

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial x} &= 2 - \lambda^D \cdot y = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial y} &= 2 - \lambda^D \cdot x = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}^D}{\partial \lambda^D} &= A - x \cdot y = 0.\end{aligned}\tag{2.69}$$

La resolución de estas ecuaciones como se hizo antes produce el resultado

$$x = y = \sqrt{A}.\tag{2.70}$$

De nueva cuenta, el terreno debe ser cuadrado para minimizar la longitud de la cerca. El valor del multiplicador de Lagrange en este problema es

$$\lambda^D = \frac{2}{y} = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{A}}.\tag{2.71}$$

Como ya se comentó, este multiplicador de Lagrange indica la relación entre el objetivo (minimizar la cerca) y la restricción (necesidad de rodear el terreno). Si el terreno fuera de 10 000 yardas cuadradas, como ya vimos, se necesitarían 400 yardas de cerca. Añadir al terreno una yarda cuadrada requeriría alrededor de .02 yardas más de cerca ($2/\sqrt{A} = 2/100$). El lector podría sacar su calculadora para demostrar que este es el caso: una cerca de 100.005 yardas por lado rodeará exactamente 10 001 yardas cuadradas. Aquí, como en la mayoría de los problemas de dualidad, el valor del multiplicador de Lagrange en el dual es el recíproco del valor del multiplicador de Lagrange en el problema original. Ambos dan la misma información, aunque de manera un poco distinta.

PREGUNTAS: Una restricción implícita aquí es que el terreno del agricultor es rectangular. Si no se impusiera esta restricción, ¿de qué forma sería el terreno que encierra el área máxima? ¿Cómo lo probarías?

TEOREMA DE LA ENVOLVENTE EN PROBLEMAS DE MAXIMIZACIÓN RESTRINGIDA

El teorema de la envolvente, ya expuesto en relación con problemas de maximización no restringida, también tiene importantes aplicaciones en problemas de maximización restringida. Aquí se ofrecerá una breve presentación de ese teorema. En capítulos posteriores examinaremos varias aplicaciones.

Supongamos que se busca el valor máximo de

$$y = f(x_1, \dots, x_n; a),\tag{2.72}$$

sujeto a la restricción de

$$g(x_1, \dots, x_n; a) = 0,\tag{2.73}$$

donde se ha hecho explícita la dependencia de las funciones f y g respecto a algún parámetro a . Como ya se demostró, una manera de resolver este problema es establecer la expresión lagrangiana

$$\mathcal{L} = f(x_1, \dots, x_n; a) + \lambda g(x_1, \dots, x_n; a)\tag{2.74}$$

y resolver las condiciones de primer orden (véanse las ecuaciones 2.51) para los valores óptimos restringidos x_1^*, \dots, x_n^* . O bien, es posible demostrar que

$$\frac{dy^*}{da} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(x_1^*, \dots, x_n^*; a).\tag{2.75}$$