CAPÍTULO DOS

Matemáticas para microeconomía

Los modelos microeconómicos se elaboran usando una amplia variedad de técnicas matemáticas. En este capítulo ofrecemos un breve resumen de algunas de las técnicas más importantes que encontrarás en el presente libro. Un segmento importante del capítulo concierne a procedimientos matemáticos para determinar el valor óptimo de una función. Dado que frecuentemente adoptaremos el supuesto de que un actor económico busca maximizar o minimizar una función, nos encontraremos muchas veces con estos procedimientos (la mayoría de los cuales se basan en el cálculo).

Después de nuestro detallado análisis del cálculo de la optimización pasaremos a cuatro temas que se cubrirán con menos detalle. Primero examinaremos algunos tipos especiales de funciones que se presentan en economía. El conocimiento de las propiedades de estas funciones puede ser útil para resolver problemas. Luego se ofrece un pequeño resumen acerca del cálculo integral. Aunque en este libro la integración se usa mucho menos que la diferenciación, encontraremos situaciones en las que se tendrán que usar integrales para medir áreas importantes para la teoría económica o para sumar resultados que ocurren en el tiempo o entre muchos individuos. Un uso particular de la integración es examinar problemas en los que el objetivo es maximizar un flujo de resultados en el tiempo. Nuestro tercer tema adicional se centrará en técnicas por usar para tales problemas de optimización dinámica. Por último, este capítulo concluirá con un breve resumen de estadística matemática el cual será particularmente útil en nuestro estudio del comportamiento económico en situaciones inciertas.

MAXIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Nuestro estudio de la optimización puede motivarse con un ejemplo sencillo. Supongamos que el gerente de una empresa desea maximizar[1] los beneficios por concepto de la venta de un bien particular. Asimismo, que los beneficios (π) recibidos dependen sólo de la cantidad (q) vendida del bien. Matemáticamente,

$$\pi = f(q). \tag{2.1}$$

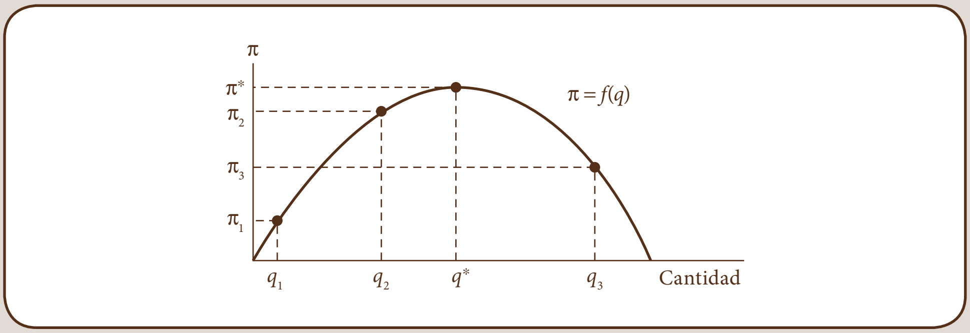
La figura 2.1 muestra una posible relación entre π y q. Evidentemente, para obtener benficios máximos, el gerente debe generar la producción q^* la cual arroja beneficios π^*. Si se dispusiera de una gráfica como la de la figura 2.1 todo parecería ser cuestión de trazado con una regla.

[1] Aquí exploraremos en general problemas de maximización. Un método prácticamente idéntico se tendría que adoptar para estudiar problemas de minimización porque la maximización de $f(x)$ es equivalente a la minimización de $-f(x)$.

FIGURA 2.1

Relación hipotética entre cantidad producida y beneficios.

Si un gerente desea generar el nivel de producción que maximiza los beneficios, debe producirse q^*. Nótese que en q^*, $d\pi/dq = 0$.



Sin embargo, supóngase que, como es probable, el gerente no tiene una idea tan precisa del mercado. Entonces puede probar varias q para ver dónde se obtienen beneficios máximos. Por ejemplo, comenzando en q_1, los beneficios por concepto de ventas serían π_1. Luego, el gerente podría probar producir q_2 y observar que los beneficios aumentan a π_2. La idea de sentido común de que los beneficios aumentan en respuesta a un aumento en q puede enunciarse formalmente como

$$\frac{\pi_2 - \pi_1}{q_2 - q_1} > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0, \tag{2.2}$$

donde la notación Δ se usa para significar "la variación en" π o q. Mientras $\Delta\pi/\Delta q$ sea positivo los beneficios aumentarán y el gerente seguirá incrementando la producción. Para los aumentos de producción a la izquierda de q^*, sin embargo, $\Delta\pi/\Delta q$ será negativo, y el gerente se percatará de que se ha cometido un error.

Derivadas

Como probablemente conoces, el límite de $\Delta\pi/\Delta q$ para pequeñas variaciones en q se llama la *derivada* de la función, $\pi = f(q)$, y se denota con $d\pi/dq$ o df/dq o $df'(q)$. Más formalmente, la derivada de una función $\pi = f(q)$ en el punto q_1 se define como

$$\frac{d\pi}{dq} = \frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}\frac{f(q_1 + h) - f(q_1)}{h}. \tag{2.3}$$

Nótese que el valor de esta razón depende obviamente del punto q_1 que se elija. La derivada de una función puede no existir siempre o ser indefinida en ciertos puntos. La mayoría de las funciones que se estudiarán en este libro son totalmente diferenciables, sin embargo.

Valor de la derivada en un punto

Cabe mencionar una convención de notación: a veces se desea indicar explícitamente el punto en el que se evaluará la derivada. Por ejemplo, la evaluación de la derivada en el punto $q = q_1$ podría denotarse con

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_1}. \tag{2.4}$$

Otras veces nos interesa el valor de $d\pi/dq$ para todos los valores posibles de q, y no se hace mención explícita de un punto de evaluación particular.

En el ejemplo de la figura 2.1,

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_1} > 0,$$

mientras que

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q_3} < 0.$$

¿Cuál es el valor de $d\pi/dq$ en q^*? Parecería ser de 0 porque el valor es positivo para valores de q menores que q^* y negativo para valores de q mayores que q^*. La derivada es la pendiente de la curva de la función; esta pendiente es positiva a la izquierda de q^* y negativa a la derecha de q^*. En el punto q^*, la pendiente de $f(q)$ es 0.

Condición de primer orden para un máximo

Este resultado es general. Para que una función de una variable alcance su valor máximo en algún punto la derivada en ese punto (si existe) debe ser igual a 0. De ahí que si un gerente pudiera estimar la función $f(q)$ con algún tipo de datos reales, sería teóricamente posible hallar el punto donde $df/dq = 0$. En este punto óptimo (q^*, digamos),

$$\left.\frac{df}{dq}\right|_{q=q^*} = 0. \tag{2.5}$$

Condiciones de segundo orden

Un gerente desprevenido podría ser engañado, sin embargo, por una aplicación ingenua de sólo esa regla de la primera derivada. Por ejemplo, supóngase que la función de beneficios fuera como se advierte en las figuras 2.2a o 2.2b. Si la función de beneficios es como se muestra en la figura 2.2a, el gerente, mediante el análisis de la producción en el punto en donde $d\pi/dq = 0$, elegirá el punto q_a^*. Este punto produce de hecho un beneficio mínimo, no máximo, para el gerente. De igual manera, si la función beneficio es la que se muestra en la figura 2.2b, el gerente elegirá el punto q_b^*, que, aunque rinde beneficios superiores a los de cualquier producción menor que q_b^*, es ciertamente inferior a cualquier producción mayor que q_b^*. Estas situaciones ilustran el hecho matemático de que $d\pi/dq = 0$ es condición *necesaria* pero no *suficiente* para un máximo. Con objeto de garantizar que el punto elegido sea en efecto un punto máximo, debe imponerse una segunda condición.

Intuitivamente esta condición adicional es clara: los beneficios disponibles al producir un poco más o un poco menos que q^* deben ser menores que los disponibles de q^*. De no ser así, al gerente podría irle mejor que con q^*. Matemáticamente esto significa que $d\pi/dq$ debe ser mayor que 0 para $q < q^*$ y menor que 0 para $q > q^*$. Así, en q^*, $d\pi/dq$ debe ser decreciente. Otra manera de decir esto es que la derivada de $d\pi/dq$ debe ser negativa en q^*.

Segundas derivadas

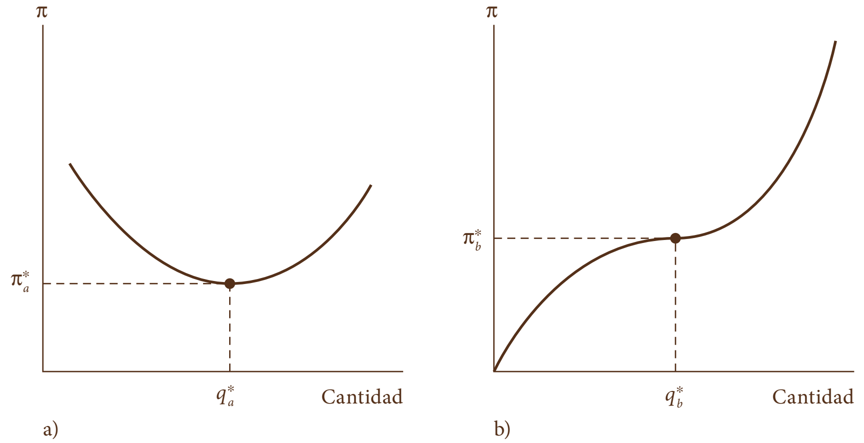
La derivada de una derivada se llama *segunda derivada* y se denota con

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2 f}{dq^2} \quad \text{o} \quad f''(q).$$

FIGURA 2.2

Dos funciones de beneficios con resultados engañosos si la regla de la primera derivada se aplica de manera indiscriminada.

En *a*) la aplicación de la regla de la primera derivada resultaría en la elección del punto q_a^*. Este punto es de hecho un punto de beneficios mínimos. De igual forma, en *b*), el nivel de producción q_b^* sería recomendado por la regla de la primera derivada, pero este punto es inferior a todas las producciones mayores que q_b^*. Esto demuestra gráficamente que hallar un punto en el que la derivada sea igual a 0 es condición necesaria, pero no suficiente, para que una función alcance su valor máximo.



La condición adicional para que q^* represente un máximo (local) es, por tanto,

$$\left.\frac{d^2\pi}{dq^2}\right|_{q=q^*} = f''(q)\Big|_{q=q^*} < 0, \qquad \textbf{(2.6)}$$

donde la notación es de nuevo un recordatorio de que esta segunda derivada debe evaluarse en q^*.

De ahí que aunque la ecuación 2.5 ($d\pi/dq = 0$) sea condición necesaria para un máximo, deba combinarse con la ecuación 2.6 ($d^2\pi/dq^2 < 0$) para garantizar que el punto sea un máximo local para la función. Juntas, así, las ecuaciones 2.5 y 2.6 son condiciones suficientes para ese máximo. Desde luego es posible que, mediante una serie de ensayos, el gerente se decida por q^* dependiendo de la información del mercado más que del razonamiento matemático (recuérdese la analogía del jugador de billar de Friedman). En este libro nos interesa menos cómo se descubre el punto que sus propiedades y cómo varía el punto cuando las condiciones cambian. Un desarrollo matemático será útil para resolver estas preguntas.

Reglas para la determinación de derivadas

He aquí algunas reglas conocidas para calcular derivadas de una función de una variable. Las usaremos en muchos apartados de este libro.

1. Si a es una constante, entonces

$$\frac{da}{dx} = 0.$$

2. Si a es una constante, entonces

$$\frac{d[af(x)]}{dx} = af'(x).$$

3. Si a es una constante, entonces

$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}.$$

4. $\dfrac{d\ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$

donde ln significa el logaritmo natural de la base e (= 2.71828).

5. $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ para cualquier constante a

Un caso particular de esta regla es $de^x/dx = e^x$.

Supóngase ahora que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones de x y que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen. Así pues,

6. $\dfrac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x).$

7. $\dfrac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$

8. $\dfrac{d[f(x)/g(x)]}{dx} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$

siempre y cuando $g(x) \neq 0$

Finalmente, si $y = f(x)$ y $x = g(z)$ y si tanto $f'(x)$ como $g'(z)$ existen, entonces

9. $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{df}{dx} \cdot \dfrac{dg}{dz}.$

A este resultado se le llama la *regla de cadena*. Ofrece una manera conveniente de estudiar cómo una variable (z) afecta a otra (y) sólo mediante su influencia en una variable intermedia (x). Algunos ejemplos son

10. $\dfrac{de^{ax}}{dx} = \dfrac{de^{ax}}{d(ax)} \cdot \dfrac{d(ax)}{dx} = e^{ax} \cdot a = ae^{ax}.$

11. $\dfrac{d[\ln(ax)]}{dx} = \dfrac{d[\ln(ax)]}{d(ax)} \cdot \dfrac{d(ax)}{dx} = \dfrac{1}{ax} \cdot a = \dfrac{1}{x}.$

12. $\dfrac{d[\ln(x^2)]}{dx} = \dfrac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)} \cdot \dfrac{d(x^2)}{dx} = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x}.$

EJEMPLO 2.1 Maximización de beneficios

Supóngase que la relación entre el beneficio (π) y la cantidad producida (q) está dada por

$$\pi(q) = 1\,000q - 5q^2. \tag{2.7}$$

Una gráfica de esta función se parecería a la parábola que se aprecia en la figura 2.1. El valor de q que maximiza el beneficio puede determinarse por diferenciación:

$$\frac{d\pi}{dq} = 1\,000 - 10q = 0, \tag{2.8}$$

así,

$$q^* = 100. \tag{2.9}$$

En $q = 100$, la ecuación 2.7 muestra que el beneficio es de 50 000; el mayor valor posible. Si, por ejemplo, la empresa optara por producir $q = 50$, el beneficio sería de 37 500. En $q = 200$, el beneficio es precisamente de 0.

Es posible demostrar que $q = 100$ es un máximo "global", señalando que la segunda derivada de la función beneficio es -10 (véase la ecuación 2.8). De ahí que la tasa de crecimiento de beneficio sea siempre decreciente hasta $q = 100$ donde la tasa de crecimiento sigue siendo positiva, pero más allá de ese punto se vuelve negativa. En este ejemplo, $q = 100$ es el único valor máximo local para la función π. Con funciones más complejas, sin embargo, puede haber muchos de esos máximos.

PREGUNTA: Supongamos que la producción (q) de una empresa está determinada por el monto de trabajo (l) que contrata de acuerdo con la función $q = 2\sqrt{l}$. Asimismo, que la empresa puede contratar todo el trabajo que desee a 10 dólares por unidad y vender su producción a \$50 por unidad. Así, el beneficio es una función de l dada por $\pi(l) = 100\sqrt{l} - 10l$. ¿Cuánto trabajo debería contratar esta empresa para maximizar el beneficio, y cuáles serán los beneficios?