Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Actuaría

Series de Tiempo

Primer Examen Parcial

Equipo

- García Flores Luis Edgar
- Rodríguez Mondragón Jessica Fernanda
- Sánchez López Katya Pamela

Semestre 2020-2

1. Ejercicio 1

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias.

- *a)* $\triangle Y_t = 7$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle Y_t = 7\\ \triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1} = 7\end{array}\right. \Rightarrow\ Y_t - Y_{t-1} - 7 = 0$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $Y_{t-1} - 7 = 0$ entonces

$$A\alpha^t - A\alpha^{t-1} = 0$$

dividiendo entre α^{t-1}

$$\begin{aligned} A\alpha - A = A(\alpha - 1) &= 0\\ \Rightarrow \alpha - 1 &= 0\\ \Rightarrow \alpha &= 1\end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(h)} = A(1)^t = A$$

- Ahora veamos la solución particular y recordemos que $Y_t - Y_{t-1} = 7$ si $Y_t^{(p)} = K$

$$\Rightarrow\ K - K = 7\ pero\ 0 \neq 7$$

si

$$Y_t^{(p)} = Kt \Rightarrow \qquad \begin{aligned} kt - k(t-1) &= 7\\ kt - kt + k &= 7\\ k &= 7\end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(p)} = 7t$$

$$\therefore\ \ \mathbf{Y_t^{(g)}} = \mathbf{Y_t^{(h)}} + \mathbf{Y_t^{(p)}} = \mathbf{A} + \mathbf{7t}$$

.

- *b)* $\triangle Y_t = 0{,}3Y_t$

$$\begin{aligned}\triangle Y_t &= 0{,}3Y_t\\ \triangle Y_t &= Y_t - Y_{t-1} = 0{,}3Y_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y_t - 0{,}3Y_t - Y_{t-1} &= 0\\ 0{,}7Y_t - Y_{t-1} &= 0\end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $0{,}7Y_t - Y_{t-1} = 0$ entonces

$$0{,}7A\alpha^t - A\alpha^{t-1} = 0$$

dividiendo entre α^{t-1}

$$\begin{aligned} 0{,}7A\alpha - A = A(0{,}7\alpha - 1) &= 0 \\ \Rightarrow 0{,}7\alpha - 1 &= 0 \\ \Rightarrow 0{,}7\alpha &= 1 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(h)} = A(\frac{10}{7})^t$$

- Ahora veamos la solución particular y recordemos que $0{,}7Y_t - Y_{t-1} = 0$ si $Y_t^{(p)} = K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ 0{,}7k - k &= 0 \\ -0{,}3k &= 0 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(p)} = 0$$

$$\therefore\ \mathbf{Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A\left(\frac{10}{7}\right)^t}$$

.

- $c)$ $\triangle Y_t = 2Y_t - 9$

$$\begin{aligned} \triangle Y_t &= 2Y_t - 9 & \Rightarrow\ -2Y_t + Y_t - Y_{t-1} - 9 &= 0 \\ \triangle Y_t &= Y_t - Y_{t-1} = 2Y_t - 9 & -Y_t - Y_{t-1} + 9 &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $-Y_t - Y_{t-1} + 9 = 0$ entonces

$$-A\alpha^t - A\alpha^{t-1} = 0$$

dividiendo entre α^{t-1}

$$\begin{aligned} -A\alpha - A = -A(\alpha + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(h)} = A(-1)^t$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $-Y_t - Y_{t-1} = -9$ si $Y_t^{(p)} = k$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -k - k &= -9 \\ -2k &= -9 \\ k &= \frac{-9}{-2} \\ k &= 4{,}5 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(p)} = 4,5$$

$$\therefore \;\; \mathbf{Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A(-1)^t + 4{,}5}$$

- *d)* $\triangle Y_t = 1$; $Y_0 = 10$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle Y_t = 1\\ \triangle Y_t = Y_t - Y_{t-1} = 1\end{array}\right. \Rightarrow \; -Y_t - Y_{t-1} - 1 = 0$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $Y_t - Y_{t-1} - 1 = 0$ entonces

$$A\alpha^t - A\alpha^{t-1} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 1$$

$$\therefore \; Y_t^{(h)} = A$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $Y_t - Y_{t-1} = 1$
si $Y_t^{(p)} = k$

$$\Rightarrow \; K - K = 7 \; pero \; 0 \neq 1$$

si

$$Y_t^{(p)} = Kt \Rightarrow \qquad \begin{aligned} kt - k(t-1) &= 1\\ kt - kt + k &= 1\\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \; Y_t^{(p)} = t$$

$$\therefore \;\; Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A + t$$

pero $Y_0 = 10$, entonces

$$si \; t = 0 \;\Rightarrow\; A + 0 = A \;\Rightarrow\; A = 10$$

$$\therefore \;\; \mathbf{Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = 10 + t}$$

- *e)* $Y_{t+1} = \alpha Y_t$; $Y_0 = \beta$

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= \alpha Y_t\\ \Rightarrow \; -\alpha Y_t + Y_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\theta^t$ y $-\alpha Y_t + Y_{t+1} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} -\alpha A\theta^t + A\theta^{t+1} &= 0\\ \Rightarrow \; -\alpha A + A\theta &= 0\\ \Rightarrow \; -A(\alpha - \theta) &= 0\\ \Rightarrow \; \theta &= \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \; Y_t^{(h)} = A\alpha^t$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $-\alpha Y_t + Y_{t+1} = 0$
  si

$$Y_t^{(p)} = k \Rightarrow \qquad \begin{aligned} -\alpha k + k &= 0 \\ -k(\alpha - 1) &= 0 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \; Y_t^{(p)} = 0$$

$$\therefore \; Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A\alpha^t$$

pero $Y_0 = \beta$ entonces

$$t = 0 \Rightarrow \; A\alpha^0 = A \; \Rightarrow \; A = \beta$$

$$\therefore \; \mathbf{Y_t^{(g)}} = \mathbf{Y_t^{(h)}} + \mathbf{Y_t^{(p)}} = \beta\alpha^{\mathbf{t}}$$

- *g)* $Y_{t+1} + 3Y_t = 4$; $Y_0 = 4$

$$\begin{aligned} Y_{t+1} + 3Y_t &= 4 \\ Y_{t+1} + 3Y_t - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $Y_{t+1} + 3Y_t - 4 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} A\alpha^{t+1} + 3A\alpha^t &= 0 \\ \Rightarrow \; A\alpha + 3A &= 0 \\ \Rightarrow \; A(\alpha + 3) &= 0 \\ \Rightarrow \; \alpha &= -3 \end{aligned}$$

$$\therefore \; Y_t^{(h)} = A(-3)^t$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $Y_{t+1} + 3Y_t = 4$
  si

$$Y_t^{(p)} = k \Rightarrow \qquad \begin{aligned} k + 3k = 4 &= 4 \\ 4k &= 4 \\ K &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \; Y_t^{(p)} = 1$$

$$\therefore \; Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A(-3)^t + 1$$

pero $Y_0 = 4$ entonces

$$\begin{aligned} t = 0 \Rightarrow \; A(-3)^0 + 1 &= A + 1 \\ \Rightarrow \; A + 1 &= 4 \\ \Rightarrow \; A &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \; \mathbf{Y_t^{(g)}} = \mathbf{3(-3)^t + 1}$$

- *h*) $2Y_{t+1} - Y_t = 6$; $Y_0 = 7$

$$\begin{aligned} 2Y_{t+1} - Y_t &= 6 \\ 2Y_{t+1} - Y_t - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $2Y_{t+1} - Y_t - 6 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 2A\alpha^{t+1} - A\alpha^t &= 0 \\ \Rightarrow\ 2A\alpha - A &= 0 \\ \Rightarrow\ A(2\alpha - 1) &= 0 \\ \Rightarrow\ 2\alpha &= 1 \\ \Rightarrow\ \alpha &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(h)} = A0{,}5^t$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $2Y_{t+1} - Y_t = 6$ si

$$Y_t^{(p)} = k \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2k - k &= 6 \\ k &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(p)} = 6$$

$$\therefore\ Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A0{,}5^t + 6$$

pero $Y_0 = 7$ entonces

$$\begin{aligned} t = 0 \Rightarrow\ A0{,}5^0 + 6 &= A + 6 \\ \Rightarrow\ A + 6 &= 7 \\ \Rightarrow\ A &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathbf{Y_t^{(g)} = 0{,}5^t + 6}$$

- *i*) $Y_{t+1} = 0{,}2Y_t + 4$; $Y_0 = 4$

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= 0{,}2Y_t + 4 \\ Y_{t+1} - 0{,}2Y_t &= 4 \\ Y_{t+1} - 0{,}2Y_t - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Recordemos que $Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)}$

- Si $Y^{(h)} = A\alpha^t$ y $Y_{t+1} - 0{,}2Y_t - 4 = 0$ entonces

$$\begin{aligned} A\alpha^{t+1} - 0{,}2A\alpha^t &= 0 \\ \Rightarrow\ A\alpha - 0{,}2A &= 0 \\ \Rightarrow\ A(\alpha - 0{,}2) &= 0 \\ \Rightarrow\ \alpha &= 0{,}2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(h)} = A0{,}2^t$$

- Ahora veamos la solución particular y sea $Y_{t+1} - 0{,}2Y_t = 4$
  si

$$Y_t^{(p)} = k \Rightarrow \qquad \begin{aligned} k - 0{,}2k &= 4 \\ 0{,}8k &= 4 \\ k &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore\ Y_t^{(p)} = 5$$

$$\therefore\ Y_t^{(g)} = Y_t^{(h)} + Y_t^{(p)} = A0{,}2^t + 5$$

pero $Y_0 = 4$ entonces

$$\begin{aligned} t = 0 \Rightarrow\ & A0{,}2^0 + 5 = A + 5 \\ \Rightarrow\ & A + 5 = 4 \\ \Rightarrow\ & A = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathbf{Y_t^{(g)} = 0{,}2^t + 5}$$

2. Ejercicio 2

Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias:

- $Y_{t+2} - Y_{t+1} + 0{,}5Y_t = 2$
  Sol.
  Primero, encontramos la *solución homogénea*

  $$Y_{t+2} - Y_{t+1} + 0{,}5Y_t = 0$$

  Sabemos que la solución homogénea de una ecuación en diferencias tiene la forma:

  $$A\alpha^t$$

  Así, sustituímos

  $$A\alpha^{t+2} - A\alpha^{t+1} + 0{,}5A\alpha^t = 0$$

  Dividimos, entre $A\alpha^t$

  $$\alpha^2 - \alpha + 0{,}5 = 0$$

  Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

  $$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(0{,}5)}}{2}$$

  Con ello obtenemos:

  $$\alpha_1 = \frac{1+i}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1-i}{2}$$

  Dado que son raíces negativas, utilizando el teorema de Moivre, la solución homogénea es de la forma:

  $$Y_t^{(h)} = \beta_1 r^t \cos(\theta t + \beta_2)$$

  Con β_1, β_2 constantes y $r = (0{,}5)^{\frac{1}{2}} = 0{,}707106$
  Por otro lado, θ se elige tal que:

  $$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{1}{2(0{,}707106)}\\ &= 0{,}707106\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}\Rightarrow \theta &= cos^{-1}(0{,}707106)\\ &= 0{,}78539926\end{aligned}$$

  Así, la solución homogénea es:

  $$Y_t^{(h)} = \beta_1(0{,}7071)^t \cos(0{,}7853t + \beta_2)$$

Ahora, encontramos la *Solución Particular*. Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} K - K + 0{,}5K &= 2 \\ \Rightarrow K &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = \beta_1(0{,}7071)^t \cos(0{,}7853t + \beta_2) + 4$$

- $Y_{t+2} - 4Y_{t+1} + 4Y_t = 7$
  Sol.
  Solución homogénea: De forma análoga a la primera ecuación en diferencias, utilizaremos el hecho de que la forma de la solución homogéna es de la forma: $A\alpha^t$.Sustituyendo

$$A\alpha^{t+2} - 4A\alpha^{t+1} + 4A\alpha^t = 0$$

Dividimos, entre $A\alpha^t$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$$

Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Hay una segunda solución homogénea, dada por $t(2)^t$. (Se puede demostrar sustituyendo la forma $t(2)^t$ en la ecuación en diferencias). Así la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = A_1 2^t + A_2 t(2)^t$$

Solución Particular
Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} K - 4K + 4K &= 7 \\ \Rightarrow K &= 7 \end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = A_1 2^t + A_2 t(2)^t + 7$$

- $Y_{t+2} + 0{,}5Y_{t+1} - 0{,}5Y_t = 5$
  Sol.
  Solución homogénea: De forma análoga a los anteriores incisos, utilizaremos el hecho de que la forma de la solución homogéna es de la forma: $A\alpha^t$.Sustituyendo

$$A\alpha^{t+2} + 0{,}5A\alpha^{t+1} - 0{,}5A\alpha^t = 0$$

Dividimos, entre $A\alpha^t$

$$\alpha^2 + 0{,}5\alpha - 0{,}5 = 0$$

Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

$$\alpha = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{(-0{,}5)^2 + 4(0{,}5)}}{2}$$

De lo que se tiene:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad\qquad \alpha_2 = -1$$

Por tanto, la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = A_1(-1)^t + A_2(\frac{1}{2})^t$$

Solución Particular
Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K &= 5 \\ \Rightarrow K &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = A_1(-1)^t + A_2(\frac{1}{2})^t + 5$$

- $Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + 3Y_t = 4$
  Sol.
  Solución homogénea Sabemos que la solución homogénea de una ecuación en diferencias tiene la forma:

  $$A\alpha^t$$

  Así, sustituímos

  $$A\alpha^{t+2} - 2A\alpha^{t+1} + 3A\alpha^t = 0$$

  Dividimos, entre $A\alpha^t$

  $$\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$$

  Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

  $$\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)}}{2}$$

  Con ello obtenemos:

  $$\alpha_1 = 1 + i\sqrt{2} \qquad\qquad \alpha_2 = 1 - i\sqrt{2}$$

  Dado que son raíces negativas, utilizando el teorema de Moivre, la solución homogénea es de la forma:

  $$Y_t^{(h)} = \beta_1 r^t \cos(\theta t + \beta_2)$$

Con β_1, β_2 constantes y $r = (3)^{\frac{1}{2}} = 1{,}7320$
Por otro lado, θ se elige tal que:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{2}{2(1{,}7320)} \\ &= 0{,}577350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta &= cos^{-1}(0{,}5773) \\ &= 0{,}955316 \end{aligned}$$

Así, la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = \beta_1(1{,}7320)^t \cos(0{,}9553t + \beta_2)$$

Solución Particular. Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} K - 2K + 3K &= 4 \\ \Rightarrow K &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = \beta_1(1{,}7320)^t \cos(0{,}9553t + \beta_2) + 2$$

- $Y_{t+2} + 3Y_{t+1} - 1{,}75Y_t = 9$ con $(Y_0 = 6; Y_1 = 3)$
  Sol.
  Solución homogénea Sabemos que la solución homogénea de una ecuación en diferencias tiene la forma:

$$A\alpha^t$$

Así, sustituímos

$$A\alpha^{t+2} + 3A\alpha^{t+1} - 1,75A\alpha^t = 0$$

Dividimos, entre $A\alpha^t$

$$\alpha^2 + 3\alpha - 1{,}75 = 0$$

Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 + 4(1{,}75)}}{2}$$

Con ello obtenemos:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-7}{2}$$

Así, la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = A_1(\frac{1}{2})^t + A_2(\frac{-7}{2})^t$$

Solución Particular. Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$K + 3K - 1{,}75K = 9$$
$$\Rightarrow K = 4$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = A_1(\frac{1}{2})^t + A_2(\frac{-7}{2})^t + 4$$

Ahora, para conseguir las constantes A_1, A_2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando las condiciones iniciales:

$$A_1 \underbrace{(\frac{1}{2})^0}_{1} + A_2 \underbrace{(\frac{-7}{2})^0}_{1} + 4 = 6$$
$$\Rightarrow A_1 + A_2 = 2$$
$$A_1(\frac{1}{2}) + A_2(\frac{-7}{2}) + 4 = 3$$

De allí, se tiene que $A_1 = 2 - A_2$. Así,

$$\frac{2 - A_2 - 14 + 7A_2}{2} = 1$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{5}{3}$$

Y con ello, $A_1 = \frac{1}{3}$

$$\therefore Y_t^{(g)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^t + \frac{5}{3}(\frac{-7}{2})^t + 4$$

- $Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + 2Y_t = 1$ con $(Y_0 = 3; Y_1 = 4)$
  Sol.
  Solución homogénea Sabemos que la solución homogénea de una ecuación en diferencias tiene la forma:

$$A\alpha^t$$

Sustituímos

$$A\alpha^{t+2} - 2A\alpha^{t+1} + 2A\alpha^t = 0$$

Dividimos, entre $A\alpha^t$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$$

Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

$$\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)}}{2}$$

Con ello obtenemos:

$$\alpha_1 = 1 + i \qquad \alpha_2 = 1 - i$$

Dado que son raíces negativas, utilizando el teorema de Moivre, la solución homogénea es de la forma:

$$Y_t^{(h)} = \beta_1 r^t \cos(\theta t + \beta_2)$$

Con β_1, β_2 constantes y $r = (2)^{\frac{1}{2}} = 1{,}414213$
Por otro lado, θ se elige tal que:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{2}{2(1{,}4142)} \\ &= 0{,}707106\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \theta &= cos^{-1}(0{,}707106) \\ &= 0{,}785399\end{aligned}$$

Así, la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = \beta_1(1{,}4142)^t \cos(0{,}785399t + \beta_2)$$

Solución Particular. Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned}K - 2K + 3K &= 1 \\ \Rightarrow K &= 1\end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = \beta_1(1{,}4142)^t \cos(0{,}785399t + \beta_2) + 1$$

Ahora, para conseguir las constantes β_1, β_2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\beta_1 \cos(\beta_2) + 1 &= 3 \\ \beta_1(1{,}4142)\cos(0{,}785399 + \beta_2) + 1 &= 4 \\ \Rightarrow \beta_1 &= \frac{2}{cos(\beta_2)}\end{aligned}$$

Así, sustituyendo β_1 se tiene que

$$\frac{2{,}8284}{cos(\beta_2)} cos(0{,}7853 + \beta_2) = 3$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Tenemos que

$$cos(0{,}7853) - sen(0{,}785399)tan(\beta_2) = \frac{3}{2{,}828426}$$

$$tan(\beta_2) = \frac{cos(0{,}7853) - \frac{3}{2{,}828426}}{sen(0{,}785399)}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = tan^{-1}\left(\frac{cos(0{,}7853) - \frac{3}{2{,}828426}}{sen(0{,}785399)}\right)$$

$$\beta_2 = -0{,}46364842$$

Por lo tanto, $\beta_1 = 2{,}236068$. Y la solución general es:

$$Y_t^{(g)} = (2{,}236068)(1{,}4142)^t \cos(0{,}785399t - 0{,}46364842) + 1$$

- $Y_{t+2} - Y_{t+1} - 0{,}25Y_t = 2$ con $(Y_0 = 4; Y_1 = 7)$
  Sol.
  Solución homogénea Sabemos que la solución homogénea de una ecuación en diferencias tiene la forma:

$$A\alpha^t$$

Así, sustituímos

$$A\alpha^{t+2} - A\alpha^{t+1} - 0{,}25A\alpha^t = 0$$

Dividimos, entre $A\alpha^t$

$$\alpha^2 - \alpha - 0{,}25 = 0$$

Encontramos a la raíz de esa ecuación, con la fórmula general:

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 + 4(0{,}25)}}{2}$$

Con ello obtenemos:

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Así, la solución homogénea es:

$$Y_t^{(h)} = A_1(\frac{1+\sqrt{2}}{2})^t + A_2(\frac{1-\sqrt{2}}{2})^t$$

Solución Particular. Proponemos $Y_t^{(p)} = K$ con K una constante. Así, tenemos

$$\begin{aligned} K - K - 0{,}25K &= 2 \\ &\Rightarrow K = -8 \end{aligned}$$

Por tanto, la *solución general* es:

$$Y_t^{(g)} = A_1(\frac{1+\sqrt{2}}{2})^t + A_2(\frac{1-\sqrt{2}}{2})^t - 8$$

Ahora, para conseguir las constantes A_1, A_2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} Y_t^{(g)} &= A_1 + A_2 - 8 = 4 \\ Y_t^{(g)} &= A_1(\frac{1+\sqrt{2}}{2}) + A_2(\frac{1-\sqrt{2}}{2}) - 8 = 7 \end{aligned}$$

De allí, se tiene que $A_1 = 12 - A_2$. Así,

$$(12 - A_2)\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) + A_2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = 15$$

$$\Rightarrow A_2 = 6 - \frac{9}{\sqrt{2}}$$
$$A_1 = 6 + \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore Y_t^{(g)} = \left(6 - \frac{9}{\sqrt{2}}\right)(\frac{1+\sqrt{2}}{2})^t + \left(6 + \frac{9}{\sqrt{2}}\right)(\frac{1-\sqrt{2}}{2})^t - 8$$

3. Ejercicio 3

Pruebe que para $|a| > 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t = \frac{-aLY_t}{1-aL}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t &= (aL)^o Y_t + (aL)^{-1}Y_t + (aL)^{-2}Y_t + (aL)^{-3}Y_t + \ldots + \ldots \\ &= (1 + aL^{-1} + aL^{-2} + aL^{-3} + \ldots + \ldots)Y_t\end{aligned}$$

multiplicando por $(1 - aL)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(1-aL)\sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t &= (1-aL)(1 + aL^{-1+}aL^{-2} + aL^{-3} + \ldots + \ldots)Y_t \\ &= [(1 + aL^{-1+}aL^{-2} + aL^{-3} + \ldots + \ldots) \\ &- (aL + 1 + aL^{-1} + aL^{-2} + \ldots + \ldots)]Y_t \\ &= (1 - 1 - aL + aL^{-1-}aL^{-1} + aL^{-2} - aL^{-3} + aL^{-3} + \ldots - \ldots)Y_t \\ &= -aLY_t\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}(1-aL)\sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t &= -aLY_t \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t &= \frac{-aLY_t}{(1-aL)}\end{aligned}$$

notemos que para evitar indeterminaciones se debe cumplir que $|a| > 1$

$$\therefore \sum_{i=0}^{\infty}(aL)^{-i}Y_t = \frac{-aLY_t}{(1-aL)}$$

$\square$

4. Ejercicio 4

Supongase que la oferta de dinero en la economía puede representarse por un proceso m_t que tiene la forma $m_t = m + pm_{t-1} + e_t$, donde m es una constante y $0 < p < 1$, muestre que es posible expresar m_{t+n} en términos del valor conocido m_{t+n} y la sucesión $\{e_{t+1}, e_{t+1}, ..., e_{t+n}\}$.

Demostración. Sabemos que si $|m| < 1$ en $m_t = m + pm_{t-1} + e_t$ entonces:

$$m_t = \frac{m}{1-p} + \sum_{i=0}^{\infty} p^i e_{t-i}$$

Ahora para m_{t+n}:

$$\begin{aligned} m_{t+n} &= m + pm_{t+n-1} + e_{t+n} \\ m_{t+1} &= m + pm_{t+1-1} + e_{t+1} \\ &= m + pm_t + e_{t+1} \\ &= m + p(m + pm_{t-1} + e_t) + e_{t+1} \\ &= m + pm + p^2 m_{t-1} + pe_t + e_{t+1} \end{aligned}$$

cuando n=2:

$$\begin{aligned} m_{t+2} &= m + pm_{t+2-1} + e_{t+2} \\ &= m + pm_{t+1} + e_{t+2} \\ &= m + p(m + pm + p^2 m_{t-1} + pe_t + e_{t+1}) + e_{t+2} \\ &= m + pm + p^2 m + p^3 m_{t-1} + p^2 e_t + pe_{t+1} + e_{t+2} \end{aligned}$$

cuando n=3:

$$\begin{aligned} m_{t+3} &= m + pm_{t+3-1} + e_{t+3} \\ &= m + pm_{t+2} + e_{t+3} \\ &= m + p(m + pm + p^2 m + p^3 m_{t-1} + p^2 e_t + pe_{t+1} + e_{t+2}) + e_{t+3} \\ &= m + pm + p^2 m + p^3 m + p^4 m_{t-1} + p^3 e_t + p^2 e_{t+1} + pe_{t+2} + e_{t+3} \end{aligned}$$

y sucesivamente:

$$m_{t+n} = m+pm+p^2m+p^3m+p^4m+...+e_{t+n}+pe_{t+n-1}+p^2e_{t+n-2}+p^3e_{t+n-3}+p^4e_{t+n-4}+...+p^n e_{t+n-n}$$

por lo que el primer termino de la ecuación anterior se puede expresar como:

$$m + pm + p^2 m + p^3 m + p^4 m + ... = \frac{m}{1-p}$$

y el segundo como:

$$e_{t+n} + pe_{t+n-1} + p^2 e_{t+n-2} + p^3 e_{t+n-3} + p^4 e_{t+n-4} + ... + p^n e_{t+n-n} = \sum_{i=0}^{\infty} p^i e_{t+n-i}$$

en donde e_{t+n} es la sucesión $\{e_{t+1}, e_{t+2}, ..., e_{t+n}\}$.

Por lo que $m_{t+n} = \frac{m}{1-p} + \sum_{i=0}^{\infty} p^i e_{t+n-i}$. □

5. Ejercicio 5

Suponga que un investigador estima la siguiente relación para la tasa de inflación $\pi_t = -0 \cdot 05 + 0 \cdot 7\pi_{t-1} + 0 \cdot 6\pi_{t-2}$, si la inflación para el periodo 0 y 1 fue de $10\,\%$ y $11\,\%$ respectivamente. Encuentre la solución homogénea, la particular y la general para este sistema.

Solución:

$$\text{Sea } \pi_t 0 \cdot 7\pi_{t-1} + 0 \cdot 6\pi_{t-2} = -0 \cdot 05$$
$$\text{con las condiciones iniciales } \pi_0 = 0 \cdot 1, \pi_1 = 0 \cdot 11$$

Sabemos que la solución es $\pi^{(g)} = \pi^{(h)} + \pi^{(p)}$
Entonces para $\pi^{(h)}$:

$$\pi_t^{(h)} = \pi_t - 0 \cdot 7\pi_{t-1} - 0 \cdot 6\pi_{t-2} = 0$$
$$A\alpha^t - 0 \cdot 7A\alpha^{t-1} - 0 \cdot 6A\alpha^{t-2} = 0$$
$$A\alpha^2 - 0 \cdot 7A\alpha - 0 \cdot 6A = 0$$
$$\alpha^2 - 0 \cdot 7\alpha - 0 \cdot 6 = 0$$

Entonces para α:

$$\alpha_1 = \frac{-(-0 \cdot 7) + \sqrt{(-0 \cdot 7)^2 - 4(1)(-0 \cdot 6)}}{2(1)} = \frac{6}{5}$$
$$\alpha_2 = \frac{-(-0 \cdot 7) - \sqrt{(-0 \cdot 7)^2 - 4(1)(-0 \cdot 6)}}{2(1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi^{(h)} = A_1 \left(\frac{6}{5}\right)^t + A_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t$$

Ahora para $\pi_t^{(p)} = k$ y sustituyendo:

$$k - 0 \cdot 7k - 0 \cdot 6k = -0{,}05$$
$$k = \frac{-0 \cdot 05}{-0 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Así:

$$\pi_t^{(p)} = \frac{1}{6}$$

Entonces $\pi^{(g)} = \pi^{(h)} + \pi^{(p)}$:

$$\pi_t^{(g)} = A_1 \left(\frac{6}{5}\right)^t + A_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6}$$

Sustituyendo con las condiciones iniciales:

$$\pi_0 = A_1 \left(\frac{6}{5}\right)^0 + A_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{6} = A_1 + A_2 + \frac{1}{6} = 0 \cdot 10$$
$$\pi_1 = A_1 \left(\frac{6}{5}\right)^1 + A_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{6} = \frac{6}{5}A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{6} = 0 \cdot 11$$

el sistema de ecuaciones queda como:

$$A_1 + A_2 = -\frac{1}{15}$$
$$\frac{6}{5}A_1 - \frac{1}{2}A_2 = -\frac{17}{300}$$

el cual tiene solución:

$$A_1 = -\frac{9}{170}$$

$$A_2 = -\frac{7}{510}$$

Así, la solución de la ecuación es la siguiente:

$$\pi_t^{(g)} = \left(-\frac{9}{170}\right)\left(\frac{6}{5}\right)^t + \left(-\frac{7}{510}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{6}$$

6. Ejercicio 7

Considere la ecuación en diferencias de primer grado $Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $|a_1| < 1$, sin condición inicial. Muestre que la solución general será:

$$y_t = A * a_1^t + \frac{a_t}{1 - a_t} + \sum_{i=0}^{t} a_1^t \varepsilon_t$$

Demostración. .

$Sea\ \ t = 1 \implies$

$$Y_1 = a_0 + a_1 Y_0 + \varepsilon_1$$

$Sea\ \ t = 2 \implies$

$$\begin{aligned} Y_2 &= a_0 + a_1 Y_1 + \varepsilon_2 \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_1 Y_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 Y_0 + a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$Sea\ \ t = 3 \implies$

$$\begin{aligned} Y_3 &= a_0 + a_1 Y_2 + \varepsilon_3 \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 Y_0 + a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 Y_0 + a_1^2 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$Sea\ \ t = 4 \implies$

$$\begin{aligned} Y_4 &= a_0 + a_1 Y_3 + \varepsilon_4 \\ &= a_0 + a_1(a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 Y_0 + a_1^2 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon 4 \\ &= a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_0 a_1^2 + a_0 a_1^3 + a_1^4 Y_0 + a_1^3 \varepsilon_1 + a_1^2 \varepsilon_2 + a_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \end{aligned}$$

$\vdots$

$Sea\ \ t = t \implies$

$$\begin{aligned} Y_t = a_1^t Y_0 + a_0 a_1^{t-1} + a_0 a_1^{t-2} + \ldots + a_0 a_1^{t-(t-2)} + a_0 a_1^{t-(t-1)} + a_0 a_1^{t-t} \\ + a_1^0 \varepsilon_t + a_1^1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + a_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots + a_1^t \varepsilon_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Y_t = a_1^t Y_0 + a_0 a_1^{t-1} + a_0 a_1^{t-2} + \ldots + a_0 a_1^2 + a_0 a_1 + a_0 \\ + \varepsilon_t + a_1^1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + a_1^t \varepsilon_0 \end{aligned}$$

veamos por partes la ecuación

- Primero veamos que si $a_1^t Y_0 = 0 \Rightarrow a_1^t A \alpha^0 = 0 \Rightarrow a_1^t Y_0 = A a_1^t$
- Luego veamos que

$$a_0 a_1^{t-1} + a_0 a_1^{t-2} + \ldots + a_0 a_1^2 + a_0 a_1 + a_0 = \left(\sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \right)$$

ahora si renombramos esta ecuación tenemos

$$S = a_0 \left(\sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \right)$$

luego

$$\begin{aligned} a_1 S &= a_0 a_1 \left(\sum_{i=0}^{t-1} a_1^i \right) \\ &= a_0 \left(\sum_{i=0}^{t} a_1^i \right) \end{aligned}$$

si restamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} S - a_1 S &= a_0 \sum_{i=0}^{t-1} a_1^i - a_0 \sum_{i=0}^{t} a_1^i \\ &= a_0 - a_0 a_1^t \end{aligned}$$

$$S(1 - a_1) = a_0(1 - a{}^{t}{}_{1)}$$

$$S = \frac{a_0(1 - a_1^t)}{1 - a_1}$$

si $\lim_{t \to \infty}(a_1^t) = 0$ entonces

$$S = \frac{a_0}{1 - a_1}$$

- Por último veamos que

$$\varepsilon_t + a_1^1 \varepsilon_{t-1} + a_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + a_1^t \varepsilon_0 = \sum_{i=0}^{t} a_1^i \varepsilon_t$$

Por lo tanto

$$y_t = A * a_1^t + \frac{a_t}{1 - a_t} + \sum_{i=0}^{t} a_1^t \varepsilon_t$$

$\square$

7. Ejercicio 8

Considere la ecuación en diferencias homogénea de segundo grado $Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2}$ con $a_1^2 + 4a_2 > 0$; muestre que la solución a esta ecuación tiene la forma $Y_t = A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2$ con α_1 y α_2 las soluciones de la ecuación $\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 = 0$

Dem
Se tiene que

$$Y_t - a_1 Y_{t-1} - a_2 Y_{t-2} = 0$$

Además, en clase vimos que se puede esperar que la solución homogénea sea de la forma

$$Y_t = A\alpha^t$$

Dado lo anterior, podemos sustituir en nuestra Ecuació de diferencias de la siguiente forma

$$A\alpha^t - a_1 A\alpha^{t-1} - a_2 A\alpha^{t-2} = 0$$

Dividiendo entre $A\alpha^{t-2}$ se tiene que

$$\alpha^2 - a_1\alpha - a2 = 0$$

α es de la forma:

$$\alpha = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 + 4(a_2)}}{2}$$

α es un real positivo dado que $a_1^2 + 4a_2 > 0$. Para demostrar que la combinación lineal de ambas soluciones es solución, susituiremos la forma $Y_t = A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t$ en la ecuación en diferencias. Así,

$$A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t = a_1[A_1(\alpha_1)^{t-1} + A_2(\alpha_2)^{t-1}] + a_2[A_1(\alpha_1)^{t-2} + A_2(\alpha_2)^{t-2}]$$

Reagrupamos términos

$$A_1\left[(a_1)^t - a_1(a_1)^{t-1} - a_2(a_1)^{t-2}\right] + A_2\left[(a_2)^t - a_1(a_2)^{t-1} - a_2(a_2)^{t-2}\right] = 0$$

Dado que α_1 y α_2 son soluciónes independientes de la ecuación en diferencias, entonces ambos lados de la igualdad son 0, y por tanto se cumple que la combinación lineal de ellas es solución.

$$Y_t^t = A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t$$

8. Ejercicio 9

Muestre que un proceso de caminata aleatoria con tendencia no es un proceso de ruido blanco

Dem.

Definimos una *caminata aleatoria con tendencia* como $S_t = t\alpha + \sum_i^t \varepsilon_i$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ruido blanco fuerte.Veamos si una caminata aletaoria con tendencia cumple con las propiedades que definen a ruido blanco:

- $$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}(t\alpha + \sum_i^t \varepsilon_i) = \underbrace{\mathbb{E}(t\alpha)}_{t\alpha \text{ es una constante}} + \underbrace{\mathbb{E}(\sum_i^t \varepsilon_i)}_{\mathbb{E}(\varepsilon_t)=0 \quad \forall t\in\mathbb{Z}} = t\alpha + 0 \neq 0$$

Basta con que $\mathbb{E}(S_t) \neq 0$ para que $\{S_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ no cumpla con las propiedades que definen a un ruido blanco. Así, una caminata aleatoria con tendencia **no es ruido blanco débil y por tanto tampoco ruido blanco fuerte.**

9. Ejercicio 10

Sea $\{\varepsilon_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico normal independientemente distribuido, i.e. para toda $t \in T$ $\varepsilon_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Sea $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ para todo $t \in T$.

Demostración.

- *a*) ¿Cuál es la distribibición de X_t?

  Sabemos que ε_t se distribuye como una normal tal que: $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu_t$ y $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_t^2$

  Ahora bien,
  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \mathbb{E}[\theta\varepsilon_{t-1}] \Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] + \theta\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}]$
  $\Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = \mu_t + \theta\mu_{t-1}$

  Calculando la función característica:

  $\varphi_{x_t}^{(t)} = \mathbb{E}\left[e^{itX_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it[\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}]}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it\varepsilon_t}\right]\mathbb{E}\left[e^{it\theta\varepsilon_{t-1}}\right] = \varphi_{\varepsilon_t}^{(t)}\varphi_{\varepsilon_{t-1}}^{(\theta t)}$
  De donde:
  $\varphi_{\varepsilon_t}^{(t)} = e^{i(\mu_t t - \frac{\sigma_t^2 t^2}{2})}$ y $\varphi_{\varepsilon_{t-1}}^{(t\theta)} = e^{i(\mu_{t-1}\theta t - \frac{\sigma_{t-1}^2 t^2\theta}{2})}$

  $\Rightarrow \varphi_{x_t}^{(t)} = e^{i(\mu_t t - \frac{\sigma_t^2 t^2}{2})}e^{i(\mu_{t-1}\theta t - \frac{\sigma_{t-1}^2 t^2\theta}{2})} = e^{(i\mu_t t - \frac{i\sigma_t^2 t^2}{2} + i\mu_{t-1}\theta t - \frac{i\sigma_{t-1}^2 t^2\theta}{2})} = e^{i\mu_t t + i\mu_{t-1}\theta t - (\frac{i\sigma_t^2 t^2}{2} + \frac{i\sigma_{t-1}^2 t^2\theta}{2})}$
  $= e^{it(\mu_t+\mu_{t-1}\theta) - it^2(\frac{\sigma_t^2}{2} + \frac{\sigma_{t-1}^2\theta}{2})}$

  $\therefore X_t \sim N(\mu_t + \mu_{t-1}\theta, (\frac{\sigma_t^2}{2} + \frac{\sigma_{t-1}^2\theta}{2})$

- *b*) ¿Es un proceso gaussiano?

  Sí, ya que su caracteristìca se expresó de la forma:

  $\varphi_x^{(t)} = exp(i\mu_t - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$

- *c*) Encontrar $Cov(X_t, X_s)$

$$
\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= \mathbb{E}\left[(x_t - \mu_t)(x_s - \mu_s)\right] \\
= \mathbb{E}\left[x_t x_s - \mu_t x_s - x_t\mu_s + \mu_t\mu_s\right] &= \mathbb{E}[x_t x_s] - \mathbb{E}[\mu_t]\mathbb{E}[x_s] - \mathbb{E}[x_t]\mathbb{E}[\mu_s] + \mathbb{E}[\mu_t]\mathbb{E}[\mu_s] \\
= \mu_t\mu_s - \mu_t\mu_s - \mu_t\mu_s + \mu_t\mu_s &= 0
\end{aligned}
$$

□

10. Ejercicio 12

¿Son las definiciones de proceso débilmente estacionario y cov-estacionario, análogas?

Definiciones

- **Proceso débilmente estacionario.** La sucesión de v.a.'s $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ es débilmente estacionaria sí y sólo sí para todo $h \in \mathbb{Z}$ se cumplen las siguientes propiedades:
  - **1.** $E(X_t) = E(X_{t+h}) = \mu$
  - **2.** $V(X_t) = V(X_{t+h}) = \sigma^2 < \infty$
  - **3.** $Corr(X_t, X_{t-k}) = \frac{Cov(X_t,X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}} = \frac{Cov(X_{t+h},X_{t+h-k})}{\sqrt{Var(X_{t+h})V(X_{t+h-k})}}$
    $= Corr(X_{t+h}, X_{t+h-k})$
- **Proceso cov-estacionario.** La sucesión de v.a.'s $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ es un proceso cov-estacionario sí y sólo sí para todo $h \in \mathbb{Z}$ se cumple que:
  - **I.** $E(X_t^2) < \infty$
  - **II.** $E(X_t) = m$
  - **III.** Para todo s, t, u, v, h tal que $|t-s| = |u-v|$
    1. $Cov(X_s, X_t) = Cov(X_u, X_v)$
    2. $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$

Demostración

- **Proceso Debilmente estacionario $\Longrightarrow$ Proceso Cov-Estacionario**
  - La propiedad **1.** $\Longrightarrow$ **II.**
  - La propiedad **2.** $\Longrightarrow$ **I.**, ya que existe la varianza y por tanto el segundo momento es finito.
  - La propiedad **3.** $\Longrightarrow$ **III.** ya que

$$Cov(X_t, X_t - k) = Cov(X_{t+h}, X_{t+h-k}) \iff |t-(t-k)| = |(t+h)-(t+h-k)|$$

- **Proceso Cov-estacionario $\Longrightarrow$ Proceso Debilmente estacionario.**
  - La propiedad **II.** $\Longrightarrow$ **1.**
  - La propiedad **I,II,III.** $\Longrightarrow$ **2.**, ya que dado I y II, la varianza existe. Por otro lado, dado que se cumple III se tiene que

$$\underbrace{cov(X_t, X_t)}_{var(X_t)} = \underbrace{cov(X_{t+h}, X_{t+h})}_{var(X_{t+h})} \Longrightarrow var(X_t) = var(X_{t+h}) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

  - La propiedad **III.** $\Longrightarrow$ **3.** ya que

$$cov(X_t) = cov(X_{t+h}) \Longrightarrow cov(X_{t-k}) = cov(X_{t-k+h})$$

  Además, dado lo argumentado en el anterior inciso se cumple que

$$var(X_t) = var(Xt+h) \Longrightarrow \sqrt{var(X_t)} = \sqrt{var(X_{t+h})}$$
$$\Longrightarrow \rho_k = \rho_{h-k}$$

Por lo tanto la definición de Proceso Debilmente estacionario es equivalente a la definición de Proceso Cov-Estacionario.

11. Ejercicio 13

Sea $\{X_t\}\, t \in Z$ un proceso estacionario con media μ_x y función de autocovarianza γ_x(h) muestre que $Y_t = \sum_{j=-k}^{k} a_j X_{t-j}$

Demostración. Para probar si Y_t es estacionario vamos a probar que su media y varianza son constantes en el tiempo y la función de autocorrelación es independiente del tiempo.

- *i)*

entonces el proceso tiene media constante

ii)

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j X_{t-j}\right) &= Var(a_k X_{t+k}) + \ldots + Var(a_k X_{t-k}) \\ &= a_{-k}^2 Var(X_{t+k}) + \ldots + a_k^2 Var(X_{t-k}) \end{aligned}$$

el proceso X_t es estacionario por lo tiene varianza constante y le llamaremos γ_0, entonces

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{j=-k}^{k} a_j X_{t-j}\right) &= a_{-k}^2 \gamma 0 + \ldots + a_k^2 \gamma 0 \\ &= \gamma_0 (a_{-k}^2 + \ldots + a_k^2) \\ &= \gamma_0 \sum_{j=-k}^{k} a_j^2 \end{aligned}$$

entonces el proceso tiene varianza constante

iii)

$$\begin{aligned} \gamma_h &= cov(Y_t, Y_{t+h}) \\ &= cov(\sum_{j=-k}^{k} a_j X_{t-j}, \sum_{i=-k}^{k} a_i X_{t-i+h} \\ &= \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} a_j a_j \gamma_h \end{aligned}$$

la ecuación anterior tiene sentido si $h \leq k$, si llamamos $C'' = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} a_j a_j$ tenemos

$$\gamma_h = c'' \gamma_h$$

entonces

$$\begin{aligned} \rho_h &= \frac{\sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} a_j a_j \gamma_h}{\sqrt{\gamma_0 \sum_{j=-k}^{k} a_j^2} * \sqrt{\gamma_0 \sum_{j=-k}^{k} a_j^2}} \\ &= \frac{\sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} a_j a_j \gamma_h}{\gamma_0 \sum_{j=-k}^{k} a_j^2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{\sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=-k}^{k} a_j a_j \gamma_h}{\gamma_0 \sum_{j=-k}^{k} a_j^2} & \text{si } 0 \leq h \leq k \\ 0 & \text{si } h \geq k \end{cases}$$

Por lo tanto el proceso Y_t *si es estacionario.*

$\square$

12. Ejercicio 14

Pruebe las siguientes propiedades de la función de autocovarianza:

- $\gamma_x(h) = \gamma_x(-h) \forall h \in \mathbb{Z}$
  $\gamma_x(0) \geq 0$

- —$\gamma_x(h)| \leq \gamma_x(0) \forall h \in \mathbb{Z}$
Dem.

- $\gamma_x(h) = \gamma_x(-h) \forall h \in \mathbb{Z}$
  Six$_t$ es un procesos cov-estacionario entonces se tiene que

$$cov(x_t, x_{t+h}) = cov(x_u, x_v)$$

  Con

$$|t - (t + h)| = |-h| = h$$

  Si elegimos $u = t$ y $v = t - h$

$$|u - v| = |t - (t - h)| = |h| = h$$

  Por tanto, dado que $|t - (t + h)| = |t - (t - h)|$

$$\begin{aligned} cov(x_t, x_{t+h}) &= cov(x_t, x_{t-h}) \\ \therefore \gamma_x(h) &= \gamma_x(-h) \forall h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- $\gamma_x(0) \geq 0$

$$\begin{aligned} \gamma_x(0) &= cov(x_t, x_{t+0}) \\ &= cov(x_t, x_t) \\ &= var(x_t) \\ &= \sigma^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- $|\gamma_x(h)| \leq \gamma_x(0) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |\gamma_x(h)| &= |cov(x_t, x_{t+h})| \\ &= |\mathbb{E}\left[(x_t - \mathbb{E}[x_t])(x_{t+h} - \mathbb{E}[x_{t+h}])\right]| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[(x_t - \mathbb{E}(x_t)\right]^2} \sqrt{\mathbb{E}\left[(x_{t+h} - \mathbb{E}(x_{t+h})\right]^2} \\ &= \sqrt{var(x_t)} \sqrt{var(x_{t+h})} \\ &= \sqrt{var(x_0)} \sqrt{var(x_0)} && \textit{por ser i.d.} \\ &= var(x_0) \\ &= \gamma_x(0) \end{aligned}$$

13. Ejercicio 15

Considere la sucesión de v.a.s $Z_t = Asen(wt + \Theta)$ donde A es una v.a. con media cero y varianza unitaria y θ se disdribuye uniformemente en el intervalo $[-\Pi, \Pi]$ independientemente de A ¿$\{Z_t\}_{t\in T}$ es un proceso de covarianza estacionaria?

Demostración. Recordemos que un proceso es cov.estacionario syss cumple cn tres propiedades: segundo momento finito, media constante, y $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$

- *I) Por demostrar que* $E(Z_t) < \infty$

$$\begin{aligned} E(Z_t^2) &= E[Asen(wt+\theta)^2] \\ &= E[A^2 sen^2(wt+\theta)] \\ &= E[A^2]E[sen^2(wt+\theta)] \end{aligned}$$

  veamos que por hipótesis $Var(A) = 1$ *y* $E(A) = 0 \Rightarrow Var(A) = E(A^2) - E^2(A) = E(A^2) = 1$ entonces

$$\begin{aligned} E(Z_t^2) &= E[A^2]E[sen^2(wt+\theta)] \\ &= (1)E[sen^2(wt+\theta)] \\ &= E[sen^2(wt+\theta)] \end{aligned}$$

  aplicando $sen^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\begin{aligned} E[sen^2(wt+\theta)] &= E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(wt+\theta)\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E[\cos 2(wt+\theta)] \end{aligned}$$

  Considerando la definición de esperanza y que θ *se distribuye en* $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E[\cos 2(wt+\theta)] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \theta \cos 2(wt+\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(2wt + 2\theta)\cos 2 \mid_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(2wt - 2\pi)\cos 2 + \frac{1}{2}\sin(2wt + 2\pi)\cos 2 \\ &= \frac{1}{2} < \infty \end{aligned}$$

$$\therefore \ el\ segundo\ momento\ es\ finito$$

- $II)$ Por demostrar que $E(Z_t) = m$

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E[Asen(wt+\theta)] \\ &= E(A)E[sen(wt+\theta)] \\ &= (0)E[sen(wt+\theta)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{La media es constante}$$

- $III)$ Por demostrar que $Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$

□

14. Ejercicio 16

$\{\varepsilon_t\} t \in T$ **ruido blanco débil. Sea** $X_t = \varepsilon_t + \theta t - 1\varepsilon_{t-1} + \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}$ **con** $\theta_2 \neq 0$ **para todo** $t \in T$**.**

Demostración.

- *a)* ¿Es $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso cov-estacionario?

Un proceso es cov-estacionario sí y sólo sí:
a)$\mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty$
b)$\mathbb{E}\left[X_t\right] = m$
c)$Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+h}, X_{s+h})$
d)$Cov(X_s, X_t) = Cov(X_u, X_v)$ tal que $|t-s| = |u-v|$

Empezaremos demostrando la propiedad d):
Sabemos que $X_t = \varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}$
Sea:
$X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \theta_t\varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}$

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_t+1) &= Cov(\varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}, X_{t+1}) \\
&= Cov(\varepsilon_t, X_{t+1}) + Cov(\theta_{t-1}\varepsilon_{t+1}, X_{t+1}) + Cov(\theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}, X_{t+1}) \\
&= Cov(\varepsilon_t, X_{t+1}) + \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t+1}, X_{t+1}) + \theta_{t-2}Cov(\varepsilon_{t-2}, X_{t+1}) \\
&= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta_t Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\
&+ \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1}) + \theta_{t-1}\theta_t Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) \\
&+ \theta_{t-1}^2 Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta_{t-2}Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1}) + \theta_{t-2}\theta_t Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t) \\
&+ \theta_{t-2}\theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1}) \\
&= \theta_t\sigma^2 + \theta_{t-1}^2 var(\epsilon_{t-1}) = \theta_t\sigma^2 + \theta_{t-1}^2\sigma^2
\end{aligned}$$

Sea: $X_{t+2} = \varepsilon_{t+2} + \theta_{t+1}\varepsilon_{t+1} + \theta_t\varepsilon_t$

$$\begin{aligned}
Cov(X_{t+1}, X_{t+2}) &= Cov(\varepsilon_{t+1} + \theta_t\varepsilon_t + \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}, X_{t+2}) \\
&= Cov(\varepsilon_{t+1}, X_{t+2}) + \theta_t Cov(\varepsilon_t, X_{t+2}) \\
&+ \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-1}, X_{t+2}) + \theta_t Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+2}) \\
&+ \theta_t Cov(\varepsilon_t, \theta_{t+1}\varepsilon_{t+1}) + \theta_t^2 Cov(\varepsilon_t\varepsilon_t) \\
&+ \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+2}) + \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-1}, \theta_{t+1}\varepsilon_{t+1}) \\
&+ \theta_{t-1}Cov(\varepsilon_{t-1}, \theta_t\varepsilon_t) \\
&= \theta_{t+1}\sigma^2 + \theta_t^2\sigma^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:
$Cov(X_t, X_t+1) = \theta_t\sigma^2 + \theta_{t-1}^2\sigma^2$
$Cov(X_{t+1}, X_{t+2}) = \theta_{t+1}\sigma^2 + \theta_t^2\sigma^2$
$\Rightarrow Cov(X_t, Xt+1) \neq Cov(X_{t+1}, X_{t+2})$ Por lo que $X_t = \varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}$ no es un proceso cov-estacionario.

□

15. Ejercicio 18

Se dice que el proceso AR(p) tiene condiciones de estacionariedad, pues si ciertas condiciones sobre sus parámetros no se cumplen, el proceso no es estacionario. Pruebe que las condiciones de estacionariedad para el proceso AR(1) se reducen a $|\phi| < 1$.
Demostración

Sea el modelo AR(1) $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco débil; para probar las condiciones de estacionariedad suponemos que el proceso es estacionario, es decir que su media y varianza no dependan de t, es decir:

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) = (\phi_1 Y_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t) = \phi_1 \mathbb{E}(Y_{t-1})$$

Ahora bien, al suponer que el proceso Y_t es estacionario debería cumplirse que $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_{t-1}) = \mu$ y por lo tanto:

$$\mu = \phi_1 \mu$$

$$(1 - \phi_1)\mu = 0$$

$$\mu = \frac{0}{1 - \phi_1} \Rightarrow \mu = 0$$

Así la media será 0 sí y sólo sí $\phi_1 \neq 1$.

Ahora, para la condición de la varianza:

$$Var(Y_t) = Var(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) = Var(\phi_1 Y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) = \phi_1^2 Var(Y_{t-1}) + \sigma^2$$

por lo que al ser estacionario se cumple que $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1}) = \gamma_0$, de esta manera:

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2$$
$$(1 - \phi_!^2)\gamma_0 = \sigma^2$$
$$\gamma_0 = \tfrac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

Dado que $\gamma_0 > 0$ entonces debe cumplir que:

$$1 - \phi_1^2 > 0 \Rightarrow \phi_1^2 < 1 \Rightarrow |\phi_1| < 1$$

Para la condición de autocorrelación:

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \mathbb{E}((\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)Y_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0$$
$$\gamma_2 = Cov(Y_t, Y_{t-2}) = \mathbb{E}((\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)Y_{t-2}) = \phi_1^2 \gamma_0$$
$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \mathbb{E}((\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)Y_{t-k}) = \phi_1^k \gamma_0 \text{ para k=1,2,3,...}$$

Así:

$$\rho_k = \tfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k$$

Por lo tanto las expresiones anteriores se reducen a la condición de $|\phi| < 1$.

16. Ejercicio 19

Se dice que el proceso MA(q) tiene condiciones de invertibilidad, pues si ciertas condiciones no se cumplen sobre sus parámetros, el poceso no es invertible. Pruebe que las condiciones de estacionariedad para el poceso MA(1) se reducen a $|\theta| < 1$

Demostración. Sea un modelo MA(1) de la forma $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$ donde ε_t son ruido blanco, es decir, variables aleatorias independientes con distribución normal, con media igual a 0 y varianza igual a σ^2. Notemos que la estacionaredad no es dificil de probar, lo cual se realizó en clase y se concluyó que el modelo MA(1) no tiene condiciones de estacionariedad pero lo que no se analizó fue el modelo MA(q) está relacionado con el modelo AR(p) lo que le hace tener conidiciones de invertibilidad.

Partamos del modelo original

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

despejando el error

$$\varepsilon_t = X_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$$

si aplicamos el operador rezago,

$$\varepsilon_{t-1} = X_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_{t-2} = X_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3}$$

$$\vdots$$

luego sustituimos los errores en el modelo inicial

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \\ &= \varepsilon_t - \theta_1(X_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2\varepsilon_{t-2} \\ &= \varepsilon_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2(X_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3}) \\ &= \varepsilon_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3\varepsilon_{t-3}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

si continuamos agregando el operador rezago al error y seguimos sustituyendo obtendremos

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1^2 Xt - 2 - \theta_1^3 Xt - 3 - \ldots - \theta_1^n\varepsilon_{t-n}$$

lo cual se puede expresar como

$$X_t = AR(n-1) - \theta_1^n\varepsilon_{t-n}$$

veamos que si

$$|\theta| \leq 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}(\theta_1^n\varepsilon_{t-n}) = 0 \Rightarrow\; X_t \equiv AR(\infty)$$

Entonces el modelo MA(1) es equivalente a un modelo $AR(\infty)$ syss $|\theta_1| < 1$, a su vez el modelo AR(p) tiene una condición de estacionariedad la cuál en este caso es que $|\theta_1| < 1$.

Por lo tanto la única condición de estacionariedad del modelo MA(1) es que $|\theta_1| < 1$.

□

17. Ejercicio 20

Muestre que el modelo MA(1) no tiene condiciones de estacionariedad.
Una condicion de estacionariedad es aquella condición sobre los parametros para que el proceso sea estacionario.
El proceso MA(1) es de la forma:

$$x_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$$

Y cumple las siguientes tres propiedades

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}(x_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(\epsilon_t) + \theta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}var(x_t) &= var(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) \\ &= var(\epsilon_t) + cov(\epsilon_t, \theta_t \epsilon_{t-1}) + var(\theta_1 \epsilon_{t-1}) \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\epsilon^2 \\ &= (1 + \theta_1^2)\sigma_\epsilon^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\gamma_x(h) &= cov(x_t, x_{t+h}) \\ &= cov(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t+h} + \theta_1 \epsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad h = 2, 3, ... \\ \theta_1 \sigma_\epsilon^2 & si \quad h = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\rho_n(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & si \quad |h| = 1 \\ 0 & si \quad |h| > 1 \end{cases}$$

Por tanto, nuestro proceso es debilmente estacionario para cualquier valor de θ_1. La función de autocovarianza es finita y no depende del tiempo.

Es decir, no es necesario poner restricciones a θ_1 para que el proceso sea estacionario.
$\therefore$ El proceso MA(1) no tiene condiciones de estacionariedad.

18. Ejercicio 21

Muestre que el modelo AR(1) no tiene condiciones de invertibilidad.

En clase definimos al *modelo invertido* como aquel modelo en el que la serie de tiempo se representa como una combinación lineal de sus propios rezagos, más el choque aleatorio contemporáneo, i.e.:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t$$

Y el modelo AR(1) es de la forma:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Es decir, el modelo AR(1) ya está escrito como la combinación lineal de sus propios rezagos, más el choque aleatorio en el tiempo t. Por tanto, el modelo AR(1) **no tiene condiciones de invertibilidad.**

19. Ejercicio 22

Muestre que el proceso AR(1) $Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + e_t$ **equivale al modelo** $Y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \mu_t$ **donde** $\mu_t = a_1 \mu_{t-1} + e_t$**.**

Demostración. Sea:
$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + e_t$
$Y_{t-1} = a_0 + a_1 Y_{t-2} + e_{t-1}$
$Y_{t-2} = a_0 + a_1 Y_{t-3} + e_{t-2}$
.
.
.

Entonces:
$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + e_t$
$Y_{t-1} = a_0 + a_1 Y_{t-2} + e_{t-1}$
$Y_{t-2} = a_0 + a_1 Y_{t-3} + e_{t-2}$
$Y_t = a_0 + a_1(a_0 + a_1 Y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$
$Y_t = a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 Y_{t-2} + a_1 e_{t-1} + e_t$
$Y_t = a_0 + a_1 a_0 + a_1^2(a_0 + a_1 Y_{t-3} + e_{t-2}) + a_1 e_{t-1} + e_t$
$Y_t = a_0 + a_1 a_0 + a_1^2 a_0 + a_1^3 Y_{t-3} + a_1^2 e_{t-2} + a_1 e_{t-1} + e_t$
.
.
.

Si $|a_1| < 1$ y $m \to \infty$
$\Rightarrow Y_t = a_0 \left[1 + a_1 + a_1^2 + a_1^3 + ...\right] + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i}$
$\Rightarrow Y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i}$

Ahora, sabemos que por invertibiliddad:
$\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i} = \mu_t$

donde $\mu_t = a_1 \mu_{t-1} + e_t$

Así: $Y_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \mu_t$

$\square$

20. Ejercicio 23

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso MA(1) que satisface la ecuación $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ para todo $t \in T$, con función de autocorrelación $\rho_x(h)$.

1. Pruebe que $\text{máx}_{\theta\in R}\ p_x(1) = 0 \cdot 5$
2. Pruebe que $\text{mín}_{\theta\in R}\ p_x(1) = -0 \cdot 5$

Sea el proceso MA(1) es $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, del cual, la función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma_k = \mathbb{E}\left[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta\varepsilon_{t-k-1})\right] = \begin{cases} 0, k \geq 2 \\ -\theta\sigma^2, k = 1 \end{cases}$$

De lo anterior, la función de autocorrelación es:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2}, k = 1 \\ 0, k \geq 2 \end{cases}$$

Sea $\rho_k = \rho_k(\theta) = -\frac{\theta}{1+\theta^2} \Rightarrow \rho_k'(\theta) = -\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} < 0$
Ahora igualaremos a 0:

$$\Rightarrow \rho_k'(\theta) = -\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} = 0 \Rightarrow \theta = \pm 1$$
$$\text{además, } \rho_k''(\theta) = -\frac{2}{(1-\theta)^2} < 0$$

$$\therefore \quad \text{máx}_{\theta\in\mathbb{R}}\rho_x(1) = 0 \cdot 5 \text{ y } \quad min_{\theta\in\mathbb{R}}(-1) = -0 \cdot 5$$

21. Ejercicio 24

Sean $\{X_t^{(i)}, t \in \mathbb{Z}\}$ para $i = 1, 2$ dos procesos MA no correlacionados, tales que:

$$X_t^{(i)} = \epsilon_t^{(i)} + \theta_1^{(i)} \epsilon_{t-1}^{(i)} + \cdots + \theta_{q(i)}^{(i)} \epsilon_{t-q(i)}^{(i)}$$

donde $\{\epsilon_t^{(i)}, t \in \mathbb{Z}\}$ para $i = 1, 2$ son procesos de ruido blanco con varianza σ_i^2 y sea $Y_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$. Muestre que $Y_t, t \in \mathbb{Z}$ es un proceso ARMA.

Demostración. Comencemos recordando la estructura de un modelo M(q)

$$MA(q) \Rightarrow Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{t-q\theta_q}$$

el modelo MA tiene q parámetros

Ahora veamos el modelo dado por la suma de $MA(q_1)$ y $MA(q_2)$

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t^{(1)} + X_t^{(2)} \\ &= \varepsilon_t^{(1)} + \theta_1^{(1)} \varepsilon_{t-1}^{(1)} + \ldots + \theta_{q_1}^{(1)} \epsilon_{t-q_1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)} + \theta_1^{(2)} \varepsilon_{t-1}^{(2)} + \ldots + \theta_{q_2}^{(2)} \varepsilon_{t-q_2}^{(2)} \\ &= \varepsilon_t^{(1)} + +\varepsilon_t^{(2)} + \theta_1^{(1)} \varepsilon_{t-1}^{(1)} + \epsilon_{t-q_1}^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)} + \ldots + \theta_{q_1}^{(1)} \epsilon_{t-q_1}^{(1)} + \theta_{q_2}^{(2)} \varepsilon_{t-q_2}^{(2)} \end{aligned}$$

notemos que seguimos teniendo un modelo MA ya que seguimos teniendo un número finito de variables históricas autorregresivas, pero ya no es tan claro cuanto vale q, ya que no estamos seguros de la relación entre q_1 *y* q_2 pero sabemos que el parámetro será aquel que sea mayor, entonces

si $q_{max} = \max q_1 . q_2$ y $\varepsilon_t = \varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_t^{(2)} \Rightarrow Y_t$ es un modelo $MA(q_{max})$

Ahora vemos que si en el modelo ARMA(p,q) tiene la siguiente estructura

$$ARMA(p, q) \Rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{t-q} \theta_q$$

El modelo ARMA(p,q) tiene $p + q$ parámetros.

si $p = 0$, es decir, ARMA(0,p) tenemos que

$$Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_{t-q} \theta_q$$

lo cual es equivalente de un modelo MA(q), particularmente si $q = q_{max}$ el modelo $MA(q_{\text{máx}})$ es un proceso $ARMA(0, q_{\text{máx}})$. □

22. Ejercicio 26

Para los procesos del ejercicio anterior señale a que tipo de modelos corresponden y si son invertibles y estacionarios.

Primero es importante ver la forma de los modelos, i.e.

Modelo AR(p):

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

Modelo MA(q):

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

1. $Y_t = -0{,}5Y_{t-1} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(1).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(1) es que $|\phi| < 1$ entonces este modelo que **si es estacionario.**
   - El modelo AR(1) siempre es **invertible**.
2. $Y_t = 0{,}5Y_{t-1} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(1).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(1) es que $|\phi| < 1$ entonces este modelo que **si es estacionario.**
   - El modelo AR(1) siempre es **invertible**.
3. $Y_t = Y_{t-1} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(1).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(1) es que $|\phi| < 1$ entonces este modelo que **no es estacionario.**
   - El modelo AR(1) siempre es **invertible**.
4. $Y_t = e_t + 0{,}5e_{t-1}$
   - Este tiene la estructura de un modelo MA(1).
   - Dado que las condiciones de invertibilidad del modelo MA(1) es que $|\theta| < 1$ entonces este modelo que **si es invertible.**
   - El modelo MA(1) **si es estacionario** para cualquier valor de θ.
5. $Y_t = 0{,}4Y_{t-1} - 0{,}4Y_{t-2} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(2).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(2) son que:

     $$|\phi_1 + \phi_2| < 1 \qquad |\phi_1 - \phi_2| < 1 \qquad |-\phi_2| < 1$$

     En nuestro caso:

     $$|0| < 1 \qquad |0{,}8| < 1 \qquad |0{,}4| < 1$$

     Como cumple las tres condiciones, entonces **si es estacionario.**
   - El modelo AR(2) siempre es **invertible**.
6. $Y_t = -0{,}4Y_{t-1} + e_t + 0{,}3e_{t-1}$
   - Este tiene la estructura de un modelo ARMA(1,1).
   - Para que el modelo sea invertible basta con que $|\theta| < 1$. Esto ya que la parte autoregresiva del modelo siempre es invertible. Por lo tanto, este modelo **si es invertible.**

- Para que el modelo sea invertible basta con que $|\phi| < 1$. Esto ya que la parte MA del modelo siempre es estacionaria. Por lo tanto, este modelo **si es estacionario.**

7. $Y_t = Y_{t-1} + e_t + e_{t-1}$
   - Este tiene la estructura de un modelo ARMA(1,1).
   - Para que el modelo sea invertible basta con que $|\theta| < 1$. Esto ya que la parte autoregresiva del modelo siempre es invertible. Por lo tanto, este modelo **no es invertible.**
   - Para que el modelo sea invertible basta con que $|\phi| < 1$. Esto ya que la parte MA del modelo siempre es estacionaria. Por lo tanto, este modelo **no es estacionario.**

8. $Y_t = ,6Y_{t-1} + ,3Y_{t-2} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(2).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(2) son que:

     $$|\phi_1 + \phi_2| < 1 \qquad |\phi_1 - \phi_2| < 1 \qquad |-\phi_2| < 1$$

     En nuestro caso:

     $$|0{,}9| < 1 \qquad |0{,}3| < 1 \qquad |-0{,}3| < 1$$

     Como cumple las tres condiciones, entonces **si es estacionario.**
   - El modelo AR(2) siempre es **invertible**.

9. $Y_t = ,8Y_{t-1} - ,5Y_{t-2} + e_t$
   - Este tiene la estructura de un modelo AR(2).
   - Dado que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(2) son que:

     $$|\phi_1 + \phi_2| < 1 \qquad |\phi_1 - \phi_2| < 1 \qquad |-\phi_2| < 1$$

     En nuestro caso:

     $$|0{,}3| < 1 \qquad |1{,}3| \not< 1 \qquad |0{,}5| < 1$$

     Como no cumple las tres condiciones, entonces **no es estacionario.**
   - El modelo AR(2) siempre es **invertible**.

23. Ejercicio 27

Para los procesos del ejercicio 16 calcule la varianza de cada proceso asumiendo $V(e_t) = 1$.

Demostración. Sea $X_t = \varepsilon_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta_{t-2}e_{t-2}$ el proceso del ejercicio 16, con $\{\varepsilon_t\}_{t\in T}$ ruido blanco débil.
Obteniendo su varianza:

$$V(X_t) = V(e_t + \theta_{t-1}e_{t-1} + \theta_{t-2}e_{t-2})$$

$$\Rightarrow V(X_t) = V(\varepsilon_t) + V(\theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + V(\theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}) + 2Cov(\varepsilon_t, \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1})$$
$$+2\text{Cov}(\varepsilon_t, \theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}) + 2Cov(\theta_{t-2}\varepsilon_{t-2}, \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1})$$

Al ser ε_t ruido blanco débil $\Rightarrow Cov(\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{tj}) = 0$ y dado que $Var(\varepsilon_t) = 1$, entonces:

$$V(X_t) = V(e_t) + \theta_{t-1}^2 V(e_{t-1}) + \theta_{t-2}^2 V(e_{t-2}) + 0 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow V(X_t) = 1 + \theta_{t-1}^2 + \theta_{t-2}^2$$

□

24. Ejercicio 30

Sea $(X_t)_{tT}$ un proceso MA(1) que satisface la ecuación $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ para todo $t \in T$, con función de autocorrelación $\rho_x(h)$ y $(Y_t)_{tT}$ un proceso MA(1) que satisface la ecuación $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$ para todo $t \in T$, con función de autocorrelación $\rho_y(h)$. Pruebe que $\rho_x = \rho_y$.

Demostración. Como ya vimos en el ejercicio 20 la función de autocorrelación de un modelo MA(1) de la forma $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ es

$$\rho_n(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & si \quad |h| = 1 \\ 0 & si \quad |h| > 1 \end{cases}$$

Con el mismo razonamaiento tenemos que la función de autocorrelación de un modelo MA(1) de la forma $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$ es

$$\rho_n(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1+\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2} & si \quad |h| = 1 \\ 0 & si \quad |h| > 1 \end{cases}$$

demostremos la igualdad de las autocorrelaciones por caso

- $Caso1)$ Si $|h| > 1 \Rightarrow \ \rho_x = 0 \ y \ \rho_y = 0 \ \Rightarrow \ \rho_x = \rho_y$
- $Caso2)$ Si $|h| = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \rho_y &= \frac{\frac{1}{\theta_1}}{1 + \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} \\ &= \frac{\theta^2}{\theta(1+\theta^2)} \\ &= \frac{\theta}{1+\theta^2} \\ &= \rho_x \end{aligned}$$

$$\therefore \ \rho_y = \rho_x$$

□

25. Ejercicio 31

Sea $X_{tt\in Z}$ un proceso MA(q) muestre que
$cov(X_t, X_{t-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > q \\ \sigma^2 \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h} & \text{si } 0 \leq h \leq q \end{cases}$

Demostración. Sea un modelo MA(q) de la forma

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

con $h \geq 0$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= Cov\left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t+h-i}\right) \\ &= \sum_{j=o}^{q} \sum_{i=0}^{q} \theta_j \theta_i Cov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+h-i}) \end{aligned}$$

Notemos que tenemos ahora dos casos, ya que hay intervalos de tiempo en los que los procesos tienen relación y hay otros en los que no, además recordemos que ε_t son ruido blancoes por lo que son independientes y su media es cero.

- *Caso* 1) $h > q \ \Rightarrow \ t < t + h - q$

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) &= E[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))(\varepsilon_{t+h} - E(\varepsilon_{t+h})] \\ &= E[(\varepsilon_t - 0)(\varepsilon_{t+h} - 0)] \\ &= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}] \\ &= E[\varepsilon_t] E[\varepsilon_{t+h}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

  entonces

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= \sum_{j=o}^{q} \sum_{i=0}^{q} \theta_j \theta_i Cov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+h-i}) \\ &= \sum_{j=o}^{q} \sum_{i=0}^{q} \theta_j \theta_i * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- *Caso* 2) $0 \leq h \leq q \ \Rightarrow \ t \geq t + h - q$ tambien recordemos que la varianza del ruido blanco es igual a σ^2

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= \sum_{j=o}^{q} \sum_{i=0}^{q} \theta_j \theta_i Cov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+h-i}) \\ &= \sum_{i=h}^{q} \sum_{j=i-h}^{i-h} \theta_i \theta_j Cov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+h-i}) \\ &= \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h} Cov(\varepsilon_{t+h-i}, \varepsilon_{t+h-i}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h} \end{aligned}$$

entonces

$$cov(X_t, X_{t-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > q \\ \sigma^2 \sum_{i=h}^{q} \theta_i \theta_{i-h} & \text{si } 0 \leq h \leq q \end{cases}$$

□

.

26. Ejercicio 33

Pruebe que el modelo ARMA(1,1) tiene condiciones de invertivilidad y estacionariedad, ¿cuáles son?
Dem.

La forma del modelo ARMA(1,1) es la siguiente:

$$Y_t = \underbrace{\phi Y_{t-1}}_{AR(1)} + \varepsilon_t + \underbrace{\theta \varepsilon_{t-1}}_{MA(1)}$$

Con $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ruido blanco y $\theta, \phi \neq 0$
Es decir, el modelo ARMA(1,1) está compuesto por la suma del modelo AR(1) y el modelo MA(1).

- *Condiciones de estacionariedad*
  Ya hemos demostrado que el modelo MA(1) no tiene condiciones de estacionariedad y que las condiciones de estacionariedad del modelo AR(1) se reducen a $|\phi| < 1$. Para comprobar la condición de estacionariedad del modelo basta con calcular las raíces del polinomio de la parte autoregresiva:

  $$\begin{aligned} Y_t - \phi Y_{t-1} = 0 &\iff (1 - \phi L)Y_t = 0 \\ &\implies 1 - \phi L = 0 \\ &\implies |L| = |\frac{1}{\phi}| \end{aligned}$$

  Es decir, $|\phi| < 1$. Por tanto $|\phi| < 1$ es la condición de estacionariedad del modelo ARMA(1,1).

- *Condiciones de invertibilidad*
  Ya hemos demostrado que el modelo AR(1) no tiene condiciones de invertibilidad y que las condiciones de invertibilidad del modelo MA(1) se reducen a $|\theta| < 1$. Para comprobar la condición de invertibilidad basta con calcular las raíces del polinomio de media móviles:

  $$\begin{aligned} Y_t - \theta Y_{t-1} = 0 &\iff (1 - \theta L)Y_t = 0 \\ &\implies 1 - \theta L = 0 \\ &\implies |L| = |\frac{1}{\theta}| \end{aligned}$$

  Es decir, $|\theta| < 1$ es la condición de estacionariedad del modelo ARMA(1,1).

27. Ejercicio 34

Condiciones de estacionariedad del modelo AR(p):

Demostración. Un proceso AR(p) será estacionario si y sólo si las raices de la ecuación característica:

$$1 - \phi x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p = 0$$

se encuentran fuera del círculo unitario.
Se puede utilizar el teorema de Schur para las condiciones de estacionariedad en términos de los parámetros $\phi_1, ..., \phi_p$. Otra manera es mediante autocorrelaciones, usando las ecuaciones de Yule-Walker:
$p_1 = \phi_1 + \phi_2 p_1 + ... + \phi_p p_{p-1}$
.
.
.
$p_p = \phi_1 p_{p-1} + \phi_2 p_2 + ... + \phi_p$

Condiciones de invertibilidad del modelo MA(q):
Dado un proceso MA(q), $Y_t = \theta_q(L)(e_t)$ donde $theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + ... + \theta_q L^q$, entonces consideranddo el polinomio en $z \in \mathbb{C}$, $theta_q(z) = 1+\theta_1 z+...+\theta_q z^q$ y sus q raíces $(z_1, z_2, ..., z_q) \in \mathbb{C}$, es decir, valores $z \in \mathbb{C}$ tales que $\theta_q(z) = 0$, se dice que el proceso Y_t es invertible si cumple que $[z_j] > 1$ o también si, $\theta_q(z) \neq 0$, para todo z, tal que $[z] \leq 1$.

Condiciones de invertivilidad y estacionariedad del modelo ARMA(p,q):

Para que un proceso sea estacionario, se requeire que las raíces de $\phi(x) = 0$ estén fuera del círculo unitario, y para que sea invertible la condición es que las raíces de la ecuación $\theta(x) = 0$ se encuentran también fuera del círculo unitario. Sí es estacionario, la media es 0.

□

.

28. Ejercicio 35

Bajo condiciones de invertibilidad y estacionariedad. Muestre que el modelo ARMA(1,1) equivale a un modelo AR(∞)

Partimos del modelo ARMA(1,1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{1}$$

De ahí, se deduce que $\varepsilon_t = Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \Longrightarrow \varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

Así, sustituímos ε_{t-1} en (1), y nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \phi_1 Y_{t-1} + \theta_1 Y_{t-1} - (\theta_1\phi_2) Y_{t-2} - (\theta_1\theta_2)\varepsilon_{t-2} \\ &= \varepsilon_t + \underbrace{(\phi_1 + \theta_1)}_{\phi_1^*} Y_{t-1} - (\theta_1\phi_2) Y_{t-2} - (\theta_1\theta_2)\varepsilon_{t-2} \end{aligned}$$

Luego, sustituímos $\varepsilon_{t-2} = Y_{t-2} - \phi_3 Y_{t-3} - \theta_3 \varepsilon_{t-3}$

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \phi_1^* Y_{t-1} + \underbrace{(-\theta_1\phi_2 - \theta_1\theta_2)}_{\phi_2^*} Y_{t-2} + (\theta_1\theta_2\phi_3) Y_{t-3} + (\theta_1\theta_2\theta_3)\varepsilon_{t-3} \\ &\vdots \\ &= \varepsilon_t + \phi_1^* Y_{t-1} + \phi_2^* Y_{t-2} + \cdots + (\phi_k)(\prod_{i=1}^{k-1} \theta_i) Y_{t-k} + (\prod_{i=1}^{k} \theta_i)\varepsilon_{t-k} \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\varepsilon_t + \phi_1^* Y_{t-1} + \phi_2^* Y_{t-2} + \phi_3^* Y_{t-3} + \phi_4^* Y_{t-4} + \phi_5^* Y_{t-5} + \cdots}_{AR(\infty)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo ARMA(1,1) es equivalente a un modelo AR(∞).

29. Ejercicio 36

Bajo condiciones de invertibilidad y estacionariedad. Muestre que el modelo ARMA(1,1) equivale a un modelo MA(∞)

La forma del modelo ARMA(1,1) es:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1 Y_{t-1} \tag{2}$$

Adicionalmente sabemos que $Y_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}+\phi_2 Y_{t-2}$.
Sustituyendo en (2) se tiene:

$$\begin{align} Y_t &= \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1\phi_2\varepsilon_{t-2} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2} \tag{3}\\ &= \varepsilon_t + \underbrace{(\phi_1 + \theta_1)}_{\theta_1^*}\varepsilon_{t-1} + (\phi_1\theta_2)\varepsilon_{t-2} + (\phi_1\phi_2)Y_{t-2} \tag{4}\end{align}$$

Por otro lado, sabemos que $Y_{t-2} = \varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3}+\phi_3 Y_{t-3}$.

Sustituyendo en (4), obtenemos:

$$\begin{align} Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1^*\varepsilon_{t-1} + \underbrace{(\phi_1\phi_2 + \phi_1\theta_2)}_{\theta_2^*}\varepsilon_{t-2} + (\phi_1\phi_2\theta_3)\varepsilon_{t-3} + (\phi_1\phi_2\phi_3)Y_{t-3} \tag{5}\\ &= \varepsilon_t + \theta_1^*\varepsilon_{t-1} + \theta_2^*\varepsilon_{t-2} + (\phi_1\phi_2\theta_3)\varepsilon_{t-3} + (\phi_1\phi_2\phi_3)Y_{t-3} \tag{6}\end{align}$$

Sustituyendo Y_{t-3} en (6) se tiene:

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t + \theta_1^*\varepsilon_{t-1} + \theta_2^*\varepsilon_{t-2} + \theta_3^*\varepsilon_{t-3} + (\phi_1\phi_2\phi_3\theta_4)\varepsilon_{t-4} + (\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)Y_{t-4}\\ &\vdots\\ &= \varepsilon_t + \theta_1^*\varepsilon_{t-1} + \theta_2^*\varepsilon_{t-2} + \theta_3^*\varepsilon_{t-3} + \cdots + (\theta_k)(\prod_{i=1}^{k-1}\phi_i)\varepsilon_{t-k} + (\prod_{i=1}^{k}\phi_i)Y_{t-k}\\ &\vdots\\ &= \underbrace{\varepsilon_t + \theta_1^*\varepsilon_{t-1} + \theta_2^*\varepsilon_{t-2} + \theta_3^*\varepsilon_{t-3} + \theta_4^*\varepsilon_{t-4} + \theta_5^*\varepsilon_{t-5} + \theta_6^*\varepsilon_{t-6} + \cdots}_{MA(\infty)} \qquad = \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo ARMA(1,1) es equivalente a un modelo MA(∞).

Nota adicional: Bastaba con partir de que es se cumple la invertibilidad, y por tanto el proceso se puede escribir de la forma $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty}\phi^i\varepsilon_{t-1}$, sin embargo, creímos conveniente hacer el desarrollo completo (sustentando la infinita cantidad de términos en que es invertible el modelo).

30. Ejercicio 37

Una de las tranformaciones más usadas para estabilizar la varianza es la tranformación Box & Cox(1964), la cual se define como

$$T(Y_t) = \frac{Y_t^\alpha - 1}{\alpha}$$

muestre que $T(Y-t) \longrightarrow ln(Y_t)$ **cuando** $\alpha \longrightarrow 0$

Demostración. El limite a continuación se resolverá por medio de L'Hopital

$$\lim_{\alpha \to 0}(\frac{Y_t^\alpha - 1}{\alpha}) = \lim_{\alpha \to 0}(Y_t^\alpha ln(Y_t)) = ln(Y_t)$$

□