Probabilità condizionata

Probabilità condizionata (AFFIDABILITÀ DI UN TAMPONE)

O INDOVINELLI

· ho due figli, di cui una femmina, probabilità siano tutte femmine

Probabilità condizionata

> Idea: sto svolgendo esperimento ma non ho informazioni su come farlo ma ho informazione sull'esito.
> Mi chiedo se modifica l'intero esito

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}), \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ non − trascurabie

Definizione

> Probabilità di $A \in \mathcal{A}$ condizionata a B la quantità $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B}$

Escludo dall'universo tutto ciò che non appartiene a B

> Prop
>
> $\mathcal{A} \ni A \to P(A|B)$ è una probabilità perché verifica tutte le proprietà

Esempio

> Lanciare due volte un dado con 6 facce equiprobabili.
> Calcolare la probabilità di ottenere un due almeno una volta sapendo che la somma dei due lanci è uguale a 8.
>
> (INFORMAZIONE CHE AGGIUNGO SULL'ESITO)
>
> $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,6), \dots, (6,6)\}$
> $\#\Omega = 36$
>
> $B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$
> $\#B = 5$
>
> $A = \{\ tutte\ le\ coppie\ in\ cui\ c'\text{è}\ al\ meno\ un\ due\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\#A \cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{2}{5}$$

ESEMPIO

> La signora Maria ha due figli/e di cui una femmina.
> Calcolare la probabilità che siano entrambe femmine.

$\Omega = \{(F,F),(F,M),(M,F),(M,M)\}$
$B = \{(F,F),(F,M),(M,F)\}$
$A = \{(F,F)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\#A\cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{1}{3}$$

Se sapessimo che il maggiore è femmina :

$\Omega = \{(F,F),(F,M),(M,F),(M,M)\}$
$B = \{(F,F),(F,M)\}$
$A = \{(F,F)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\#A\cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{1}{2}$$

Esempio (numero ritardatario lotto)

Estraiamo un numero tra {1, ..., 90} con rei-missione per (n+1) volte.
Sapendo che il numero 90 non è stato estratto nelle prime n estrazioni, qual è la probabilità che venga estratto alla n+1-esima?

$\Omega = \{tutti\ i\ possibili\ esiti\ di\ (n+1) - estrazioni\}$
$= \{stringhe\ di\ lunghezza\ (n+1) nell'alfabeto\ \{1 \dots 90\}$
$\#\Omega = 90^{\mathrm{n+1}}$
$A = \{\text{esiti in cui non appare 90 nelle prime n posizione e appare in posizione } (\mathrm{n}+1)\}$
$\#A = 89^n$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{89^n}{90^n} = \frac{1}{90} * \left(\frac{89}{90}\right)^n \to (n \to +\infty = 0)$$

MA NON È QUELLO CHE CERCAVAMO NOI!!

$\Omega = \{tutti\ i\ possibili\ esiti\ di\ (n+1) - estrazioni\}$
$= \{stringhe\ di\ lunghezza\ (n+1) nell'alfabeto\ \{1 \dots 90\}$
$\#\Omega = 90^{\mathrm{n+1}}$

$\mathrm{A} = \{90\ viene\ estratto\ alla'(n+1) esima\ estrazione\}$
$B = \{90\ non\ \text{è}\ stato\ estratto\ nelle\ prime\ n\ estrazioni\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\#A\cap B}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{\frac{1}{90} * \left(\frac{89}{90}\right)^n}{\frac{89^n * 90}{90^{n+1}}} = \frac{1}{90}$$

Ha la probabilità come tutti gli altri elementi perché è la probabilità di B che tende a zero.

ESEMPIO

Sia dato un mazzo di 52 carte e ne estraggo 3
Calcolare la probabilità che siano estratte tre carte di cuori

$\Omega = \{\text{sottoinsiemi di 3 elementi squlle 52 carte}\}$
$\#\Omega = \binom{52}{3}$
$A = \{\text{sottoinsiemi di tre elementi sulle carte di cuori}\}$
$\#A = \binom{13}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{13!}{10!\,3!}}{\frac{52!}{49!\,3!}} = \frac{13 * 12 * 11}{52 * 51 * 50}$$

È come estrarre una alla volta o tutte insieme.
Posso perciò dare 2 punti di vista:

- Un insieme unico (tutte insieme)
- Una alla volta = probabilità che ogni volta che estraggo me ne esca una di cuori, le estrazioni non hanno dipendenze ma:

1) Prima estrazione $P(A_1) = \frac{13}{52}$
2) Seconda estrazione $P(A_2) = \frac{12}{51}$
3) Terza estrazione $P(A_3) = \frac{11}{50}$

$$P(A) = \frac{13}{52} * \frac{12}{51} * \frac{11}{50}$$

Ho calcolato 1 probabilità normale e 2 probabilità condizionate.

Quindi l'evento A è l'intersezione delle tre estrazioni e quindi la probabilità diventa:

$$P(A)? = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 \cap A_2) =$$
$$= P(A_1) * \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} * \frac{P(A_3 \cap (A_2 \cap A_1))}{P(A_1 \cap A_2)} = P(A_3 \cap (A_2 \cap A_1))$$

PROP:

FORMULA DI CONDIZIONAMENTO RIPETUTO

Se si ha $A_1 \to A_n \in \mathcal{A}$ t.c. $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ sia non trascurabile allora si ha

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 \cap A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

FORMULA DI BAYES

Siano A e B due eventinon trascurabili allora

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

C'è quindi un legame tra le due probabilità condizionate, ne si conosce una e si vuole trovare l'altra.

Dimostrazione

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

SI CHIAMA SISTEMA DI ALTERNATIVE UNA COLLEZIONE DI EVENTI $B_1, B_2 \dots B_n$ NON TRASCURABILI TALI CHE $B_i \cap B_j \neq \emptyset \;\; \forall\, i \neq j \;\; e \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

I vari B_i sono le cause

PROP

Dato un sistema di alternative $B_1, \dots, B_n$ si ha che per ogni evento A non trascurabile valgano le seguenti formule:

1) FORMULA DI FATTORIZZAZIONE

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Dim.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

2) FORMULA DI BAYES SCRITTA CON LA FATTORIZZAZIONE (DELLE PROBABILITÀ DELLE CAUSE)

$\forall\ B_i$:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Dim.

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

ESEMPIO

Supponiamo che in una popolazione ci siano :
- Il 28% di giovani (0-29)
- Il 48.8% di adulti (30-64)
- Il 23.2% di anziani (65- …)

Sapendo che il 2.8% dei giovani è coniugato, degli adulti il 65% e degli anziani il 62%.

A) calcolare la percentuale di coniugati
B) sapendo che Maria è coniugata, qual è la probabilità che sia adulta?

Il calcolo si può fare usando le formule ma non si conosce altro e che ci sia distribuzione uniforme.

A) conosciamo la percentuale nelle varie categorie e voglio fare una somma pesata sulle età.

Traduzione del testo

$B_1 = \{giovani\}, B_2 = \{adulti\}, B_3 = \{anziani\}$

$P(B_1) = 0.28, P(B_2) = 0.488, P(B_3) = 0.232$

$A = \{coniugati\}$

$P(A|B_1) = 0.028 \quad P(A|B_2) = 0.0488 \quad P(A|B_3) = 0.0232$

La prima richiesta chiede la probabilità di A

$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) * P(A|B_2)P(B_2) * P(A|B_3)P(B_3) = 0.46888 \cong 46{,}9\%$

B) la signora Maria è un rappresentante a caso di tutte le persone coniugate, e voglio sapere che probabilità che sia adulta

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}$$

P(A) la so già e quindi non serve che la ricalcolo , scelgo B2 in quanto devo calcolare su quella causa

$$= \frac{0.65 * 0{,}488}{0{,}46888} \cong 0{,}677$$

Osservare che è maggiore della quantità di adulti coniugati, le due cose non sono quindi collegate.