# Lezione 6

Esercizio 1

Studio di risultati ai tamponi.

Sensibilità = 93.4 % = probabilità che il test è positivo sapendo che la persona è malata
6.6 % = probabilità che il test è negativo sapendo che la persona è malata
Specificità = 99.9 % = probabilità che il test è negativo sapendo che la persona è sana
0.1 % = probabilità che il test è positivo sapendo che la persona è sana

1) Se il test risulta positivo qual è la probabilità di essere malato?
2) Se il test risulta negativo qual è la probabilità di essere malato?

Non sono eventi complementari, ma cambia il condizionamento.

$\Omega = \{popolazione\}$

Bisogna partizionare la popolazione

$B_1 = \{sani\}$, $B_2 = \{malati\}$

$A = \{test\ positivo\}$, $A^c = \{test\ negativo\}$

1) $P(B_2|A) = \dfrac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$

Conosco :

$P(A|B_1) = 0{,}001$
$P(A|B_2) = 0{,}934$

Non conosco $P(B_1)$ $e$ $P(B_2)$ e li chiamo rispettivamente 1-p e p

$$P(B_2|A) = \frac{0.934\,p}{0.001(1-p) + 0.934p}$$

Non mi interessa considerare la funzione ma capire la probabilità : per quali valori di p la probabilità e $\geq 95\%$

E ciò avviene con $p \geq 0.019937$, dipende quindi dalla diffusione del virus all'interno della popolazione. $P(B_2) \geq 2\%$

2) $P(B_2|A^c) = \dfrac{P(A^c|B_2)P(B_2)}{P(A^c|B_1)P(B_1) + P(A^c|B_2)P(B_2)} = \dfrac{0.066\,p}{0.999(1-p) + 0.066p} \leq 0.05 \leftrightarrow p \leq 0.443409,$ $\quad P(B_2) \leq 44.35\%$

ESERCIZIO 2

Ci sono due aule e in ogni aula 100 studenti. La prima aula è di informatica e il professore sta spiegando statistica e gli appassionati sono il 30% mentre il 70% non sono appassionati. L'aula 2 è di matematica e di appassionati alla statistica ce n'è l'80% mentre il 20% non è appassionato.

1 studente dell'aula 1 viene mandato nell'aula 2, ma nell'aula 2 c'è troppa gente e allora uno studente dell'aula 2 viene mandato nell'aula 1.

Si sa che lo studente che lo studente che va in aula 1 è appassionato qual è la probabilità che in aula 1 ci sia uno studente appassionato in più? (ossia se lo studente da 1 a 2 non è appassionato e la probabilità che aveva lo studente da 2 a 1 di essere appassionato)

- Non si sa se lo studente 1-2 sia appassionato
- C'è la condizione della probabilità dello studente 2-1 è appassionato

$B_1 = \{studente\ 1-2\ \text{è}\ appassionato\}$
$B_2 = \{studente\ 1-2\ non\ \text{è}\ appassionato\}$

$A = \{studente\ 2 - 1\ \text{è}\ appassionato\}$

$$P(B_2|A) = P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$P(A|B_1) = \frac{81}{101}$$
$$P(A|B_2) = \frac{80}{101}$$

$$P(B_1) = \frac{30}{100}, \qquad P(B_2) = \frac{70}{100}$$

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{80}{101} * \frac{70}{100}}{\frac{81}{101} * \frac{30}{100} + \frac{80}{100} * \frac{70}{100}} \cong \frac{0.792 * 0.7}{0.802 * 0.3 + 0.792 * 0.7} \cong \frac{0.5544}{0.2406 + 0.5544} \cong 0.697$$

ma chi è l'universo?

È meglio non specificarlo

EVENTI INDIPENDENTI (INDIPENDENZA STOCASTICA)

Quando un evento non influenza l'altro

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

Def. Due eventi $A, B \in \mathcal{A}$ si di cono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Al caso di n eventi $A_1, \dots, A_n$ si dice insieme di eventi indipendenti se $\forall\ k = 2, \dots, n\ e\ \forall\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n$ si ha

$$P(A_{i_1} \cap \cdots A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{k} (A_{i_j})$$

OSS :

Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se $P(A|B) = P(A)$, sapere che si verica l'evento B non modifica la probabilità con cui si verifica A.

oss: prove ripetute dello stesso esperimento nelle stesse condizioni danno luogo ad eventi indipendenti.

ES: estrazione da un'urna con reimmissione. Nell'urna si hanno 7 palline rosse e 3 blu. Calcolare che facendo 5 estrazioni con reimmissione si ottenga esattamente una pallina blu.

Non cambiano le probabilità delle varie estrazioni.

-> la probabilità è un prodotto perché gli eventi sono indipendenti.

$\Omega = \{insieme\ con\ tutti\ i\ possibili\ esiti\} = \{RRRRR, RRRRB, \dots, BBBBB\}$

NON METTO NESSUNA IPOTESI SU OMEGA E QUINDI NON CALCOLO LA CARDINALITÀ DI OMEGA, E IN PIÙ LA PROBABILITÀ CHE ESCA B O R È DIVERSA.

$P(\{RRRRR\}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \Rightarrow A_i = \{l'estrazione\ i - esima\ \text{è}\ R\} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = \left(\frac{7}{10}\right)^5$

Rispondo alla domanda

$P(RRRRB) = P(BRRRR) = \cdots$ pperchégli eventi sono indipendenti

Dipende solo da quante R e quante B ho

C={ottenere esattamente una pallina blu in 5 estrazioni con reimmisione }

$$P(C) = \binom{5}{1} * P(R)^4 * P(B)^1 = 5 * \left(\frac{7}{10}\right)^4 * \frac{3}{10}$$

Se fossero state due palline blu : $P(C) = \binom{5}{2} * P(R)^3 * P(B)^2$

OSS:

Se A e B sono eventi indipendenti allora :
$A^c\ e\ B, A\ e\ B^c, A^C e B^C$ sono indipendenti

Dimostrazione

$$P(A^C \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^C)$$

OSS

Se A e B sono eventi incompatibili e non trascurabili non possono essere indipendenti

$0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

OSS

Se A è un evento trascurabile o quasi certo è indipendente da ogni altro B

Dim.

$se\ P(A) = 0$

$0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$

$\Rightarrow 0 = P(A \cap B), \qquad P(A)P(B) = 0$

Per il quasi certo si può considerare che $A^C$ è trascurabile

ESEMPIO 1

Numero ritardatario : se ho $A = \{90$ è $estratto\ all'n + 1 - esima\ estrazione\ \}$
$e\ B = \{90\ non\ viene\ estratto\ nelle\ prime\ n\ estrazioni\}$

$P(A|B) = \frac{1}{90}$ che è esattamente la probabilità di A

$P(A) = \frac{90^n}{90^{n+1}} = \frac{1}{90}$

Quindi A e B sono eventi indipendenti

ESEMPIO 2

Se 2 eventi sono a livello intuitivo indipendenti non è detto che non possono essere legati in qualche modo

Dado lanciato 2 volte:

$A = \{somma\ dei\ due\ lanci = 7\}$
$B = \{all\ primo\ lancio\ si\ ottiene\ 4\}$
$C = \{al\ secondo\ lancio\ si\ ottiene\ 3\}$

B e C sono indipendenti ma in realtà anche A e B e A e C sono indipendenti perché $P(A) = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{\Omega} = \frac{1}{6}$

$P(b) = P(C) = \frac{1}{6}$

$A \cap B = \{(4,3)\} = A \cap C \qquad P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{1}{36}$