Concetti di probabilità

Nella statistica descrittiva mancava un modello sulla provenienza dei dati. Avere una probabilità sui dati ci può portare a parlare di modelli

Per parlare di probabilità bisogna partire dal concetto di UNIVERSO (spazio fondamentale, spazio degli esiti ….) che contiene gli elementi che si vogliono studiare

Tipo nel lancio di un dado l'universo è composto da tutti i numeri naturali da 1 a 6 [$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$] , se si lanciano due dadi si considerano tutte le possibili coppie di esiti.

$\mathrm{P}(\Omega) =$ è l'insieme delle parti

È interessante considerare sottoinsiemi dello spazio Ω in quanto a volte soi vogliono considerare esiti particolari ad esempio $\mathcal{A} \subset \Omega = \{\text{numeri pari}\}\ \ (\text{nel lancio del dado})$ in cui A è un evento

- ALGEBRA DI PARTI

  Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω si chiama ALGEBRA DI PARTI se :
  1) $\Omega, \emptyset\ \in \mathcal{A}$
  2) Se $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash \mathrm{A} \in \mathcal{A}$
  3) Se $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \cup B \in \mathcal{A}$

  Osservazione :

  Se $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \cap B \in \mathcal{A}$
  Infatti $A \cap B = (\Omega \backslash \mathrm{A}^{\mathrm{c}}) \cap (\Omega \backslash \mathrm{B}^{c}) = \Omega(\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cup B^{c})$

- EVENTI INCOMPATIBILI

  Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono incompatibili.
  L'insieme vuoto $\emptyset$ è l'evento impossibilie

- PROBABILITÀ (deve essere definita su un'algebra di parti)

  Dati Ω e $\mathcal{A}$, una PROBABILITÀ (finitamente additiva) è $P\colon\ \mathcal{A} \to [0, 1]$ tale che:
  1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
  2) Se $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ sono incompatibili ($A \cap B = \emptyset$) allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- EVENTO TRASCURABILE

  Se $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tale che $P(A) = 0$, A si dice TRASCURABILE

  (l'evento impossibile ha probabilità = 0 ma un evento trascurabile non è per forza impossibile)

- EVENTO CERTO

  Se $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tale che $P(A) = 1$, A si dice (quasi) CERTO

  (l'universo ha probabilità = 1 ma un evento certo non coincide con l'intero universo)

- PROPRIETÀ

1) Se $A \in \mathcal{A}$ e si ha una probabilità sull'algebra, allora $P(A^{c}) = 1 - P(A)$

   (dimostrazione : $\Omega = A \cup A^{c},\ \ A \cap A^{c} = \emptyset$
   $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^{c})$)
2) $P(\emptyset) = 0$
3) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $\mathrm{B} \subset A$ allora $P(A \backslash \mathrm{B}) = P(A) - P(B)$
4) Se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5) Se $A, B, C \in \mathcal{A}$ allora $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$\Omega = spazio\ finito \quad \Rightarrow \quad \Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, \qquad \mathcal{A} = \mathrm{P}(\Omega)$

Per specificare una probabilità $\mathrm{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ è sufficiente determinare le probabilità degli eventi elementari $P(w_i)\ \forall\ \ w_i \in \Omega$

Siano $p_i = P(\{w_i\})\ \forall\ \ i = 1, \dots, n$ tale che $p_i \geq 0\ \ \forall\ \ i\ \ e\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$Sia\ A \in \mathcal{A}, \qquad P(A) = \sum_{w_i \in \mathrm{A}} P(\{w_i\})$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

$$p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#\Omega} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

In questo caso $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

È IMPORTANTE SAPERE COME SONO GLI EVENTIO E SAPERLI CONTARE

Esercizi :

ESERCIZIO 1

Si considera un universo dei lanci di un dado. Si vuole calcolare la probabilità di ottenere un numero pari sapendo che la probabilità $P(\{2n\}) = \frac{1}{2}P(\{n\})\ \forall\, n = 1, 2, 3\ \ e\ che\ P(\{n+2\}) = \frac{1}{2}P(\{n\})\ per\ n = 1, 3$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Si deve costruire un evento e calcolarne la probabilità conoscendo altre probabilità.

$A = \{2, 4, 6\}\ \ P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$

$$\alpha = P(\{1\}) \geq 0 \Rightarrow P(\{2\}) = \frac{1}{2}\alpha, \qquad P(\{3\}) = \frac{1}{2}\alpha, \qquad P(\{4\}) = \frac{1}{4}\alpha, \qquad P(\{5\}) = \frac{1}{4}\alpha, \qquad P(\{6\}) = \frac{1}{4}\alpha$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = \alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha = \alpha\left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}\alpha \Rightarrow\ \alpha = \frac{4}{11}$$

Quindi :

$$P(A) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$$

ESERCIZIO 2

Calcolare la probabilità che nel lancio di un dado esca :

1) Un multiplo dii 2 o un multiplo di 3
2) Un multiplo di 2 maggiore di 3

Dato che non ho altri dati sul dado suppongo che la probabilità sia uniforme.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad p_i = \frac{1}{6}\ \ \forall\, i = 1, \dots, 6$$

1) $A = \{2, 4, 6\}\ \ B = \{3, 6\}$
   Un multiplo di 2 o di 3 è la loro unione: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

   Devo calcolare $P(A \cap B) = P(\{2, 3, 4, 6\}) = \frac{4}{6}$

   Oppure posso applicare la formula $P(A) + P(B) + P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

2) $A = \{2, 4, 6\}\ \ B = \{4, 5, 6\}$

   $A \cap B = \{4, 6\}$

   $$P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 3

Calcolare la probabilità che lanciando un dado due volte si ottenga 1 almeno una volta.

$\Omega = \{(1,1), \dots, (1, 6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (3,6), (4,1), \dots, (4,6), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$

$$\#\Omega = 36 \Rightarrow \mathrm{p_i} = \frac{1}{36}\ \ \forall\, i$$

$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

$$\#A = 11, \qquad P(A) = \frac{11}{36}$$

Altra strada più veloce uso il complementare:

Lanci in cui non esca 1 nemmeno una volta

$A^c = \{applicazioni\ da\ \{1,2\}\ a\ \{2, 3, 4, 5, 6\}\ \}$

$$\#A^c = n^k = 5^2 = 25 \quad P(A^c) = \frac{25}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

ESERCIZIO 4

Calcolare la probabilità che lanciando un dado 3 volte esca il 5 esattamente una volta.

$\Omega = \{(1,1,1), \dots, (6,6,6)\}$
$\#\Omega$ =applicazioni da un insieme di 3 elementi ad un insieme di $6 = 6^3$, $p_i = \frac{1}{6^3}$
$A = \{(5, \_ , \_), (\_ , 5, \_), (\_ , \_ ,5) \mid \_ \in \{1,2,3,4,6\}\}$

$\#A = 3 * 5^2 \quad P(A) = \frac{3 * 5^2}{6^3}$

OSS:

$$\frac{1}{6^3}(5^3 + 3 * 5^2 + 3 * 5 + 1) = \frac{(5+1)^3}{6^3} = 1$$

OSS:

n lanci, 5 esce esattamente k volte

$\#\Omega = 6^n$, $\quad \#A = \binom{n}{k} * 5^{n-k}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * 5^{n-k} * 1^k = (5+1)^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Insieme di cardinalità k su n elementi

ESERCIZIO 5

Si suppone di avere un'urna contenente 10 palline di cui 6 rosse e 4 blu. Calcolare la probabilità che estraendo contemporaneamente 3 palline si ottengano :

1) 3 palline blu
2) 2 palline blu e 1 rossa

1)

$\Omega = \{universo\ di\ tutte\ le\ possibili\ estrazioni\}, \qquad \#\Omega = \binom{10}{3}$

$A = \{estrazioni\ di\ palline\ blu\}, \qquad \#A = \binom{4}{3}, \qquad P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 * 3! * 7!}{10!} = \frac{4 * 3 * 2}{10 * 9 * 8} = \frac{1}{30}$

2)

A = {estrazioni di 2 blu e 1 rossa}

$\#A = \binom{4}{2} * \binom{6}{1} \; P(A) = \frac{\binom{4}{2} * \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$

ESERCIZIO 6

Supponendo di avere le lettere {A, A, B, C, R}, ed estraendole in ordine una alla volta, calcolare la probabilità di ottenere la parola BARCA.

$\Omega = \{possibili\ estrazioni\}$

$P(A) = \frac{1}{\#\Omega}$

Visto che ci sono due lettere uguali o si suppone che queste siano numerate e distinguibili o è indifferente. Se le considero uguali ogni parola esce una sola volta e non due.

Se fossero tutte diverse avrei $\#\Omega = \{\ applicazioni\ iniettive\ da$ { 1, 2, 3, 4, 5} a {A', A'', B, C, R} } = $\frac{n!}{(n-k)!}$ [n>=k] = $n(n-1) * \cdots * (n-k+1) = 5!$

Non è questo il caso :

Dobbiamo dividere per le permutazioni "doppie" = $\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{2!} = \frac{5!}{2!}$

OSS:

Nel caso le mie tessere sarebbero state {A, A, B, B, C, }

$$\#\Omega = \frac{5!}{2! * 2!}$$