Es decir, la variación en el valor máximo de y que resulta al variar el parámetro a (y volver a calcularse todas las x de acuerdo con nuevos valores óptimos) puede hallarse diferenciando parcialmente la expresión lagrangiana (ecuación 2.74) y evaluando la derivada parcial resultante en el punto óptimo. De ahí que en la aplicación del teorema de la envolvente a problemas restringidos la expresión lagrangiana desempeñe el mismo papel que el que desempeña la función objetivo en problemas irrestrictos. Como un ejercicio simple, el lector podría querer demostrar que este resultado es válido para el problema de cercar el terreno rectangular descrito en el ejemplo 2.7.[12] En el problema 2.12 se ofrece un esbozo de la prueba del teorema de la envolvente en problemas restringidos.

RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

En algunos problemas económicos no es necesario mantener con exactitud las restricciones. Por ejemplo, la restricción presupuestal de un individuo requiere que no gaste más de cierta cantidad por periodo, no obstante, es posible gastar por debajo de esa cantidad. En los problemas económicos también surgen restricciones de desigualdad en los valores permitidos a algunas variables. Usualmente, por ejemplo, las variables económicas deben ser positivas (sin embargo, pueden adoptar el valor de cero). En esta sección se demostrará cómo la técnica de Lagrange puede adaptarse a esas circunstancias. Aunque más adelante sólo encontraremos unos cuantos problemas que requieren estas matemáticas, el desarrollo aquí ilustrará algunos principios generales congruentes con la intuición económica.

Ejemplo de dos variables

Para evitar un exceso de notaciones engorrosas exploraremos las restricciones de desigualdad sólo para el caso simple que implica dos variables selectas. Los resultados derivados son fáciles de generalizar. Supongamos que se busca maximizar $y = f(x_1, x_2)$ sujeta a tres restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} &1.\ g(x_1, x_2) \geq 0; \\ &2.\ x_1 \geq 0; \quad \text{y} \\ &3.\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

De ahí que se tome en cuenta la posibilidad de que no sea necesario que la restricción introducida con anterioridad se mantenga con exactitud (no es necesario que una persona gaste todo su ingreso) por el hecho de que ambas x deban ser positivas (como en la mayoría de los problemas económicos).

Variables laxas

Una manera de resolver este problema de optimización es introducir tres nuevas variables (a, b y c) que conviertan las restricciones de desigualdad de la ecuación 2.76 en igualdades. Para garantizar que las desigualdades sigan siendo válidas elevaremos al cuadrado estas nuevas variables, asegurando así que los valores resultantes sean positivos. Usando este procedimiento las restricciones de desigualdad se convierten en

$$\begin{aligned} &1.\ g(x_1, x_2) - a^2 = 0; \\ &2.\ x_1 - b^2 = 0; \quad \text{y} \\ &3.\ x_2 - c^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

[12] En el problema original el perímetro P es el parámetro de principal interés. Al despejar los valores óptimos de x y y, y sustituirlos en la expresión del área (A) del terreno, es fácil demostrar que $dA/dP = P/8$. La diferenciación de la expresión lagrangiana (ecuación 2.62) produce $\partial\mathcal{L}/\partial P = \lambda$ y en los valores óptimos de x y y, $dA/dP = \partial\mathcal{L}/\partial P = \lambda = P/8$. Entonces el teorema de la envolvente ofrece, en este caso, una prueba adicional de que el multiplicador de Lagrange puede usarse para asignar a la restricción un valor implícito.

Toda solución que obedezca estas tres restricciones de igualdad obedecerá también las de desigualdad. Resultará, asimismo, que los valores óptimos de a, b y c brindarán varios discernimientos sobre la naturaleza de las soluciones de un problema de este tipo.

Solución usando multiplicadores de Lagrange

Al convertir el problema original que implicaba desigualdades en uno que implica igualdades, ahora estamos en posición de usar métodos de Lagrange para resolverlo. Dado que hay tres restricciones deben introducirse tres multiplicadores de Lagrange: λ_1, λ_2 y λ_3. La expresión lagrangiana completa es

$$\mathscr{L} = f(x_1, x_2) + \lambda_1[g(x_1, x_2) - a^2] + \lambda_2(x_1 - b^2) + \lambda_3(x_2 - c^2). \tag{2.78}$$

Deseamos hallar los valores de x_1, x_2, a, b, c, λ_1, λ_2 y λ_3 que constituyen un punto crítico de esta expresión. Esto necesitará ocho condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} &= f_1 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} &= f_2 + \lambda_1 g_2 + \lambda_3 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial a} &= -2a\lambda_1 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial b} &= -2b\lambda_2 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c} &= -2c\lambda_3 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} &= g(x_1, x_2) - a^2 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} &= x_1 - b^2 = 0,\\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_3} &= x_2 - c^2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

En muchos sentidos estas condiciones se parecen a las derivadas anteriores para el caso de una restricción de igualdad (véase la ecuación 2.51). Por ejemplo, las tres condiciones finales repiten solamente las tres restricciones revisadas. Esto garantiza que cualquier solución cumpla estas condiciones. Las dos primeras ecuaciones también se parecen a las condiciones óptimas desarrolladas con anterioridad. Si λ_2 y λ_3 fueran iguales a 0 las condiciones serían, de hecho, idénticas. Pero aquí la presencia de los multiplicadores de Lagrange adicionales en las expresiones señala que las condiciones óptimas acostumbradas podrían no sostenerse con exactitud.

Lasitud complementaria

Las tres ecuaciones que implican las variables a, b y c ofrecen los discernimientos más importantes sobre la naturaleza de las soluciones de problemas que implican restricciones de desigualdad. Por ejemplo, la tercera línea de la ecuación 2.79 implica que, en la solución óptima, tanto λ_1 como a deben ser iguales a 0.[13] En el segundo caso ($a = 0$), la restricción $g(x_1, x_2) = 0$ se sostiene con exactitud, y el valor calculado de λ_1 indica su importancia relativa para la función objetivo f. Por otro lado, si $a \neq 0$, entonces $\lambda_1 = 0$, lo que demuestra que disponer de cierta lasitud en la restricción implica que su valor para el objetivo es de 0. En el contexto del consumo esto significa que si

[13] No examinaremos el extraño caso en que estas dos variables son iguales a 0.