Procesos Estocásticos I
Tarea 5

García Flores Luis Edgar
Rodríguez Mondragón Jessica Fernanda

21 de mayo de 2019

1 Ejercicio

Considera la siguiente Cadena de Markov Homógenea con espacio de estados E y matriz de transición dada por

$$P_{i,j} = \frac{\Theta}{\Theta+1}Q(j) + \frac{1}{\Theta+1}\delta_i(j)$$

1. Demuestre que $P_{i,j}$ es una medida de probabilidad para cualquier i en el espacio de Estados.

Demostración:
Sabemos que Q(j) es una medida de Probabilidad, demostraremos que

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1, & i\text{=j} \\ 0, & i \neq \text{j} \end{cases}$$

también lo es.
Sea $\varepsilon \subset E$, tal que $\varepsilon = \bigcup_{i\in E} \{j\ \}$,por la propiedad de $\sigma - aditividad$ se cumple que:

$$\delta_i(\{\varepsilon\ \}) = \sum_{i\in E} \delta_i(\{j\ \})$$

Además cuando i=j

$$\sum_{i\in E} \delta_i(\{j\ \}) = 1$$

y cuando i$\neq j$

$$\sum_{i \in E} \delta_i(\{j\ \}) = 0$$

Así,

$$0 \leq \delta_i(\{j\ \}) \leq 1$$

Por lo tanto $\delta_i(j)$ es una medida de probabilidad.

Ahora probaremos que la combinación lineal de medidas de probabilidad resulta ser una medida de probabilidad.

Consideramos:

$$P(.) = \alpha Q(.) + (1-\alpha)\delta(.)$$

Tomamos un evento A=Ω

$$P(A) = \alpha Q(A) + (1-\alpha)\delta_i(A) = \alpha + 1 - \alpha = 1$$

$$P(A^c) = \alpha Q(A^c) + (1-\alpha)\delta_i(A^c) = \alpha 0 + (1-\alpha)0 = 0$$

Así,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Definimos $\varepsilon = \bigcup_{i \in A} \{a_i\ \}$

$$\Rightarrow P(\varepsilon) = \alpha Q(\varepsilon) + (1-\alpha)\delta(\varepsilon)$$

$$= \alpha \sum Q(a_i) + (1-\alpha) \sum \delta(a_i)$$

$$= \sum (\alpha Q(a_i) + (1-\alpha)\delta(a_i))$$

$$= \sum P(a_i) = \sum P(\varepsilon)$$

Por lo anterior se cumple que P(.) es una medida de probabilidad.

Regresando a $P_{i,j}$ basta con hacer $\alpha = \frac{\Theta}{\Theta+1} \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{1}{\theta+1}, \Omega = E.$

Dado lo anterior, al ser $P_{i,j}$ una combinación lineal de medidas de probabilidad, es una medida de probabilidad.

2. Demuestre que Q es una medida invariante para la Cadena de Markov.

Demostración:

Probaremos que

$$\sum_{i\in E} Q(i)P_{i,j} = Q(j)$$

Tenemos que

$$\sum_{i\in E} Q(i)P_{i,j} = \sum_{i\in E} Q(i)[\frac{\theta}{\theta+1}Q(j) + \frac{1}{\theta+1}\delta_i(j)]$$

Cuando i=j:

$$Q(j)[\frac{\theta}{\theta+1}Q(j) + \frac{1}{\theta+1}\delta_j(j)] = Q(j)[\frac{1}{\theta+1}Q(j) + \frac{1}{\theta+1}]$$

En los casos $i \neq j$:

$$\sum_{i\neq j\in E} Q(i)[\frac{\theta}{\theta+1}Q(j) + \frac{1}{\theta+1}\delta_i(j)] = Q(j)\frac{\theta}{\theta+1}Q(1) + Q(j)\frac{\theta}{\theta+1}Q(2) + ...$$

Así

$$\sum_{i\in E} Q(i)[\frac{\theta}{\theta+1}Q(j)+\frac{1}{\theta+1}\delta_i(j)] = [\frac{\theta}{\theta+1}Q(1)+\frac{\theta}{\theta+1}Q(2)+...+\frac{\theta}{\theta+1}Q(j)+\frac{1}{\theta+1}]Q(j) =$$

$$= \frac{\theta}{\theta+1}Q(j)[Q(1)+Q(2)+...+Q(j)]+\frac{1}{\theta+1}Q(j) = \frac{\theta}{\theta+1}Q(j)+\frac{1}{\theta+1}Q(j) = Q(j)$$

$$\sum_{i\in E} Q(i)P_{i,j} = \sum_{i\in E} Q(i)[\frac{\theta}{\theta+1}Q(j) + \frac{1}{\theta+1}\delta_i(j)] = Q(j)$$

Es decir, Q es una medida invariante para la Cadena de Markov.

3. Para el caso Q Unif(0, 1, .., 5) (uniforme discreta) encuentra explícitamente (en función de) la matriz de transición

Sabemos que si i=j

$$\delta_i(j) = 1$$

Y si $i \neq j$

$$\delta_i(j) = 0$$

Por otro lado, sabemos Q $\sim$ U(0,1,2,3,4,5), por lo tanto:

$$Q(0) = \frac{1}{6}$$

$$Q(1) = \frac{1}{6}$$

$$Q(2) = \frac{1}{6}$$

$$Q(3) = \frac{1}{6}$$

$$Q(4) = \frac{1}{6}$$

$$Q(5) = \frac{1}{6}$$

Así, calcularemos algunas explicitamente para que se vea como construimos la matriz de transición:

$$P_{0,0} = \frac{\theta}{\theta+1}(\frac{1}{6}) + \frac{1}{\theta+1} = \frac{\theta+6}{6(\theta+1)}$$

$$P_{0,1} = \frac{\theta}{(\theta+1)}(\frac{1}{6}) + 0 = \frac{\theta}{6(\theta+1)}$$

$$P_{0,2} = \frac{\theta}{(\theta+1)}(\frac{1}{6}) + 0 = \frac{\theta}{6(\theta+1)}$$

$$P_{0,3} = \frac{\theta}{(\theta+1)}(\frac{1}{6}) + 0 = \frac{\theta}{6(\theta+1)}$$

$$P_{0,4} = \frac{\theta}{(\theta+1)}(\frac{1}{6}) + 0 = \frac{\theta}{6(\theta+1)}$$

$$P_{0,5} = \frac{\theta}{(\theta+1)}(\frac{1}{6}) + 0 = \frac{\theta}{6(\theta+1)}$$

Hacemos lo mismo con cada renglón de nuestra matríz de transición, y queda de la siguiente forma:

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} \\ \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} \\ \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} \\ \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} \\ \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} \\ \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta}{6(\theta+1)} & \frac{\theta+6}{6(\theta+1)} \end{pmatrix}$$

2 Ejercicio

Considere una CM sobre { 1,2,... } con probabilidades de transición dadas de la siguiente forma...
Demuestre que la CM no tiene distribución estacionaria

Demostración:
Si le damos los primeros valores a la matriz de transición queda de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0\cdots 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

para encontrar la matriz tenemos que resolver el sistema de ecuaciones que resulta de:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots)P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots)$$

$$\frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + 0 + +0 + 0 + 0 + \cdots = \pi_1$$

$$\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \pi_2$$

$$0 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{8}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 + 0 + 0 + \cdots = \pi_3$$

$$0 + 0 + \frac{3}{8}\pi_3 + \frac{1}{10}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 + 0 + \cdots = \pi_4$$

$\cdots$

$$Y : \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\text{Si } \frac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \pi_1 \rightarrow \pi_2 = \tfrac{1}{2}\pi_1$$

$$\rightarrow \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1$$

$$\rightarrow \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_1$$

Así:

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots = \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_1 + \cdots = \pi_1(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots) \;\mathbf{!}$$

Como podemos ver todo el sistema dependerá de π_1 pero es una contradicción decir que la suma de esa serie multiplicada por π_1 de 1 pues no es covergente, por lo cual no existe una π_1 tal que se cumpla lo anterior.

No existe distribución estacionaria para la CM.

3 Ejercicio

Considere la CM vista en clase de dos estados, con $\alpha = \beta = 1$. Demuestre que la CM es irreducible y por lo tanto sus estados son recurrentes, además demuestre que la CM tiene una distribución invariante, por último demuestre que la CM no tiene distribución límite, lo anterior es un ejemplo en el que una CM si tiene distribución invariante, sin embargo la CM no tiene distribución asintótica.

Demostración
La matríz vista en clase con con $\alpha = \beta = 1$, es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que el estado 1 accede al estado 2, y el estado 2 accede al estado uno; es decir, 1 y 2 se comunican, con lo cual existe una única clase de comunicación y por tanto la CM es irreducible.

Además, en clase demostramos una proposición que dice que si una CM tiene un espacio de estados finito y es irreducible, entonces tiene sólo estados recurrentes. Por lo tanto, los estados de nuestra CM son irreducibles.

Ahora, en clase demostramos para la siguiente CM

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Que tiene una única distribución π de la forma:

$$\pi = (\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta})$$

En el caso de nuestra CM con $\alpha = \beta = 1$ tenemos que:

$$\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Y se cumple lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, su distribución es invariante.
Por último, vemos que

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$P^{(2k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con k=1,2,3,...

Por lo cual la CM no tiene distribución asintótica.