una persona no gasta todo su ingreso, más ingreso inclusive tampoco haría nada para elevar su bienestar.

Relaciones similares de lasitud complementaria también son válidas para la selección de variables x_1 y x_2. Por ejemplo, la cuarta línea de la ecuación 2.79 requiere que la solución óptima con b o λ_2 sea 0. Si $\lambda_2 = 0$, entonces la solución óptima tiene $x_1 > 0$, y esta variable seleccionada satisface la prueba precisa costo-beneficio de que $f_1 + \lambda_1 g_1 = 0$. De manera alterna, las soluciones donde $b = 0$ tienen $x_1 = 0$, y también requieren que $\lambda_2 > 0$. Así, esas soluciones no implican el uso de x_1, porque esa variable no satisface la prueba costo-beneficio que aparece en la primera línea de la ecuación 2.79, la cual implica que $f_1 + \lambda_1 g_1 < 0$. Un resultado idéntico es válido para la variable selecta x_2.

Estos resultados, conocidos como *condiciones de Kuhn-Tucker* en honor a sus descubridores, demuestran que las soluciones de los problemas de optimización que contienen restricciones de desigualdad diferirán en formas más bien simples de las de problemas similares que contienen restricciones de igualdad. De ahí que no podamos equivocarnos demasiado trabajando principalmente con restricciones que implican igualdades y suponiendo que podemos depender de la intuición para enunciar qué pasaría si los problemas respectivos contuvieran desigualdades. Este es el método general que adoptaremos en este libro.[14]

CONDICIONES DE SEGUNDO ORDEN Y CURVATURA

Hasta aquí nuestro análisis de la optimización se ha centrado principalmente en las condiciones necesarias (de primer orden) para determinar un máximo. Esa es, en efecto, la práctica que seguiremos en gran parte de este libro porque, como veremos, la mayoría de los problemas económicos contienen funciones para las cuales también se satisfacen las condiciones de segundo orden para un máximo. Esto se debe a que esas funciones tienen las propiedades de curvatura correctas para garantizar, asimismo, la suficiencia de las condiciones necesarias para un óptimo. En esta sección ofreceremos un tratamiento general de estas condiciones de curvatura y su relación con las condiciones de segundo orden. Las explicaciones económicas de estas condiciones de curvatura se analizarán a lo largo del texto.

Funciones de una variable

Consideramos primero el caso en el que el objetivo, y, es una función de una variable, x. Es decir,

$$y = f(x). \tag{2.80}$$

Una condición necesaria para que esta función alcance su valor máximo en algún punto es que en ese punto

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \tag{2.81}$$

Para garantizar que dicho punto es en efecto un máximo debemos tener y decreciente para movimientos desde aquél. Ya sabemos (por la ecuación 2.81) que para pequeñas variaciones en x el valor de x no cambia; lo que debemos comprobar es si y es creciente antes de llegar a esa "meseta", y decreciente después. Ya se ha derivado una expresión para el cambio en y (dy), la cual está dada por la diferencial total

$$dy = f'(x)dx. \tag{2.82}$$

[14] La situación puede ser mucho más compleja cuando no se puede confiar en este cálculo para dar una solución, quizá porque algunas de las funciones en un problema no son diferenciables. Para un análisis, véase Avinask K. Dixit, *Optimization in Economic Theory*, 2a. ed. (Oxford University Press, Oxford, 1990).

Lo que requerimos ahora es que dy decrezca en relación con los incrementos reducidos en el valor de x. La diferencial de la ecuación 2.82 está dada por

$$d(dy) = d^2y = \frac{d\,[f'(x)dx]}{dx} \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2. \tag{2.83}$$

Pero

$$d^2y < 0$$

implica que

$$f''(x)dx^2 < 0, \tag{2.84}$$

y debido a que dx^2 debe ser positiva (porque todo lo elevado al cuadrado es positivo), tenemos

$$f''(x) < 0 \tag{2.85}$$

como la condición requerida de segundo orden. Es decir, esta condición requiere que la función f tenga una forma cóncava en el punto crítico (contrástense las figuras 2.1 y 2.2). Las condiciones de curvatura que encontraremos en este libro representan generalizaciones de esta simple idea.

EJEMPLO 2.9 Maximización de beneficios nuevamente

En el ejemplo 2.1 se consideró el problema de determinar el máximo de la función

$$\pi = 1\,000q - 5q^2. \tag{2.86}$$

La condición de primer orden para un máximo requiere

$$\frac{d\pi}{dq} = 1\,000 - 10q = 0 \tag{2.87}$$

o

$$q^* = 100. \tag{2.88}$$

La segunda derivada de la función está dada por

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0. \tag{2.89}$$

y de ahí que el punto $q^* = 100$ cumpla las condiciones suficientes para un máximo local.

PREGUNTA: Aquí la segunda derivada siempre es negativa y no sólo en el punto óptimo. ¿Qué implica esto respecto del punto óptimo? ¿Cómo debe interpretarse el hecho de que la segunda derivada sea una constante?

Funciones de dos variables

Como segundo caso, consideremos y como una función de dos variables independientes:

$$y = f(x_1, x_2). \tag{2.90}$$

Una condición necesaria para que dicha función alcance su valor máximo es que sus derivadas parciales, tanto en la dirección x_1 como en la dirección x_2, sean iguales a 0. Es decir,

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = 0. \tag{2.91}$$

Un punto que satisface estas condiciones estará en un sitio "plano" de la función (un punto donde $dy = 0$) y, por tanto, será candidato a un máximo. A fin de garantizar que ese punto sea un máximo local y debe disminuir ante movimientos en cualquier dirección desde el punto crítico: en términos gráficos sólo hay un modo de dejar una cumbre y es bajar.

Un argumento intuitivo

Ya se describió por qué una generalización simple del caso de una variable indica que las dos segundas derivadas parciales propias f_{11} y f_{22} deben ser negativas para un máximo local. En nuestra analogía de la montaña, si la atención se reduce a movimientos Norte-Sur o Este-Oeste, la pendiente de la montaña debe disminuir al cruzar la cima; la pendiente debe cambiar de positiva a negativa. La complejidad particular que surge en el caso de dos variables implica movimientos a través del punto óptimo que no están solamente en las direcciones x_1 o x_2 (movimientos, digamos, de Noreste a Suroeste). En esos casos las derivadas parciales de segundo orden no dan información completa sobre cómo cambia la pendiente cerca del punto crítico. También deben ponerse condiciones a la derivada cruzada parcial ($f_{12} = f_{21}$) para garantizar que dy decrezca en relación con los movimientos que pasen por el punto crítico en cualquier dirección. Como veremos, estas condiciones equivalen a requerir que las derivadas parciales propias de segundo orden sean suficientemente negativas para servir de contrapeso a toda posible derivada cruzada parcial "perversa" o extraña. Por intuición, si la montaña es lo suficientemente empinada en las direcciones Norte-Sur y Este-Oeste, las fallas a este respecto relativamente menores en otras direcciones pueden ser compensadas.

Un análisis formal

Procedamos ahora a exponer estos puntos más formalmente. Lo que queremos descubrir son las condiciones que deben imponerse a las segundas derivadas parciales de la función f para garantizar que d^2y es negativa para movimientos en cualquier dirección que pasen por el punto crítico. Recuérdese primero que la diferencial total de la función está dada por

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2. \tag{2.92}$$

La diferencial de esa función está dada por

$$d^2y = (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2)dx_1 + (f_{21}dx_1 + f_{22}dx_2)dx_2 \tag{2.93}$$

o

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 + f_{12}dx_2dx_1 + f_{21}dx_1dx_2 + f_{22}\, dx_2^2. \tag{2.94}$$

Debido a que mediante el teorema de Young $f_{12} = f_{21}$, podemos ordenar los términos para obtener

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}\, dx_2^2. \tag{2.95}$$

A fin de que la ecuación 2.95 sea inequívocamente negativa para cualquier cambio en las x (es decir, para cualquier opción de dx_1 y dx_2, obviamente es necesario que f_{11} y f_{22} sean negativas. Si, por ejemplo, $dx_2 = 0$, entonces

$$d^2y = f_{11}\, dx_1^2 \tag{2.96}$$

y $d^2y < 0$ implica que

$$f_{11} < 0. \tag{2.97}$$

Un argumento idéntico vale para f_{22} estableciendo $dx_1 = 0$. Si ni dx_1 ni dx_2 son iguales a 0 debemos considerar la cruzada parcial, f_{12}, al decidir si d^2y es inequívocamente negativa. Puede usarse álgebra relativamente simple para demostrar que la condición requerida es[15]

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0. \tag{2.98}$$

Funciones cóncavas

Intuitivamente, lo que la ecuación 2.98 requiere es que las segundas derivadas parciales propias f_{11} y f_{22} sean suficientemente negativas para que su producto (que es positivo) sea mayor que todo posible efecto "perverso" de las derivadas cruzadas parciales $f_{12} = f_{21}$. Las funciones que obedecen esta condición se llaman *funciones cóncavas*. En tres dimensiones esas funciones parecen tazas invertidas (para una ilustración véase el ejemplo 2.11, pág. 53). Esta imagen deja en claro que un sitio plano en esa función es, en efecto, un máximo verdadero porque la función desciende siempre desde ese sitio. De modo más general, las funciones cóncavas tienen la propiedad de hallarse siempre bajo un plano tangente a ellas; el plano definido por el valor máximo de la función es simplemente un caso especial de esta propiedad.

EJEMPLO 2.10 Condiciones de segundo orden: estado de salud, por última vez

En el ejemplo 2.4 se consideró la función estado de salud

$$y = f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5. \tag{2.99}$$

Las condiciones de primer orden para un máximo son

$$\begin{aligned} f_1 &= -2x_1 + 2 = 0, \\ f_2 &= -2x_2 + 4 = 0 \end{aligned} \tag{2.100}$$

o

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1, \\ x_2^* &= 2. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Las derivadas parciales de segundo orden para la ecuación 2.99 son

$$\begin{aligned} f_{11} &= -2, \\ f_{22} &= -2, \\ f_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Estas derivadas obedecen claramente las ecuaciones 2.97 y 2.98, de manera que se satisfacen las condiciones tanto necesarias como suficientes para un máximo local.[16]

PREGUNTA: Describe la forma cóncava de la función estado de salud e indica por qué tiene un solo valor máximo global.

[15] La prueba procede sumando y restando el término $(f_{12}\,dx_2)^2/f_{11}$ a la ecuación 2.95 y factorizando. Pero este método sólo es aplicable a este caso especial. Un método más fácil de generalizar y que usa álgebra matricial reconoce que la ecuación 2.95 es una "forma cuadrática" en dx_1 y dx_2, y que las ecuaciones 2.97 y 2.98 equivalen a requerir que la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

sea "definida negativa". En particular, la ecuación 2.98 requiere que la determinante de esta matriz hessiana sea positiva. Para un análisis, véanse las extensiones de este capítulo.

[16] Nótese que la ecuación 2.102 cumple las condiciones suficientes no sólo en el punto crítico, sino también para todas las posibles opciones de x_1 y x_2. Es decir, la función es cóncava. En ejemplos más complejos este no es necesariamente el caso: las condiciones de segundo orden sólo deben satisfacerse en el punto crítico para que ocurra un máximo local.

Maximización restringida

Para otra ilustración de condiciones de segundo orden, considérese el problema de elegir x_1 y x_2 para maximizar

$$y = f(x_1, x_2), \tag{2.103}$$

sujeta a la restricción lineal

$$c - b_1x_1 - b_2x_2 = 0 \tag{2.104}$$

(donde c, b_1 y b_2 son parámetros constantes en el problema). En este libro encontrarás con frecuencia este tipo de problemas, que es un caso especial de los problemas de máximo restringido que ya examinamos y en los cuales se demostró que las condiciones de primer orden para un máximo pueden derivarse estableciendo la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda(c - b_1x_1 - b_2x_2). \tag{2.105}$$

La diferenciación parcial respecto a x_1, x_2 y λ produce los resultados ya conocidos:

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda b_1 &= 0, \\ f_2 - \lambda b_2 &= 0, \\ c - b_1x_1 - b_2x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.106}$$

En general, en estas ecuaciones es posible despejar los valores óptimos de x_1, x_2 y λ. Para garantizar que el punto derivado de ese modo sea un máximo local, deben examinarse de nuevo los movimientos desde los puntos críticos, usando la “segunda” diferencial total:

$$d^2y = f_{11}\,dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}\,dx_2^2. \tag{2.107}$$

En este caso, sin embargo, no todos las posibles pequeñas variaciones en las x son permisibles. Sólo aquellos valores de x_1 y x_2 que continúan satisfaciendo la restricción pueden considerarse opciones válidas del punto crítico. Para examinar estas variaciones debe calcularse el diferencial total de la restricción:

$$-b_1dx_1 - b_2dx_2 = 0 \tag{2.108}$$

o

$$dx_2 = -\frac{b_1}{b_2}dx_1. \tag{2.109}$$

Esta ecuación muestra las variaciones relativas en x_1 y x_2 permisibles al considerar movimientos desde el punto crítico. Para avanzar en este problema debemos usar las condiciones de primer orden. Las dos primeras implican

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{b_1}{b_2}, \tag{2.110}$$

y combinar este resultado con la ecuación 2.109 produce

$$dx_2 = -\frac{f_1}{f_2}dx_1. \tag{2.111}$$

Ahora sustituimos esta expresión de dx_2 en la ecuación 2.107 para mostrar las condiciones que deben ser válidas para que d^2y sea negativa:

$$\begin{aligned} d^2y &= f_{11}\,dx_1^2 + 2f_{12}dx_1\left(-\frac{f_1}{f_2}dx_1\right) + f_{22}\left(-\frac{f_1}{f_2}dx_1\right)^2 \\ &= f_{11}\,dx_1^2 - 2f_{12}\frac{f_1}{f_2}\,dx_1^2 + f_{22}\frac{f_1^2}{f_2^2}\,dx_1^2. \end{aligned} \tag{2.112}$$

La combinación de términos y la colocación de cada uno sobre un denominador común dan

$$d^2y = (f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2)\,\frac{dx_1^2}{f_2^2}. \tag{2.113}$$

En consecuencia, para $d^2y < 0$ debe darse el caso de que

$$f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0. \tag{2.114}$$

Funciones cuasi cóncavas

Aunque la ecuación 2.114 parece poco más que una masa excesivamente compleja de símbolos matemáticos, de hecho la condición es importante. Caracteriza a un conjunto de funciones denominadas *funciones cuasi cóncavas*. Estas funciones tienen la propiedad de que el conjunto de todos los puntos para los cuales tal función adopta un valor mayor que cualquier constante específica, es un conjunto convexo (es decir, dos puntos cualesquiera en el conjunto pueden unirse por una línea totalmente contenida en el conjunto). Muchos modelos económicos se caracterizan por dichas funciones y, tal como veremos en mayor detalle en el capítulo 3, en estos casos la condición de cuasi concavidad tiene una interpretación económica relativamente simple. Los problemas 2.9 y 2.10 examinan dos funciones cuasi cóncavas específicas que encontraremos con frecuencia en este libro. El ejemplo 2.11 muestra la relación entre funciones cóncavas y cuasi cóncavas.

EJEMPLO 2.11 Funciones cóncavas y cuasi cóncavas

Las diferencias entre funciones cóncavas y cuasi cóncavas pueden ilustrarse con la función[17]

$$y = f(x_1,\ x_2) = (x_1 \cdot x_2)^k, \tag{2.115}$$

donde las x sólo adoptan valores positivos, y el parámetro k puede adoptar varios valores positivos.

Sea cual sea el valor que k adopte, esta función es cuasi cóncava. Una manera de demostrar esto es examinar las “curvas de nivel” de la función, igualando y con un valor específico, digamos c. En este caso

$$y = c = (x_1x_2)^k \quad \text{o} \quad x_1x_2 = c^{1/k} = c'. \tag{2.116}$$

Pero esta es justo la ecuación de una hipérbola rectangular estándar. Evidentemente, el conjunto de puntos para el que y adopta valores mayores que c es convexo porque está limitado por esta hipérbola.

Una forma más matemática de demostrar la cuasi concavidad aplicaría la ecuación 2.114 a esta función. Aunque el álgebra de esto es un poco compleja vale la pena el esfuerzo. Los diversos componentes de la ecuación 2.114 son:

$$\begin{aligned} f_1 &= kx_1^{k-1}x_2^k, \\ f_2 &= kx_1^kx_2^{k-1}, \\ f_{11} &= k(k-1)x_1^{k-2}x_2^k, \\ f_{22} &= k(k-1)x_1^kx_2^{k-2}, \\ f_{12} &= k^2x_1^{k-1}x_2^{k-1}. \end{aligned} \tag{2.117}$$

[17] Esta función es un caso especial de la función de Cobb-Douglas. Para más detalles sobre esta función véanse el problema 2.10 y las extensiones de este capítulo.

Así,

$$
\begin{aligned}
f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 &= k^3(k-1)x_1^{3k-2}x_2^{3k-2} - 2k^4x_1^{3k-2}x_2^{3k-2} \\
&\quad + k^3(k-1)x_1^{3k-2}x_2^{3k-2} \\
&= 2k^3x_1^{3k-2}x_2^{3k-2}(-1),
\end{aligned} \tag{2.118}
$$

la cual es evidentemente negativa, como requiere la cuasi concavidad.

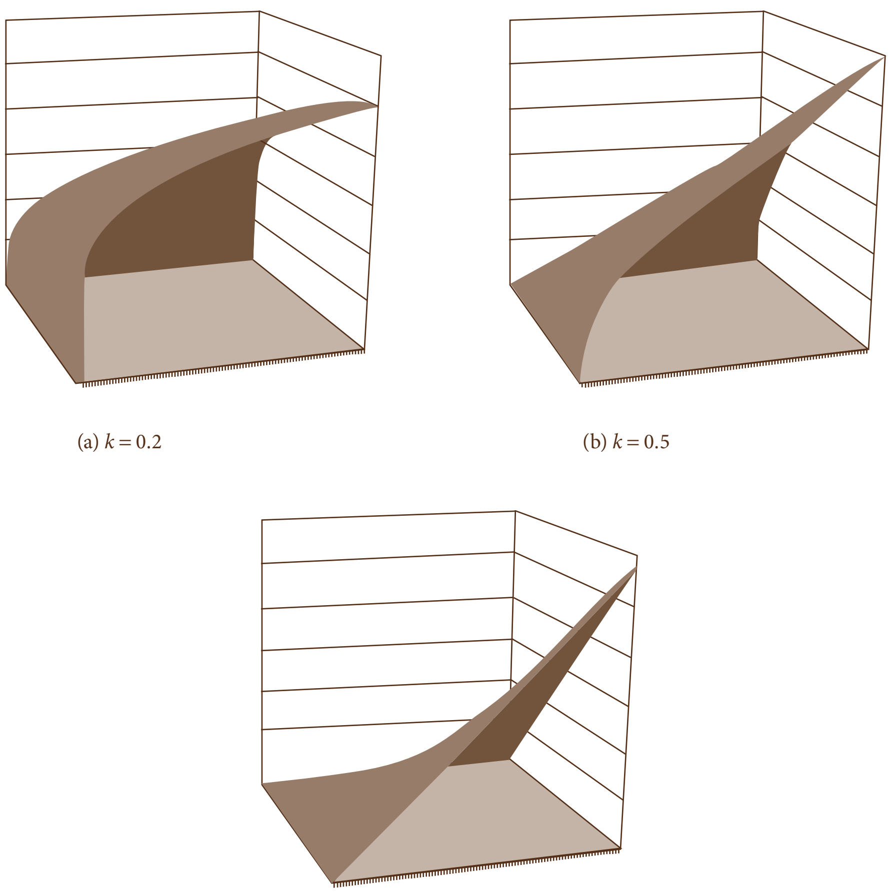
Que la función f sea cóncava depende del valor de k. Si $k < 0.5$ la función es en efecto cóncava. Un modo intuitivo de ver esto es considerar sólo puntos en los que $x_1 = x_2$. Para estos puntos,

$$y = (x_1^2)^k = x_1^{2k}, \tag{2.119}$$

la que, para $k < 0.5$, es cóncava. Como alternativa, para $k > 0.5$ esta función es convexa.

FIGURA 2.4 Funciones cóncavas y cuasi cóncavas

En los tres casos estas funciones son cuasi cóncavas. Para una y fija sus curvas de nivel son convexas. Pero sólo para $k = 0.2$ la función es estrictamente cóncava. El caso $k = 1.0$ muestra evidentemente cuasi concavidad porque la función no está bajo su plano tangente.



(a) $k = 0.2$

(b) $k = 0.5$

(c) $k = 1.0$