(k/l)^{0.5} + 0.5(k/l)^{-0.5}} = 2. \end{aligned} \tag{9.51}$$

Obsérvese que en este cálculo la razón de insumos (k/l) se elimina, dejando un resultado simple. En otras aplicaciones, uno podría dudar de que ocurra un resultado tan fortuito, y de ahí que se dude de que la elasticidad de sustitución sea constante a lo largo de una isocuanta (véase problema 9.7). Pero aquí el resultado de que $\sigma = 2$ es intuitivamente razonable, porque ese valor representa un arreglo entre la elasticidad de sustitución de la parte lineal de esta función de producción ($q = k + l$, $\sigma = \infty$) y su parte de la función Cobb-Douglas ($q = 2k^{0.5}l^{0.5}$, $\sigma = 1$).

PREGUNTAS: ¿Qué puedes saber de esta función de producción graficando la isocuanta $q = 4$? ¿Por qué esta función generaliza el caso de proporciones fijas?

PROGRESO TÉCNICO

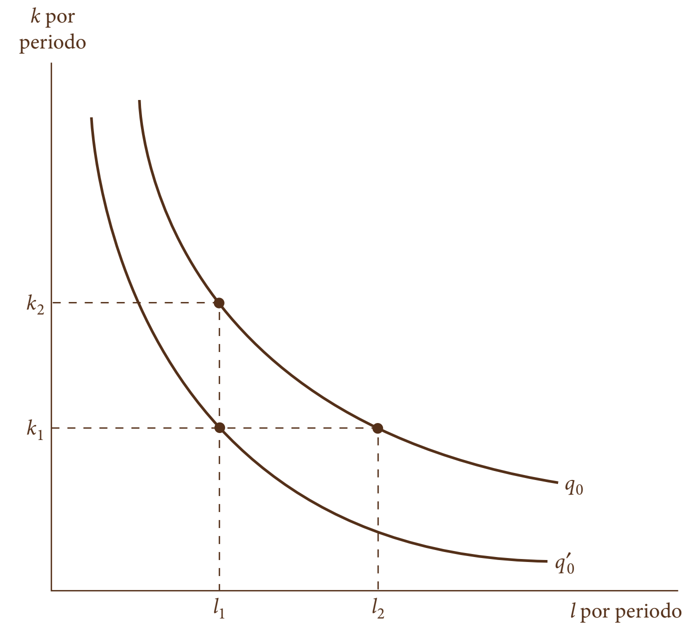
Los métodos de producción mejoran al paso del tiempo, y es importante poder recoger estas mejoras con el concepto de función de producción. Una visión simplificada de ese progreso se ofrece en la figura 9.5. Inicialmente, la isocuanta q_0 registra las combinaciones de capital y trabajo que pueden usarse para generar un nivel de producción de q_0. Como resultado del desarrollo de técnicas de producción superiores, esta isocuanta se desplaza a q_0'. Ahora el mismo nivel de pro-

[16] Leontief fue pionero en el desarrollo del análisis de insumos-productos. En este se supone que la producción tiene lugar con una tecnología de proporciones fijas. La función de producción de Leontief generaliza el caso de las proporciones fijas. Para más detalles véase el análisis de las funciones de producción de Leontief en las extensiones de este capítulo.

FIGURA 9.5

Progreso técnico.

El progreso técnico desplaza la isocuanta q_0 hacia el origen. La nueva isocuanta q_0, q_0', indica que un nivel dado de producción puede generarse ahora con menos insumos. Por ejemplo, con k_1 unidades de capital ahora sólo se necesitan l_1 unidades de trabajo para generar q_0, mientras que antes del avance técnico se necesitaban l_2 unidades de trabajo.



ducción puede generarse con menos insumos. Una forma de medir esta mejora es fijarse en que con un nivel de insumo de capital de, digamos, k_1, antes se necesitaban l_2 unidades de trabajo para producir q_0, mientras que ahora sólo se necesita l_1. La producción por trabajador ha aumentado de q_0'/l_2 a q_0'/l_1. Pero debe tenerse cuidado en este tipo de cálculo. Un incremento en el insumo de capital a k_2 también habría permitido una reducción en el insumo de trabajo a l_1 a lo largo de la isocuanta original q_0. En este caso, la producción por trabajador se incrementará igualmente, aunque no haya habido ningún progreso técnico verdadero. El uso del concepto de la función de producción puede ayudar a diferenciar entre estos dos conceptos y permitir, por tanto, a los economistas obtener una estimación atinada de la tasa de variación técnica.

Medición del progreso técnico

La primera observación por hacer acerca del progreso técnico es que, históricamente, la tasa de crecimiento de la producción en el tiempo ha excedido la tasa de crecimiento atribuible al crecimiento en insumos convencionalmente definidos. Supongamos que concedemos que

$$q = A(t)f(k, l) \tag{9.52}$$

es la función de producción de un bien (o quizá de la producción de una sociedad en su conjunto). El término $A(t)$ en la función representa todas las influencias que intervienen en la determinación de una q diferente de k (horas-maquinaria) y l (horas-trabajo). Variaciones en A a lo largo del tiempo representan progreso técnico. Por esta razón, A se muestra como una función de tiempo. Presumiblemente, $dA/dt > 0$; niveles particulares de insumos de trabajo y capital se vuelven más productivos con el paso del tiempo.

Contabilidad del crecimiento

Diferenciar la ecuación 9.52 respecto al tiempo da

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{dA}{dt}\cdot f(k,l) + A\cdot\frac{df(k,l)}{dt}\\ &= \frac{dA}{dt}\cdot\frac{q}{A} + \frac{q}{f(k,l)}\left[\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{dk}{dt} + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{dl}{dt}\right].\end{aligned} \tag{9.53}$$

Dividir entre q da

$$\frac{dq/dt}{q} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f/\partial k}{f(k,l)}\cdot\frac{dk}{dt} + \frac{\partial f/\partial l}{f(k,l)}\cdot\frac{dl}{dt} \tag{9.54}$$

o

$$\frac{dq/dt}{q} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}\cdot\frac{dk/dt}{k} + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}\cdot\frac{dl/dt}{l}. \tag{9.55}$$

Ahora, para cualquier variable x, $(dx/dt)/x$ es la tasa proporcional de crecimiento de x por unidad de tiempo. Denotaremos esto con G_x.[17] De ahí que la ecuación 9.55 pueda escribirse en términos de tasas de crecimiento como

$$G_q = G_A + \frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)}\cdot G_k + \frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)}\cdot G_l. \tag{9.56}$$

Pero

$$\frac{\partial f}{\partial k}\cdot\frac{k}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial k}\cdot\frac{k}{q} = \text{elasticidad de producción respecto al capital} = e_{q,k} \tag{9.57}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial l}\cdot\frac{l}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial l}\cdot\frac{l}{q} = \text{elasticidad de producción respecto al trabajo} = e_{q,l}. \tag{9.58}$$

Así, nuestra ecuación de crecimiento se convierte por fin en

$$G_q = G_A + e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l. \tag{9.59}$$

Esto indica que la tasa de crecimiento de la producción puede desintegrarse en la suma de dos componentes: crecimiento atribuido a variaciones en los insumos (k y l) y otro crecimiento "residual" (es decir, variaciones en A) que representa progreso técnico.

La ecuación 9.59 brinda una manera de estimar la importancia relativa del progreso técnico (G_A) en la determinación del crecimiento de la producción. Por ejemplo, en un estudio pionero de la economía estadounidense en general, entre 1909 y 1949, R. M. Solow registró los valores siguientes para los términos de esa ecuación:[18]

$$\begin{aligned} G_q &= 2.75 \text{ por ciento anual},\\ G_l &= 1.00 \text{ por ciento anual},\\ G_k &= 1.75 \text{ por ciento anual},\\ e_{q,l} &= 0.65,\\ e_{q,k} &= 0.35.\end{aligned} \tag{9.60}$$

[17] Dos rasgos útiles de esta definición son: 1) $G_{x\cdot y} = G_x + G_y$; es decir, la tasa de crecimiento de un producto de dos variables es la suma de las tasas de crecimiento de cada uno; y 2) $G_{x/y} = G_x - G_y$.

[18] R. M. Solow, "Technical Progress and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, núm. 39 (agosto de 1959), pp. 312-320.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} G_A &= G_q - e_{q,l}G_l - e_{q,k}G_k \\ &= 2.75 - 0.65(1.00) - 0.35(1.75) \\ &= 2.75 - 0.65 - 0.60 \\ &= 1.50. \end{aligned} \tag{9.61}$$

La conclusión a la que llegó Solow fue que la tecnología avanzó a una tasa de 1.5 por ciento al año, de 1909 a 1949. Más de la mitad del crecimiento en producción real podría atribuirse a la variación técnica más que al crecimiento en las cantidades físicas de los factores de producción. Evidencias más recientes han tendido a confirmar las conclusiones de Solow sobre la importancia relativa de la variación técnica. Sin embargo, impera la incertidumbre respecto a las causas precisas de esa variación.

EJEMPLO 9.4 Progreso técnico en la función de producción Cobb-Douglas

La función de producción Cobb-Douglas brinda una vía especialmente fácil para ilustrar el progreso técnico. Suponiendo rendimientos constantes a escala, dicha función de producción con progreso técnico podría representarse mediante

$$q = A(t)f(k, l) = A(t)k^{\alpha}l^{1-\alpha}. \tag{9.62}$$

Si se supone asimismo que el progreso técnico ocurre a una exponencial constante (θ), puede escribirse $A(t) = Ae^{\theta t}$, y la función de producción se convierte en

$$q = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha}. \tag{9.63}$$

Una forma particularmente fácil de estudiar las propiedades de este tipo de función en el tiempo es usar "diferenciación logarítmica":

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln q}{\partial t} &= \frac{\partial \ln q}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q/\partial t}{q} = G_q = \frac{\partial[\ln A + \theta t + \alpha \ln k + (1-\alpha)\ln l]}{\partial t} \\ &= \theta + \alpha\cdot\frac{\partial \ln k}{\partial t} + (1-\alpha)\cdot\frac{\partial \ln l}{\partial t} = \theta + \alpha G_k + (1-\alpha)G_l. \end{aligned} \tag{9.64}$$

Por tanto, esta derivación simplemente repite la ecuación 9.59 para el caso de la función Cobb-Douglas. Aquí el factor del variación técnica se modela explícitamente, y las elasticidades de producción están dadas por los valores de los exponentes en la función Cobb-Douglas.

La importancia del progreso técnico puede ilustrarse numéricamente con esta función. Supongamos que $A = 10$, $\theta = 0.03$, $\alpha = 0.5$ y que una empresa usa una mezcla de insumos de $k = l = 4$. Entonces, en $t = 0$, la producción es $40(= 10 \cdot 4^{0.5} \cdot 4^{0.5})$. Después de 20 años ($t = 20$), la función de producción se convierte en

$$q = 10e^{0.03.20}k^{0.5}l^{0.5} = 10\cdot(1.82)k^{0.5}l^{0.5} = 18.2k^{0.5}l^{0.5}. \tag{9.65}$$

En el año 20, la mezcla de insumos original produce ahora $q = 72.8$. Desde luego que también habría podido producirse $q = 72.8$ en el año 0, pero esto habría absorbido muchos más insumos. Por ejemplo, con $k = 13.25$ y $l = 4$ la producción es, en efecto, de 72.8, pero se usó mucho más capital. La producción por unidad de insumo de trabajo se incrementaría de 10 ($q/l = 40/4$) a 18.2 ($= 72.8/4$) en cualquier circunstancia, pero sólo el primer caso habría sido verdadero progreso técnico.

Progreso técnico de aumento de insumos. Resulta tentador atribuir el incremento en la productividad media del trabajo en este ejemplo a, digamos, mejores habilidades de los trabajadores, pero eso sería engañoso en el caso de la función Cobb-Douglas. Uno podría igualmente haber dicho que la producción por unidad de capital se incrementó de 10 a 18.2 en los 20 años y atribuir este incremento a mejor maquinaria. Un enfoque verosímil de modelización de mejoras en trabajo y capital por separado es suponer que la función de producción es

$$q = A(e^{\varphi t}k)^{\alpha}(e^{\varepsilon t}l)^{1-\alpha}, \tag{9.66}$$

donde φ representa la tasa anual de mejora en el insumo de capital y ε representa la tasa anual de mejora en el insumo de trabajo. Pero debido a la naturaleza exponencial de la función Cobb-Douglas, esto sería indistinguible de nuestro ejemplo original:

$$q = Ae^{[\alpha\varphi+(1-\alpha)\varepsilon]t}k^{\alpha}l^{1-\alpha} = Ae^{\theta t}k^{\alpha}l^{1-\alpha}, \tag{9.67}$$

donde $\theta = \alpha\varphi + (1-\alpha)\varepsilon$. De ahí que sea necesario estudiar el progreso técnico en los insumos particulares, ya sea para adoptar un modo más complejo de medir los insumos que permita mejorar la calidad o (lo que equivale a lo mismo) para usar una función de producción con insumos múltiples.

PREGUNTA: Estudios reales de producción con el uso de la función Cobb-Douglas tienden a hallar $\alpha \approx 0.3$. Usa este hallazgo junto con la ecuación 9.67 para analizar la importancia relativa de mejorar el capital y la calidad del trabajo para la tasa general de progreso técnico.

Resumen

En este capítulo se ilustraron las formas en que los economistas conceptualizan el proceso de producción de convertir insumos en productos. La herramienta fundamental es la función de producción, la que —en su forma más simple— supone que la producción por periodo (q) es una función simple de los insumos de capital y trabajo durante ese periodo, $q = f(k, l)$. Usando este punto de partida se desarrollaron varios resultados básicos para la teoría de la producción.

- Si todos menos uno de los insumos se mantienen constantes puede derivarse una relación entre el insumo de una variable y la producción. De esta relación es posible derivar la productividad física marginal (PM) del insumo como la variación en producción resultante del incremento de una unidad en el uso del insumo. Se supone que la productividad física marginal de un insumo decrece al aumentar el uso del insumo.
- La función de producción entera puede ilustrarse mediante su gráfica de isocuantas. La pendiente negativa de una isocuanta se denomina *tasa marginal de sustitución técnica* (*TMST*) porque indica cómo un insumo puede ser sustituido por otro manteniendo constante la producción. La *TMST* es la razón de las productividades físicas marginales de los dos insumos.
- Suele suponerse que las isocuantas son convexas, que obedecen el supuesto de una *TMST* decreciente. Este supuesto no puede derivarse exclusivamente del supuesto de productividades físicas marginales decrecientes. Uno también debe interesarse en el efecto de variaciones en un insumo sobre la productividad marginal de otros insumos.
- Los rendimientos a escala exhibidos por una función de producción registran cómo responde la producción a incrementos proporcionales en todos los insumos. Si la producción aumenta proporcionalmente con el uso de insumos, hay rendimientos constantes a escala. Si hay incrementos más que proporcionales en la producción, hay retornos crecientes a escala, mientras que si hay incrementos menos que proporcionales en producción, hay rendimientos decrecientes a escala.
- La elasticidad de sustitución (σ) aporta una medida de qué tan fácil es sustituir un insumo por otro en la producción. Una σ alta implica isocuantas casi lineales, mientras que una σ baja implica que las isocuantas son casi en forma de L.
- El progreso técnico desplaza la función de producción entera y su gráfica de isocuantas asociada. Mejoras técnicas pueden surgir del uso de insumos mejorados y más productivos o de mejores métodos de organización económica.

Problemas

9.1

Power Goat Lawn Company usa dos tamaños de podadoras para cortar el pasto. Las podadoras pequeñas tienen una plataforma de 56 centímetros. Las grandes combinan dos plataformas de 56 centímetros en una sola podadora. Para cada tamaño de podadora Power Goat tiene una función de producción diferente, de acuerdo con la tabla siguiente.

	Producción por hora (kilometros cuadrados)	Insumo de capital (# de podadoras de 56 cm)	Insumo de trabajo
Podadoras chicas	1.53	1	1
Podadoras grandes	2.44	2	1

a. Grafica la isocuanta $q = 12.19$ kilómetros cuadrados para la primera función de producción. ¿Cuántas k y l se usarían si estos factores se combinaran sin desperdicio?
b. Responde el inciso a) para la segunda función.
c. ¿Cuántas k y l se usarían sin desperdicio si la mitad del pasto de 12.19 kilómetros cuadrados se podara con el método de la primera función de producción y la otra mitad con el método de la segunda? ¿Cuántas k y l se usarían si un cuarto del pasto se podara con el primer método y tres cuartos, con el segundo? ¿Qué significa hablar de fracciones de k y l?
d. Con base en tus observaciones en el inciso c), traza una isocuanta $q = 12.19$ kilómetros para las funciones de producción combinadas.

9.2

Supón que la función de producción de artefactos está dada por

$$q = kl - 0.8k^2 - 0.2l^2,$$

donde q representa la cantidad anual de artefactos producida, k representa el insumo de capital anual y l representa el insumo de trabajo anual.

a. Supón que $k = 10$; grafica la productividad total y media de las curvas de trabajo. ¿En qué nivel del insumo de trabajo esta productividad media alcanza un máximo? ¿Cuántos artefactos se producen en ese punto?
b. Suponiendo de nuevo que $k = 10$ grafica la curva PMg_l. ¿En qué nivel del insumo de trabajo $PMg_l = 0$?
c. Supón que los insumos de capital aumentaron a $k = 20$. ¿Cómo cambiarían tus respuestas de los incisos a) y b)?
d. ¿La función de producción de artefactos exhibe rendimientos a escala constantes crecientes o decrecientes?

9.3

Sam Malone considera la posibilidad de renovar los bancos de la barra de Cheers. La función de producción para nuevos bancos de barra está dada por

$$q = 0.1k^{0.2}l^{0.8},$$

donde q es el número de bancos producidos durante la semana de renovación, l representa el número de horas empleadas en tornos para bancos durante la semana y l representa el número de horas utilizadas por los trabajadores durante el periodo. A Sam le gustaría proveer 10 bancos nuevos y ha asignado un presupuesto de \$10 000 al proyecto.

a. Sam razona que como los tornos para los bancos y los trabajadores calificados en bancos de barra cuestan lo mismo (\$50 por hora), bien podría contratar estos dos insumos en cantidades iguales. Si Sam procede de esta manera, ¿cuánto de cada insumo contratará y cuánto costará el proyecto de renovación?
b. Norman (que sabe algo acerca de bancos de barra) argumenta que, una vez más, Sam ha olvidado su microeconomía. Afirma que debería elegir cantidades de insumos, de tal manera que sus productividades marginales (no medias) sean iguales. Si Sam opta, en variar, por este plan ¿cuánto de cada insumo contratará y cuánto costará el proyecto de renovación?
c. Tras oír que el plan de Norman ahorrará dinero, Claudio sostiene que Sam debería invertir los ahorros en más bancos para que se sentaran más de sus colegas del Servicio Postal de Estados Unidos (USPS, por sus siglas en inglés). ¿Cuántos bancos más puede obtener Sam de su presupuesto si sigue el plan de Claudio?
d. A Carla le preocupa que la sugerencia de Claudio signifique sencillamente más trabajo para ella en el servicio de alimentos a los clientes del bar. ¿Cómo podría convencer a Sam de apegarse a su plan original de 10 bancos?

9.4

Supón que la producción de crayones (q) se realiza en dos sitios y usa sólo trabajo como insumo. La función de producción en el sitio 1 está dada por $q_1 = 10l_1^{0.5}$ y en el sitio 2 por $q_2 = 50l_2^{0.5}$.

a. Si una sola empresa produce crayones en ambos sitios, obviamente querrá obtener la producción más grande posible dado el insumo de trabajo que usa. ¿Cómo debería asignar trabajo entre los sitios para poder hacer eso? Explica precisamente la relación entre l_1 y l_2.
b. Suponiendo que la empresa opera de la manera eficiente que se describe en el inciso a), ¿cómo depende la producción total (q) de la cantidad total de trabajo contratado (l)?

9.5

Como se ha visto ya en muchas partes, la función de producción general Cobb-Douglas para dos insumos está dada por

$$q = f(k, l) = Ak^{\alpha}l^{\beta},$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Para esta función de producción:

a. Demuestra que $f_k > 0, f_1 > 0, f_{kk} < 0, f_{ll} < 0$ y $f_{kl} = f_{lk} > 0$.
b. Demuestra que $e_{q,\,k} = \alpha$ y $e_{q,\,l} = \beta$.
c. En la nota 5, se definió la elasticidad de escala como

$$e_{q,\,t} = \frac{\partial f(tk,\, tl)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(tk,\, tl)},$$

donde la expresión debe evaluarse en $t = 1$. Demuestra que, para esta función Cobb-Douglas, $e_{q,\,t} = \alpha + \beta$. De ahí que, en este caso, coincidan la elasticidad de escala y los rendimientos a escala de la función de producción (para más sobre este concepto, véase el problema 9.9).
d. Demuestra que esta función es cuasi cóncava.
e. Demuestra que la función es cóncava para $\alpha + \beta \leq 1$ pero no cóncava para $\alpha + \beta > 1$.

9.6

Supón que recibimos la función de producción ESC con rendimientos constantes a escala

$$q = [k^{\rho} + l^{\rho}]^{1/\rho}.$$

a. Demuestra que $PMg_k = (q/k)^{1-\rho}$ y $PMg_l = (q/l\,)^{1-\rho}$.
b. Demuestra que $TMST = (k/l)^{1-\rho}$; usa esto para demostrar que $\sigma = 1(1 - \rho)$.
c. Determina las elasticidades de producción para k y l, y demuestra que su suma es igual a 1.
d. Comprueba que

$$\frac{q}{l} = \left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^{\sigma}$$

y de ahí que

$$\ln\left(\frac{q}{l}\right) = \sigma \ \ln\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right).$$

Nota: Esta última igualdad es útil en el trabajo empírico porque podemos aproximar $\partial q/\partial l$ mediante la tasa salarial competitivamente determinada. De ahí que σ pueda estimarse a partir de una regresión de $\ln(q/l)$ sobre $\ln w$.

9.7

Considera una generalización de la función de producción del ejemplo 9.3:

$$q = \beta_0 + \beta_1\sqrt{kl} + \beta_2 k + \beta_3 l,$$

donde

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 0, \ldots, 3.$$

a. Si esta función debe exhibir rendimientos constantes a escala, ¿qué restricciones deberían imponerse a los parámetros $\beta_0, \ldots, \beta_3$?
b. Demuestra que, en el caso de los rendimientos constantes a escala esta función exhibe productividades marginales decrecientes y que las funciones de productividad marginal son homogéneas de grado 0.
c. Calcula σ en este caso. Aunque σ no es constante en general, ¿para qué valores de las β, $\sigma = 0, 1, \text{o } \infty$?

9.8

Demuestra que el teorema de Euler implica que, para una función de producción con rendimientos constantes a escala $[q = f(k, l)]$,

$$q = f_k \cdot k + f_l \cdot l.$$

Usa este resultado para demostrar que, para tal función de producción, si $PMg_l + PMe_l$, entonces PMg_k debe ser negativa. ¿Qué implica esto respecto a dónde debe tener lugar la producción? ¿Puede una empresa producir siempre en un punto en el que PMe_l es creciente?

Problemas analíticos

9.9 Rendimientos locales a escala

Una medida local de los rendimientos a escala incorporados en una función de producción está dada por la elasticidad de escala $e_{q,\,t} = \partial f(tk, tl)/\partial t \cdot t/q$ evaluada en $t = 1$.

a. Demuestra que si la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala, entonces $e_{q,\,t} = 1$.
b. Podemos definir las elasticidades de producción de los insumos k y l como

$$e_{q,\,k} = \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} \cdot \frac{k}{q},$$
$$e_{q,\,l} = \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} \cdot \frac{l}{q}.$$

   Demuestra que $e_{q,\,t} = e_{q,\,k} + e_{q,\,l}$.
c. Una función que exhibe elasticidad de escala variable es

$$q = (1 + k^{-1}l^{-1})^{-1}.$$

   Demuestra que, para esta función, $e_{q,\,t} > 1$ para $q < 0.5$ y que $e_{q,\,t} < 1$ para $q > 0.5$.
d. Explica intuitivamente tus resultados del inciso c). *Pista*: ¿Tiene q un límite superior para esta función de producción?

9.10 Rendimientos a escala y sustitución

Aunque gran parte de nuestro análisis de la medición de la elasticidad de sustitución para varias funciones de producción ha supuesto rendimientos constantes a escala, a menudo ese supuesto no es necesario. Este problema ilustra algunos de estos casos.

a. En la nota 6 se señaló que, en el caso de rendimientos constantes a escala, la elasticidad de sustitución para una función de producción con dos insumos está dada por

$$\sigma = \frac{f_k f_l}{f \cdot f_{kl}}.$$

   Supón ahora que definimos la función de producción homotética F como

$$F(k, l) = [f(k, l)]^{\gamma},$$

   donde $f(k, l)$ es una función de producción con rendimientos constantes a escala y γ un exponente positivo. Demuestra que la elasticidad de sustitución para esta función de producción es la misma que la elasticidad de sustitución para la función f.
b. Muestra cómo se puede aplicar este resultado a las funciones de producción tanto de la función Cobb-Douglas como ESC.

9.11 Más sobre el teorema de Euler

Supongamos que una función de producción $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es homogénea de grado k. El teorema de Euler demuestra que $\sum_i x_i f_i = kf$, y este hecho puede usarse para demostrar que las derivadas parciales de f son homogéneas de grado $k - 1$.

a. Comprueba que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_{ij} = k(k - 1)f$.
b. En el caso de $n = 2$ y $k = 1$, ¿qué tipo de restricciones impone el resultado del inciso a) a la derivada parcial de segundo orden f_{12}? ¿Cómo cambian tus conclusiones cuando $k > 1$ o $k < 1$?
c. ¿Cómo se generalizarían los resultados del inciso b) a una función de producción con cualquier número de insumos?
d. ¿Cuáles son las implicaciones de este problema para los parámetros de la función de producción mutivariable de la función Cobb-Douglas $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ para $\alpha_i \geq 0$?

Sugerencias de lecturas adicionales

Clark, J. M. “Diminishing Returns”, *Ecyclopaedia of the Social Sciences*, vol. 5, Crowell-Collier y Macmillan, Nueva York, 1931, pp. 144-146.

Lúcido análisis del desarrollo histórico del concepto de rendimientos decrecientes.

Douglas, P. H. “Are There Laws of Production?”, *American Economic Review*, núm. 38 (marzo de 1948), pp. 1-41.

Buen análisis metodológico de los usos y abusos de las funciones de producción.

Ferguson, C. E. *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, Cambridge University Press, Nueva York, 1969.

Estudio completo de la teoría de la función de producción (en 1970). Buen uso de gráficas tridimensionales.

Fuss, M. y D. McFadden. *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Application*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

Método con marcado énfasis en el uso de la dualidad.

Mas-Collell, A, M. D. Whinston y J. R. Green. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.

El capítulo 5 proporciona un sofisticado, aunque escueto, repaso de la teoría de la producción. El uso de la función de beneficios (véase el capítulo 11) es sofisticado e iluminador.

Shephard, R. W. *Theory of Cost and Production Funtions*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey, 1978.

Amplio análisis de la relación dual entre funciones de producción y de costo.

Slberberg, E. y W. Suen. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3a. ed., Irwin/McGraw-Hill, Boston, 2001.

Exhaustivo análisis de la dualidad entre funciones de producción y curvas de costos. Da una prueba de que la elasticidad de sustitución puede derivarse como se mostró en la nota 6 de este capítulo.

Stigler, G. J. “The Division of Labor Is Limited by the Extent of the Market”, *Journal of Political Economy*, núm. 59 (junio de 1951), pp. 185-193.

Atento rastreo de la evolución de las ideas de Smith sobre economías de escala.

Funciones de producción con muchos insumos

EXTENSIONES

La mayoría de las funciones de producción que se ilustran en este capítulo 9 pueden generalizarse fácilmente a casos de muchos insumos. Aquí se demostrará esto para los casos de la función Cobb-Douglas y ESC, y se examinarán después dos formas flexibles que tales funciones de producción podrían adoptar. En todos estos ejemplos, las α son parámetros no negativos y los n insumos están representados por $x_1, \ldots x_r$.

E9.1 Función Cobb-Douglas

La función de producción Cobb-Douglas con muchos insumos está dada por

$$q = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}. \tag{i}$$

a. Esta función exhibe rendimientos constantes a escala si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{ii}$$

b. En la función Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala, α_i es la elasticidad de q respecto al insumo x_i. Dado que $0 \leq \alpha_i < 1$, cada insumo exhibe productividad marginal decreciente.
c. Cualquier grado de rendimientos crecientes a escala puede incorporarse en esta función, dependiendo de

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{iii}$$

d. La elasticidad de sustitución entre dos insumos cualesquiera en esta función de producción es de 1. Esto puede demostrarse usando la definición dada en la nota 7 de este capítulo:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln(x_i/x_j)}{\partial \ln(f_j/f_i)}.$$

Aquí

$$\frac{f_j}{f_i} = \frac{\alpha_i x_j^{\alpha_j - 1} \prod_{i \neq j} x_i^{\alpha_i}}{\alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j}} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \cdot \frac{x_i}{x_j}.$$

De ahí que

$$\ln\left(\frac{f_j}{f_i}\right) = \ln\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) + \ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$$

y $\sigma_{ij} = 1$. Debido a que este parámetro está tan restringido en la función Cobb-Douglas, esta función no suele usarse en análisis econométricos de datos microeconómicos sobre empresas. Sin embargo, la función tiene varios usos generales en macroeconomía, como ilustra el ejemplo siguiente.

El modelo de crecimiento de Solow

La función de producción Cobb-Douglas con muchos insumos es uno de los rasgos primordiales de muchos modelos de crecimiento económico. Por ejemplo, el modelo pionero de crecimiento de equilibrio de Solow (1956) puede derivarse muy fácilmente, usando una función Cobb-Douglas con dos insumos y rendimientos constantes a escala de la forma

$$q = Ak^{\alpha} l^{1-\alpha}, \tag{iv}$$

donde A es un factor de variación técnica que puede representarse mediante crecimiento exponencial de la forma

$$A = e^{at}. \tag{v}$$

Dividir ambos miembros de la ecuación iv entre l produce

$$\hat{q} = e^{at} \hat{k}^{\alpha}, \tag{vi}$$

donde

$$\hat{q} = q/l \text{ y } \hat{k} = k/l$$

Solow demuestra que las economías evolucionarán hacia un valor de equilibrio de $\hat{k}$ (la razón capital-trabajo). De ahí que diferencias entre países en tasas de crecimiento puedan tomarse en cuenta sólo mediante diferencias en el factor de variación técnica, a.

Dos características de la ecuación vi argumentan en favor de incluir más insumos en el modelo de Solow. Primero, tal como está, esa ecuación es incapaz de explicar las grandes diferencias en producción *per cápita* ($\hat{q}$) que se observan alrededor del mundo. Suponiendo que $\alpha = 0.3$, digamos (cifra congruente con muchos estudios empíricos), se necesitarían diferencias entre los países en k/l de hasta 4 000 000 a 1 para explicar las diferencias 100 a 1 observadas en el ingreso *per cápita*, magnitud evidentemente irrazonable. Introduciendo insumos adicionales, como capital humano, estas diferencias se vuelven más explicables.

Una segunda deficiencia de la formulación simple de la función Cobb-Douglas del modelo de Solow es que no ofrece ninguna explicación del parámetro de la variación técnica, a; su valor está determinado "exógenamente". Al agregar factores adicionales se vuelve más fácil entender cómo puede responder el parámetro *a* a incentivos económicos. Este es el discernimiento clave de la bibliografía sobre la teoría del crecimiento "endógeno" (para un resumen, véase Romer, 1996).

E9.2 ESC

La función de producción de la elasticidad de sustitución constante (ESC) con muchos insumos está dada por

$$q = \left[\sum \alpha_i x_i^{\rho}\right]^{\varepsilon/\rho}, \ \rho \leq 1. \qquad \textbf{(vii)}$$

a. Sustituyendo tx_i por cada producción, es fácil demostrar que esta función exhibe rendimientos constantes a escala para $\varepsilon = 1$. Para $\varepsilon > 1$, la función exhibe rendimientos a escala crecientes.
b. Esta función de producción exhibe productividades marginales decrecientes para cada insumo, porque $\rho \leq 1$.
c. Como en el caso con dos insumos, la elasticidad de sustitución está dada aquí por

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \textbf{(viii)}$$

y esta elasticidad se aplica a la sustitución entre cualesquiera dos de los insumos.

Comprobación de la función Cobb-Douglas en la Unión Soviética

Una forma en la que se usa la función ESC con multiinsumos es para determinar si el parámetro de sustitución estimado (ρ) es congruente con el valor implicado por la función Cobb-Douglas ($\rho = 0$, $\sigma = 1$). Por ejemplo, en un estudio de cinco grandes industrias en la antigua Unión Soviética. E. Bairam (1991) determinó que la función Cobb-Douglas brinda una explicación relativamente buena de variaciones en producción en la mayoría de los sectores manufactureros. Sólo para el procesamiento de alimentos parece apropiado un valor bajo de σ.

Los tres ejemplos siguientes ilustran funciones de producción de forma flexible que pueden aproximar cualquier función general de n insumos. En las "Extensiones" del capítulo 10 se examinarán las analogías de la función de costo con algunas de estas funciones, de uso más amplio que las funciones de producción mismas.

E9.3 Funciones de producciones anidadas

En algunas aplicaciones las funciones de producción Cobb-Douglas y ESC se combinan en una sola función "anidada". Para hacer esto los n insumos primarios originales se dividen en, digamos, m clases generales de insumos. Los insumos específicos en cada una de estas categorías se agregan después en un solo insumo compuesto y la función de producción final es una función de estos m compuestos. Por ejemplo, supongamos que hay tres insumos primarios, x_1, x_2, x_3. Y supongamos, sin embargo, que x_1 y x_2 están relacionados en forma relativamente estrecha en su uso por las empresas (por ejemplo, capital y energía), mientras que el tercer insumo (trabajo) es relativamente distinto. Uno podría querer entonces usar una función ESC agregadora para elaborar un insumo compuesto para servicios de capital de la forma

$$x_4 = [\gamma x_1^{\rho} + (1+\gamma)x_2^{\rho}]^{1/\rho}. \qquad \textbf{(ix)}$$

Entonces, la función de producción final podría adoptar una forma Cobb-Douglas:

$$q = x_3^{\alpha} x_4^{\beta}. \qquad \textbf{(x)}$$

Esta estructura permite que la elasticidad de sustitución entre x_1 y x_2 adopte cualquier valor [$\sigma = 1/(1-\rho)$], pero restringe que la elasticidad de sustitución entre x_3 y x_4 sea de uno. Otras opciones están disponibles dependiendo de qué tan precisamente se especifiquen las funciones incrustadas.

La dinámica de la sustitución capital/energía

Las funciones de producción anidadas se han usado ampliamente en los estudios que intentan medir la naturaleza precisa de la sustitución entre insumos de capital y energía. Por ejemplo, Atkeson y Kehoe (1999) usan un modelo más bien parecido al especificado en las ecuaciones ix y x para tratar de conciliar dos hechos sobre el modo en que los precios de la energía afectan la economía: 1) a lo largo del tiempo, el uso de energía en la producción parece un tanto insensible al precio (al menos a corto plazo), y 2) entre países, los precios de la energía parecen tener gran influencia respecto a cuánta energía se usa. Usando una ecuación de servicio de capital de la forma dada en la ecuación ix con un bajo grado de sustitución ($\rho = -2.3$) —junto con una función de producción Cobb-Douglas que combina trabajo con servicios de capital—, estos autores lograron reproducir muy bien los hechos sobre los precios de la energía. Concluyeron, sin embargo, que este modelo implica un efecto mucho más negativo de los altos precios de la energía sobre el crecimiento económico del que parece realmente haber sido el caso. De ahí que en última instancia hayan optado por una forma más compleja de modelo de la producción que subraya diferencias en el uso de la energía entre inversiones de capital realizadas en fechas diferentes.

E9.4 Leontief generalizado

$$q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\sqrt{x_i x_j},$$

donde $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

a. La función considerada en el problema 9.7 es un caso simple de esta función para el caso $n = 2$. Para $n = 3$, esta función tendría términos lineales en los tres insumos junto con tres términos radicales en representación de todos los posibles productos cruzados de los insumos.
b. Esta función exhibe rendimientos constantes a escala, como puede demostrarse usando tx_i. Rendimientos crecientes a escala pueden incorporarse en esta función usando la transformación

$$q' = q^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 1.$$

c. Puesto que cada insumo aparece linealmente así como bajo el radical, esta función exhibe productividades marginales decrecientes en todos los insumos.
d. La restricción $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ se usa para garantizar la simetría de las derivadas parciales de segundo orden.

A9.5 Translog

$$\ln q = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i + 0.5 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \ln x_i \ln x_j,$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

a. Nótese que la función Cobb-Douglas es un caso especial de esta función donde $\alpha_0 = \alpha_{ij} = 0$ para todas las i, j.
b. Como en el caso de la función Cobb-Douglas esta función puede asumir cualquier grado de rendimientos a escala. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ y } \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 0$$

para todas las i, entonces esta función exhibe rendimientos constantes a escala. La prueba requiere cierto cuidado en el manejo de la doble suma.
c. Nuevamente, se requiere la condición $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ para garantizar la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Inmigración

Puesto que la función de producción translog incorpora gran número de posibilidades de sustitución entre varios insumos, se le ha usado ampliamente para estudiar los modos en que los trabajadores recién llegados pueden sustituir a los ya existentes. De particular interés es la forma en que el nivel de habilidad de los inmigrantes puede conducir a reacciones diferentes en la demanda de trabajadores calificados y no calificados en la economía interna. Estudios de Estados Unidos y muchos otros países (como Canadá, Alemania y Francia) han sugerido que la magnitud general de tales efectos es modesta, en especial dados los flujos de inmigración relativamente reducidos. Pero hay ciertas evidencias de que los trabajadores inmigrantes no calificados sí podrían actuar como sustitutos de los trabajadores nacionales no calificados, pero como complementos de los trabajadores nacionales calificados. De ahí que mayores flujos de inmigración puedan exacerbar tendencias hacia crecientes diferenciales salariales. Para un resumen, véase Borjas (1994).

Referencias

Atkeson, Andrew y Patrick J. Kehoe. "Models of Energy Use: Putty-Putty versus Putty-Clay", *American Economic Review* (septiembre de 1999), pp. 1028-1043.

Bairam, Erkin. "Elasticity of Substitution, Technical Progress and Returns to Scale in Branches of Soviet Industry: A New CES Production Function Approach", *Journal of Applied Economics* (enero-marzo de 1991), pp. 91-96.

Borjas, G. J. "The Economics of Immigration", *Journal of Economic Literature* (diciembre de 1994), pp. 1667-1717.

Romer, David. *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1996.

Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* (febrero de 1956), pp. 65-94.