$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = \frac{-2x}{0.5y} = \frac{-4x}{y}, \quad \textbf{(2.25)}$$

justo el resultado que se obtuvo antes, con mucho menos trabajo.

PREGUNTA: ¿Por qué la opción entre x y y sólo depende aquí de la razón de x respecto a y y no del tamaño de la fuerza de trabajo reflejado por la constante 200?

MAXIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Usar derivadas parciales nos permite hallar el valor máximo de una función con distintas variables. Para entender las matemáticas que se utilizan en la resolución de este problema es útil una analogía con el caso de una variable. En el caso de una variable podemos imaginar un agente que cambia x por una pequeña cantidad, dx, y observa la variación en y, dy. Este cambio está dado por

$$dy = f'(x)dx. \quad \textbf{(2.26)}$$

La identidad en la ecuación 2.26 registra el hecho de que la variación en y es igual a la variación en x multiplicado por la pendiente de la función. Esta fórmula es equivalente a la de *punto y pendiente* que se usa para ecuaciones lineales en álgebra básica. Como ya se dijo, la condición necesaria para un máximo es que $dy = 0$ para pequeñas variaciones en x alrededor del punto óptimo. De lo contrario, y podría aumentar por efecto de las variaciones adecuadas en x. Pero como dx no necesariamente es igual a 0 en la ecuación 2.26, $dy = 0$ debe implicar que en el punto deseado $f'(x) = 0$. Esta es otra manera de obtener la condición de primer orden para un máximo que ya hemos derivado.

Examinemos mediante esta analogía las decisiones tomadas por un agente económico que debe elegir los niveles de distintas variables. Supongamos que este agente desea hallar una serie de x que maximicen el valor de $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. El agente podría considerar cambiar sólo una de las x, digamos x_1, y mantener constantes todas las demás. La variación en y (es decir, dy) que resultaría de esta variación en x_1 está dado por

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = f_1 dx_1. \quad \textbf{(2.27)}$$

Esto indica que la variación en y es igual a la variación en x_1 multiplicado por la pendiente medida en la dirección x_1. Usando de nuevo la analogía de la montaña, la ganancia en altitud que lograría un alpinista en dirección Norte está dada por la distancia recorrida al Norte multiplicada por la pendiente de la montaña medida en dirección Norte.

Condiciones de primer orden para un máximo

Para que un punto específico ofrezca un valor máximo (local) de la función f, ningún movimiento reducido en ninguna dirección debe poder aumentar su valor. De ahí que ninguno de los términos direccionales similares a la ecuación 2.27 deba incrementar y, y la única manera en la que esto puede suceder es que todas las derivadas direccionales (parciales) sean iguales a cero (recuerda que el término dx_1 en la ecuación 2.27 puede ser positivo o negativo). Es decir, una condición necesaria para que un punto sea un máximo local es que en ese punto

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0 \quad \textbf{(2.28)}$$

Técnicamente un punto en el que la ecuación 2.25 es válida se llama *punto crítico* de la función. No es necesariamente un punto máximo, a menos que sean válidas ciertas condiciones de segundo orden (que analizaremos más adelante). En la mayoría de nuestros ejemplos económicos, sin embargo, estas condiciones serán válidas; así, la ecuación 2.28 nos permitirá hallar un máximo.

Las condiciones necesarias "de primer orden" para un máximo descritas en la ecuación 2.28 también tienen una importante interpretación económica. Indican que para que una función alcance su valor máximo cualquier entrada en ella debe aumentar al punto en que su valor marginal (o incremental) sea de cero. Si, digamos, f_1 fuera positiva en un punto este no podría ser un máximo verdadero ya que un incremento en x_1 (manteniendo constantes todas las demás variables) incrementaría f por la ecuación 2.27.

EJEMPLO 2.5 Determinación de un máximo

Supongamos que y es una función de x_1 y x_2 dada por

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \tag{2.29}$$

o

$$y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5.$$

Por ejemplo, y podría representar la salud de un individuo (medida en una escala de 0 a 10), y x_1 y x_2 podrían ser dosis diarias de dos medicinas para el mejoramiento de la salud. Queremos encontrar valores de x_1 y x_2 que vuelvan a y lo más grande posible. Tomar las derivadas parciales de y respecto a x_1 y x_2 y aplicar las condiciones necesarias dadas por la ecuación 2.28 produce

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= -2x_1 + 2 = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= -2x_2 + 4 = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

o

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1, \\ x_2^* &= 2. \end{aligned}$$

Así, la función está en un punto crítico cuando $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. En ese punto, $y = 10$ es el mejor estado de salud posible. Un poco de experimentación ofrece evidencia convincente de que este es el valor más grande que y puede tener. Por ejemplo, si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $y = 5$, o si $x_1 = x_2 = 1$, entonces $y = 9$. Valores de x_1 y x_2 mayores que 1 y 2, respectivamente, reducen y porque los términos cuadráticos negativos en la ecuación 2.29 se vuelven grandes. En consecuencia el punto hallado, aplicando las condiciones necesarias es, de hecho, un máximo local (y global).[7]

PREGUNTA: Supongamos que y adoptó un valor fijo (de 5, digamos). ¿Cómo sería la relación contenida entre x_1 y x_2? ¿Qué podría decirse entonces de $y = 7$ o $y = 10$? (Estas gráficas son *curvas de nivel* de la función y se examinarán en detalle en capítulos posteriores. Véase también el problema 2.1.)

Condiciones de segundo orden

De nueva cuenta, sin embargo, las condiciones de la ecuación 2.28 no son suficientes para garantizar un máximo. Esto puede ilustrarse volviendo a una ya muy citada analogía: todas las cumbres son (más o menos) planas, pero no todos los sitios planos son una cumbre. Se necesita una condición de segundo orden para asegurar que el punto hallado, aplicando la ecuación 2.28, sea un máximo local. Intuitivamente, para un máximo local y debe ser decreciente respecto a cualquier variación pequeña en las x desde el punto crítico. Igual que en el caso de una variable, esto implica examinar la curvatura de la función alrededor del punto crítico para garantizar que el valor de la función realmente decrece en movimientos en cualquier dirección. Para hacer esto debemos con-

[7] Más formalmente, el punto $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ es un máximo global porque la función descrita en la ecuación 2.29 es cóncava (véase nuestro análisis más adelante).