ANALISI MATEMATICA 1

UNIVERSITÀ DI PISA

FLAVIO ROMANO

(INFORMATICA $\mathcal{I}$ anno 2020-2021)

Science is a differential equation. Religion is a boundary condition

A. Turing

Contents

CHAPTER 1

Funzioni

Una funzione è una terna di oggetti (A, B, f) $\underline{f : A \to B}$.

(1) A=Dominio
(2) B=Codominio
(3) f=è una legge che lega gli elementi di A con quelli di B, f mette in corrispondenza ogni elemento di A con un solo elemento di B.

Definition 1.1. **Grafico di una funzione**: Il grafico di una funzione è sottoinsieme del prodotto cartesiano di A per B. $graph(f) = \{(a, b) \subseteq A \times B \;\; t.c \;\; B = f(a)\}$

Definition 1.2. **Immagine**: L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nel codominio con il quale può al più coincidere.
Data una $f : A \to B \; e \; D \subset A \; allora \; f(D) = \{f(x) \;\; x \in D\}$. $f(D)$ è immagine di D attraverso f e contemporaneamente è parte del codominio (poiché sottoinsieme di esso).
In pratica quando si parla di $Imm(f) = f(A)$ voglio sapere dove vanno a finire tutti i punti del dominio A, cioé l'immagine di tutto il dominio attraverso f.

Definition 1.3. **Funzione iniettiva, surgettiva e biettiva**

- **INIETTIVA:** Una funzione si dice iniettiva se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Scriveremo che $f : A \to B$ iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A \;\; t.c \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **SURGETTIVA:** Una funzione si dice surgettiva se l'immagine della funzione coincide con il codominio; in altri termini se per ogni elemento b del codominio B esiste almeno un elemento a del dominio A tale che b è immagine di a mediante f ossia $b = f(a)$. Nel codominio non devono esserci elementi scoperti. Scriveremo che $f : A \to B$ è surgettiva se $\forall \;\; b \in B \;\; \exists \;\; a \in A \;\; f(a) = b$.
- **BIETTIVA:** Una funzione si dice biettiva (o corrispondenza 1:1) se f è sia iniettiva che surgettiva. In particolare se f è biettiva posso costruire la funzione inversa che indico con f^{-1}, ad esempio se $f : A \to B$ è biettiva allora esiste $f^{-1} : A \to B$.
  Dato $b \in B$ esiste almeno un elemento $a \in A \;\; t.c \;\; f(a) = b$ (surgettività) mentre l'elemento a è unico perché f è iniettiva. In sostanza poniamo $f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$. Se f è una funzione invertibile, i grafici di f e dif^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$ (bisettrice 1° e 2° quadrante).

Proposition. **Capire iniettività**

Abbiamo due vie, il metodo analitico ed il metodo grafico:

Metodo analitico:

(1) Data una funzione $y = f(x)$ imponiamo l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$.
(2) Risolviamo l'uguaglianza portando tutti gli x_1 a sinistra e gli x_2 a destra.
(3) Se alla fine arriviamo a una soluzione del tipo $x_1 = x_2$ allora la f è iniettiva, altrimenti non lo è.

Metodo grafico:

(1) Disegniamo un grafico della funzione.
(2) Tracciamo una serie di rette orizzontali parallele all'asse x.
(3) Se riusciamo a trovare anche solo una retta che abbiamo disegnato che interseca il grafico della funzione al massimo in un punto, allora la funzione è iniettiva. Se interseca in più punti allora non lo è.

PROPOSITION. **Capire surgettività**

Abbiamo un metodo analitico e uno grafico per capire se una funzione è surgettiva oppure no.

Metodo analitico:
Si tratta di trovare $\forall y \in Cod(f)$ *almeno una* $x \in Dom(f)$ *t.c* $f(x) = y$. [n.b il codominio di f è spesso $\mathbb{R}$]

(1) Bisogna considerare $f(x) = y$ come un'equazione e risolverla in favore di x.
(2) Se la x trovata appartiene al dominio, allora è surgettiva. Questo metodo è poco efficiente e macchinoso da fare durante un compito.

Metodo grafico:

(1) Prendo un punto qualunque sull'asse $\mathbb{R}$ e traccio una retta parallela all'asse delle x.
(2) Se questa retta orizzontale non interseca il grafico della funzione, allora la f non è surgettiva (altrimenti lo è).

DEFINITION 1.4. **Funzioni monotone**: La monotonia riguarda la crescenza o la decrescenza delle funzioni.

Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ (sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) e $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, se $\forall x_1, x_2$ risulta che:

(1) $f(x_1) < f(x_2) \implies f$ si dice **STRETTAMENTE CRESCENTE**.
(2) $f(x_1) \leq f(x_2) \implies f$ si dice **DEBOLMENTE CRESCENTE**.
(3) $f(x_1) > f(x_2) \implies f$ si dice **STRETTAMENTE DECRESCENTE**.
(4) $f(x_1) \geq f(x_2) \implies f$ si dice **DEBOLMENTE DECRESCENTE**.

In generale se si verificano la (1). o la (3). la funzione si dice **STRETTAMENTE MONOTONA**, se invece si verificano la (2). o la (4). la funzione si dice **DEBOLMENTE MONOTONA**.
Una cosa molto importante da ricordare è che se la f è crescente, allora mantiene l'ordinamento:
$x_1 < x_2$ quindi $f(x_1) < f(x_2)$. Mentre se f è decrescente l'ordinamento si inverte: $x_1 < x_2$ però $f(x_1) > f(x_2)$.

REMARK. Se f è *strettamente crescente* allora è anche *debolmente crescente*, ma non viceversa.

REMARK. Se f è *strettamente monotona* allora f è *iniettiva*, ma non viceversa.

FACT. *Analogamente...*

- f è strettamente crescente sse se il rapporto incrementale è maggiore di zero: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, $x_1 \neq x_2$.
- f è strettamente decrescente sse se il rapporto incrementale è minore di zero: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, $x_1 \neq x_2$.

COROLLARY. **Riconoscere la monotonia**

Tipo	***Come si comporta?***	***Quindi***
Monotona crescente	Cresce e basta	
Monotona debolmente crescente	Cresce o resta uguale	Tratto orizzontale. $f(x^1) = f(x^2)$
Monotona decrescente	Decresce e basta	
Monotona debolmente decrescente	Decresce o resta uguale	Tratto orizzontale. $f(x^1) = f(x^2)$

DEFINITION 1.5. **Composizione di funzioni monotone**:
Dati tre insiemi $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ allora abbiamo che

(1) Se f è **CRESCENTE** e g è **CRESCENTE**, allora $g \circ f$ sarà **CRESCENTE**.
(2) Se f è **CRESCENTE** e g è **DECRESCENTE**, allora $g \circ f$ sarà **DECRESCENTE** (def. analoga per f decrescente e g crescente).
(3) Se f è **DECRESCENTE** e g è **DECRESCENTE**, allora $g \circ f$ sarà **CRESCENTE**.

DEFINITION 1.6. **Dominio di funzione**: L'insieme di definizione (dominio naturale) di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso scrivere la funzione, infatti la funzione è definita solo nei valori del suo dominio.

(1) Se $f(x) = f(-x)$ per ogni x nel dominio di f, la f si dice **PARI**:
$\{f \text{ } pari \implies graph(f)\underline{specchiato}\}$.
(2) Se $f(x) = -f(-x)$ per ogni x nel dominio di f, la f si dice **DISPARI**:
$\{f \text{ } dispari \implies graph(f)\underline{simmetrico\ rispetto\ a\ 0}\}$.

REMARK. Il dominio di f deve essere: se $x \in Dom \implies -x \in Dom$ (simmetrico rispetto a 0).

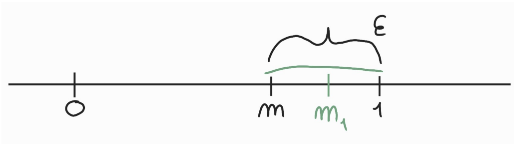
DEFINITION 1.7. **Funzione periodica**: f si dice periodica di periodo $p \in \mathbb{R}$ se $\forall x$ $f(x + p) = f(x)$.
Il dominio di f deve essere tale che $\{x \in Dom \implies (x + p) \in Dom\}$, ad esempio le funzioni goniometriche.
sen e *cos* sono periodiche e il loro periodo è compreso tra $[0, 2\pi]$.

CHAPTER 2

Questioni legate all'ordinamento dei numeri Reali

Definition 2.1. **Massimo**: Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, un numero reale si dice massimo di A se $m \geq a \; \forall a \in A$ e $m \in A$. (def. analoga per minimo)

Example. $A = [0, 1] \implies max(A) = 1, \quad B = [0, 1) \implies max(B) = \nexists$.



Remark. Supponiamo per assurdo che un certo numero $m \in \mathbb{R}$ sia massimo di B.
Quindi m deve appartenere a B, $m \in B$, allora m deve essere minore di 1 poiché $B = [0, 1)$.
Poniamo $\varepsilon = 1 - m (> 0)$ e definiamo $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2}$. Risulta che m_1 è elemento di B, ma $m < m_1$ che contrasta con il fatto che m è il massimo di B. Infatti dovrebbe essere $m \geq b \; \forall \; b \in B$.

Definition 2.2. **Maggiorante**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, un $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a \; \forall \; a \in A$.
L'insieme di tutti i maggioranti di A si indica con M_A. Non è detto che appartenga ad A.
(def. analoga per *minorante*).

Example. $A = [0, 1] \implies 3$ è maggiorante di A,$3 \in M_A$

Remark. Se esiste un maggiorante di A, allora ne esistono infiniti.
Infatti se $k \in M_A$, m è maggiorante di $A \; \forall \; m \geq k$.

Remark. Ci sono insiemi che non hanno maggioranti. Es: $A = [4, +\infty)$ non ha maggioranti.

Definition 2.3. **Limitato superiormente:** Se l'insieme dei maggioranti $M_A \neq \emptyset$, allora l'insieme A si dice limitato superiormente. (def. analoga per limitato inferiormente).

Definition 2.4. **Limitato:** Se ho un insieme $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, se A è limitato sia *superiormente* che *inferiormente*, allora A si dice *limitato*.

Remark. A è limitato se e solo se $\exists \; h, k \in \mathbb{R} \; t.c \; k \leq a \leq h \; \forall a \in A$.

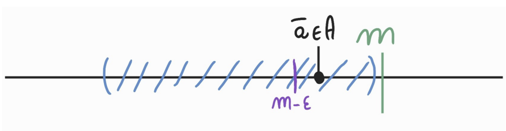
Definition 2.5. **Estremo superiore**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, superiormente limitato. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti. Tale minimo si dice *estremo superiore* di A e si indica con $sup(A)$.

Example. $A = [0, 1) \implies M_A(1, +\infty)$, da cui $min(M_A) = 1 \implies sup(A) = 1$.

Remark. Se esiste il $max(A)$ allora il $max(A) = sup(A)$

Definition 2.6. **Caratterizzazione dell'estremo superiore**: Sia $A \neq \emptyset$ superiormente limitato
Allora vale $m = sup(A)$ se e solo se valgono 2 condizioni:

(1) $a \leq m \; \forall a \in A$, cioé m è un *maggiorante.*
(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \overline{a} \in A \; t.c \; \overline{a} > (m - \varepsilon)$, non ci sono *maggioranti* più piccoli di m.



Remark. La scrittura $sub(A) < +\infty$ vuol dire che l'estremo superiore di A è un numero reale, quindi A è superiormente limitato.

Definition 2.7. **Retta reale estesa**: Si indica con $\overline{\mathbb{R}}$ ed è la retta reale dove aggiungiamo 2 elementi: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.
Questa aggiunta deve essere fatta in modo che valga la condizione: $-\infty \leq x \leq +\infty \;\; \forall \; x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Remark. Se $x \in \mathbb{R}$, quindi $x \neq +\infty$ e $x \neq -\infty$, allora $-\infty < x < +\infty$ (strettamente).

DEFINITION 2.8. **Parte intera**: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice *parte intera* di x, e si indica con $[x]$, il più grande numero intero minore o al più uguale ad x. In poche parole è il primo numero che incontriamo spostandoci da x verso sinistra. $[x] = max\{m \in \mathbb{Z}\ t.c\ m \leq x\}$.

EXAMPLE. $[-\frac{25}{10}] = -2$

DEFINITION 2.9. **Limitata superiormente**: f è limitata superiormente sse $f(A)$, cioé la sua immagine, è limitata superiormente. (viceversa per limitata inferiormente)

REMARK. $sup(f) = sup(f(A))$, se f non è limitata superiormente si scrive $sup(f) = +\infty$, se non è limitata inferiormente scriverò $inf(f) = -\infty$

DEFINITION 2.10. **Massimo**: f ha massimo se $f(A)$ ha massimo, si dice che M è massimo di f, $M = max(f)$, se $M = max(f(A))$. (viceversa per il minimo)

REMARK. Se f ha massimo, allora ogni $x_0 \in A\ t.c\ f(x_0) = max(f)$ si dice punto di massimo per f. (viceversa per minimo)

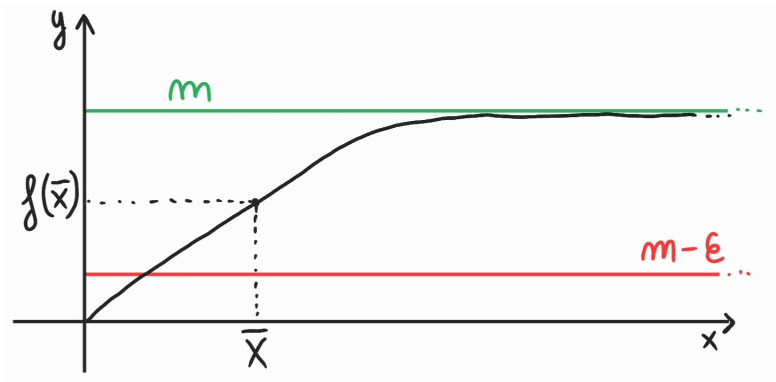
REMARK. Il massimo di f è unico, i punti di massimo potrebbero essere molti.

2.0.1. *Correlazione tra massimo, minimo e monotonia di una funzione*
. Supponiamo di avere una funzione $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$:

(1) Se A ha **Massimo** e f è **Debolmente Crescente**, allora f ha massimo $max(f) = f(max(A))$.
(2) Se A ha **Minimo** e f è **Debolmente Crescente**, allora f ha minimo $min(f) = f(min(A))$.
(3) Se A ha **Massimo** e f è **Debolmente Decrescente**, allora f ha minimo $min(f) = f(max(A))$.
(4) Se A ha **Minimo** e f è **Debolmente Decrescente**, allora f ha massimo $max(f) = f(min(A))$.

REMARK. Data $f : A \to \mathbb{R}$ allora $m = sup(f)$ se e solo se valgono:

(1) $f(x) \leq m\ \forall x \in A$
(2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \overline{x} \in A\ t.c\ f(\overline{x}) > m - \varepsilon$



CHAPTER 3

Valore Assoluto

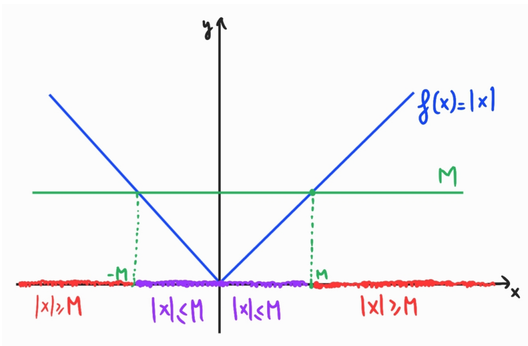
DEFINITION 3.1. Dato $x \in \mathbb{R}$, si dice valore assoluto di x, il numero: $|x| = max\{x, -x\}$.

EXAMPLE. $|5| = max\{5, -5\} = 5, \quad |-3| = max\{-3, -(-3)\} = 3$

3.1. Proprietà

1) $x \leq |x|$	5) $|-x| = |x|$
2)$|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x \leq 0$	6) $-|x| \leq x \leq |x|$
3) $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$	7) $|x| \leq M$ sse $-M \leq x \leq M$
4) $|x| = 0$ sse $x = 0$	8) $|x| \geq M$ sse $x \geq M$ oppure $x \leq -M$

REMARK. *su il 7) e l'8):*



REMARK. Se $M < 0$, che vuol dire $|x| \geq M$? tipo... Quali sono le soluzioni di $|x| \geq -3$? Risposta: $\forall \ x \in \mathbb{R}$, perché ogni numero reale è maggiore o uguale di -3.

DEFINITION 3.2. **Disuguaglianza triangolare**: Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che :

(1) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

PROOF. (1)

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$: $\{-|a| \leq a \leq |a|\}$ e $\{-|b| \leq b \leq |b|\}$, sommo le disuguaglianze.
2. $\{-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|\}$, $\{-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|\}$ cioé $-M \leq x \leq M$.
3. Per la proprietà (7) $|x| \leq M$ cioé $|a + b| \leq |a| + |b|$. ☐

REMARK. La disuguaglianza triangolare si estende anche a n-elementi:

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

CHAPTER 4

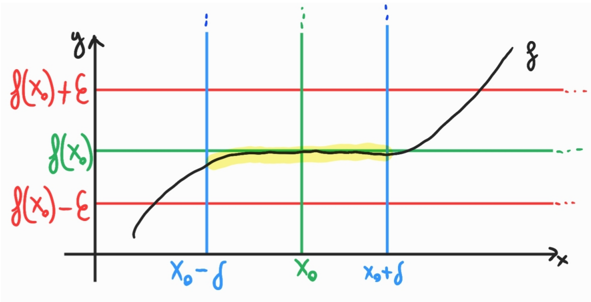
Continuità

DEFINITION 4.1. **Funzione continua in un punto:** Sia $A \subset \mathbb{R}$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$. La funzione f si dice continua in x_0 se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste un } \delta > 0 \text{ tale che } x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

REMARK. Date le diseguaglianze appena viste, è logico affermare che:

$$|x - x_0| < \delta \iff (x_0 - \delta) < x < (x_0 + \delta) \text{ e anche} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff (f(x_0) - \varepsilon) < f(x) < (f(x_0) + \varepsilon)$$



DEFINITION 4.2. **Funzione continua**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Si dice che f è continua in B se f è continua in ogni $x_0 \in B$. Se dico solo "f è continua" (senza specificare l'insieme B), intendo dire che f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

EXAMPLE. Se $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ allora f è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

THEOREM 4.1. **Permanenza del segno**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$.
Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$ allora $\exists$ un $\delta > 0$ tale per cui se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) > 0$.
(analogo viceversa per $f(x_0) < 0$)

PROOF. Supponiamo che $f(x_0) > 0$. Scelgo un $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ e lo uso nella definizione di continuità.
Allora $\exists$ un $\delta > 0$ tale per cui se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,
cioé (ricollegandoci a quanto spiegato nella continuità su un punto): $\underline{(f(x_0) - \varepsilon) < f(x)} < (f(x_0) + \varepsilon)$ □

$$\underline{f(x) > f(x_0) - \varepsilon} \implies f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ quindi } f(x) > 0.$$

COROLLARY 4.1. Se f è continua in x_0, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$ allora
$\exists$ un $\delta > 0$ tale per cui se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$.
(analogo viceversa per $f(x_0) < M \implies f(x) < M$)

PROOF. Applico il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - M$. □

THEOREM 4.2. **Conseguenze continuità**: Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni $(f+g), (f\cdot g), \left(\frac{f}{g}\right), |f|$. Se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ è continua.

PROPOSITION 4.1. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e $f : I \to B$ con $B \subset \mathbb{R}$, se f è continua in I ed è invertibile allora f^{-1} è continua in B. Attenzione se f non è definita su un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f lo è.

4.1. Continuità delle funzioni elementari

- $f(x) = x$ è **continua**, da questo segue che tutti i *polinomi* sono continui. Le funzioni costanti sono continue. $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ infatti $a_0, a_1, a_n \in \mathbb{R}$ sono *coeff.* dei monomi.
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi, le funzioni razionali sono **continue** nel loro *insieme di definizione*, in questo caso è continua per $Q(x) \neq 0$.
- $e^x, senx, cosx, logx, arcsenx, arccosx, tgx, arctgx$ sono **continue**.

THEOREM 4.3. **Composizione di funzioni continue**: Siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora $g \circ f$ è *continua* in x_0.

EXAMPLE. $e^{cos(x)}$ è una funzione continua, è la composizione di $f(x) = cos(x)$ e $g(y) = e^y$.

REMARK. Se abbiamo una funzione definita su un intervallo chiuso $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora $sup\{f(x)_{x\in(a,b)}\} = sup\{f(x)_{x\in[a,b]}\}$ e $inf\{f(x)_{x\in(a,b)}\} = inf\{f(x)_{x\in[a,b]}\}$

THEOREM 4.4. **Teorema degli zeri**: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a)\cdot f(b) < 0$ allora $\exists$ un $c \in (a,b)$ tale per cui la f si annulla $f(c) = 0$.

THEOREM 4.5. **Teorema dei valori intermedi**: Dato un intervallo $I \in \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo.

COROLLARY 4.2. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ con una f continua. Se f assume i valori y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1e y_2.

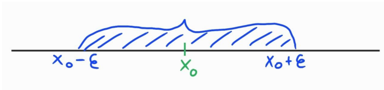
THEOREM 4.6. **Teorema di Weirstrass**: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha massimo e minimo. Il dominio di f deve essere necessariamente chiuso e limitato, altrimenti non ci sarebbe o il massimo o il minimo.

CHAPTER 5

Ancora continuità

5.1. Intorni

Definition 5.1. **Intorno**: Dato un $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *intorno* di x_0 un insieme del tipo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ dove $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ (ε è il raggio dell'intorno).
Un insieme del tipo $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ si dice **intorno destro** di x_0.
Un insieme del tipo $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ si dice **intorno sinistro** di x_0.



Definition 5.2. **Intorno a $+\infty$**: Se $x_0 = +\infty$, un intorno di x_0 è un insieme del tipo $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.
Un intorno a $-\infty$ è un insieme del tipo $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Definition 5.3. **Punto di accumulazione**: Dato un $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall$ intorno v di x_0 risulta $v \cap A \setminus \{x_0\} \neq 0$ (vicino a x_0 ci sono altri punti di A oltre x_0).

Example. $A = (2,3)$, $Acc(A) = [2,3]$. Tutti i punti di A sono punti di accumulazione, poiché ogni intorno di x_0 interseca A in infiniti punti.

Remark. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ si chiama anche **intorno bucato**, x_0 non fa parte dell'intorno.

Definition 5.4. **Punto isolato**: Un punto $x_0 \in A$ si dice punto isolato di A se $\exists$ un intorno v di x_0 tale per cui $v \cap A = \{x_0\}$.

Example. $A = [2,3] \cup \{5\} \implies 5$ è un punto isolato di A

Example. $Acc(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$, ogni numero naturale rappresenta un punto isolato all'interno della retta reale, l'unico punto di accumulazione è $+\infty$.

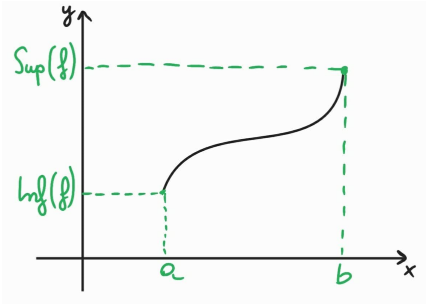
Definition 5.5. **Punto interno**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, un $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se $\exists$ un intorno v di x_0 tale per cui $v \subset A$. Cioé che l'intorno sia contenuto tutto in A.

Example. $A = [3,5]$, $int(A) = (3,5)$ poiché gli estremi non sono punti interni.

Definition 5.6. **Limite del reciproco di una funzione**:

Se	Allora
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0, \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Definition 5.7. **Monotonia e limiti superiori e inferiori**: Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con f debolmente crescente. Allora esistono $\lim_{x\to a^+} f(x) = \underset{x\in(a,b)}{inf} \{f(x)\}$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = \underset{x\in(a,b)}{sup} \{f(x)\}$.
(analogo viceversa per f debolmente decrescente)

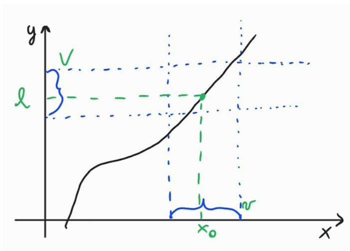


Definition 5.8. **Limite della composizione di funzioni**: Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$. Se esiste il $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ con $y_0 \in Acc(B)$ ed esiste $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e se è verificata almeno una delle 2 ipotesi: Allora $\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = l$, cioé $\underline{\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y)}$.

(1) $y_0 \in B$ e g è continua in y.
(2) $\exists$ un intorno v di x_0 tale per cui se $x \in (v \cap A \setminus \{x_0\})$ allora $f(x) \neq y_0$.

5.2. Limiti

Definition 5.9. **Limite**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$. Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il *limite* per x che tende a x_0 di $f(x)$, se $\forall$ intorno V di l esiste un intorno v di x_0 tale per cui $x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$.



- **Caso $x_0 \in \mathbb{R}(finito)$, $l \in \mathbb{R}(finito)$**
  $v = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è un intorno di x_0, $V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ è un intorno di l.
  $x \in v? \implies |x - x_0| < \delta$, $f(x) \in V? \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.
  Il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ un $\delta > 0$ tale per cui $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

- **Caso $x_0 \in \mathbb{R}(finito)$, $l = +\infty(infinito)$**
  $V = (a, +\infty)$ è intorno di $+\infty$, dire che $f(x) \in V$ vuol dire $f(x) > a$.
  Il $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se e solo se $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tale per cui $|x - x_0| < \delta$, tale per cui $x \in A$ e $x \neq x_0$ allora $f(x) > a$.
  Il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists a > 0$ tale per cui $x > a$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$.
  Il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}$ tale per cui $x > b$ allora $f(x) > a$. (anche per $-\infty$).

- **Caso $x_0 \in A$, $l \in \mathbb{R}$**
  Il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale per cui $x \in A$, $x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$.
  f è *continua* in x_0 se e solo se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale per cui $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Remark. Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ con $x_0 \in Acc(A)$, allora f è continua in x_0 sse $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Remark. Una funzione è sempre continua nei *punti isolati*.

Remark. Nella def. di limite, non serve che x_0 sia nel dominio della funzione, basta che sia un *punto di accumulazione* per il dominio.

Theorem 5.1. **Unicità del limite**: Se il limite esiste allora è unico, non può esistere un limite che si avvicina a due valori distinti contemporaneamente.

Definition 5.10. **Limite destro e sinistro**: Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Si dice che l è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0:

- *da* <u>*destra*</u> ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$) se $\forall\ V$ intorno di l esiste $\delta > 0$ tale per cui $x_0 < x < x_0 + \delta$ allora $f(x) \in V$.
- *da* <u>*sinistra*</u> ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$) se $x_0 - \delta < x < x_0$ con $x \in A$ allora $f(x) \in V$.

Definition 5.11. **Limite che tende a destra o sinistra**: Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$.
Si dice che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^+$ con $l \in \mathbb{R}$ se il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ed esiste un intorno v di x_0 tale per cui $x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$, allora $f(x) > l$.
Definizione analoga per $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l^-$ dove richiederò che l'intorno sia fatto in modo che $x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$.

Remark. Quando scrivo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l^+$ vuol dire che tende a quel valore ma la funzione ci sta solo sopra.

Theorem 5.2. **Teorema permanenza del segno (limiti)**: Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(A)$.
Se esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *con* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $l \neq 0$, allora $\exists$ un intorno v di x_0 tale per cui se $x \in A \cup v \setminus \{x_0\}$ allora f ha lo stesso segno di l definitivamente.

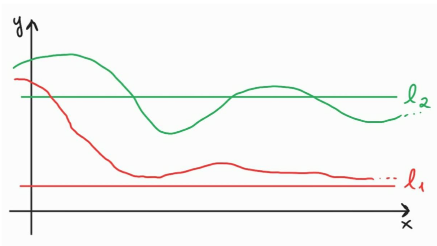
Example. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$,
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ quindi la funzione sarà positiva a destra di zero sempre.

Definition 5.12. **Continuità a destra o a sinistra**: Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ con $x_0 \in Acc(A)$.

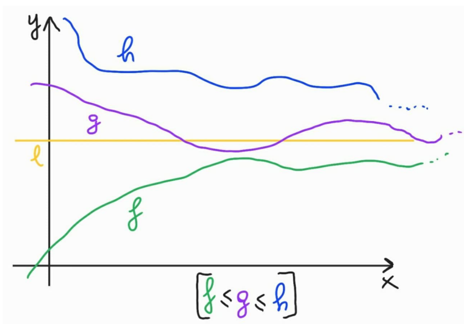
- Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che f è continua a destra in x_0.
- Se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che f è continua a sinistra in x_0.

Remark. f è continua in x_0 se e solo se è continua in x_0^+ e x_0^-.

Theorem 5.3. **Teorema del confronto**: Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Se esistono $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$,e se $\exists$ un intorno v di x_0 tale per cui $x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \leq g(x)$ quindi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, cioé $l_1 \leq l_2$.



Theorem 5.4. **Teorema dei Carabinieri**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, 3 funzioni $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$.
Se esistono $\mathit{lim}_{x \to x_0} f(x) = \underline{l}$ e $\mathit{lim}_{x \to x_0} h(x) = \underline{l}$ e se esiste un intorno v di x_0 tale che $x \in A \cap v \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e di conseguenza esiste $\mathit{lim}_{x \to x_0} g(x) = \underline{l}$.
Praticamente dall'esistenza dei limiti f e h, deduco l'esistenza del limite di g.

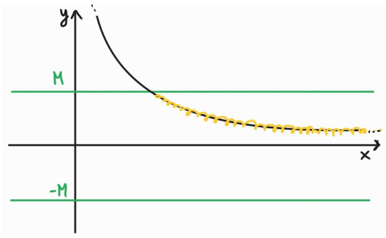


Theorem 5.5. **Teorema somma e prodotto di limiti**: Sia $A \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che esistano i limiti: $\mathit{lim}_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\mathit{lim}_{x \to x_0} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(1) Se ha senso $l_1 + l_2$ allora esiste $\mathit{lim}_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$, con $l_1, l_2 \neq \pm\infty$
(2) Se ha senso $l_1 \cdot l_2$ allora esiste $\mathit{lim}_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$, escluse le forme di indeterminazione.

THEOREM 5.6. **Funzione limitata se limite finito**: Sia $A \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l \in \mathbb{R}$ con $l \neq \pm\infty$, allora f è *limitata* in un intorno di x_0 cioé
$\exists$ un intorno v di x_0 ed $\exists$ un $M \in \mathbb{R}$ con $M > 0$ tale per cui $x \in v \cap A \implies |f(x)| \leq M$.
Quindi una funzione che tende a un valore finito, vicino al punto, deve essere finita e limitata.

EXAMPLE. $f(x) = \frac{1}{x}$, è limitata in un intorno di $+\infty$ perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



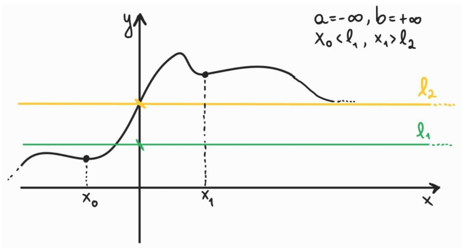
DEFINITION 5.13. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ allora si dice che f è **infinitesima** per $x \to x_0$.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dice che f **diverge positivamente** $x \to x_0$.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si dice che f **diverge negativamente** per $x \to x_0$.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $l \in \mathbb{R}$, si dice che f **converge** in l per $x \to x_0$.

PROPOSITION 5.1. .
Se f è **limitata inferiormente** in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = +\infty$
Se f è **limitata superiormente** in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = -\infty$
Se f è **limitata in un intorno** di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

THEOREM 5.7. **Teorema di Weirstrass generalizzato**: Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua tale per cui $\exists \lim_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = l_2$. Valgono i seguenti risultati:

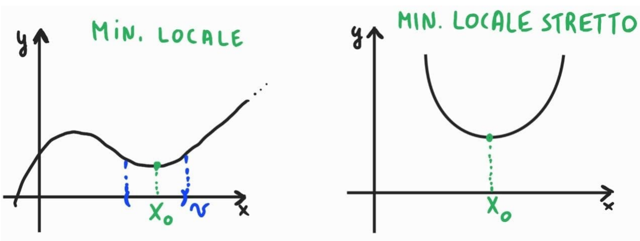
(1) f è limitata inferiormente sse $l_1 \neq -\infty$ e $l_2 \neq -\infty$
(2) f è limitata superiormente sse $l_1 \neq +\infty$ e $l_2 \neq +\infty$
(3) f è limitata sse $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \in \mathbb{R}$
(4) f ha minimo sse $\exists$ un $x_0 \in (a, b)$ tale per cui $f(x_0) \leq min\{l_1, l_2\}$
(5) f ha massimo sse $\exists$ un $x_1 \in (a, b)$ tale per cui $f(x_1) \geq max\{l_1, l_2\}$

REMARK. I risultati precedenti valgono anche nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ oppure $b \in \mathbb{R}$ e $f : (a, b] \to \mathbb{R}$.



DEFINITION 5.14. **Massimo e minimo locale**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo/massimo locale (o relativo):

- Si dice punto di **minimo locale** se esiste un intorno v di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in v \cap A$
- Si dice punto di **minimo locale stretto** se $\exists$ un intorno v di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$
- Si dice punto di **massimo locale** se esiste un intorno v di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in v \cap A$
- Si dice punto di **massimo locale stretto** se $\exists$ un intorno v di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in v \cap A \setminus \{x_0\}$



REMARK. Se x_0 è un punto di minimo (o massimo) allora è anche minimo (o massimo) locale.

Definition 5.15. **Infinitesimi**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$.
Supposto $g(x) \neq 0$, in un intorno x_0 vale che $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(1) $f(x) = o(g(x))$, per $x \to x_0$, $\iff \underset{x \to x_0}{lim} k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
(2) $f(x) = O(g(x))$, per $x \to x_0$, $\iff \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$ (M=costante)
(3) $f(x) \sim g(x)$, per $x \to x_0$, $\iff \underset{x \to x_0}{lim} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ [n.b "$\sim$" = asintoticamente equivalente]

Inoltre possiamo specificare che:

(1) $f(x)$ è $o(g(x))$, per $x \to x_0$ se è possibile scrivere $f(x) = k(x) \cdot g(x)$ dove $\underset{x \to x_0}{lim} k(x) = 0$
(2) $f(x)$ è $O(g(x))$, per $x \to x_0$ se è possibile scrivere $f(x) = k(x) \cdot g(x)$ dove $k(x)$ stavolta risulta essere limitata (non $\pm\infty$) nell'intorno di x_0.
(3) $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$, per $x \to x_0$ se è lecito scrivere $f(x) = k(x) \cdot g(x)$ e il limite $\underset{x \to x_0}{lim} k(x) = 1$

Definition 5.16. **Proprietà o-piccoli**:

(1) Sia $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, la somma $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.
Poiché $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
(2) Sia $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, la differenza $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$.
Poiché $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
(3) Sia $f(x) = o(g(x))$, per $x \to x_0$, introduciamo un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$(costante),
risulta che $\alpha f(x) = o(g(x))$.
(4) Sia $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$, per $x \to x_0$, il prodotto $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))^2 = o(g^2(x))$
(5) Non il rapporto $\frac{f_1}{f_2} = \frac{o(f_1)}{o(f_2)}$, nel limite verrebbe una forma di indeterminazione.

Definition 5.17. **Proprietà fondamentali o-piccoli**:

- Sia $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$. Risulta che $f(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$. Infatti $o(o(g)) = o(g)$.
- Sia $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $g(x) = O(h(x))$ per $x \to x_0$. Risulta che $f(x) = o(h(x))$

Definition 5.18. **Asintoti orizzontali**: Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (con $a \in \overline{\mathbb{R}}$). Se esiste il $\underset{x \to +\infty}{lim} f(x) = l$ ed $l \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$ per $x \to +\infty$.
(analoga def. per $-\infty$). Praticamente la funzione si stabilizza verso un valore finito.

Example. $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$\underset{x \to -\infty}{lim} e^x = 0$, quindi f ha un asintoto orizzontale di eq. $y = 0$ per $x \to -\infty$.

Remark. Gli asintoti possono essere attraversati, $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ la funzione "tocca" l'asintoto.

Remark. Una funzione ammette asintoti orizzontali quando non ha asintoti obliqui.

Definition 5.19. **Asintoti verticali**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$. Se f diverge per $x \to x_0$ da *destra*$^+$ o a *sinistra*$^-$ (o da entrambi) si dice che f ha un *asintoto verticale* di equazione $x = x_0$.

Example. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$.
$\underset{x \to 0^+}{lim} \frac{1}{x} = +\infty$, $\underset{x \to 0^-}{lim} \frac{1}{x} = -\infty$, quindi f ha un asintoto verticale di eq. $x = 0$.

Remark. Una funzione al massimo può avere due asintoti orizzontali (a $+\infty$ e a $-\infty$) ma può avere infiniti asintoti verticali. Tipo la funzione $f(x) = tg(x)$ ha infiniti asintoti verticali.

Definition 5.20. **Asintoti obliqui**: Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se esiste $\underset{x \to +\infty}{lim} \dfrac{f(x)}{x} = m$ con $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ed esiste $\underset{x \to +\infty}{lim} f(x) - mx = q$ con $q \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto obliquo* di equazione $y = mx + q$ per $x \to +\infty$. (Analoga definizione per $x \to -\infty$).

Remark. Una funzione ammette asintoto obliquo quando non ha asintoti orizzontali.

Definition 5.21. **Tabella riassuntiva asintoti:**

Orizzontale	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$,con $l \in \mathbb{R}$	$y = l$
Verticale	$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$	$x = x_0$
Obliquo	$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\boldsymbol{q} = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$	$y = mx + q$

Definition 5.22. **Sviluppi di Taylor al primo ordine**:

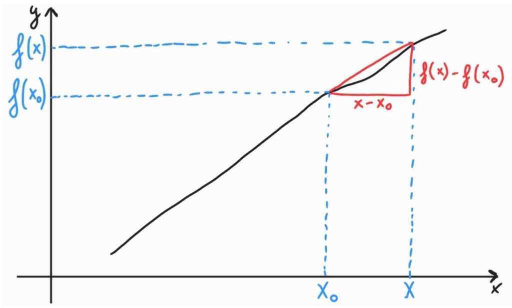
$sen(x)$	$= x + o(x)$
$log(1 + x)$	$= x + o(x)$
e^x	$= 1 + x + o(x)$
$cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$tg(x)$	$= x + o(x)$

CHAPTER 6

Derivata

DEFINITION 6.1. **Derivata prima**: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $x \in Acc(A)$.

- Se esiste il limite: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$, allora l si dice *derivata* di f in x_0.
- Se $l \in \mathbb{R}$(è finita) allora f si dice derivabile in x_0.
- La derivata si indica con $f'(x_0) \cong Df(x_0) \cong \frac{df}{dx}(x_0)$, cioé $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, anche noto come limite del rapporto incrementale.



REMARK. L'esistenza della derivata e la derivabilità sono due cose diverse, la derivata potrebbe anche valere $\pm\infty$. In tal caso f non è derivabile ma *esiste* la derivata.

THEOREM 6.1. **Derivabilità e continuità**: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

PROOF. $\square$

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0))$

(2) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$

(3) $f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{\text{tende a 0}}$

(4) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ciò dimostra che f è *continua* in x_0.

REMARK. Non vale il viceversa, cioé è errato dire che se f è continua allora è anche derivabile, vediamo:

EXAMPLE. $f(x) = |x|$, nel quale $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$.

Ma $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 & x \geq 0 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1 & x \leq 0 \end{cases}$

Quindi $\lim_{x \to 0^+} \neq \lim_{x \to 0^-}$, da ciò capiamo che il limite in realtà non esiste.
Non esistendo il limite allora nemmeno la derivata di $|x|$ in $x_0 = 0$ esisterà.

DEFINITION 6.2. **Derivata sinistra e destra**: Se esiste $\lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ questo si chiama derivata destra di f in x. (Analogo viceversa per la derivata sinistra). Si indicano con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.

REMARK. f è derivabile in x_0 sse $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite

EXAMPLE. $f(x) = |x|$, $f'_+(x_0) = 1$ mentre $f'_-(x_0) = -1$. Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

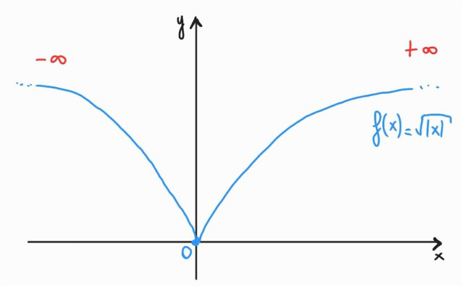
6.1. Punti di non derivabilità

DEFINITION 6.3. **Punto angoloso**: Se esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, sono entrambe finite ma diverse tra loro allora x_0 si dice *punto angoloso*.

EXAMPLE. $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in 0.

DEFINITION 6.4. **Punto di cuspide**: Se $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ sono infiniti di segno opposto, allora il punto x_0 si dice *punto di cuspide*.

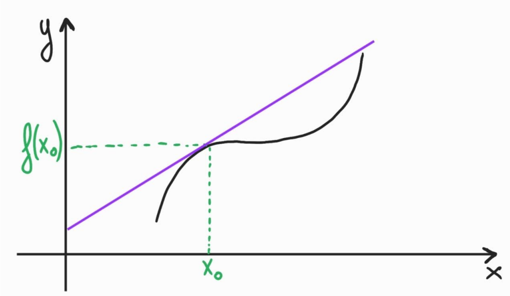
EXAMPLE. $f(x) = \sqrt{|x|}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha $f'_-(0) = -\infty$ e $f'_+(0) = +\infty$



REMARK. f è derivabile in $x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overbrace{o(x - x_0)}^{\text{per } x \to x_0}$

Infatti il $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ cioé $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$,
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = o(x - x_0)$
Ne viene che f è derivabile in x_0 sse $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{per } x \to x_0}$.

DEFINITION 6.5. **Derivata e tangente**: Se f è derivabile in x_0 allora la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si dice *retta tangente* al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.
Infatti la retta tangente passa per un punto che ha per coefficiente angolare $f'(x_0)$.



DEFINITION 6.6. **Derivata seconda**: Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni $x \in A$, allora esiste $f'(x)\ \forall x \in A$ e costruisco la funzione derivata di f. Che sarà $f' : A \to \mathbb{R}$, se la f' è a sua volta derivabile posso calcolarne la derivata che chiamo f''. Questa operazione può essere ripetuta finché la funzione risulta derivabile.

DEFINITION 6.7. **Classe C^n**: Dato un $n \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^n se f è derivabile n-volte e la $f^{(n)}$ è continua.

THEOREM 6.2. **Teorema di derivazione**: Se f e g sono funzioni derivabili in x_0, allora.

(1) $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0)$
(3) Se $f(x_0) \neq 0$ e $\dfrac{1}{f}$ è derivabile in x_0 allora $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$
(4) Se $g(x_0) \neq 0$ e f, g sono derivabili in x_0 allora $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f'(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

DEFINITION 6.8. **Derivata della funzione inversa**: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona (quindi invertibile). Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Inoltre posso scriverla $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

DEFINITION 6.9. **Derivata della funzione composta**: Sia $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in Acc(A)$ e $y_0 \in Acc(B)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in y_0 allora $g \circ f$ è derivabile e vale:
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

EXAMPLE. **Funzione non derivabile:** Sia $f(x) = \begin{cases} x sen\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

Domandiamoci se f è continua in $x = 0$: $\lim_{x\to 0} x sen\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, è continua.

Domandiamoci se f è derivabile in $x = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x sen\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x} = \nexists$.

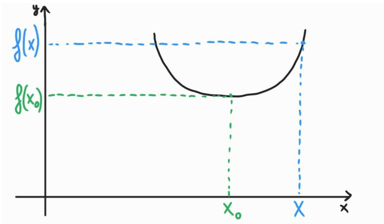
Non esiste la derivata di f in $x = 0$.

6.2. *Teoremi Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy*

THEOREM 6.3. **Teorema di Fermat**: Sia $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è massimo o minimo locale per f, con f derivabile in x_0. Allora $f'(x_0) = 0$ (cioé nulla).

PROOF.

- Se f è derivabile in x_0 allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
- Ma $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\geq 0}}$, supponiamo che x_0 sia minimo locale per f:



- In un intorno di x_0 il rapporto incrementale è ≥ 0, quindi anche il limite del rapporto incrementale sarà ≥ 0 (cioé la sua derivata).
  $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{\leq 0}} \implies f'_-(x_0) \leq 0$ ma $f'_+(x_0) = 0$ e $f'_-(x_0) = 0$. Quindi $f'(x_0) = 0$.

□

REMARK. Se il punto non è interno al dominio, allora il teorema non è valido.

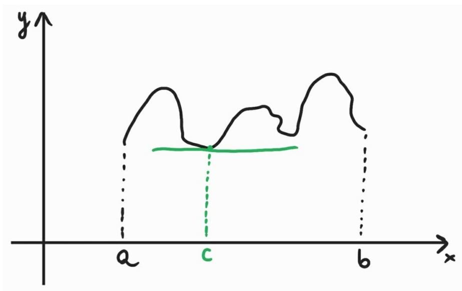
REMARK. L'ipotesi di derivabilità è necessaria. Quindi possono esserci punti di minimo o massimo locale dove la derivata si annulla (perché non esiste).

EXAMPLE. $f(x) = |x|$, c'è un minimo assoluto in $x = 0$ ma $f'(x) = 0$ non esiste.

REMARK. Il teorema è condizione necessaria per un massimo e minimo locale, ma non sufficiente.

EXAMPLE. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$ ma $x = 0$ non è né massimo né minimo locale.

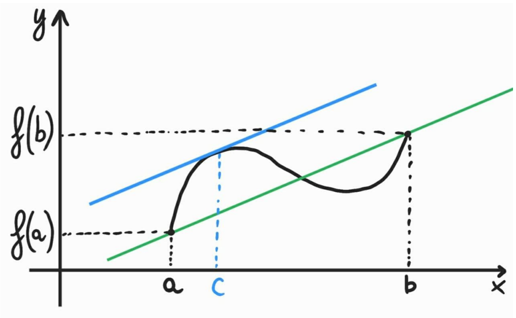
THEOREM 6.4. **Teorema di Rolle**: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ tale per cui $f'(c) = 0$ (si annulla).



PROOF. f è continua in $[a, b]$ quindi per *Weirstrass* so che assuma massimo e minimo.
Siano x_1 e x_2 con $x_1, x_2 \in [a, b]$ i punti di massimo e minimo, $f(x_1) = max(f)$ e $f(x_2) = min(f)$: □

- **Caso 1.** $\boldsymbol{x_1 = a, x_2 = b}$ **(o viceversa)**:
  Dato che $f(a) = f(b)$ allora sarebbe $\underbrace{max(f) = min(f)}_{f\text{costante in } [a,b]} \implies f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b)$.
- **Caso 2. almeno uno dei 2 punti non è negli estremi**:
  Allora esiste un punto di massimo o minimo interno ad (a, b). Quindi per ***Fermat*** $f'(c) = 0$.

THEOREM 6.5. **Teorema di Lagrange**: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ tale per cui $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



REMARK. La tangente nel punto c è parallela alla retta che unisce i punti estremi del grafico.

PROOF.

- Definiamo una funzione $r(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$, dove $r(x)$ è la retta che passa per gli estremi del grafico $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- Definiamo anche $g(x) = f(x) - r(x)$, con g continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
- Calcoliamo: $g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0$, $g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$.
- Allora $g(a) = g(b)$ e posso applicare ***Rolle*** a g.
- Quindi $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ tale per cui $g'(c) = 0$.
- Calcoliamo: $g'(x) = f'(x) - r'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $g'(c) = 0 \implies f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Cioé $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\square$

THEOREM 6.6. **Teorema di Cauchy**: Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora $\exists$ un punto $c \in (a, b)$ tale per cui $f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$. Se inoltre $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

THEOREM 6.7. **Conseguenze teorema di Lagrange**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $Int(I)$ (punti interni di I). Allora valgono i seguenti casi:

(1) Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in Int(I) \implies f$ **costante** in I
(2) Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in int(I) \implies f$ **debolmente crescente** in I
(3) Se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in int(I) \implies f$ **debolmente decrescente** in I
(4) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in int(I) \implies f$ **strettamente crescente** in I
(5) Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in int(I) \implies f$ **strettamente decrescente** in I

PROOF. Caso (4).

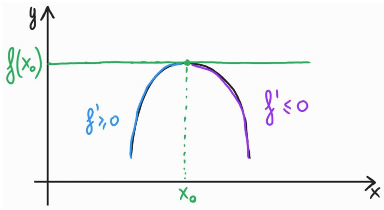
- Prendiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, devo mostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.
- Osservo che $(x_1, x_2) \subset Int(I)$, allora applico *Lagrange* all'intervallo $[x_1, x_2]$.
- Quindi $\exists$ un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale per cui $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
- Ma io so che $f'(c) > 0$, quindi $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ e quindi $f(x_2) - f(x_1) > 0$
- Allora diremo che $f(x_2) > f(x_1)$.

$\square$

REMARK. Se f non è definita su un intervallo, il teorema potrebbe non risultare vero.

PROPOSITION 6.1. **Teorema di Lagrange**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con $x_0 \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I - \{x_0\}$ e continua in I. Valgono:

(1) Se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è punto di **minimo locale** per f.
(2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è un punto di **massimo locale** per f.



REMARK. Cosa succede nel caso f non sia derivabile in x_0?

EXAMPLE. $f(x) = |x|$, f non è derivabile in $x_0 = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$, $x = 0$ è un punto angoloso e punto di minimo.

THEOREM 6.8. **Derivata seconda e Lagrange**: Sia $A \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in Int(A)$, sia f derivabile due volte in x_0 e $f'(x_0) = 0$. Allora valgono:

(1) Se x_0 è punto di **minimo locale** $\implies$ $f''(x_0) \geq 0$. (condizione necessaria)
(2) Se x_0 è punto di **massimo locale** $\implies$ $f''(x_0) \leq 0$. (condizione necessaria)
(3) Se $f''(x_0) > 0 \implies$ x_0 è punto di **minimo locale**. (condizione sufficiente)
(4) Se $f''(x_0) < 0 \implies$ x_0 è punto di **massimo locale**.(condizione sufficiente)

6.3. De l'Hôpital

THEOREM 6.9. **Teorema di De l'Hôpital**: Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, e siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b).

Se valgono le seguenti condizioni:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ *, oppure,* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$
(2) $g'(x) \neq 0$ *in un intorno destro di* a
(3) $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, con* $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora esiste $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, stesso risultato per* $x \to b^-$ *e* $x \to a$*.*

EXAMPLE. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2cos(x)-2+x^2}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$, applico D.L.H.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2sen(x)+2}{4x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$, applico nuovamente D.L.H.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2cos(x)+2}{12x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$, applico un'altra volta D.L.H.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2sen(x)}{24x} = \frac{1}{12} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{sen(x)}{x}}_{\to 1} = \frac{1}{12}$

REMARK. Potrebbe non esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ma esistere $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

COROLLARY 6.1. **Corollario De L'Hopital**: .

(1) Se f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0 (eccetto al più in x_0) e se esiste il $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora $f'(x_0) = l$

EXAMPLE. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$, f è derivabile in $x_0 = 0$?

$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq 0 \\ 2x^2 & x < 0 \end{cases}$, quindi $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. La f non è continua quindi non è derivabile.

(2) Se $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ non è detto che f non sia derivabile in x_0.

DEFINITION 6.10. **Fattoriale**: Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, definiamo $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ come il prodotto dei primi n numeri fattoriali. In più possiamo $(n+1)!$ possiamo riscriverlo come $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

DEFINITION 6.11. **Sommatorie**: Presi dei numeri reali indicizzati con un numero naturale, definisco sommatoria degli a_j per j che va da m a n dove $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$:

$$\underline{a_1, a_2, ..., a, n}\ ,\ \underline{a_j \in \mathbb{R}} \text{ con } \underline{j \in \mathbb{N}}, \text{ allora } \sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$$

6.4. Formule di Taylor

DEFINITION 6.12. **Formula di Taylor**: Supponiamo di avere una f derivabile in $x_0 \in (a, b)$.
Allora $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Polinomio di } 1^\circ \text{ grado}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{Resto}}$. È chiaro che f differisce dal polinomio per un resto che è un infinitesimo (di grado > 1) rispetto a $x - x_0$. Cioé $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.
Posso precisare meglio la quantità $o(x - x_0)$ ma la f deve essere derivabile più volte in x_0.

DEFINITION 6.13. **Formula di Taylor con resto di Peano**: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in (a, b)$.
Se f è derivabile n volte in x_0 e almeno $n - 1$ volte nel *resto dell'intervallo* $(a, b) - \{x_0\}$.
Allora $\exists$ un solo polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ e una funzione $R_n(x)$ tale per cui $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ed $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

- Il polinomio $P_n(x)$, di grado n, ha la seguente forma: $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j$

  Cioé $P_n(x) = \underbrace{f(x_0)}_{j=0} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{j=1} + \underbrace{\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{j=2} + \underbrace{\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}_{j=3} + ... + \underbrace{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{j=n}$
- **Legame Polinomio/Resto**:
  Il grado del polinomio è collegato all'ordine di infinitesimo del resto:
  P_n è di grado n e $R_n = o((x - x_0)^n)$.
  Ad esempio posso dire che $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$

DEFINITION 6.14. **Formula di Taylor con il resto di Lagrange**: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in (a, b)$ ed f derivabile $n + 1$ volte in $(a, b) - \{x_0\}$ ed n volte in x_0.
Allora $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ed $\exists$ un punto z con $x < z < x_0$ tale per cui $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(z) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

EXAMPLE. $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$,...,$f^{(j)}(x) = e^x$

Calcolo la formula di Taylor in $x_0 = 0$ (chiamato *centro dello sviluppo di Taylor*)

$f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f^{(j)}(0) = 1$

Quindi $e^x = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(x^n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^j(0)}{j!}(x - 0)^j + o(x^n)$,
Allora $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
Per l'ordine 2 avremo, $e^x = 1 + x + \underbrace{\dfrac{x^2}{x} + o(x^2)}_{R_2(x)}$ mentre $e^x = 1 + x + \underbrace{o(x)}_{R_1(x)}$ è ovvio che $R_2(x)$ sia più precisa.

REMARK. $R_2(x)$ è proprio $o(x)$, infatti $\frac{R_2(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = \frac{x^2}{2} + o(x)$ ($\to 0$ se $x \to 0$)

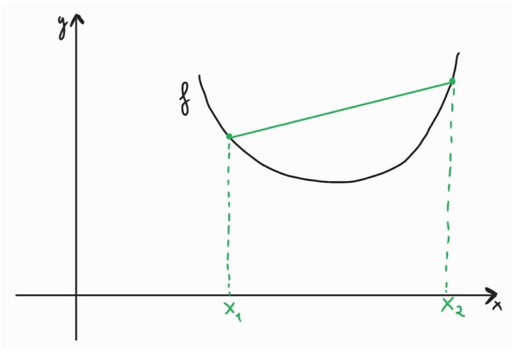
DEFINITION 6.15. **Formula di Taylor (binomiale)**: Considerato un $\alpha \in \mathbb{R}$, abbiamo che
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{3!}}_{\text{coeff. binomiale}} \cdot x^3 + ... + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n!}}_{\text{coeff. binomiale}} \cdot x^n + o(x^n)$$

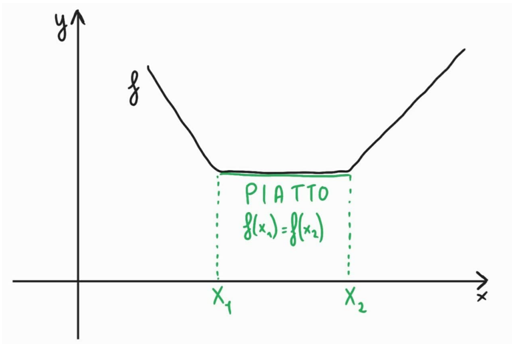
CHAPTER 7

Studio di funzione completo

7.1. Convessità e Concavità

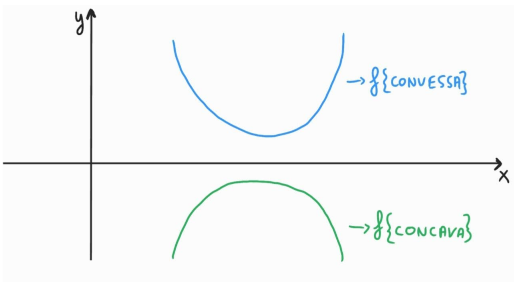
DEFINITION 7.1. **Convessità**: Sia $I \in \mathbb{R}$ intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$, f si dice convessa in I se presi 2 punti qualsiasi, nel grafico di f, il segmento che li unisce *sta sopra* il grafico di f.





- In formule:
  f è convessa in I se $\forall\ x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $\forall\ t \in (0, 1)$
  risulta che $\implies$ $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \le f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$.
  Se vale la stessa disuguaglianza con il minore stretto, allora si dice che f è *strettamente convessa* (il segmento tocca il grafico solo agli estremi).

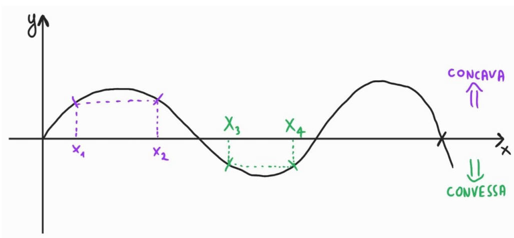
DEFINITION 7.2. **Concavità**: f si dice concava se $-f$ è *convessa*,
(analoga definizione per *strettamente concava*).



- In formule:
  $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \ge f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$ (cambia il verso della disequazione)

EXAMPLE. Parabola: $f(x) = x^2$ **Convessa**, $f(x) = -x^2$ **Concava**

EXAMPLE. Seno: $f(x) = sen(x)$, $[0, 2\pi]$ **né Concava né Convessa**



Proposition 7.1. **Come capire dove è concava o convessa**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Valgono le seguenti affermazioni:

(1) f convessa (strettamente convessa)
(2) f' debolmente crescente (strettamente crescente)
(3) $f'' \geq 0$ ($f'' > 0$)

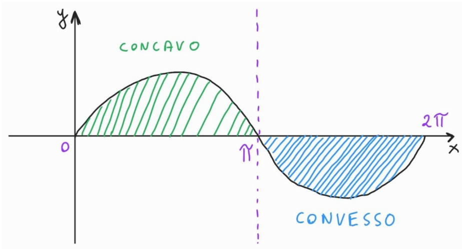
Vale il contrario di tutt'e 3 per la *concavità.*

Example. $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f'(x) = 2x \implies f''(x) = 2$. f'' è maggiore di zero $\forall\, x \in \mathbb{R}$, quindi f è convessa (strettamente).

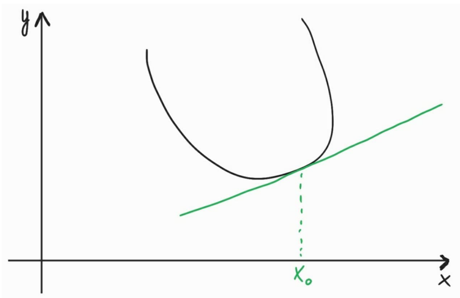
Example. $f(x) = log(x)$,
$f'(x) = \frac{1}{x} \implies f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. f'' è minore di zero $\forall\, x > 0$, quindi f è concava (strettamente).

Definition 7.3. **Cosa vuol dire che f' è crescente?**: Dire che la derivata è crescente vuol dire che il coefficiente angolare della tangente sta aumentando(cresce), man mano che cresce la retta tangente ruota su se stessa.

Example. $f(x) = sen(x)$, $f : [0, 2\pi]$
$f'(x) = cos(x) \implies f''(x) = -sen(x)$. $f''(x)$ è minore di zero nell'intervallo $x \in [0, \pi]$ quindi concavo. Mentre $f''(x)$ è maggiore di zero nell'intervallo $x \in [\pi, 2\pi]$ quindi convesso.



Proposition 7.2. **Legame tra tangente e convessità/concavità**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa in I sse $\forall\, x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$, cioé $\forall\, x_0, x \in I$ vale che $f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Retta tangente}}$. Se c'è un "$>$" con $x \neq x_0$ allora è strett. convessa.
(vale la stessa disuguaglianza ma di segno opposto per la f concava)



Proposition 7.3. Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo con $Int(x_0) \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I - \{x_0\}$ e siano $I_1 = \{x \in I\ t.c\ x < x_0\}$ e $I_2 = \{x \in I\ t.c\ x > x_0\}$. Se f è convessa in I_1 e I_2 e x_0 è punto angoloso per f, allora f è convessa in I sse $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

Definition 7.4. **Flessi**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $Int(x_0) \in I$. Si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 ed $\exists$ un intorno v di x_0 (quindi $v \subset I$) tale per cui la quantità $\frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0}$ non cambia segno in $v - \{x_0\}$.

- Se invece $f'(x_0)$ esiste ma vale $\pm\infty$ (f non è derivabile) e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e convaca in un intorno destro di x_0(o viceversa) allora x_0 si dice **punto di flesso a tangente verticale**.

Remark. Il numeratore della formula $\dfrac{f(x) - (\overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}^{\text{tangente}})}{x - x_0}$ rappresenta la differenza tra la funzione e la tangente. Dire che questa quantità non cambia segno, vuol dire che il grafico passa da sopra o da sotto la tangente (o viceversa).

DEFINITION 7.5. **Come si trova un flesso?**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$.
Se f è derivabile due volte in I, e se $f''(x_0) = 0$ (si annulla) e la f cambia di segno in x_0 allora x_0 è punto di flesso. È importante controllare sempre il segno della derivata seconda.
$f''(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$, $f''(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$ (o viceversa), con $x \in v$ intorno di x_0.

REMARK. Sia $I \subset \mathbb{R}$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ convessa nei punti interdi di I, con f continua in I.
Allora f sarà convessa anche in I

EXAMPLE. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convessa in (a, b)
f continua in $[a, b] \implies f$ è convessa in $[a, b]$ estremi compresi.

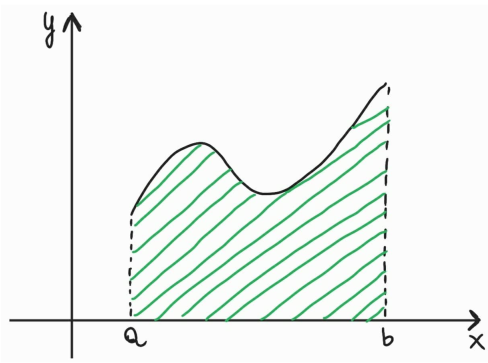
DEFINITION 7.6. **Studio di funzione completo**:

(1) Trovare l'insieme di definizione (dominio) di f
(2) Determinare l'insieme di continuità di f
(3) Determinare l'insieme di derivabilità
(4) Eventuali asintoti
(5) Studiare la monotonia di f e dedurre eventuali punti massimi e minimi locali
(6) Determinare massimo e minimo di f oppure $sup\{f\}$ e $inf\{f\}$
(7) Studiare la convessità di f (eventuali punti di flesso)

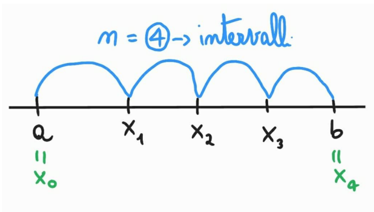
CHAPTER 8

Integrali

Definition 8.1. **Integrali (di Riemann)**: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata (ad esempio f continua). L'integrale (definito) di $f(x)$ su $[a, b]$ rappresenta *l'area del sottografico* di f (se $f \geq 0$ su $[a, b]$).



Definition 8.2. **Suddivisione intervallo**: Una suddivisione di $[a, b]$ è un insieme di punti dell'intervallo A. $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

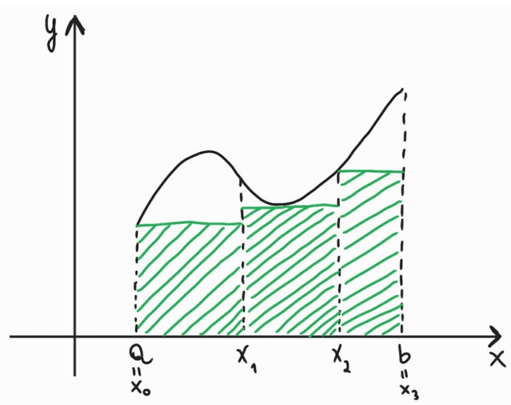


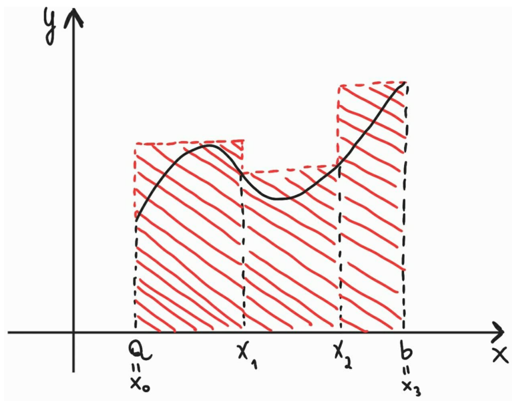
Remark. Le lunghezze degli intervalli, $[x_{i-1}, x_i]$, non sono necessariamente uguali.

Remark. La somma delle lunghezze degli intervalli deve dare la lunghezza di $[a, b]$.
$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a =$ Lunghezza di $[a, b]$

Definition 8.3. **Somma inferiore**: La somma inferiore di f relativa alla suddivisione di A è la somma delle aree dei rettangoli che non superano il grafico di f. Essa approssima l'area del sottografico per difetto.
$S'(f, A) = \sum_{i=1}^{n} (inf\{f(x)\}) \cdot (x_i - x_{i-1})$ con $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definition 8.4. **Somma superiore**: La somma superiore di f relativa alla suddivisione di A è la somma delle aree dei rettangoli che superano il grafico di f. Essa approssima per eccesso l'area del sottografico per eccesso.
$S''(f, A) = \sum_{i=1}^{n} (sup\{f(x)\}) \cdot (x_i - x_{i-1})$ con $x \in [x_{i-1}, x_i]$.





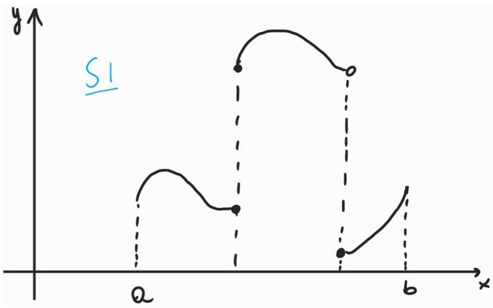
Definition 8.5. **Integrabilità di Riemann**: Se $S'(f) = S''(f)$ si dice che f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, e il valore comune è l'integrale di f su $[a, b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = (S'(f) = S''(f))$

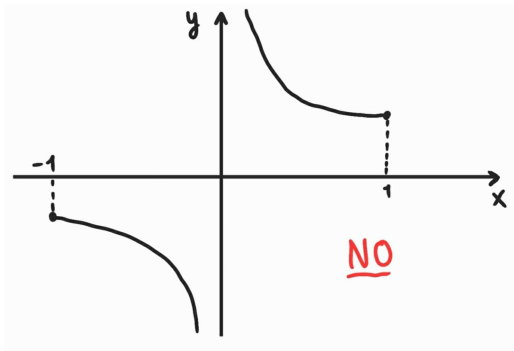
Remark. Questa definizione ha senso anche quando f può prendere valori negativi. Infatti in generale l'integrale definito rappresenta la somma algebrica dell'area negativa o positiva che sia.

Theorem 8.1. **Integrabilità**: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Remark. Ci sono anche funzioni non continue che sono integrabili, ad esempio una funzione costante a tratti.

Definition 8.6. **Generalmente continua**: Una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua se è *limitata* e *discontinua* (ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuità). Non è generalmente continua quando c'è *un solo punto di discontinuità* anche se tutta via può essere limitata.





Theorem 8.2. **Generalmente continua e integrabilità**: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua, allora f è integrabile. Se f è integrabile, $(S''(f, A) - S'(f, A)) \to 0$ (tende a zero) al raffinarsi della suddivisione. Man mano che si aggiungono punti, l'area si assottiglia.

8.1. Metodi di calcolo, proprietà e teoremi:

Definition 8.7. Siano f e g integrabili in $[a, b]$ e $l \in \mathbb{R}$, allora $f + g$, $k \cdot f$, $|f|$ sono integrabili per queste proprietà:

(1) $\int_a^b (f + g)(x)\ d(x) = \int_a^b (fx)\ d(x) + \int_a^b g(x)\ d(x)$

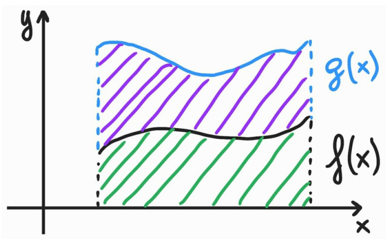
(2) $\int_a^b (k \cdot f)(x)\ d(x) = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx$

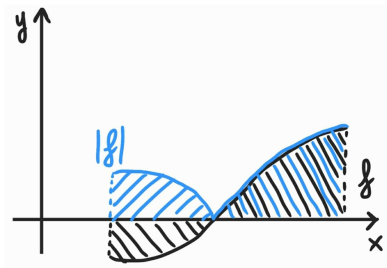
(3) Se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ d(x)$

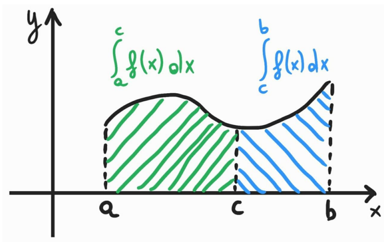
(4) $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

(5) Se $a < c < b$ ($c =$ punto tra a e b) $\implies \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

Esempi proprietà (3),(4) e (5):







Remark. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è costante, cioé $f(x) = k\ \forall x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\ dx = k \cdot (b - a)$.

DEFINITION 8.8. **Media integrale**: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, si dice *media integrabile* di f su $[a, b]$ il prodotto $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\ dx$. Graficamente m è l'altezza di un rettangolo di base $b - a$ con la stessa area del sottografico di f.

THEOREM 8.3. **Teorema della media integrale**: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile.
Allora $inf\{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx \leq sup\{f(x)\}$.

Se f è continua, allora $\exists$ un punto $z \in [a, b]$ tale per cui $f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\ dx$.

PROOF. $\forall\, x \in [a, b]$ abbiamo $inf\{f(x)\} \leq f(x) \leq sup\{f(x)\}$. □

(1) Integriamola usando la prop. del teorema sopra: $\int_a^b \underbrace{inf\{f(x)\}}_{\text{costante}}\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b \underbrace{sup\{f(x)\}}_{\text{costante}}\ dx$
(2) Allora $(inf\{f(x)\})\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (sup\{f(x)\})\,(b - a)$
(3) Quindi $inf\{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx \leq sup\{f(x)\}$
(4) Se f è continua, per Weirstrass, allora $inf\{f\} = min(f)$ e $sup\{f\} = max(f)$
(5) Per il teorema dei valori intermedi, f prende tutti i valori compresi tra $min(f)$ e $max(f)$
(6) Segue che la media integrale è un tale valore, per la disuguaglianza appena dimostrata, quindi $\exists$ un punto $z \in [a, b]$ tale per cui $f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx$

REMARK. Se l'estremo $b < a$, possiamo sempre definire l'integrale tra a e b così: $-\int_b^a f(x)\ dx$.

Quando $a = b$ allora il sottografo diventa un segmento, quindi $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

REMARK. La media integrale ha senso anche quando gli estremi sono scambiati $b < a$:
$\frac{1}{b-a}\left(-\int_b^a f(x)\ dx\right) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\ dx$

DEFINITION 8.9. **Primitiva**: Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, e $f : I \to \mathbb{R}$. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* se F è derivabile in I e vale $\implies F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$

EXAMPLE. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$

Non è l'unica primitiva, devo considerare anche le possibili costanti che valgono zero, per questo sommo alla primitiva un $c \in \mathbb{R}$. Infatti due primitive di $f(x)$ differiscono sempre per una costante.

PROOF. Siano F e G due primitive di f. Allora ho che $F' = f$ e $G' = f$. □

- Quindi $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$.
- Visto che siamo su un intervallo, concludo che $F - G$ è una costante $c \in \mathbb{R}$
- $F(x) - G(x) + c\ \forall\, x \in I$

DEFINITION 8.10. **Integrale indefinito**: L'integrale indefinito di $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$. Si indica con $\int f(x)\ dx$.

REMARK. $\int f(x)\ dx$ non indica una singola funzione, bensì un insieme di funzioni.
$\int f(x)\ dx = \{F : I \to \mathbb{R}$ tale che F derivabile, ed $F' = f\}$

8.2. Teorema fondamentale del calcolo integrale, Torricelli-Barrow

THEOREM 8.4. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo con $a \in I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua.
Allora la funzione integrale: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è una primitiva di f, cioé $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è $F'(x) = f(x)$.

PROOF. Mostriamo che f è derivabile calcolandone il rapporto incrementale e facendone il limite (def. derivata) $\square$

(1) $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt \right) = \dfrac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t)\, dt + \int_{x_0}^a f(t)\, dt \right)$
(2) Quindi è uguale a $\dfrac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_{x_0}^x f(t)\, dt \right)$, cioé la media integrale di f sull'intervallo $[x_0, x]$.
(3) Visto che f è continua, per il teorema della media integrale posso dire che $\exists$ un punto $z \in [x_0, x]$ tale per cui $f(z(x)) = \dfrac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_{x_0}^x f(t)\, dt \right)$
(4) Quindi $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f(z(x))$
(5) Cambio variabile $y = z(x)$, so che $z(x)$ è compreso tra x_0 e x.
(6) Quindi per il teorema dei carabinieri anche il $\lim\limits_{x \to x_0} f(z(x))$ tende a x_0
(7) Segue che $\lim\limits_{x \to x_0} f(z(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(y) = f(x_0)$.
(8) Questo dimostra che $F'(x_0) = f(x_0)$, quindi $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$
(9) F è effettivamente una primitiva di F.

THEOREM 8.5. **Teorema di Torricelli**: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo con $a \in I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua.
Se G è una primitiva di f su I, allora $\exists$ un punto $c \in \mathbb{R}$ tale per cui $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c$ e dati due punti $\alpha, \beta \in I$ abbiamo: $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = [G(x)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

THEOREM 8.6. **Integrali con estremi variabili**: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta : A \to I$ derivabili, e sia $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$.
Allora $G(x)$ è derivabile e vale $G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'$.
In particolare se $\alpha(x) = a$ costante e $\beta(x) = x$ si ha: $G(x) = \int_a^s f(t)\, dt \implies G'(x) = f(x) \cdot 1 - f(a) \cdot 0 = f(x)$.

EXAMPLE. $G(x) = \int_{x^2}^{sen(x)} e^t \cdot arctg(t)\, dt$, sostituisco $f(t) = e^t arctg(t)$, $\alpha(x) = x^2$ e $\beta(x) = sen(x)$
$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = e^{sen(x)} \cdot arctg(sen(x)) \cdot cos(x) - e^{x^2} \cdot arctg(x^2) \cdot 2x$
Questo teorema è utile per calcolare alcuni limiti dove compaiono funzioni con estremi variabili.

8.3. Integrali impropri

Estende la definizione di integrale definito al caso in cui la funzione dentro l'integrale non è limitata, oppure l'intervallo di integrazione non è limitato.

Tipo $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$, in questo caso l'integrale rappresenta l'area di tutto il sottografico positivo $[0,+\infty)$.

Formalmente defineremo: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} [-e^{-x}]_0^M = \lim_{M\to+\infty} -e^{-M}+1 = 1$

In questo caso il sottografo ha area finita pari a 1.

Definition 8.11. **Integrale improprio**: Siano $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ con $a<b$ e $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabile in tutti gli intervalli chiusi $[a,M]$ con $a<M<b$. Se $\exists \lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx = l$, allora definiamo $\int_a^b f(x)\,dx = l$.

Se $l\in\mathbb{R}$, si dice che l'integrale di $f(x)$ su $[a,b)$ converge, altrimenti diverge a $\pm\infty$.
Se il limite non esiste diciamo che f non è integrabile su $[a,b)$.

Definition 8.12. **Integrale improprio con problemi in a,b**: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ con $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ che sia integrabile su $[M_1,M_2)$ con $a<M_1<M_2<b$. Scegliamo arbitrariamente un punto $c\in(a,b)$.

Se esistono entrambi i seguenti integrali impropri: $\int_a^c f(x)\,dx = l_1$ e $\int_c^b f(x)\,dx = l_2$

allora si definisce $\int_a^b f(x)\,dx = l_1+l_2$. Si dice che f è integrabile in senso improprio su (a,b).

Remark. L'esistenza e il valore dell'integrale improprio non dipendono dalla scelta di c.
Qualunque $c\in(a,b)$ io scelga ottengo sempre lo stesso risultato.

Proposition 8.1. Sia $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabile su $[a,M]$ con $a<M<b$ e supponiamo che f abbia segno costante. Allora esiste (finito o infinito) l'integrale improprio di $f(x)$.

Proof. Supponiamo che $f\geq 0$ su $[a,b)$. Mostriamo che $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ è debolmente crescente.

Segue che $\exists \lim_{x\to b^-} F(x)$ che è proprio $\int_a^b f(t)\,dt$. Infatti se prendo $x_1<x_2$ allora:

$$F(x_2)=\int_a^{x_2} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\geq 0} \geq \int_a^{x_1} f(t)\,dt = F(x_1)$$

□

Integrali impropri notevoli

Caso	Integrale	Risultato
$\alpha>0$	$\int_0^\alpha \frac{1}{x^p}\,dx$, generalizzato $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$	$\begin{cases} \textit{converge} & \text{se } p<1 \\ \textit{diverge} & \text{se } p\geq 1 \end{cases}$
$\alpha>0$	$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$	$\begin{cases} \textit{converge} & \text{se } p>1 \\ \textit{diverge} & \text{se } p\leq 1 \end{cases}$
$0<\alpha<1$	$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^a\,\lvert log(x)\rvert^b}\,dx$	$\begin{cases} \textit{converge} & \text{se } \begin{cases} a<1 & \forall b\in\mathbb{R} \\ a=1 & b>1 \end{cases} \\ \textit{diverge} & \text{se } \begin{cases} a>1 & \forall b\in\mathbb{R} \\ a=1 & b\leq 1 \end{cases} \end{cases}$
$\alpha>1$	$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha log^b(x)}\,dx$	$\begin{cases} \textit{converge} & \text{se } \begin{cases} a<1 & \forall b\in\mathbb{R} \\ a=1 & b>1 \end{cases} \\ \textit{diverge} & \text{se } \begin{cases} a>1 & \forall b\in\mathbb{R} \\ a=1 & b\leq 1 \end{cases} \end{cases}$
$\alpha>1$	$\int_1^\alpha \frac{1}{log^p(x)}\,dx$	$\begin{cases} \textit{converge} & \text{se } p<1 \\ \textit{diverge} & \text{se } p\geq 1 \end{cases}$

8.4. Criteri per studiare la convergenza di integrali impropri

THEOREM 8.7. **Criterio del confronto**: Sia $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in $(a, M]$ $\forall\, a < M < b$. Se $\exists$ un intorno sinistro u di b tale per cui $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in u \cap [a, b)$ allora:

(1) Se $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ converge, allora anche $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ converge.

(2) Se $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ diverge (positivamente a $+\infty$) allora anche $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ diverge (positivamente a $+\infty$).

(enunciato analogo se $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$,...)

THEOREM 8.8. **Criterio del confronto asintotico**: Sia $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in $(a, M]$ $\forall\, a < M < b$. Se $\exists$ un intorno sinistro u di b tale per cui $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ $\forall\, x \in u \cap [a, b)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Allora:

(1) Se $l \neq 0 \wedge l \neq +\infty$, $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ **converge** $\iff$ $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ **converge**

(2) Se $l = 0$ e $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ **converge** $\implies$ $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ **converge**

(3) Se $l = +\infty$ e $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ **converge** $\implies$ $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ **converge**

REMARK. Le implicazioni di questi criteri *non si invertono*:

EXAMPLE. $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ per $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, e $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx$ diverge

Non si può concludere tuttavia che $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ diverge.

Il criterio del confronto dice che $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\ dx$ diverge $\implies$ $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\ dx$ diverge (non viceversa)

REMARK. I criteri del confronto e del confronto asintotico si possono usare anche per funzioni negative cambiando le conclusione.

EXAMPLE. Se $g(x) \leq f(x) \leq 0$ per $x \in [a, b)$
Allora: se $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ converge, allora anche $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ converge.
se $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ diverge (a $-\infty$ per forza) allora $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ diverge (a $-\infty$)

DEFINITION 8.13. **Funzione assolutamente integrabile**: f è assolutamente integrabile sull'intervallo I se $|f|$ è integrabile su I. Cioé se $\int\limits_I |f(x)|\ dx$ converge (è finita).

DEFINITION 8.14. **Parte positiva**: Dato un $x \in \mathbb{R}$ definiamo x^+ come *parte positiva di* x e rappresenta $x^+ = max\{x, 0\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

DEFINITION 8.15. **Parte negativa**: Dato un $x \in \mathbb{R}$ definiamo x^- come *parte negativa di* x e rappresenta l'opposto del minimo $x^- = -min\{x, 0\} = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

EXAMPLE. $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $(-3)^+ = 0$, $(-3)^- = 3$

REMARK. Ogni numero $x \in \mathbb{R}$ può essere scritto come differenza della sua parte positiva e della sua parte negativa. (1) $x = x^+ - x^-$

REMARK. Mentre $|x|$ può essere scritto come somma della ssua parte positiva e della sua arte negativa. (2) $|x| = x^+ + x^-$ $\implies$ (1) $\wedge$ (2) $\implies$ $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ e $x^- = \frac{|x|-x}{2}$ (analoghi per le funzioni)

THEOREM 8.9. **Criterio dell'Assoluta convergenza**: Serve per capire l'integrabilità di una funzione a *segno variabile*. Se f è assolutamente integrabile su I allora f è *integrabile* su I. (Non vale il viceversa)

PROOF. ☐

- $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$
- Quindi sia la parte negativa che la parte positiva sono schiacciati tra 0 e $|f(x)|$
  $0 \leq (f(x))^+ \leq |f(x)|, \quad 0 \leq (f(x))^- \leq |f(x)|$
- Per confronto, visto che sto supponendo che $\int_I |f(x)|\ dx$ converga,
  allora **convergono** $\int_I (f(x))^+\ dx$ e $\int_I (f(x))^-\ dx$
- Visto che $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, concludo che
- $\int_I f(x)\ dx = \int_I (f(x))^+\ dx - \int_I (f(x))^-\ dx$ **converge**

PROOF. ☐

Soffermiamoci sull'uguaglianza $\int_I f(x)\ dx = \int_I (f(x))^+\ dx - \int_I (f(x))^-\ dx$:

- Se $I = [a, b)$ abbiamo che
- $\int_a^M f(x)\ dx = \int_a^M (f(x)^+ - f(x)^-)\ dx = \underbrace{\int_a^M (f(x))^+\ dx}_{\alpha} - \underbrace{\int_a^M (f(x))^-\ dx}_{\beta}$
- Passando al limite per $M \to b^-$ so che i limiti di α e β esistono, quindi esiste anche $\lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\ dx$
- Dunque f è **integrabile**

COROLLARY 8.1. **Criterio del confronto + Assoluta convergenza**:
Date $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ entrambe integrabili in $[a, M]$ $\forall\, a < M < b$. Se $\exists$ un intorno sinistro v di b tale per cui $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall\, x \in (v \cap [a, b])$ e se $\int_a^b g(x)\ dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\ dx$ converge.

EXAMPLE. $\int_1^{+\infty} \frac{sen(x)}{x^2}\ dx$, $f(x) = \frac{sen(x)}{x^2}$ è a segno variabile su $[1, +\infty)$
$f(x) = \left|\frac{sen(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nel corollario di sopra
Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ **converge**, concludo che $\int_1^{+\infty} \frac{sen(x)}{x^2}\ dx$ **converge**.

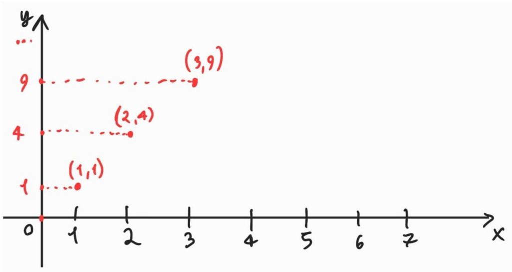
EXAMPLE. $\int_1^{+\infty} \frac{|sen(x)|}{x^2}\ dx$ **diverge** $\left\{\textbf{mentre } \int_1^{+\infty} \frac{sen(x)}{x^2}\ dx \textbf{ converge}\right\}$
$|sen(x)| \geq sen^2(x)$,
Quindi $\int_1^M \frac{|sen(x)|}{x^2}\ dx \geq \int_1^M \frac{sen^2(x)}{x^2}\ dx = \int_1^M \frac{(1-cos(2x))}{x^2}\ dx$
$\int_1^M \frac{1}{2x}\ dx - \int_1^M \frac{cos(2x)}{2x}\ dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^M \frac{1}{x}\ dx}_{\alpha} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_2^{2M} \frac{cos(t)}{t}\ dt}_{\beta}$ $(t = 2x,\ dt = 2\ dx)$
Mandando $M \to +\infty$ otteniamo che α : **Diverge** e β : **Converge**
Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{|sen(x)|}{x^2}\ dx$ **diverge** a $+\infty$

CHAPTER 9

Successioni

Definition 9.1. **Successione**: Una successione è una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ dove S è una semiretta di $\mathbb{N}$, cioé $\{S = n \in \mathbb{R} \text{ t.c } n \geq n_0\}$ per un qualche n_0. In soldoni $S \subset \mathbb{N}$. Un punto nel grafico è $(n, f(n))$

Example. $f(n) = n^2$ con $S = \mathbb{N}$
$f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4...$



Definition 9.2. **Notazione**: Una successione $f(n)$ si denota con a_n,
o per esteso l'intera successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Example. $a_n = \frac{1}{n-5}$ con $S = \{n \in \mathbb{N}\ t.c\ n \geq 6\}$

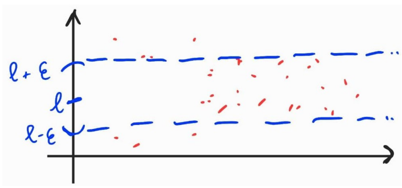
Example. $a_n = \sqrt{5-n}$, ma $5 - n > 0 \implies n \leq 5$ quindi nessuna S va bene.
Questa a_n non definisce una successione $a_n : S \to \mathbb{R}$

9.1. Limiti di successioni

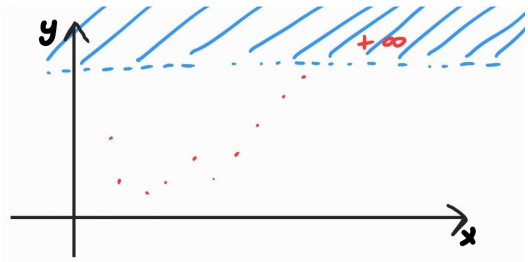
L'unico limite che ha senso per una successione a_n è $\lim\limits_{n\to+\infty}$, $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione $\forall\ S \subset \mathbb{N}$.

Definition 9.3. **Limite di una successione**: Il limite di una successione $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ con l che può essere un numero Reale o $\pm\infty$. $\forall$ intorno $v \in l$ si ha che $\exists$ un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ (un certo n) tale per cui $a_n \in v\ \forall\ n \geq \overline{n}$.
Si dice che a_n converge a l se $l \in \mathbb{R}$, invece diverge a $\pm\infty$ se $l = \pm\infty$

- **Graficamente se** $l \in \mathbb{R}$:
  (Per i primi valori di n, sta fuori l'intevallo. Da un certo punto in poi i valori devono stare dentro)



- **Graficamente** $l = +\infty$:



Terminologia: Se $P(n)$ è un predicato la cui verità dipendde da un $n \in \mathbb{N}$, si dice che $P(n)$ è vero definitivamente se $\exists$ un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui $P(n)$ è vero $\forall\ n \geq \overline{n}$.

Example. $P(n) =$ "n è pari" per $n = 2$

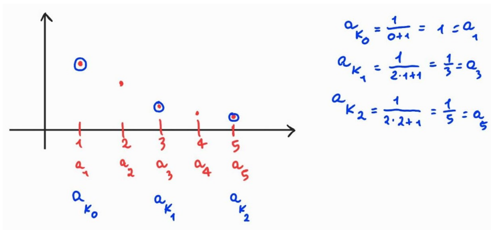
DEFINITION. **Limite di successione generale:** $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ se $\forall\ v$ intorno di l si ha che $a_n \in v$ definit.

9.2. Sottosuccessioni (estratte)

Data una successione $a_n : S \to \mathbb{R}$, una sua sottosuccessione è una successione fatta da alcuni valori a_n ma non tutti.

DEFINITION 9.4. **Sottosuccessione**: Consideriamo una funzione $k_n : \mathbb{N} \to S$ strettamente crescente (cioé $k_n > k_m$ quando $n > m$) possiamo considerare la composizione a_{k_n}, questa è una nuova successione detta *sottosuccessione di* a_n. In pratica scegliamo solo un certo sottoinsieme di indici in modo crescente.

EXAMPLE. $a_n = \frac{1}{n}$ con $S = \{n \in \mathbb{N}\ t.c\ n \geq 1\}$
Prendo $k_n : \mathbb{N} \to S$, con $n \mapsto 2n+1$ abbiamo $a_{k_n} = \frac{1}{k_n} = \frac{1}{2n+1}$. Graficamente:



THEOREM 9.1. **Teorema che lega i limiti alle sottosuccessioni**:
Data una successione a_n,questa ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \boldsymbol{l} \iff \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \boldsymbol{l}$ per ogni sottosuccessione $k_n \in \{a_n\}$.
Questo teorema si può usare per dimostrare che una successione non ha limite.

EXAMPLE. $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n\ pari \\ -1 & n\ dispari \end{cases}$, questa successione non ha limite, vediamo:

- Consideriamo le sottosuccessioni $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ date da indici pari/dispari.
- Abbiamo $a_{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = (1)^n = 1$ e quindi **converge** a 1
- Mentre $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$ e quindi **converge** a -1
- Visto che i due limiti esistono ma sono diversi, $\{a_n\}$ **non ha limite**.

REMARK. Per le successioni e i loro limiti valogo i teoremi visti per le funzioni (permanenza del segno, Carabinieri, Confronto, ecc...)

THEOREM 9.2. **Permanenza del segno per successioni**: Se ho una successione $\{a_n\}$ con $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 0$, allora prima o poi la successione diventa positiva e lo rimane per sempre $(a_n > 0)$.

9.3. Monotonia

DEFINITION 9.5. Una successione $\{a_n\}$ è:

- **Debolmente crescente** se $n > m \implies a_n \geq a_m$
- **Strettamente crescente** se $n > m \implies a_n > a_m$
- **Debolmente decrescente** se $n > m \implies a_n \leq a_m$
- **Strettamente decrescente** se $n > m \implies a_n < a_m$

REMARK. $\{a_n\}$ è debolmente crescente sse vale che $a_{n+1} \geq a_n\ \forall\ n \in S$ (def. analoghe per le altre 3).
Infatti, se so che $a_{n+1} \geq a_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, poi se $n > m$ allora $a_n \geq ... \geq a_{m-1} \geq a_m$

EXAMPLE. $a_n = n^2$,controlliamo che sia strettamente crescente: $a_{n+1} > a_n$
Infatti $a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, $a_n = n^2$
$\cancel{n^2} + 2n + 1 > \cancel{n^2} \iff 2n + 1 > 0$ **vera** $\forall\ n \in S$

THEOREM 9.3. **Monotonia**: Se $\{a_n\}$ è monotona (cioé debolmente crescente o decrescente) allora ammette limite.

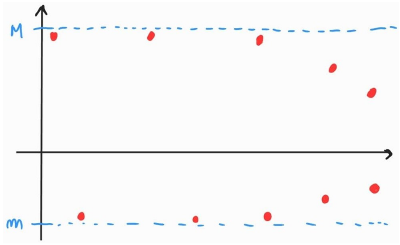
- Se è **debolmente crescente** il limite non può essere $-\infty$
- Se è **debolmente decrescente** il limite non può essere $+\infty$

9.4. Limitatezza

DEFINITION 9.6. **Tipi di limitatezza**: Una successione $\{a_n\}$ è:

(1) **Limitata superiormente** se $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tale per cui $a_n \leq M\ \forall\ n \in S$.
(2) **Limitata inferiormente** se $\exists\ m \in \mathbb{R}$ tale per cui $a_n \geq m\ \forall\ n \in S$.
(3) **Limitata** se è limitata sia *inferiormente* che *superiormente*.

Graficamente (es. limitata):



THEOREM 9.4. **Relazione tra esistenza dei limiti e limitatezza**: Una successione convergente (che ha limite finito) è **limitata**. Preso un intorno di l, ad un certo $\overline{n}$ in poi la successione starà dentro l'intorno. Questo non è vero per funzioni di variabile reale.

EXAMPLE. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (converge a $+\infty$), ma non è limitata perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
Però $a_n = \frac{1}{n}$ è **limitata**

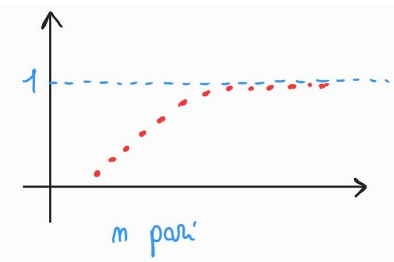
THEOREM 9.5. **Massimo e minimo**: Se $\lim_{x\to+\infty} a_n = +\infty$, allora la successione $\{a_n\}$ ha *minimo*. Cioé $\exists\ n_{min} \in \mathbb{N}$ tale per cui $a_n \geq a_{n_{min}} \forall\ n \in S$. Se invece il $\lim_{x\to+\infty} a_n = -\infty$ allora a_n ha il *massimo*.

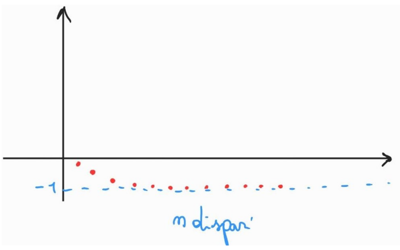
REMARK. Limitata non implica avere massimo e minimo:

EXAMPLE. $a_n = \frac{1}{n}$ è limitata, $1 \geq \frac{1}{n} \geq 0$, ma non ha *minimo*.
$max\{a_n\} = 1$, $inf\{a_n\} = 0\,(= \lim_{x\to+\infty} a_n)$
$\nexists min$ poiché non esiste nessun $n \in \mathbb{N}$ tale per cui $\frac{1}{n} = 0$

REMARK. Limitata non implica che esiste almeno un massimo e minimo:

EXAMPLE. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & n\ pari \\ -\left(1 - \frac{1}{n}\right) & n\ dispari \end{cases}$
Complessivamente abbiamo che $sup\{a_n\} = 1$ mentre $inf\{a_n\} = -1$.
$\nexists$ max e min pur essendo $\{a_n\}$ **limitata** $\iff -1 < a_n < 1$





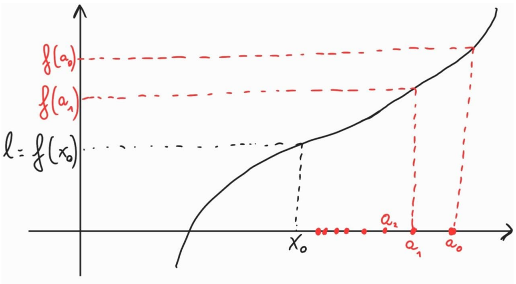
THEOREM 9.6. **Convergenza e limitatezza**: Se ho una successione che converge a l, $\lim_{x\to+\infty} a_n = l$, e supponiamo esista un $\overline{n} \geq l$. Allora la successione ha *massimo*. Se esiste un $\overline{n} \leq l$ allora ha *minimo*.

9.5. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

THEOREM 9.7. **Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni**:
Presa una $f : A \to \mathbb{R}$ definita su $A \subset \mathbb{R}$, con $x_0 \in Acc(A)$.
Allora abbiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se vale
$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$ per ogni $\{a_n\} \subset A$ tale che:

(1) $\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$
(2) $a_n \neq x_0$ definitivamente

Grazie a questo teorema posso dimostrare che il limite di una funzione non esiste.



REMARK. Se abbiamo una funzione in cui $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, allora esiste $\lim_{n \to +\infty} f(n) = l$

9.6. Calcolo dei limiti di successione

THEOREM 9.8. *$a_n \to l$ è un modo più compatto di scrivere $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.*

- Se ho $a_n \to l$ e$b_n \to l'$, allora $(a_n + b_n \to l + l')$, $(a_n \cdot b_n \to l \cdot l')$, e così via se $l' \neq 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente.
- Se $a_n = c\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ allora $a_n \to c$.

EXAMPLE. Esiste il $\lim_{n\to+\infty} sen(n)$? NO

- Chiediamoci quando $sen(x) \geq \frac{1}{2}$?
  In $[0, \pi]$ succede esattamente per gli $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$, l'intervallo ha lunghezza $\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi > 2$
- Questo ci permette di costruire una successione crescente h_n di naturali tale per cui $sen(h_n) \geq \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Quindi l'intervallo contiene almeno 2 numeri interi naturali, e lo stesso vale per tutti i multipli traslati di 2π.
- Questo mi dice che se esiste $\lim_{n\to+\infty} sen(n) = l$, allora l deve essere $l \geq \frac{1}{2}$.
- Posso fare lo stesso discorso partendo da $sen(x) \leq \frac{1}{2}$ e trovo che $l \leq -\frac{1}{2}$.
- Questo è assurdo perché $\lim_{n\to+\infty} sen(n) = l(\geq \frac{1}{2})$, mentre $\lim_{n\to+\infty} sen(x) = l(\leq -\frac{1}{2})$.
- Quindi non esiste tale limite.

EXAMPLE. Esiste $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot sen(n)$? NO

- Considerando la successione h_n dell'esempio precedente, troviamo una sottosuccessione simile $h_n{}^2 \cdot \underbrace{sen(h_n)}_{\geq\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \cdot h_n{}^2 \to +\infty$
- Se k_n è una successione di interi t.c $sen(k_n) \leq -\frac{1}{2}\ \ \forall n$, abbiamo una sottosuccessione $k_n{}^2 \cdot sen(k_n) \leq -\frac{1}{2}k_n{}^2 \to -\infty$
- Quindi ho due sottosuccessioni di $n^2 \cdot sen(n)$ che hanno limiti diversi, per cui il limite non esiste.

THEOREM 9.9. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, e $\{a_{h_n}\}$ e $\{a_{k_n}\}$ due sottosuccessioni tale per cui $\{h_n\ t.c\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{k_n\ t.c\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ (si dice che le due sotto successioni saturano gli indici).

- Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$ ed esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$ e sono uguali, allora esiste anche $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ed è uguale ai due precedenti limiti.

Caso tipico: indici pari e indici dispari
Es: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(log(n+1))^{(-1)^n}}{n^3}$, indici pari: $k_n = 2n$, indici dispari: $h_n = 2n + 1$

- Limite pari: $\frac{(log(2n+1))^1}{2n^3} \to 0$
- Limite dispari: $\frac{(log(2n+2))^{(-1)}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{(2n+1)^3 \cdot log(2n+2)} = \frac{1}{0} = +\infty$ quindi $lim \to 0$.

Concludiamo che il limite esiste ed è zero.

THEOREM 9.10. **Criterio del rapporto**: Sia $\{a_n\}$ una successione:
Se $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo esista $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:

(1) Se $0 \leq l < 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
(2) Se $l > 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

REMARK. Oss: Se $l = 1$ il criterio non si applica, non si conclude nulla sul comportamento di a_n.
Infatti abbiamo tre comportamenti diversi:

- $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \to 1$, $l = 1$ e a_n converge a 1.
- $a_n = n$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$, $l = 1$ e $a_n \to +\infty$.
- $a_n = \frac{1}{n}$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$, $l = 1$ e $a_n \to 0$.

EXAMPLE. $a_n = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \to 1$, $l = 1$ e a_n converge a 1

Confronto ($n!$ con n^k, b^n, n^n)

- n^k (con $k \geq 1$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^k} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ usiamo il criterio del rapporto:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} \cdot \frac{n^k}{(n+1)^k} = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \to +\infty \cdot (1)^k = +\infty \ (l > 1)$
Ne viene che $\frac{n!}{n^k} \to +\infty$, quindi $n!$ tende a ∞ più velocemente di n^k
- b^n (con $b > 1$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^k} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ usiamo il criterio del rapporto
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^k}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} = (n+1) \cdot \frac{1}{b} = (n+1) \cdot \frac{1}{b} \to +\infty \ (l > 1)$
Segue che $\frac{n!}{b^n} \to +\infty$, quindi $n!$ tende a ∞ più velocemente di b^n
- n^n ($n^n \to +\infty$ perché $n^n \geq n$ ed $n \to +\infty$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ usiamo il criterio del rapporto
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n$
è un limite notevole $(1 + \frac{1}{n})^n \to e = l$. $(l > 1)$
Segue che $\frac{n^n}{n!} \to +\infty$, quindi n^n tende più velocemente a ∞ di $n!$

Theorem 9.11. **Criterio della radice**: Se $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, allora:

(1) Se $0 \leq l < 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
(2) Se $l > 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Remark. Se $l = 1$ il criterio non si applica, non si conclude nulla sul comportamento di a_n.

Proof. □

- Suppongo che $0 \leq l < 1$, fisso un $m \in \mathbb{R}$ tale per cui $l < m < 1$.
Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$, definitivamente avrò $\sqrt[n]{a_n} < m$, quindi $a_n < m^n$.
Ora sapendo che $m < 1$ abbiamo che $m^n \to 0$, per confronto dei carabinieri
segue che$a_n \to 0$ (visto che $0 < a_n < m^n$).
- Se invece $l > 1$, scelgo $m \in \mathbb{R}$ tale per cui $1 < m < l$.
Visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$, avrò $\sqrt[n]{a_n} > m$ definitivamente.
Segue che definitivamente ho $a_n > m^n$ e visto che $m > 1$ ho $m^n \to +\infty$, per confronto dei carabinieri ho che $a_n \to +\infty$.

Theorem 9.12. **Teorema che collega i due criteri**: Se $a_n > 0$ definitivamente ed esiste $\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l}_{\text{Criterio del rapporto}}$ allora esiste anche il $\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l}_{\text{Criterio della radice}}$.

Remark. Per questo teorema l può essere uguale a 1, ma $l = 1$ per entrambi.

Remark. Non vale il viceversa (Se esiste il criterio della radice allora non esiste l'altro).

Example. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = ?$ ... usiamo il teorema con $a_n = n$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$, quindi $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$ (stesso limite)
Allo stesso modo, per un polinomio $p(n)$ in n, $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

Example. Esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ma non $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- Prendiamo $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se n pari} \\ 2 & \text{se n dispari} \end{cases}$
- Abbiamo che $1 \leq a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, e anche $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2}$.
- Abbiamo visto negli esempi che $\sqrt[n]{1} \to 1$, $\sqrt[n]{2} \to 1$.
- Per il teorema dei carabinieri segue che $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
- Ora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & \text{se n pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se n dispari} \end{cases}$

La successione non ha limite, saltella tra 2 e $\frac{1}{2}$, ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi.

EXAMPLE. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!}$, pongo $a_n = n!$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = n + 1 \to +\infty$

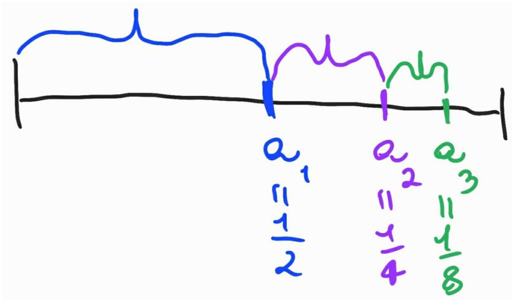
CHAPTER 10

Serie (numeriche)

Sia a_n una successione da $S \to \mathbb{R}$. Vogliamo dare un senso alla somma di tutti i termini di una successione: $\sum_{n \in S} a_n$

Example. $a_n = \frac{1}{2^n}$ con $S = \{n \geq 1\}$

- Voglio dare un senso alla seguente somma: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ (Sommando un termine successivo al precedente mi avvicino sempre di più a 1)



- Se mi fermo a a_n ottengo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, e prendendo il limite per $n \to +\infty$, sembra ragionevole che la somma di tutti gli inversi delle potenze di 2 sia proprio uguale a 1

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} = 1$$

- In effetti definiremo $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$.

Definition 10.1. **Serie numerica**: Data una successione a_n ($\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$), definiamo una successione di somme parziali come $\underbrace{S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + ... + a_n}_{\text{Somma parziale n-esima}}$

- $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una nuova successione che ho costruito partendo da a_n. Definiamo $\sum_n a_n$ come $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ se questo esiste, se invece non esistesse allora la serie è *indeterminata*.
- Altrimenti:

(1) Se è un numero reale, $S \in \mathbb{R}$, si dice che la serie è **convergente**.
(2) Se è $+\infty$, $S = +\infty$, si dice che la serie **diverge positivamente**.
(3) Se è $-\infty$, $S = -\infty$, si dice che la serie **diverge negativamente**.

Example. $a_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
$S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = 0 + 0 + ... + 0$

Example. $a_n = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
$S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n = 1 + 1 + ... + 1$
$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (n+1) = +\infty \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$

Example. $a_n = n$
$S_n = 0 + 1 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n}{2} = +\infty$

Serie Geometrica
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$, $a_n = \alpha^n$ (l'esempio della definizione era $\alpha = \frac{1}{2}$)

- Calcoliamo la somma della serie: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n$
- Calcoliamo le somme parziali: $S_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j = 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$
- $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} =$

(1) Se $|\alpha| < 1$, abbiamo $\alpha^{n+1} \to 0$ quindi
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} = \frac{-1}{\alpha-1} = \frac{1}{1-\alpha}$. **Converge**

(2) Se $\alpha > 1$, allora $\alpha^{n+1} \to +\infty$, quindi tutto tende a $+\infty$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} = +\infty$. **Diverge Positivamente**

(3) Se $\alpha = 1$, allora $a_n = \alpha^n = 1^n = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty$. **Diverge Positivamente**

(4) Se $\alpha = 0$, allora $a_n = \alpha^n = 0 \ \forall\ n \geq 1$
$\sum_{n\geq 1} \alpha^n = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$. **Converge a Zero**

(5) Se $\alpha < -2$, α^{n+1}? È *indeterminata* poiché $\nexists$ il limite $n \to \infty$.
  - se n è pari ($\Longrightarrow$ $n+1$ è dispari), $\alpha^{n+1} < 0$ e tende a $-\infty$ (perché $|\alpha| > 1$)
  - se n è dispari($\Longrightarrow$ $n+1$ è pari), $\alpha^{n+1} > 0$ e tende a $+\infty$

Ho 2 sottosuccessioni $b_{2n} \to -\infty$ e $b_{2n+1} \to +\infty$, quindi $b_n = \alpha^{n+1}$ non ha limite.
Quindi nemmeno $\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ non ne ha.
$S_{2n} = \frac{b_{2n}-1}{\alpha-1} \to \frac{-\infty}{\alpha-1} \to +\infty$, $S_{2n+1} = \frac{b_{2n+1}-1}{\alpha-1} \to \frac{+\infty}{\alpha-1} \to -\infty$ (con $\alpha - 1 < 0$)
Dunque S_n non ammette limite. $\sum_{n\geq 1} \alpha^n$ è indeterminata.

(6) Se $\alpha = -1$, $\alpha^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{n pari} \\ -1 & \text{n dispari} \end{cases}$
$S_0 = a_0 = (-1)^0 = 1$
$S_1 = a_0 + a_1 = (-1)^0 + (-1) = 0$
$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = (-1)^0 + (-1) + 1 = 1$
$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = (-1)^0 + (-1) + 1 + (-1) = 0$
S_n non ha limite, la serie è *indeterminata*.

Definition 10.2. **Calcolo di una serie**: Come si calcola $\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} + ...$ per $|\alpha| < 1$ e $\alpha \neq 0$?

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} ... = \alpha^k(1 + \alpha + \alpha^2 + ...) = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

Example. $\{\alpha = \frac{1}{2}, k = 1\} \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Example. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + 1 = 2$

Example. $\{\alpha = -\frac{1}{3}, k = 0\} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Remark. Se ho un $(-1 < \alpha < 0) \iff (0 < -\alpha < 1) \iff (1 < 1 - \alpha < 2)$,
la somma $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\infty}$ è compresa tra $\frac{1}{2}$ e 1.

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 1 + \underbrace{\alpha}_{<0} + \underbrace{\alpha^2}_{>0} + ...\right)}_{\text{Successione a segno alterno}}$$

Calcolo di serie con sviluppo di Taylor

$\sum_n \frac{1}{n!} = ?$

REMARK. Quando scrivo $\sum_n$ vuol dire che sommo tutti gli $n \in \mathbb{N}$

- Partiamo da $e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Resto di Lagrange}}$

  REMARK. $R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ con $x < z < x_0$

- Nel nostro caso $R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot x^n$ con $0 < z < x$
- Specifichiamo $x = 1$ e troviamo

$$e^1 = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}}_{S_n \text{ per } \sum_n \frac{1}{n!}} + R_n(1) = \frac{e^z}{(n+1)!} \cdot 1$$

- Quindi $|e - S_n| = \frac{e^z}{(n+1)!}$ con $0 < z < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1!)} = 0 \implies S_n \to e$$

- Quindi $\sum_n \frac{1}{n!} = e$

THEOREM 10.1. **Condizione necessaria**: Sia a_n una successione e la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *tende a zero*

PROOF. □

- Il trucco è considerare la differenza tra due somme parziali successive.

$$S_{n+1} = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n}_{S_n} + a_{n+1}$$

  Quindi $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$
- Se suppongo che $\sum_n a_n = l$, con $l \in \mathbb{R}$, allora $(S_{n+1} - S_n) \to (l - l) = 0$
- Segue che $a_n \to 0$, *tende a zero.*

Conseguenza pratica

Se ho una $\{a_n\}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (può essere tutto e anche non esistere), allora sicuramente la *serie non converge*

EXAMPLE. $a_n = 1 \ \forall n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \iff \sum_n 1 = \infty$, *non converge*

Attenzione

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ non è detto che la serie *converga*!

THEOREM 10.2. **Collega la somma di 2 serie con la serie di 2 somme**: Se a_n e b_n sono due successioni e $\sum\limits_n a_n$ e $\sum\limits_n b_n$ hanno senso (non sono indeterminate), allora anche la somma:

$$\sum_n (a_n + b_n) \textit{ ha senso e vale } \underbrace{\left(\sum_n a_n + \sum_n b_n\right)}_{\textit{Supponendo non sia } (+\infty - \infty) \textit{ e } (-\infty + \infty)}$$

EXAMPLE. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$
Quindi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

REMARK. Non c'è un teorema analogo riguardo al prodotto.

EXAMPLE 10.1. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $\sum\limits_n a_n = 2, \sum\limits_n b_n = \frac{3}{2}$
$a_n \cdot b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, e $\sum\limits_n (a_n \cdot b_n) = \sum\limits_n \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$
$\frac{6}{5} \neq \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)$, infatti non vale. *Sbagliatissimo*

REMARK. Può anche succedere che $\sum\limits_n a_n$ e $\sum\limits_n b_n$ convergono ma la serie dei prodotti $\sum\limits_n a_n b_n$ *non converge*

10.1. Serie (definitivamente) a termini positivi

THEOREM 10.3. **Serie a termini positivi**: Se ho una a_n definitivamente positiva, allora $\sum\limits_n a_n$ non può essere indeterminata o andare a $-\infty$. Può solo convergere o divergere positivamente a $+\infty$.

PROOF. Abbiam visto che $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
Se $a_n \geq 0$ definitivamente, ho che $S_{n+1} \geq S_n$ definitivamente.
Quindi $\{S_n\}$ è definitivamente crescente, con ciò ammette limite che può essere $l \in \mathbb{R}$ o $+\infty$ □

REMARK. Se $a_n \leq 0$ definitivamente, analogamente la $\sum\limits_n a_n$ esiste e può solo convergere o divergere a $-\infty$

THEOREM 10.4. **Criterio del confronto**: Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

(1) Se $\sum\limits_n b_n$ **converge** $\implies \sum\limits_n a_n$ **converge**
(2) Se $\sum\limits_n b_n$ **diverge** $\implies \sum\limits_n a_n$ **diverge**

CLAIM. Se $0 \leq a_n \leq b_n$ vale $\forall\, n \in \mathbb{N}$, allora $0 \leq \sum\limits_n a_n \leq \sum\limits_n b_n$

EXAMPLE.

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$ allora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n = +\infty$ (perché $0 \leq \underbrace{1}_{a_n} \leq \underbrace{n}_{b_n} \; \forall\, n \geq 1$)
- $\sum\limits_n \frac{sen^2 n}{2n}$
  $a_n = \frac{sen^2 n}{2n} \leq b_n = \frac{1}{2^n}$
  So che $\sum\limits_n b_n$ *converge*, dunque per il teorema $\sum\limits_n a_n$ *converge* e sappiamo calcolare la somma.
  Ma di $\sum\limits_n a_n$ non sappiamo calcolare la somma. *Dio*
- $a_n = n!$
  $\sum\limits_n n!$, abbiamo $n! \geq n \; \forall\, n \geq 1$ e sappiamo che $\sum\limits_n n = +\infty \implies \sum\limits_n n! = +\infty$

THEOREM 10.5. **Criterio del confronto asintotico**: Siano a_n e b_n due successioni definitivamente positive ($a_n, b_n > 0$), supponiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Succede questo:

(1) *Se $l \in (0, +\infty)$, allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento, o **divergono entrambe** (a $+\infty$) o **convergono entrambe**.*

Casi limite:

(2) *Se $l = 0$ e so che $\sum_n b_n$ **converge** $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ **converge**.*

PROOF. $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \implies \frac{a_n}{b_n} < 1 \implies \underline{a_n < b_n}$ e da qui è chiaro che $\sum_n b_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ converge $\square$

(3) *Se $l = +\infty$ e $\sum_n b_n$ **diverge** $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ **diverge**.*

PROOF. $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \implies \frac{a_n}{b_n} > 1 \implies \underline{a_n > b_n}$ come sopra... $\square$

REMARK. In (2) se la $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$ non concludo niente a riguardo $\sum_n a_n$.

EXAMPLE. $\sum_n \frac{1}{2^n - log(n)}$, allora $a_n = \frac{1}{2^n - log(n)} > 0$ perché $2^n > log(n)$

- Uso il confronto asintotico, mi devo chiedere quali sono i termini più importanti di a_n?

$$2^n \text{ e } -log(n)$$

- Per $n \to +\infty$ chi cresce più velocemente?

$$2^n$$

- Quindi faccio confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - log(n)}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{log(n)}{2n}}_{\to 0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \to l = 1$$

- Quindi $l \in (0, +\infty)$, quindi $\sum_n a_n$ ha lo stesso comportamento $\sum_n b_n = \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ che *converge*.
- Quindi $\sum_n a_n$ *converge*.

THEOREM 10.6. **Criterio della radice (per serie)**: Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$ e suppongo $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

(1) *Se $0 < l < 1$, allora $\sum_n a_n$ **converge** $\left(\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$*
(2) *Se $l > 1$, allora $\sum_n a_n$ **diverge** a $+\infty$*

PROOF. $\square$

(1) *Se $l < 1$ scelgo un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui $l < \alpha < 1$, visto che $\sqrt[n]{a_n} \to l$ definitivamente avrò $\sqrt[n]{a_n} < \alpha$, quindi $a_n < \alpha^n$ definitivamente.*
Per confronto, visto $\sum_n \alpha^n$ converge, *concludo che anche $\sum_n a_n$* converge.
(2) *Discorso analogo, prendo un α tale per cui $1 < \alpha < l$ e poi definitivamente $\alpha < \sqrt[n]{a_n}$ perché si avvicina a l. Quindi $\alpha^n < a_n$ definitivamente e avrò che $\sum_n \alpha^n = +\infty$ (diverge$^+$) perché $\alpha > 1$, quindi per confronto anche $\sum_n a_n$ diverge$^+$*

REMARK. Come per le successioni con $l = 1$ non si conclude niente.

EXAMPLE. $\sum_n \frac{n}{3^n}$, allora $a_n = \frac{n}{3^n}$ quindi $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}$
$\frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} \implies l = \frac{1}{3}$
$l < 1$ quindi $\sum_n \frac{n}{3^n}$ *converge*.

Theorem 10.7. **Criterio del rapporto (per serie)**: Sia a_n una successione tale che $a_n > 0$. Se $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ con $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

*(1) Se $0 < l < 1$, allora $\sum\limits_n a_n$ **converge**.*

*(2) Se $l > 1$, allora $\sum\limits_n a_n$ **diverge**.*

Proof. □

(1) Sappiamo che se $\exists$ il $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora $\exists$ anche il $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, ed è uguale allo stesso l. Quindi la dimostrazione è analoga a quella del criterio della radice.

(2) Analogo al (2) del criterio della radice.

Example. $\sum\limits_n \frac{n^2}{n!}$, allora $a_n = \frac{n^2}{n!}$ [criterio del rapporto] $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \to 0$

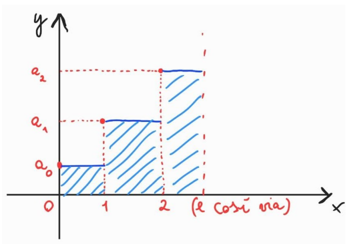
Quindi visto che $l = 0$, concludo che $\sum\limits_n \frac{n^2}{n!}$ *converge*.

Remark. I due criteri appena visti si applicano anche a successioni *definitivamente negative*. L'importante è che la successione *non saltelli*, deve essere o definitivamente positiva o definitivamente negativa.

- Infatti se $a_n < 0$, allora $-a_n$ sarà positivo definitivamentem quindi a $-a_n$ posso applicare i criteri visti e poi $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j = -\sum\limits_{j=0}^{n} -(a_j)$, dunque passando a limite: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} -(a_n)$ (se $\exists$ i limiti)

10.2. Legami con gli integrali impropri

Definition 10.3. **Serie come integrale improprio**: Una serie $\sum\limits_n a_n$ si può scrivere come integrale improprio. Considero una funzione $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = a_{[x]}$ ($[x] = \mathit{parte\,intera}$)

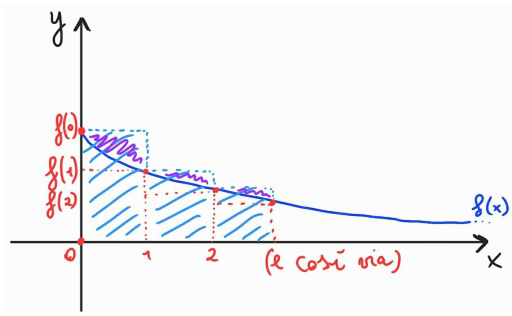


Example. $a_{\left[\frac{1}{2}\right]} = a_0$

- Si ha $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j = \int\limits_0^{n+1} f(x)\, dx$
- Quindi prendendo il limite per $n \to \infty$, trovo che $\sum\limits_n a_n = \int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$ (se $\exists$ i limiti)

Viceversa: Partendo da $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ io posso considerare la successione $a_n = f(n)$, e la serie

$$\underbrace{\sum_n a_n}_{\text{Somma delle aree di tutti i rettangoli blu}} = \sum_n f(n)$$



- Questa volta $\sum\limits_n a_n$ e $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$ non saranno proprio uguali

THEOREM 10.8. **Criterio dell'integrale**: Fissiamo un $\overline{n} \in \mathbb{N}$, e una $f : [\overline{n}, +\infty] \to \mathbb{R}$ che sia debolmente decrescente, continua, non negativa $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [\overline{n}, +\infty]$, e poniamo $a = f(n)$.
Allora $\sum\limits_n a_n$ e $\int\limits_{\overline{n}}^{\infty} f(x)\, dx$ hanno lo stesso comportamento, e

$$\underbrace{\sum_{n=\overline{n}+1}^{\infty} a_n}_{\text{Somma della parte dei rettangoli sottesa al grafico}} \leq \int_{\overline{n}}^{\infty} f(x)\, dx \leq \underbrace{\sum_{n=\overline{n}}^{\infty} a_n}_{\text{Somma di tutti i rettangoli}}$$

EXAMPLE.

- Serie Armonica Generalizzata
  $\sum\limits_n \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+ \implies \alpha > 0$
  - $\sum\limits_n \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \textit{converge} & \textit{se } \alpha > 1 \\ \textit{diverge}^+ & \textit{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$
  - Infatti $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (è decrescente e continua), $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ si comporta esattamente come $\sum\limits_n \frac{1}{n^\alpha}$

REMARK. Se $\alpha \leq 0$, $\sum\limits_n \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge* perché non è soddisfatta la condizione necessaria

10.3. Serie a segno arbitrario

DEFINITION 10.4. **Convergenza assoluta**: Diciamo che $\sum\limits_n a_n$ converge assolutamente se $\sum\limits_n |a_n|$ *converge.*

THEOREM 10.9. **Criterio dell'assoluta convergenza**: Se $\sum\limits_n a_n$ converge assolutamente, allora converge e in più sappiamo che $\left|\sum\limits_n a_n\right| \leq \sum\limits_n |a_n|$

PROOF. Segue quella dell'analogo per gli integrali impropri: □

$a_n = a_n^+ - a_n^-$	$0 \leq a_n^+ \leq \lvert a_n \rvert$
$\lvert a_n \rvert = a_n^+ + a_n^-$	$0 \leq a_n^- \leq \lvert a_n \rvert$

- E se $\sum\limits_n |a_n|$ *converge*, per confronto *convergono* $\sum\limits_n a_n^+$ e $\sum\limits_n a_n^-$, quindi *converge* anche

$$\sum_n a_n = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$$

- Per la disuguaglianza triangolare:

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \text{ e prendendo il limite per } n \to +\infty \text{ trovo che } \left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$$

EXAMPLE. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2}$, allora $a_n = \frac{sen(n)}{n^2}$ (è a segno variabile)
$|a_n| = \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right| = \frac{|sen(n)|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$

- Visto che $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$ *converge* (serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$) per confronto segue che $\sum\limits_n \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ *converge*, quindi per il [criterio dell'assoluta convergenza] concludo che anche $\sum\limits_n \frac{sen(n)}{n^2}$ *converge.*

REMARK. Se $\sum\limits_n |a_n|$ *diverge*, non si può dire niente riguardo a $\sum\limits_n a_n$.

10.4. Serie a segno alterno

DEFINITION 10.5. **Serie a segno alterno**: Una serie a segno alterno è una serie della forma: $\sum\limits_n (-1)^n \cdot a_n$, dove $\{a_n\}$ è una successione a *segno costante* (sempre positiva o negativa).

EXAMPLE. $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n^3}$ è a $\underline{\text{segno alterno}}$, $\sum\limits_n (-1)^n \cdot sen(n)$ $\underline{\text{non è a segno alterno}}$.

THEOREM 10.10. **Criterio di Leibniz**: Sia a_n una successione ≥ 0,debolmente decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $\sum\limits_n (-1)^n \cdot a_n$ *converge.* $\left(\text{e} \left| \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot a_j - \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot a_j \right| \leq a_{n+1} \right)$

EXAMPLE. $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}$ *converge*, perché $a_n = \frac{1}{n}$ è:

- $\frac{1}{n} \geq 0$
- $\frac{1}{n}$ è debolmente crescente
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

REMARK. La serie dei valori assoluti è: $\sum\limits_n \left| \frac{(1)^n}{n} \right| = \sum\limits_n \frac{1}{n} = +\infty$ (diverge)

Questo è un esempio in cui la serie $\sum\limits_n |b_n|$ *diverge* ma $\sum\limits_n b_n$ *converge.*

Esempi di avvertimento

(1) Può essere che $\sum\limits_n a_n$ e $\sum\limits_n b_n$ *convergano* ma $\sum\limits_n a_n \cdot b_n$ *non convergano.*

EXAMPLE. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{(1)^n}{log(n)}$

- $\sum\limits_n a_n$ *converge*, $\sum\limits_n b_n$ *converge* (per Leibniz)
- $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{log(n)} = (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n \cdot log(n)} = \frac{1}{n \cdot log(n)}$
- $\sum\limits_n a_n \cdot b_n = \sum\limits_n \frac{1}{n \cdot log(n)} \to diverge$

(2) Il confronto asintotico non funzione se il segno della successione non è costante.

EXAMPLE. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n} + 1}{n}$

- Si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{(-1)^n \cdot \sqrt{n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}}_{\to 0}} = 1$
- Se il confronto asintotico funzionasse, mi direbbe che $\sum\limits_n a_n$ e $\sum\limits_n b_n$ si comportano uguale...
- Ma $\sum\limits_n a_n = \sum\limits_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge* per Leibniz e $\sum\limits_n b_n = \underbrace{\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{converge} + \underbrace{\sum\limits_n \frac{1}{n}}_{diverge^+} = diverge^+$(a $+\infty$)

CHAPTER 11

Formulario

Tabella dei limiti

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x\to 0\ pos} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$	$\lim_{x\to -1\ negat} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = +\infty$
$\lim_{x\to -1\ pos} (1+x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$	$\lim_{x\to 0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}$	$\lim_{x\to +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad a>0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\lambda}-1}{x} = \lambda$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 1} \frac{(\arccos x)^2}{1-x} = 2$
$\lim_{x\to\infty} \log_\alpha\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log_\alpha e$	$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log_\alpha(1+x)} = \frac{1}{\log_\alpha e}$
$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

Sviluppi di Taylor per le funzioni elementari per $x \to 0$

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

con

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$