ANALISI MATEMATICA 2

UNIVERSITÀ DI PISA

FLAVIO ROMANO

(INFORMATICA $\mathcal{I}$ anno 2020-2021)

Ma è possibile che tutte le volte che muore un gatto tu mi cucini il coniglio?

R. Pozzetto

Contents

CHAPTER 1

Introduzione analisi a più variabili

Definition 1.0.1. **Cos'è** $\mathbb{R}^n$: è uno spazio su cui possiamo mettere una struttura vettoriale, cioé possiamo fare la somma di punti di questo spazio, il prodotto di un elemento di questo spazio per uno scalare ($\lambda \in \mathbb{R}$), fare combinazioni lineari di suoi elementi, definire basi e sottospazi.

Definition 1.0.2. **Vettore**: Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore che indichiamo tramite i suoi componenti.

$$x \in \mathbb{R}^n \implies \underbrace{x}_{\text{vettore}} = \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{componenti}} \in \mathbb{R}^n$$

Example. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dove $\mathbb{R}^2 \to$ piano e $\mathbb{R}^3 \to$ spazio.

Operazioni sullo spazio $\mathbb{R}^n$:

Definition 1.0.3. **Somma di 2 vettori**:

$$x = (x_1, \ldots, x_n)\,; y = (y_1, \ldots, y_n) \implies x + y = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

Definition 1.0.4. **Prodotto per uno scalare**

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

Operazioni sulla struttura:

Definition 1.0.5. **Prodotto scalare**: Il prodotto scalare è un'operazione che ha come input 2 vettori, dati 2 vettori $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, il prodotto scalare $< x, y >$ ha come output un numero dato dalla somma dei prodotti dei componenti.

$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \implies \{\text{Serve a misurare gli angoli}\} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Example. $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ allora $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2$

Definition 1.0.6. **Norma**: La norma è un'operazione che prende in input un solo vettore e come risultato un numero ≥ 0.
Sia x un vettore di $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \implies x = (x_1, \ldots, x_n)$, la norma di x è $\|x\|$.
È uguale alla radice quadrata del prodotto scalare di x con se stesso.

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \implies \{\text{Indica la lunghezza del vettore}\}$$

Definition 1.0.7. **Distanza**: La distanza è un'operazione che prende in input 2 vettore e lascia come risultato un numero ≥ 0.
Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, la distanza $d(x, y)$ è uguale a $\|x - y\|$, cioé la norma della differenza tra i 2 vettori.

$$d(x, y) = \underline{\|x - y\|} \implies \{\text{distanza tra } x \text{ e } y\}$$

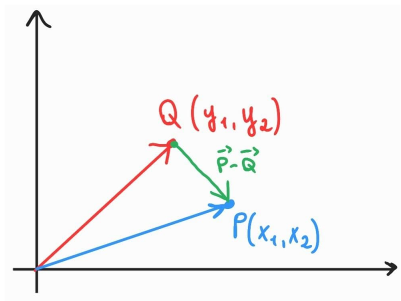
$$\underline{\|x - y\|} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^n} \implies x - y = x + (-1) \cdot y = \underline{(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)}$$

Definition 1.0.8. **Prodotto scalare geometricamente**: Abbiamo già ribadito che $< x, y >$ serve a misurare gli angoli. Perché geometricamente il prodotto scalare di 2 vettori $< x, y >$ è uguale al prodotto delle norme dei vettori e il coseno di Θ, dove Θ è l'angolo compreso tra i 2 vettori.

$$< x, y >= \|x\| \cdot \|y\| \cdot cos\Theta \text{ infatti } < x, y >= 0 \iff x \perp y$$

Definition 1.0.9. **Differenza**: Siano $P, Q \in \mathbb{R}^2$ due vettori/punti con $P = (x_1, x_2)$ e $Q = (y_1, y_2)$, il vettore differenza lo penso come applicato in Q con punta della freccia in P.

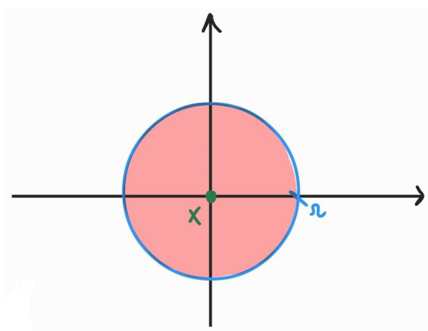
$$d(x, y) = \|x - y\|$$



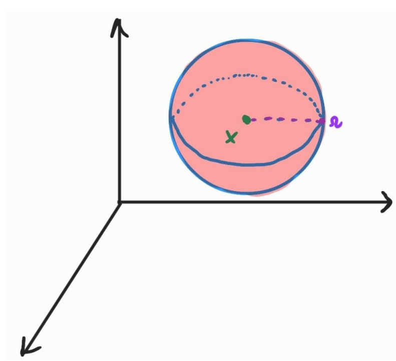
1.1. Insiemi nello spazio $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1.1. **Palla**: Dato un $x \in \mathbb{R}^n$,e un numero $r > 0$ con $r \in \mathbb{R}$. Si dice "palla di centro x e raggio r" l'insieme $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\ t.c\ d(x, y) < r\}$.

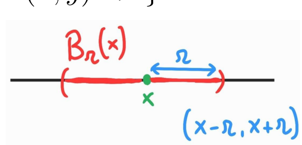
Example. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2\ t.c\ d(x, y) < r\} \rightarrow$ Tutta l'area della circonferenza escluso il perimetro



Example. In $\mathbb{R}^3$. Sfera piena privata del bordo (per il minore stretto)



Example. In $\mathbb{R}$. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}\ t.c\ d(x, y) < r\}$ ricordando che $d(x, y) = |x - y|$



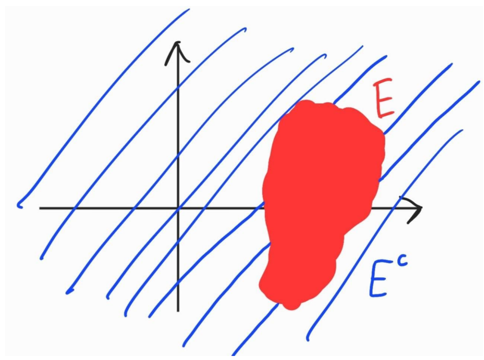
EXAMPLE. In $\mathbb{R}^n$. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \, t.c \, d(x,y) < r\}$ ricordando che $d(x,y) = \|x - y\|$

DEFINITION 1.1.2. **Sfera**: Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. Si dice Sfera di centro x e raggio r, l'insieme $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ t.c \ d(x,y) = r\}$

EXAMPLE. In $\mathbb{R}$. $S_r(x) = \{x - r\} \cup \{x + r\}$

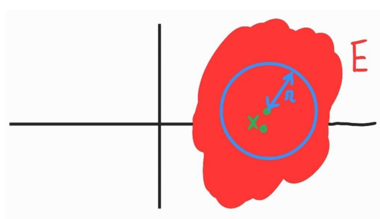
1.2. Proprietà insiemi di $\mathbb{R}^n$

NOTATION. Se E è un insieme di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ il complementare di E rispetto all'universo $\mathbb{R}^n$.



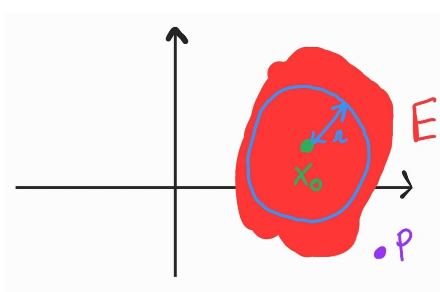
DEFINITION 1.2.1. **Punto interno**: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto interno ad E se esiste una palla di centro x_0 e di raggio $r > 0$ contenuta in E.

$$\text{se } \exists \ r > 0 \ t.c \ B_r(x_0) \subset E$$



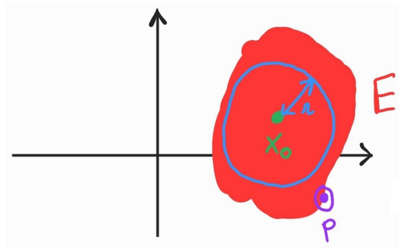
DEFINITION 1.2.2. **Punto esterno**: Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto esterno ad E se esiste una palla di centro x_0 e raggio r tutta contenuta in E^c.

$$\text{se } \exists \ r > 0 \ t.c \ B_r(x) \subset E^c$$



Definition 1.2.3. **Punto di frontiera**: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di frontiera per E, se non è né punto interno né punto esterno.

$$\text{se } \forall\, r > 0 \ B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset \text{ e } B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$$



Remark.

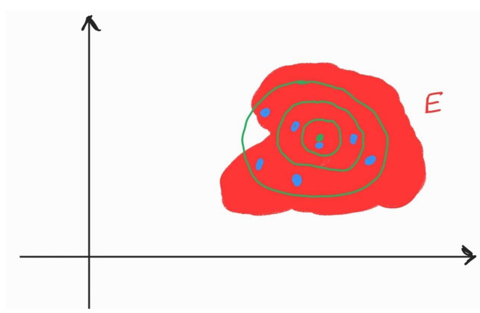
- Se x_0 è **punto interno** ad $E \implies x_0 \in E$
- Se x_0 è **punto esterno** ad $E \implies x_0 \notin E$
- Se x_0 è **punto di frontiera** per $E \implies x_0 \in E$ oppure $x_0 \notin E$

Fact. .

- $\mathring{E}$ = insieme dei punti interni
- ∂E = insieme dei punti di frontiera di E

Definition 1.2.4. **Punto di accumulazione**: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione per E se per ogni palla di centro x esiste un punto di E diverso da x.

$$\forall\, r > 0.\ B_r(x) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$



Remark. Se un punto è interno $\implies$ è un punto di accumulazione

Definition 1.2.5. **Punto isolato**: Se un punto di E non è di accumulazione per E, allora si dice punto isolato.

Definition 1.2.6. **Insieme aperto**: Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se ogni punto $x \in E$ è un punto interno ad E, in poche parole se $E = \mathring{E}$.

Definition 1.2.7. **Insieme chiuso**: Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se E^c è aperto.

Remark. $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi.

Example. $E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ t.c\ x_1 > 0\right\}$ è aperto
$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ t.c\ x_2 > 0\right\}$ è chiuso

Theorem. **Criterio di chiusura di un insieme**: E contiene tutta la frontiera di E se e solo se E è chiuso.

$$\partial E \subset E \iff (E \text{ è chiuso})$$

Proprietà insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti.
- L'unione (anche enumerabile) di insiemi aperti è aperta. Se $E_1, \ldots, E_n$ sono aperti, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$ è aperto.
- L'intersezione (finita) di insiemi aperti è aperta.

Proprietà insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$.

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono chiusi.
- L'unione (finita) di insiemi chiusi è un insieme chiuso.
- L'intersezione (anche enumerabile) di insiemi chiusi è chiusa.

DEFINITION 1.2.8. **Limitatezza**: Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste una palla di centro l'origine che contiene tutto E.

$$\text{se } \exists\, r > 0 \ t.c\ E \subset B_r(0)$$

EXAMPLE. Un quadrato $\subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato

EXAMPLE. Una retta $\subseteq \mathbb{R}^2$ non è limitata

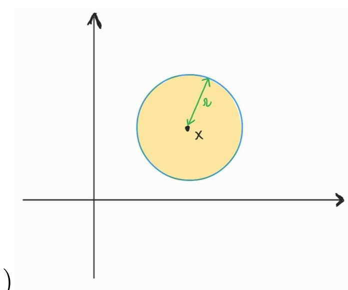
CHAPTER 2

Oggetti che vivono in $\mathbb{R}^n$

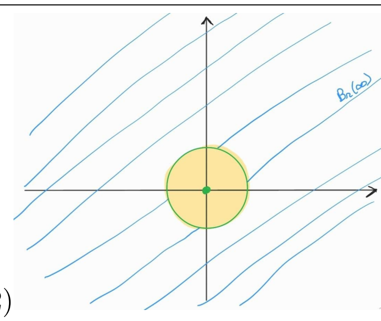
Definition 2.0.1. $\dot{\mathbb{R}}^n$ **"esteso"**: Nell'analisi monodimensionale parlammo del concetto di $\mathbb{R}$ esteso, cioé $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Con $\mathbb{R}^n$ non abbiamo più questo tipo di ordinamento.
$\dot{\mathbb{R}}^n$ è un insieme ottenuto da $\mathbb{R}^n$ con l'aggiunta di un punto $\{\infty\}$. Un intorno di $\{\infty\}$ possiamo immaginarlo come un insieme di punti che sta lontanissimo da $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.0.2. **Intorno sferico**: Un intorno sferico di raggio r di ∞ ("palla di centro ∞ e raggio r") è il complementare della palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ con centro l'origine e raggio r.

Example. In $\mathbb{R}^2$. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ t.c\ d(x,y) < r\}$ "La palla escluso l'intorno" (1)
Se $x = \infty \implies B_r(\infty) = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\overline{B_r(0)}}_{\text{chiusa}}$ (2)



(1)



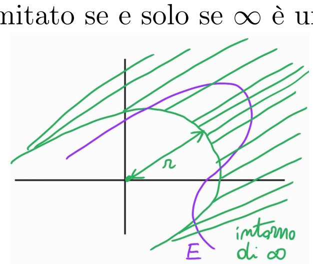
(2)

Remark. Per ogni $\overline{B_r(0)}$ trovo un intorno sferico di ∞ definito come il suo complementare: $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$.

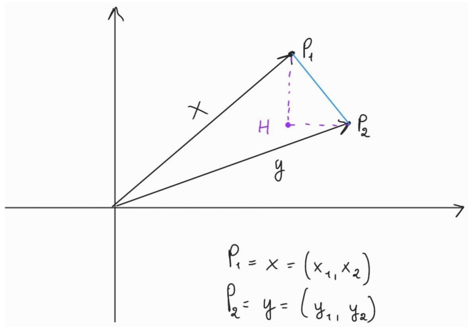
Remark. Su tutto $\dot{\mathbb{R}}^n$ posso definire tutte le nozioni che ho definito su $\mathbb{R}^n$.

Remark. Avendo introdotto $\dot{\mathbb{R}}^n$, e ricordandoci della definizione di punto di accumulazione, dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un punto x si dice di accumulazione per E se $\forall\, B_r(x)\, \exists$ un punto x che non è in E.

Remark. Un insieme in $\mathbb{R}^n$ non è limitato se e solo se ∞ è un punto di accumulazione.

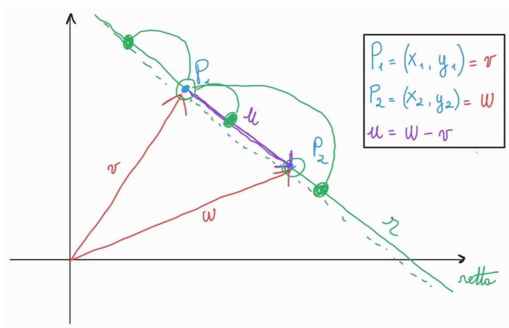
∞ è un punto di accumulazione $\iff$ 

2.1. Piano $\mathbb{R}^2$



Siano $P_1 = x = (x_1, x_2)$ e $P_2 = y = (y_1, y_2)$, allora $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ cioé geometricamente proprio il teorema di Pitagora. $(P_1P_2)^2 = (P_1H)^2 + (P_2H)^2$

2.2. Equazione retta per 2 punti



Definition 2.2.1. **Retta**: Insieme di punti che ottengo partendo da P_1 e spostandomi verso u.

- Analiticamente:
  - $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$
  - Retta $= \{P = v + t(u)\} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Forma PARAMETRICA della retta passante per } P_1 \text{e } P_2}$, $t \in \mathbb{R}$ parametro

- La forma parametrica è in realtà un sistema di 2 equazioni:

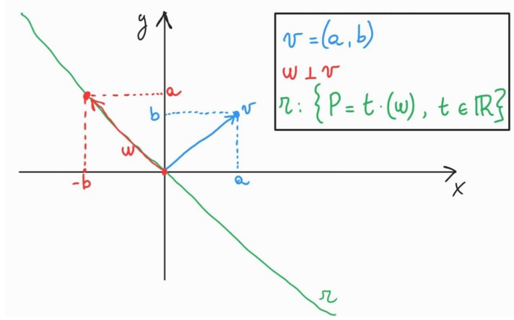
$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} \implies \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}_{\text{Forma CARTESIANA della retta passante per } P_1 \text{e } P_2}$$

- In generale:

$$\underbrace{ax + by + c = 0}_{\text{Forma CARTESIANA}} \quad \text{con } (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$$

Remark. Nella forma $ax + by + c = 0$, 2 equazioni diverse rappresentano la stessa retta se e solo se sono l'una multiplo dell'altra.

2.3. Retta perpendicolare a un certo vettore v passante per l'origine



- Come trovo w?
  - $v \perp w \iff < v, w >= 0$ quindi, essendo $w = (w_1, w_2)$,cerco w_1 e w_2 in modo che $w \perp v$
  - $< (a, b), w_1, w_2 >= 0$ quindi $a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = 0$
  - Posso scegliere $w_1 = b$ e $w_2 = a$
  - Con ciò avrò $< v, w >= a \cdot \underbrace{-b}_{w_1} + b \cdot \underbrace{a}_{w_2} = 0$
  - Allora $w = (-b, a)$ è tale che $w \perp v$. Allo stesso modo $-w = (b, -a)$ è sempre $\perp v$.

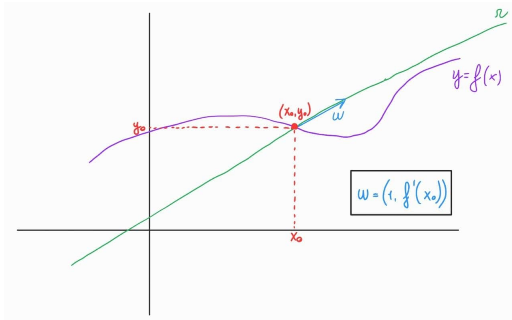
$$\text{Quindi } r : \{P = t \cdot (w)\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}_{\text{Forma PARAMETRICA}} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R} \text{ parametro che varia in } \mathbb{R}$$

- Analiticamente
  - $$\begin{cases} x = -t \cdot b \\ y = -t \cdot a \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{y}{a} \\ x = -\frac{y}{a} \cdot b \end{cases} \implies \underbrace{ax + by = 0}_{\text{Forma CARTESIANA}}$$

(1) $ax + by = 0$ è la forma cartesiana della retta passante per l'origine $(c = 0)$ e $\perp$ a $v = (a, b)$

(2) Sia retta di equazione parametrica $ax + by + c = 0$, è sempre vero che $v = (a, b)$ è $\perp$ alla retta r.

2.4. Retta tangente ad un grafico



Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e più volte derivabile, sia $graph(f)$ una linea $\subset \mathbb{R}^2$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ chiamo $y_0 = f(x_0)$

- Sviluppo di Taylor di f in x_0(al 1° ordine):
  - $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
  - $y = f(x) \implies graph(f)$
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies$ è una retta $\implies \underbrace{f'(x_0)x}_{a} + \underbrace{y}_{b=1} - \underbrace{f'(x_0)x_0 + f(x_0)}_{c} = 0$
- La retta passa per (x_0, y_0):
  - Sostituisco $x = x_0 \implies y = f(x_0) = y_0$
  - Grazie a Taylor $\implies f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies$ retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto (x_0, y_0)
  - $y - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies y - f(x_0) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 = 0$
  - Infine si arriva a $\underbrace{-f'(x_0)x + y + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0}_{\text{Forma Cartesiana } ax+by+c \text{ con } a=f'(x_0) \text{ e } b=1}$
- Il vettore $v = (a, b) = (-f'(x_0), 1)$ è $\perp$ alla retta $r \implies w = (1, f'(x_0))$ $t.c$ $< v, w >= 0$ è vettore tg a r.

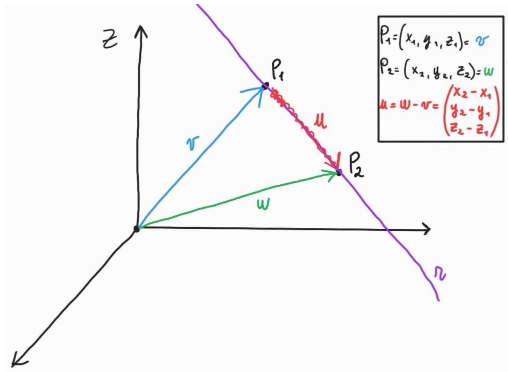
  La retta tangente al grafico di $f(x)$ in (x_0, y_0), per definizione, è la retta passante per (x_0, y_0) che ha coefficiente angolare $m = f'(x_0)$.

Remark. Il coefficiente angolare di r è $tg(\Theta)$, ma $tg(\Theta)$ nel triangolo rettangolo è il rapporto tra i 2 cateti, cioé $tg(\Theta) = \dfrac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0)$.

- La retta r di equazione $y - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$, che ha come vettore tangente w, ha come $m = f'(x_0)$.
  - r passa per (x_0, y_0)
  - r ha come $m = f'(x_0)$
  - Quindi r è la retta tangente a $y = f(x)$ in (x_0, y_0)
  - $\underbrace{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Forma Cartesiana}}$; $\underbrace{r : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Forma Parametrica}}$

2.5. Retta per 2 punti in $\mathbb{R}^3$

REMARK. In $\mathbb{R}^2$ una retta è descritta da una sola equazione, in $\mathbb{R}^3$ abbiamo ben 3 gradi di libertà $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ mentre la retta ne ha 1 solo.



- Forma Parametrica:
  - $r : \{P = v + t(u)\}$ con $t \in \mathbb{R}$, cioé $r : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right\}$
- Forma Cartesiana:
  - $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \implies \begin{cases} t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ t = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases} \implies \underbrace{\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}}_{\text{Forma Cartesiana}}$

Definition 2.5.1. **Piano**: Ci vogliono 3 punti per determinare un piano. In un piano ci sono 2 gradi di libertà, nello spazio invece 3. Ci aspettiamo un'equazione lineare per definire un piano nello spazio.
Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = u$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) = v$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3) = w$.
Sia π : piano passante per P_1, P_2, P_3
$P_2 - P_1 = v - u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
$P_3 - P_1 = w - u = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

- Formula Parametrica di π
  - Sia $\pi : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ t.c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + t(v-u) + s(w-u) \right\}$ con $t, s \in \mathbb{R}$ parametri
  - Allora $\pi : \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Formula Parametrica}}$
- Formula Cartesiana
  - $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - x_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - x_1) + s(z_3 - z_1) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = t + s\frac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = t + s\frac{(y_3-y_1)}{y_2-y_1} \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t + s\frac{(z_3-z_1)}{z_2-z_1} \end{cases} \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{I-III}}{\Longrightarrow}}$

    $\overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{I-III}}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = s\left(\frac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(y_3-y_1)}{y_2-y_1}\right) \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = s\left(\frac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(z_3-z_1)}{z_2-z_1}\right) \end{cases} \implies \begin{cases} s = \dfrac{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\frac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(y_3-y_1)}{y_2-y_1}\right)} \\ s = \dfrac{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\frac{(x_3-x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(z_3-z_1)}{z_2-z_1}\right)} \end{cases}$
  - Infine $\underbrace{\dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}}_{\text{Equazione di } \pi \text{ passante per } P_1, P_2, P_3}$

CHAPTER 3

Curve, Insemi a più variabili e livelli

3.1. Curva nel piano (e nello spazio)

Definition 3.1.1. **Curva**: Una curva nel piano è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ con $I \subset \mathbb{R}$, la curva è definita in un intervallo che può essere aperto: $I = (a, b)$ o chiuso: $I = [a, b]$. Se consideriamo un intervallo chiuso $I = [a, b]$ allora possiamo definire una **curva chiusa**.

Definition 3.1.2. **Curva chiusa**: Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$, ciò si controlla sostituendo gli estremi nella funzione γ.

Remark. γ ha valori in $\mathbb{R}^2$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Chiamo t la variabile che appartiene a I, $\gamma(t)$ ha 2 componenti $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ con $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Example. $\gamma(t) = \left(t^2 + 1, 3t - 2\right)$
$t \in [0, 3]$ è una curva con $[a, b] = [0, 3]$, $x(t) = t^2 + 1$ e $y(t) = 3t - 2$.

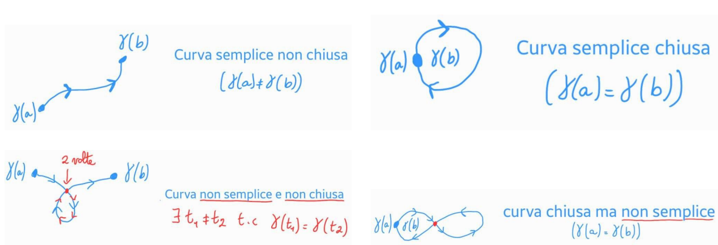
- Per ogni punto t nell'intervallo, la curva γ individua un punto del piano
  - $t = 0 \implies \gamma(0) = (1, -1)$
  - $t = 3 \implies \gamma(3) = (10, 7)$
- Con una curva rappresento un punto che si muove nel piano.
  - $t = \textit{tempo} \implies \gamma(t) =$ in che punto si trova la mia curva al tempo t

Definition 3.1.3. **Curva nello spazio**: La curva nello spazio è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, del tutto analoga a prima tranne che il punto si muove nello spazio, non nel piano.

Example. $\gamma(t) = \left(t^2, sen(t), e^t\right)$ con $t \in [-1, 1]$

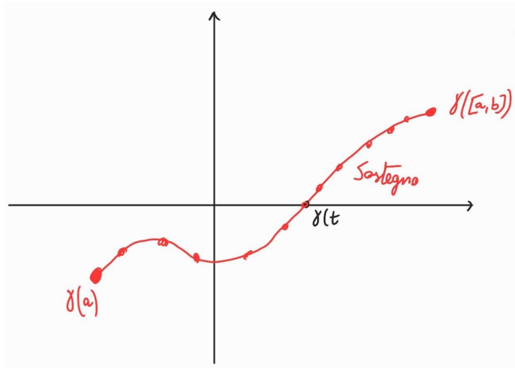
- $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
  - $x : I \to \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}$, $z : I \to \mathbb{R}$

Definition 3.1.4. **Curva semplice**: Una curva si dice semplice se non ritorna mai su se stessa. Tranne al massimo $\gamma(a) = \gamma(b)$



Definition 3.1.5. **Sostegno**: Si dice sostegno di una curva l'immagine della curva stessa, cioé la traiettoria percorsa dal punto.

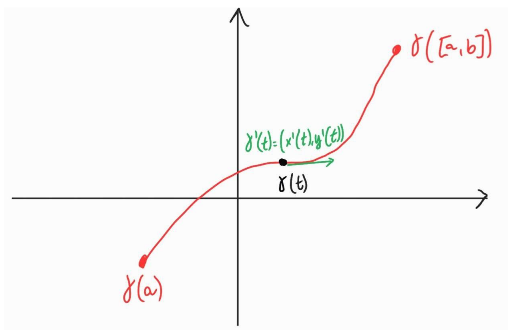
Example. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ quindi $\underbrace{\gamma([a, b])}_{\text{Immagine di } \gamma} \subseteq \mathbb{R}^2$



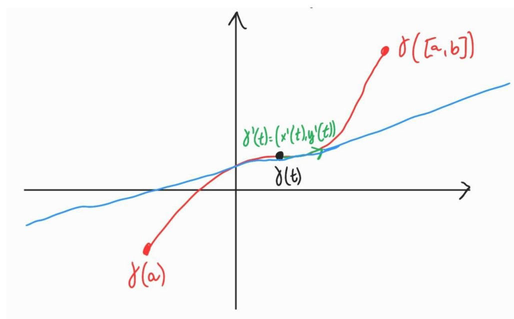
EXAMPLE. $t = \textit{tempo} \implies \gamma(t) =$ in che punto si trova la mia curva al tempo $t \Longrightarrow \gamma([a,b])$
Inoltre $\gamma([a,b]) =$ è la visualizzazione della traiettoria che percorre il punto

DEFINITION 3.1.6. **Vettore tangente alla curva**: Sia una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$(oppure $\mathbb{R}^3$), con $I \subset \mathbb{R}$, si dice vettore tangente alla curva il vettore $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ per $\mathbb{R}^2$ e $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ per $\mathbb{R}^3$, assumendo sempre che $x'(t)$, $y'(t)$ e l'eventuale $z'(t)$ esistano.

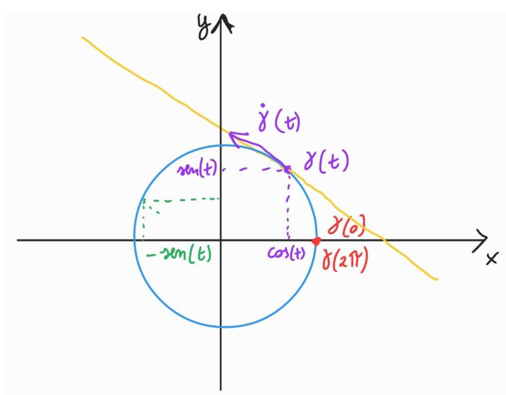
EXAMPLE. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies x'(t)$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies y'(t)$



Definition 3.1.7. **Retta tangente alla curva in un punto**: La retta tangente ad una curva in un punto è quella retta che passa per quel punto ed ha come direzione il vettore tangente alla curva in quello stesso punto.



Example. $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$



- $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
  - $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,allora $x(t) = cos(t)$ e $y(t) = sen(t)$
  - $x^2(t) + y^2(t) = cos^2(t) + sen^2(t) = 1$
  - $\forall t \in [0, 2\pi] .\ x^2(t) + y^2(t) = 1$

- Il sostegno di γ è la circonferenza (di $\mathbb{R}^2$) di equazione $x^2 + y^2 = 1$, $\forall t \in [0, 2\pi] .\gamma(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ x^2 + y^2 = 1\}$
- Il vettore tangente sarà $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-sen(t), cos(t))$
  - $\gamma(0) = (cos(0), sen(0)) = (1, 0)$ e $\gamma(2\pi) = (1, 0)$
  - Quindi $(\gamma(0) = \gamma(2\pi)) \implies$ *curva chiusa*

Retta tangente nel punto t a $\gamma(t)$
$\underbrace{M : \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)}_{\text{Forma Parametrica}}$ con $s \in \mathbb{R}$ che mi permette di scorrere la retta.

EXAMPLE. $\gamma(t) = \big(t, t^2 + t\big)$ con $t \in [-1, 2]$, cioé $x(t) = t$ e $y(t) = t^2 + t$

- La curva percorre il tratto della parabola $y = x^2 + x$
  - $\gamma(-1) = (-1, 0)$ e $\gamma(2) = (2, 6)$
- Calcolare la retta tangente nel punto corrispondente a $t = 1$
  - $\gamma(1) = (1, 2)$
  - $\gamma'(t) = (1, 2t + 1)$
  - $\gamma'(1) = (1, 3)$
- La retta tangente in $\gamma(1)$ è la retta che passa per $\gamma(1) = (1, 2)$ con direzione $(1, 3)$.
  In forma parametrica $(1, 2) + s\,(1, 3)$ con $s \in \mathbb{R}$.

3.2. Funzioni a più variabili

DEFINITION 3.2.1. **Funzione**: Una funzione è una terna di oggetti Ω, B, f dove Ω e B sono insiemi

$$f : \Omega \to B$$

f = legge che lega gli elementi di Ω con quelli di B,mette in corrispondenza $\forall\, x \in \Omega$ con un solo elemento di B.
Ω = dominio$\subseteq \mathbb{R}^n$
B = codominio$\subseteq \mathbb{R}$

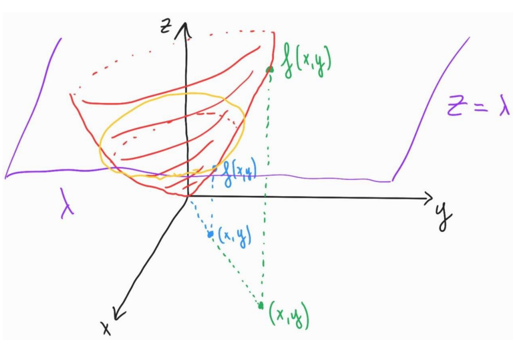
REMARK. Il dominio è il più grande sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ dove è definita la funzione

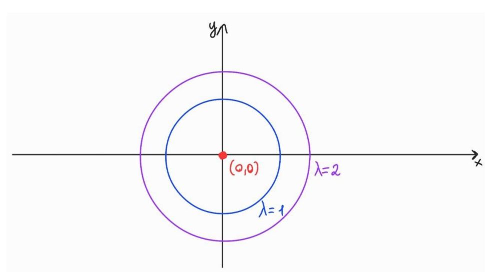
3.3. Insiemi di livello ($n = 2 \to$ linee di livello)

DEFINITION 3.3.1. **Insieme di livello**: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dato un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ (pensato come quota) l'insieme di livello corrispondente a λ è l'insieme di livello λ per $f : \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ f(x, y) = \lambda\big\}$ cioé l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^2$ tali per cui la quota di f in questi punti è proprio λ.

REMARK. Esso è un sottoinsieme dello spazio di partenza tale che la funzione vale sempre λ.

EXAMPLE. $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cioé $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ (quadrato della distanza di (x, y) dall'origine)





(a)

- Chi sono gli insiemi di livello?
  - Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ x^2 + y^2 = \lambda\big\}$
  - Interseco il grafico di f col piano $z = \lambda$,poi proietto quello che trovo sul piano xy.
    * Se $\lambda < 0 \implies \emptyset$ (perché il grafico di f sta tutto sopra xy)
    * Se $\lambda = 0 \implies (0, 0)$
    * Se $\lambda > 0 \implies$ trovo la circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$
- $\lambda = 0 \implies x^2 + y^2 = 0$
- $\lambda = 1 \implies \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ x^2 + y^2 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$
- $\lambda = 2 \implies \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ x^2 + y^2 = 2\big\} \subset \mathbb{R}^2$ (v. figura a)

CHAPTER 4

Limiti e continuità a "più variabili"

4.1. Nozione di limite nel caso $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

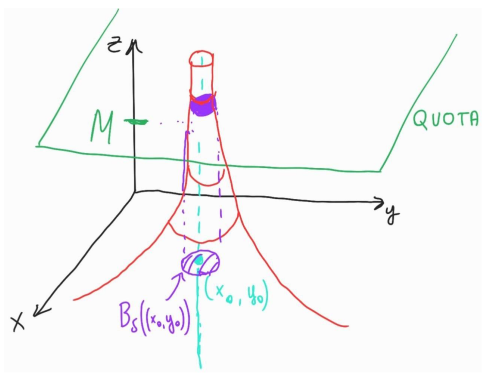
DEFINITION 4.1.1. **Limite**: Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, vogliamo dare un senso a $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ci sono 4 possibilità:

(1) Limite esiste ed è finito
(2) Limite esiste ed è $+\infty$
(3) Limite esiste ed è $-\infty$
(4) Limite non esiste $\iff$ (1),(2),(3) non valgono

DEFINITION 4.1.2. **Limite (2)**: Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ t.c\ f(x,y) \geq M.\ \forall\, (x,y) \in B_\delta\left((x_0,y_0)\right) \setminus \{(x_0,y_0)\}\ \text{(anche con } M \text{ molto grande)}$$

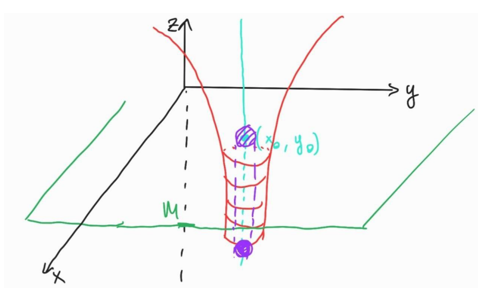
Graficamente:



DEFINITION 4.1.3. Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$ se

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ t.c\ f(x,y) \leq M.\ \forall\, (x,y) \in B_\delta\left((x_0,y_0)\right) \setminus \{(x_0,y_0)\}\ \text{(anche con } M \text{ molto negativo)}$$

Graficamente:



DEFINITION 4.1.4. **Limite (1)**: Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ t.c\ |f(x,y) - l| \leq \varepsilon\ \forall\ (x,y) \in B_\delta\left((x_0,y_0)\right) \setminus \{(x_0,y_0)\}\ \text{(anche con } \varepsilon \text{ molto piccolo)}$$

DEFINITION 4.1.5. **Continuità**: Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (x_0 vettore) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}^n$ se è continua $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Regola per ogni funzione

Ogni funzione ottenuata a partire dalle funzioni elementari usando operazioni algebriche e/o composizioni è **continua** dove non presenta problemi di esistenza ($log(x)$ con $x \leq 0$ è un problema)

REMARK. Gli strumenti standard del calcolo dei limiti studiati nell'analisi monodimensionale continuano ad essere validi per funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Unicità del limite
- Somma, prodotto, quoziente
- Teorema dei carabinieri e Teorema del confronto
- Permanenza del segno
- ecc.

Analisi in una variabile

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x, x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$
se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta\ t.c\ \forall\ x : \lvert x - x_0 \rvert < \delta$, con $x \neq x_0$, vale $\lvert f(x) - l \rvert \leq \varepsilon$

Analisi a più variabili

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x \in \mathbb{R}^n$ con $x, x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$
se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta\ t.c\ \forall\ x : \lVert x - x_0 \rVert < \delta$, con $x \neq x_0$, vale $\lvert f(x) - l \rvert \leq \varepsilon$
$\lVert x - x_0 \rVert < \delta \iff (\forall\ x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \wedge (\forall\ x\ t.c\ \lVert x - x_0 \rVert < \delta)$

REMARK. Anche se la struttura della definizione di limite rimane quasi inalterata, il calcolo dei limiti per funzioni di più variabili è molto più complicato. Perché:

- In $\mathbb{R}$ x tende ad un punto x_0 lungo una direzione fissata (nessun tipo di libertà)
- In $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ può tendere ad un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con n gradi di libertà. Esistono diversi modi di avvicinarsi ad un punto, tuttavia per unicità del limite il risultato del limite non dipende dalla direzione di avvicinamento. Se noto che cambiando "modo" di avvicinarmi al punto il limite cambia, allora tale limite non esiste (per unicità del limite).

FACT. Tuttavia il fatto che una funzione abbia sempre lo stesso limite in diverse direzioni è una condizione necessaria *ma non sufficiente*. Ciò non basta per concludere che il limite esiste. Perché potrebbero esserci direzioni in cui il limite è diverso e che ancora non ho trattato.

4.2. Estendere la nozione di limite nel caso $\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = l$

- Cosa vuol dire che $(x, y) \to \infty$?
  - Un intorno di raggio r di ∞ in $\mathbb{R}^2$ è il complementare della $B_r((0, 0))$.
  - $(x, y) \to \infty$ se vale almeno una delle seguenti condizioni:
    1. $d((x, y), 0) \to \infty$
    2. $x^2 + y^2 \to \infty$
    3. $\rho \to \infty$

DEFINITION 4.2.1. **Limite a** $+\infty = l$: Si dice che $\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ un intorno di $+\infty$ tale che se $(x, y) \in$ *intorno* allora $\lvert f(x, y) - l \rvert \leq \varepsilon$.

$$\text{se } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ t.c\ se\ (x, y) \notin B_\delta(0, 0) \implies \lvert f(x, y) - l \rvert \leq \varepsilon$$

REMARK. δ corrisponde al raggio dell'intorno di $+\infty$

Definition 4.2.2. **Limite a** $+\infty = \infty$: Si dice che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \infty$ se:

$$\forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0\ t.c\ \forall\ (x,y) \notin B_\delta(0,0).\ f(x,y) \geq M$$

Analogo viceversa per $-\infty$ se:

$$\forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0\ t.c\ \forall\ (x,y) \notin B_\delta(0,0).\ f(x,y) \leq M$$

CHAPTER 5

Calcolo differenziale per funzioni a più variabili

5.1. Analisi vista fin'ora

Per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti definizioni:

DEFINITION 5.1.1. **Derivabilità**: Si dice che f è derivabile in x_0 se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ con $l \in \mathbb{R}$.
Ciò detto chiamo $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

DEFINITION 5.1.2. **Differenziabilità**: Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\exists$ un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui posso scrivere $\underbrace{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h)}_{\text{per } h \to 0}$.

THEOREM.

(1) f è derivabile in $x_0 \iff f$ è differenziabile in x_0 e $\alpha = f'(x_0)$.
(2) Se f è derivabile in $x_0 \implies f$ è continua in x_0.

5.2. Analisi a più variabili

5.2.1. Caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sia una $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, mentre nell'analisi a una dimensione la derivata consisteva nel fare il limite del rapporto incrementale (con f che dipende da x), nell'analisi a due dimensioni f dipende sia da x che da y ($f(x,y)$).

DEFINITION 5.2.1. **Derivata parziale (x)**: Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si dice che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \text{ esiste ed è finito}$$

REMARK. Consiste nel tenere fissa una variabile in $\mathbb{R}^2$ (o la x o la y) e lasciar variare l'altra.

NOTATION. La derivata parziale rispetto ad x si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \iff f_x(x_0, y_0) \iff D_x f(x_0, y_0)$$

DEFINITION 5.2.2. **Derivata parziale (y)**: Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si dice che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile y nel punto (x_0, y_0) se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t} \text{ esiste ed è finito}$$

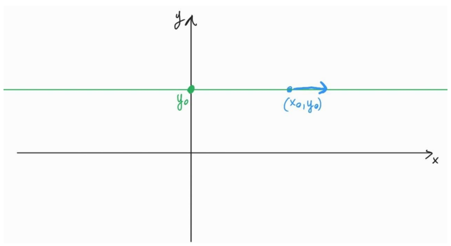
NOTATION. La derivata parziale rispetto ad y si indica con

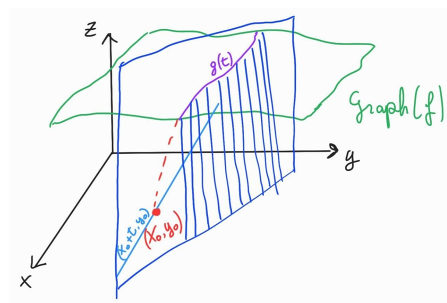
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff f_y(x_0, y_0) \iff D_y f(x_0, y_0)$$

REMARK. I limiti coinvolti nella definizione di derivata parziale sono limiti in una variabile (in $\mathbb{R}$) cioé $\lim_{t\to 0}$ sulla retta reale.

5.2.1.1. *Geometricamente.*

- $f_x(x_0, y_0) =$ Retta parallela all'asse x e passante per (x_0, y_0)
  - y_0 rimane fissato, x_0 varia.
  - equazione parametrica della retta: $(x_0, y_0) + t\,(1, 0) = (x_0 + t, y_0)$
    - Guardo la funzione f ristretta a questa retta: $f\,(x_0 + t, y_0) = g(t)$
    - Con $g(t)$ mi sto muovendo col parametro t.
    - $g(t)$ geometriamente è l'intersezione del grafico di f con il piano $\perp$ al piano xy e contenente la retta $(x_0 + t, y_0)$
    - La derivata di $g(t)$ in $t = 0 \implies g'(t)$ è proprio $f_x(x_0, y_0)$
    - $g'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$ cioé la derivata parziale $f_x\,(x_0, y_0)$
  - Analogamente per $f_y\,(x_0, y_0)$:
    - $h(t) = f\,(x_0, y_0 + t)$
    - $h'(0) = f_y\,(x_0, y_0)$





5.2.2. Caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nel caso di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ abbiamo 2 derivate parziali: f_x e f_y.

Definition 5.2.3. **Derivata parziale a più variabili**:
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (quindi $x_0 = x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$), si dice derivata parziale di f rispetto alla variabile x_k :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\,(x_0 + te_k) - f\,(x_0)}{t} \text{ se questo limite esiste finito}$$

Se ciò è vero, tale limite viene indicato $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\,(x_0)$

Remark. $x_0 \in \mathbb{R}^n \implies x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$

- $f\,(x_0 + te_k)$ sapendo che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$
  - $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \implies e_1$ genera x_1
  - $e_2 = (0, 1, \ldots, 0) \implies e_2$ genera x_2
  - $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$
  - $e_n = (0, \ldots, 0, \ldots, 1)$
- $f\,(x_0 + te_k)$, aggiungo t solo sulla $k - esima$ variabile
- $\mathbb{R}^2 \to e_1, e_2$
  - $f\,(x_0 + te_1) \implies$ muoversi nella direzione $x \implies$ derivata parziale rispetto a x
  - $f\,(x_0 + te_2) \implies$ muoversi nella direzione $y \implies$ derivata parziale rispetto a y

Remark. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ho n direzione $\iff$ n vettori della base canonica
Una funzione di n vvariabili ha n derivate parziali, una per ciascuna delle direzioni canoniche

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

CHAPTER 6

Derivata direzionale e Gradiente

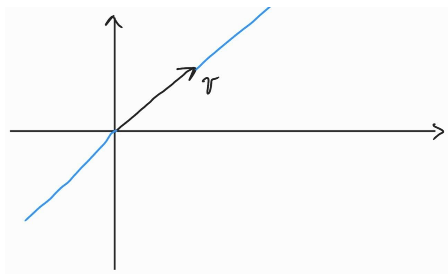
6.0.1. Derivata direzionale.

DEFINITION 6.0.1. **Derivata direzionale**: Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non nullo, cioé $\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$. Allora:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(x_0 + t\alpha\,,\, y_0 + t\beta\right) - f\left(x_0\,,\, y_0\right)}{t} = l \text{ } con \text{ } l \in \mathbb{R}$$

Se esiste ed è finito si dice *"derivata direzionale di f in (x_0, y_0) rispetto alla direzione $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$"*.

NOTATION. Si indica con $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x_0, y_0) \iff D_{\overrightarrow{v}} f(x_0, y_0)$.



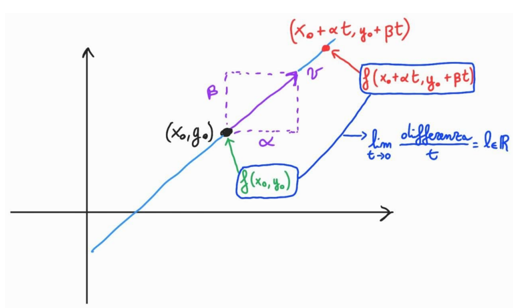
6.0.1.1. *Geometricamente.* Innanzitutto rispetto a ciò che si verificava nel caso delle derivate parziali, qui ci muoviamo rispetto ad entrambe le variabili lungo la direzione data dal vettore $\overrightarrow{v}$.

REMARK. Nelle derivate parziali ci muovevamo nelle direzioni paralleli agli assi facendo variare solo una delle variabili alla volta.

DEFINITION 6.0.2. **Derivata direzionale geometricamente**: Geometricamente corrisponde a muoversi lungo la retta di equazione parametrica

$$(x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) = (x_0 + \alpha t\,,\, y_0 + \beta t)$$

Retta passante per il punto (x_0, y_0) e descritta dalla direzione di $\overrightarrow{v}$:



REMARK. Dire derivata direzionale rispetto alla direzione $\overrightarrow{v}$ in (x_0, y_0) significa restringere la funzione alla retta obliqua e calcolarne la derivata rispetto a t nel punto $t = 0$.

- Definiamo $g(t) = f\left(x_0 + t\alpha\,,\, y_0 + t\beta\right)$
  - Allora $g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x_0, y_0)$

- Applicando la definizione $g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha\,,\, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$
- Quindi $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha\,,\, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$.

Remark. $g(t)$ è la funzione che ottengo intersecando il grafico di f con il piano $\perp$ al piano xy e contenente la retta passante per (x_0, y_0) e con direzione $\overrightarrow{v}$.

Definition 6.0.3. **Derivata direzionale**: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (quindi $x_0 = x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$), e $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ (quindi $\overrightarrow{v} = v_1, v_2, \ldots, v_n$) con $\overrightarrow{v} \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\overrightarrow{v}) - f(x_0)}{t}$$

con $x_0 + t =$ *"vettore"* $= (x_{01} + tv_1\,,\, x_{02} + tv_2\,, \ldots,\, x_{0n} + tv_n)$

Remark. Anche le derivate direzionali sono definite tramite limiti in una variabile, cioé il *parametro* della retta di direzione v e passante per $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, che è proprio t.

6.1. Gradiente

Definition 6.1.1. **Gradiente**: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si dice gradiente di $f(x, y)$ in (x_0, y_0) il vettore $\left(\in \mathbb{R}^2\right)$ che ha come componenti le derivate parziali di f nel punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Notation. Si indica con $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0)\,,\, f_y(x_0, y_0))$
In generale sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \ldots, f_{x_n}(x_0))$$

6.2. Differenziabilità di una funzione

Definition 6.2.1. **1 dimensione**: Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\exists$ un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c $\underbrace{f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(h)}_{h \to 0}$ per $h \in \mathbb{R}$.

Definition 6.2.2. **2 dimensioni**: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si dice che f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se $\exists$ due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c

$$f \text{ è differenziabile} \iff f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha \cdot h + \beta \cdot k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

- $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underline{\alpha \cdot h + \beta \cdot k} + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$
  - $<(\alpha, \beta), (h, k)> \in \mathbb{R}$ "*prodotto scalare*"
  - Vettori:
    - (h, k) : spostamento rispetto al punto (x_0, y_0)
    - (α, β) : devono esistere per avere la differenziabilità di f
  - $\sqrt{h^2 + k^2} =$ essendo (h, k) il vettore spostamento = lunghezza di (h, k) = = lunghezza dello spostamento compiuto.

Remark. $o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$ significa che $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$.

Definition 6.2.3. **n dimensioni**: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.
Una funzione f si dice differenziabile nel punto x_0 con $h \in \mathbb{R}^n$ se

$$\exists \text{ un vettore } n\text{dimensionale } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ t.c } \underbrace{f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(\|h\|)}_{\text{per } h \to 0}$$

Essendo h un vettore (proprio come x_0) il limite è in n variabili.

THEOREM. **Relazione tra continuità, differenziabilità e derivate**: Supponiamo che $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora valgono le seguenti proprietà:

(1) f è continua in x_0
(2) Esistono le derivate parziali di f in x_0 e sono proprio le componenti del vettore α:

$$\alpha = \left(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \ldots, f_{x_n}(x_0)\right) = \nabla f(x_0), \text{ cioé } \alpha = \nabla f(x_0)$$

(3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e sono date da:

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n\ \exists\ D_v f(x_0) \text{ e } D_v f(x_0) =< \alpha \cdot v >, \text{ ricordando } \alpha = \nabla f(x_0), \text{ allora } D_v f(x_0) = \nabla f(x_0)$$

ATTENZIONE: Non valgono i viceversa.

PROOF. **(3) del Teorema**:
Se f è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0.
Dimostrare la validità di $D_v f(x_0) =< \alpha \cdot v >$. □

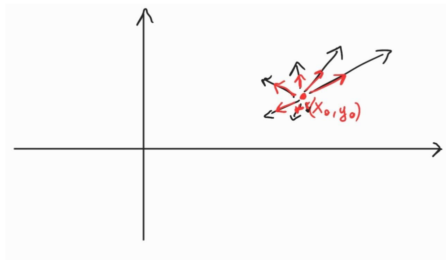
- **Hp**: f è differenziabile in x_0
- **Tesi**: $\exists$ un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ t.c $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(\|h\|)$ per $h \to 0$
  - Fissiamo una direzione $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \neq 0$:
    - $D_v f(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$
    - è lecito porre $h = t \cdot v$ perché $v \in \mathbb{R}^n$, $(t \cdot v) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $\lim t \to 0 \implies h \to 0$
    - $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0) + \alpha \cdot (tv) + o(\|tv\|) - f(x_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{f(x_0)} + \alpha \cdot (tv) + o(\|tv\|) \cancel{- f(x_0)}}{t}$
    - $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{t}(\alpha \cdot v)}{\cancel{t}} + \dfrac{o(\|tv\|)}{t} = \alpha \cdot v + \lim\limits_{t\to 0} \underbrace{\dfrac{o(\|tv\|)}{t\,\|v\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|v\|}_{\neq 0} = (\alpha \cdot v) + 0 = \alpha \cdot v$
  - Usando la differenziabilità di f in x_0 ho ottenuto che
    - $D_v f(x_0) =< \alpha \cdot v >$ letteralmente "α scalar v"

REMARK. Le derivate parziali sono casi particolari di derivate direzionali, infatti corrispondono alla scelta $v = e_k$(vettori della base canonica).

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) \iff D_{x_k} f(x_0) = D_{e_k} f(x_0)$$

- La dimostrazione sopra dimostra l'esistenza delle derivate parziali e la formula:
  - $D_{x_k} f(x_0) = D_{e_k} f(x_0) = \alpha \cdot e_k = \alpha_k$
    - e_k è il k-esimo vettore della base canonica in $\mathbb{R}^n$
    - α_k è la k-esima componente di α
    - α è il vettore nella formula di differenziabilità di f con:
      - $\alpha_k = D_{x_k} f(x_0) \implies \alpha = \nabla f(x_0)$
  - Se f è differenziabile in x_0, possiamo scrivere:
    - $f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(\|h\|)$ per $h \to 0$
  - Inoltre le derivate direzionali sono date dalla formula:
    - $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$

REMARK. Le formule e le conclusioni del teorema valgono $\forall$ direzione v.
Difatti nel definire le derivate direzionali possiamo limitarci alle direzioni con $\|v\| = 1$.
Perché riesco lo stesso a descrivere tutte le rette possibili.



6.3. Gradiente geometricamente

QUESTION. *In quale direzione la derivata direzionale è massimo o minimo?*

- L'algebra lineare ci dice che:
  - $(D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v) = \underbrace{\|\nabla f(x_0)\|}_{\text{non dipende da } v} \cdot \|v\| \cdot \underbrace{\cos\Theta}_{\text{dipende da } v}$
    - con $\nabla f \le \Theta \le v$
  - $\max\limits_{v=\|v\|=1} D_v f(x_0) =<$ lo realizzo quando massimizzo $\cos\Theta >$
    - $max \cos\Theta \implies \cos\Theta = 1$
    - $\Theta = 0$, quindi l'angolo compreso tra ∇f e v è 0
      - Cioè quando scelgo come direzione quella del gradiente stesso, $v // \nabla f$
  - $\max\limits_{\|v\|=1} D_v f(x_0) = D_{\nabla f(x_0)} f(x_0)$

DEFINITION 6.3.1. **Derivata direzionale massima**: Scelgo v come direzione del gradiente. Quindi se $v // \nabla f(x_0)$ ho massima derivata direzionale in quel punto.

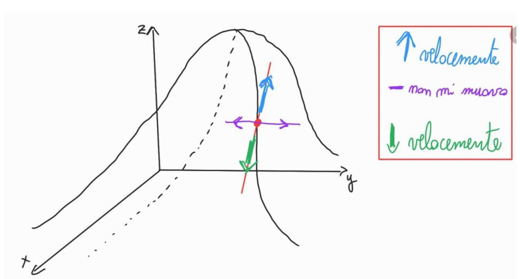
DEFINITION 6.3.2. **Derivata direzionale minima**: Scelgo $\cos\Theta$ più piccolo possibile, cioé $\cos\Theta = -1$, cioé $\Theta = \pi$, cioé $v // -\nabla f(x_0)$.
Quindi v dovrà avere direzione opposta a quella del gradiente.

DEFINITION 6.3.3. **Caso particolare "Nullo"**: Se scelgo $\Theta = \pm\frac{\pi}{2}$, allora $\cos\Theta = 0$. Quindi $D_v f(x_0) = 0$. Cioé se $v \perp \nabla f(x_0)$, la derivata direzionale sarà nulla.

DEFINITION 6.3.4. **Il gradiente geometricamente**:
Il gradiente rappresenta la direzione di massima pendenza della funzione.
Cioé è la direzione in cui muoversi per "*salire*" più in fretta possibile.

EXAMPLE. .

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $z = f(x, y)$



- **Analisi fin'ora**
  - $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \to 0$
    - se $x_0 + h = x \to x_0 \to h = x - x_0$
    - allora $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente a } graph(f) \text{ nel punto } (x_0, f(x_0))} + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$
- **Analisi a più variabili**

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
  - $f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k}_{\nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)} + o(\dots)$
    - $x_0 + k = x \to x_0 \implies h = x - x_0$
    - $y_0 + h = y \to y_0 \implies k = y - y_0$
  - Allora $f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}_{\text{piano tangente al } graph(f) \text{ nel punto } ((x_0,y_0), f(x_0,y_0))} + o(\dots)$
    per $x \to x_0$ e $y \to y_0$.

CHAPTER 7

Calcolo delle derivate e differenziabilità

THEOREM. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in (x_0, y_0), allora:

(1) f è continua in (x_0, y_0).
(2) Esistono le derivate direzionali.
(3) Esistono le derivate parziali. L'esistenza delle derivate direzionali implica quella delle derivate parziali.

QUESTION. **Come calcolare il vettore $\boldsymbol{\alpha}$?**

- Se la funzione è differenziabile $\Longrightarrow$ $\exists$ derivate parziali $\Longrightarrow$ $\alpha = \nabla f\,(x_0, y_0)$
  - Se so fare (1) e (2), allora α è esattamente il gradiente di f nel punto considerato.
  - Cioé quel vettore che ha come componenti le derivate parziali di f in (x_0, y_0).

QUESTION. **Come calcolare le derivate direzionali?**

- Se so fare (1) e (2), allora le derivate direzionali nella direzione v per $v \in \mathbb{R}^2$ sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$$

- Quindi se (1) e (2) valgono:

$$\begin{cases} (3)\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v \\ (4)\ \alpha = \nabla f \end{cases}$$

ATTENZIONE: Tutto ciò vale se f è differenziabile. Perché se f non lo fosse, potrebbe succedere che esistano comunque le derivate direzionali, ma non sarebbero date dalla formula $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$.

QUESTION. **Come calcolo le derivate parziali?**

- Per il calcolo delle derivate parziali usiamo le stesse regole dell'analisi monodimensionale.
- Deriviamo solo rispetto alla variabile interessata, trattando le restanti variabili come fossero costanti.
  - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\,(x, y) = x^2 + y^3$
    * $f_x\,(x, y) = 2x$
    * $f_y\,(x, y) = 3y^2$

QUESTION. **Come dimostro che $\boldsymbol{f\,(x, y)}$ è differenziabile in $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ per $\boldsymbol{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$:**

- Ci sono 2 modi per scoprire se $f\,(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0)
  (1) Usare la definizione [DIFFICILE E SCONSIGLIATO]
  (2) Usare il *teorema del differenziale totale.*

THEOREM. **Differenziale totale**: Se le derivate parziali di f esistono e sono continue, allora f è differenziabile in quel punto.
A livello pratico, se non si incontrano problemi nel calcolare le derivate parziali, allora la funzione è differenziabile.

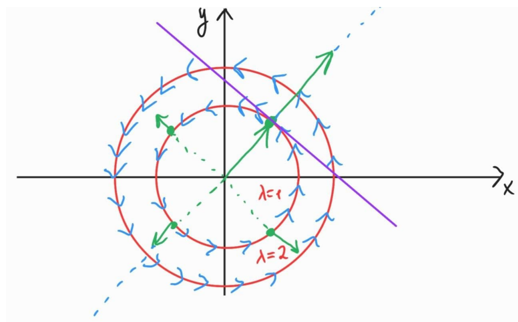
7.1. Interpretazione geometrica del gradiente

7.1.1. Relazione Gradiente e linee di livello.

- Il gradiente ci da la direzione di massima pendenza della funzione.
- Gli insiemi di livello ci danno gli insiemi dove la funzione mantiene sempre lo stesso valore.

Consideriamo $f(x,y) = x^2 + y^2$

- Gli insiemi di livello (che sono linee) definiti da $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ f(x,y) = \lambda \implies x^2 + y^2 = \lambda\right\}$.
  - Sono circonferenze concentriche con centro l'origine, la funzione non varia su questi insiemi.



$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(f_x\left(x^2+y^2\right), f_y\left(x^2+y^2\right)\right) = (2x, 2y) = 2 \cdot (x,y)$$

- In generale il gradiente si rappresenta come *campo di vettori*, cioé in ogni punto del dominio disegno un vettore (il gradiente) che mi sta indicando la direzione per salire con la massima pendenza.

Remark. Il gradiente è sempre $\perp$ agli insiemi di livello e punta verso i λ crescenti.

7.2. Massimi e minimi per funzioni a più variabili

7.2.1. Analisi a una variabile.

Theorem. **Weierstraß**: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, $[a,b]$ chiuso e limitato, allora.

$$\exists \underset{x\in[a,b]}{max} f \text{ e } \underset{x\in[a,b]}{min} f$$

Remark.

- a, b sono inclusi nell'intervallo.
- f continua su tutto $[a,b]$.
- $\underset{x\in[a,b]}{max} f$ e $\underset{x\in[a,b]}{min} f$ sono il massimo e il minimo valore assunto dalla funzione.
- I punti in cui la funzione assume $\underset{x\in[a,b]}{max} f$ e $\underset{x\in[a,b]}{min} f$ si dicono punti di massimo e minimo.

Question. **Dove cerchiamo i punti di massimo e minimo?**

(1) Cerchiamo i punti $x_0 \in (a,b)$ tali che $f'(x_0) = 0$.
   - Si chiamano *punti stazionari interni*, stazionari proprio per l'annullarsi della derivata prima ed interni perché stanno dentro l'intervallo esclusi gli estremi.

(2) Cerchiamo i punti $x_0 \in (a,b)$ tali che $\nexists f'(x_0)$.
   - Si dicono *punti singolari interni*, singolari perché la derivata non esiste in quel punto.

(3) Cerchiamo i punti $x_0 = a$, $x_0 = b$
   - Si dicono punti di *bordo* o di *frontiera*.

Una volta trovati tali punti, si vanno a sostituire in f e si controlla dove f viene massimizzata o minimizzata.

DEFINITION 7.2.1. **Compatto**: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è limitato e chiuso.

- Continuità:
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua
- Chiusura e limitatezza:
  - $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice *chiuso* se E^c è *aperto*
    - **Theorem**. E è chiuso $\iff$ E contiene tutto ∂E.
      Cioé E si dice chiuso se contiene tutto il suo bordo.
  - $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se $\exists$ $R > 0$ tale che $E \subseteq B_R(0)$.

THEOREM. **Weierstraß a più dimensioni**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, allora

$$\exists \underset{x \in A}{min} f(x), \underset{x \in A}{max} f(x)$$

REMARK. Non appena manca una delle 2 ipotesi, allora massimo e minimo possono comunque esistere, ma non necessariamente. Non abbiamo più il teorema a guidarci.

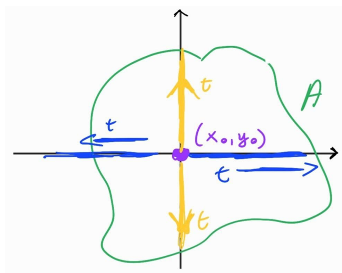
- I punti da cercare sono i medesimi dell'analisi monodimensionale, ma un po' diversi:
  1. Punti *stazionari* interni:
     - Sono i punti interni all'insieme in cui $\nabla f = 0$ cioé si annulla.
  2. Punti *singolari* interni:
     - Sono i punti interni all'insieme in cui f non è differenziabile, da qui *"singolari"*.
  3. Punti di bordo:
     - I punti di bordo dell'insieme con l'attenzione a ricordarsi che nei casi *"più dimensioni"* non sono necessariamente 2 ma possono essere infiniti.

THEOREM. Sia $f : A \in \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se x_0 è punto di massimo o minimo interno ad A e se $\exists$ le derivate parziali di f in x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$

PROOF. □

- Ipotesi: Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \in \mathbb{R}^2$.
  - Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo appartenga all'insieme dei punt interni di A, cioé che $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$.
  - Supponiamo che (x_0, y_0) sia punto di minimo (per semplicità).
  - Supponiamo che f sia differenziabile in (x_0, y_0).
  - f è tale che $\exists\ f_x$ e f_y in (x_0, y_0).
- Tesi: $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$
  - Allora $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- Consideriamo la funzione $g(t) = f(x_0 + t, y_0)$, praticamente g restringe f alla retta costante $y = y_0$ e si muove solo lungo quella retta facendo scorrere le x. t è il parametro che si muove lungo la retta. Poiché (x_0, y_0) è il punto di minimo per f, allora $g(t)$ ha minimo per $t = 0 \iff f(x_0, y_0)$.
  - Essendo g una funzione ad una variabile, per il teorema dell'analisi vista fin'ora. Allora $g'(0) = 0$, cioé $g'(0) = f_x(x_0, y_0) = 0$
- Analogamente possiamo considerare la funzione $h(t) = (x_0, y_0 + t)$, praticamente h restringe f alla retta costante $y = x_0$ e si muove solo lungo tale retta facendo scorrere le y.
  - Essendo h una funzione ad una variabile, per il teorema dell'analisi vista fin'ora. Allora $h'(0) = 0$, cioé $h'(0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Concludo che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Dimostrazione analoga per (x_0, y_0) come massimo.



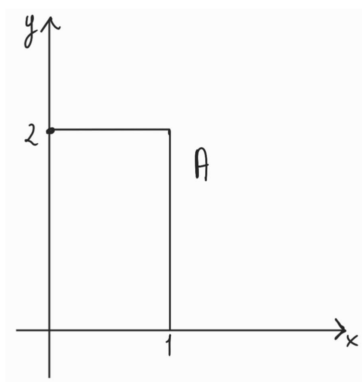
CHAPTER 8

Strategie per la ricerca di massimi e minimi

8.1. Metodo intuitivo

EXAMPLE. $f(x,y) = 2x + 3y,\ A = \underbrace{[0,1]}_{x>0} \times \underbrace{[0,2]}_{y\geq 0} \subset \mathbb{R}^2$ $\left\{\text{Rettangolo di } \mathbb{R}^2\right\}$

- f continua su A compatto $\overset{\mathbb{W}}{\Longrightarrow}$ $\exists \underset{x\in A}{max} f \wedge \underset{x\in A}{min} f$
- Punto di massimo: punto in cui massimizzo sia x che y:
  - $(1,2) \implies \underset{x\in A}{max} f(x) = f(1,2) = 8$
- Punto di minimo: punto in cui minimizzo sia x che y:
  - $(0,0) \implies \underset{x\in A}{min} f(x) = f(0,0) = 0$



8.2. Metodo classico

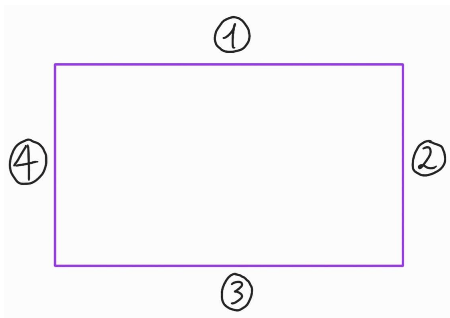
(1) Cercare nei punti stazionari interni ($\nabla f = 0$)
(2) Cercare nei punti singolari interni (Non differenziabili)
(3) Cercare nei punti di bordo

EXAMPLE. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = [2, 5] \times [-1, 1]$

(1) Punti stazionari interni (ad A):
  - $\nabla f = (2x, 2y)$
    - $\nabla f = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$
      - Ma $(0, 0) \notin A$
  - Quindi $\nexists$ punti stazionari interni

(2) Punti singolari interni:
  - $f(x, y) = x^2 + y^2$ è differenziabile su tutto A
    - Quindi Punti singolari interni $= \emptyset$

(3) Punti di bordo:

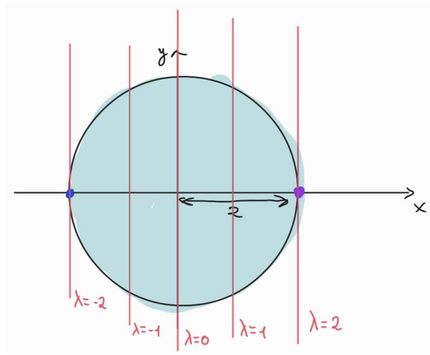


- Parametrizzazione:
  - $(1) = \{(t, 1) : t \in [2, 5]\} \implies g_1(t) = f(t, 1) = t^2 + 1$
  - $(2) = \{(5, t) : t \in [-1, 1]\} \implies g_2(t) = f(5, t) = t^2 + 25$
  - $(3) = \{(t, -1) : t \in [2, 5]\} \implies g_3(t) = f(t, -1) = t^2 + 1$
  - $(4) = \{(2, t) : t \in [-1, 2]\} \implies g_4(t) = f(2, t) = t^2 + 4$
- Studio le 4 funzioni di sopra ed ho per ciascuna di esse massimo e minimo.
- Trovo poi il più piccolo tra tutti (minimo) e il più grande tra tutti (massimo).
  - (1) : min per $t = 2$ e max per $t = 5$
  - (2) : min per $t = 0$ e max per $t = \pm 1$
  - (3) : min per $t = 2$ e max per $t = 5$
  - (4) : min per $t = 0$ e max per $t = \pm 1$
- Quindi $(2, 0) = min$ e $(5, -1) \wedge (5, 1) = max$

8.3. Metodo degli insiemi di livello

Cerco il più grande/più piccolo λ per i quali l'insieme di livello λ interseca A.

EXAMPLE. $f(x,y) = x$
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c\ x^2 + y^2 \leq 4\right\} = \{\text{Cerchio con centri in } (0,0) \text{e raggio} = 2\}$



- Le linee di livello di $f(x,y)$ sono:
  - $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c\ f(x,y) = \lambda\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c\ x = \lambda\right\}$
    - Linee di livello parallele all'asse y
    - λ cresce da sinistra $\rightarrow$ destra
  - $max f(x,y)$ in A è il più grande λ tale che :
    - $A \cap \{(x,y)\ \ t.c\ f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset \implies \lambda = 2$
    - $\underset{x\in A}{max} f(x,y) = 2$
  - $min f(x,y)$ in A è il più piccolo λ tale che:
    - $A \cap \{(x,y)\ \ t.c\ f(x,y) = \lambda\} \neq \emptyset \implies \lambda = -2$
    - $\underset{x\in A}{min} f(x,y) = -2$

CHAPTER 9

Studiare il bordo

9.1. Parametrizzare i bordi

(1) Segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

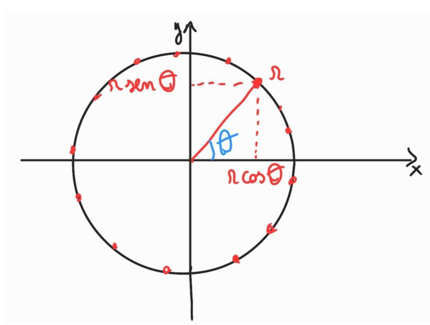
- $(x, y) = (a_1, b_1) + t\left((a_2 - a_1), (b_2 - b_1)\right) \in \mathbb{R}^2$ con $t \in [0, 1]$

(2) Tratto del grafico $y = \varphi(x)$ con $x \in [a, b]$

- $(x, y) = \left(\underbrace{t}_{\text{variabile indipendente}}, \varphi(t)\right)$ con $t \in [a, b]$

(3) Circonferenza con centro in $(0, 0)$ e raggio r

- $(x, y) = \left((r \cdot \cos\Theta), (r \cdot \sin\Theta)\right)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$



(4) Circonferenza con centro (x_0, y_0) e raggio r

- $(x, y) = \left((x_0 + r \cdot \cos\Theta), (y_0 + r \cdot \sin\Theta)\right)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$

(5) Ellisse di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ con $a, b > 0$

- $(x, y) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos\Theta\right), \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sin\Theta\right)\right)$ con $\Theta \in [0, 2\pi]$

9.2. Moltiplicatori di Lagrange

DEFINITION 9.2.1. **Luogo di zeri**: Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, allora l'insieme $V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ \Phi(x, y) = 0\right\}$ si dice *luogo di zeri* (linea di livello $\lambda = 0$) della funzione Φ.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange serve per trovare possibili punti di massimo o minimo all'interno di una funzione f su un insieme A, quando il bordo di A è il luogo di *zeri della funzione.*

EXAMPLE. $f(x, y)$ su $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ x^2 + y^2 \leq 3\right\}$

- Il bordo di A è la circonferenza data da $x^2 + y^2 = 3$
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 - 3 = 0$
    - Se definisco $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \implies$ Il bordo di Aè il luogo di zeri di Φ
    - Posso applicare i moltiplicatori di Lagrange

DEFINITION 9.2.2. **Metodo dei moltiplicatori di Lagrange**:
Serve ad ricercare tra i punti di bordo i punti di massimo e di minimo.

- Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$, sia V luogo di zeri di una $\Phi(x, y)$, allora i candidati ad essere punti di massimo e di minimo di Φ in V si cercano tra le seguenti due categorie:
  - $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ \Phi(x, y) = 0\right\}$

(1) Punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$(S_1) \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \implies (x, y) \in V \\ \nabla\Phi(x, y) = 0 \end{cases} \iff (S_1) \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ \Phi_x(x, y) = 0 \\ \Phi_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

REMARK. Attenzione, il sistema ha 3 quazioni per 2 incognite.
Ciò detto, ho più imposizioni rispetto ai gradi di libertà, quindi non sempre ha soluzioni.

(2) Punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$(S_2) \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla\Phi(x, y) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \iff (S_2) \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ f_x = \lambda \cdot \Phi_x \\ f_y = \lambda \cdot \Phi_y \end{cases}$$

Cerco λ (detto *"moltiplicatore di Lagrange"*) e (x, y) tali che (S_2) vale.

REMARK. Il sistema ha 3 equazioni per 3 incognite, quindi solitamente ha (S_2) ha soluzioni.
Trovo λ e (x, y) tali che (S_2) è soffisfatto. Ci interessa il punto di coordinate (x, y), candidato per essere punto di massimo o minimo.

Example. $f(x,y) = x - 2y$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c \ x^2 + y^2 \leq 3\right\}$

- Moltiplicatori di Lagrange:

$$(1)\ (x,y) \text{ tali che } (S_1) \begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ \Phi_x(x,y) = 0 \\ \Phi_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff (S_1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (S_1) \begin{cases} -3 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Non esistono soluzioni per il sistema (S_1), proviamo (S_2).

$$(1)\ (x,y) \text{ tali che } (S_2) \begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ f_x = \lambda \cdot \Phi_x \\ f_y = \lambda \cdot \Phi_y \end{cases} \iff (S_2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 1 = \lambda \cdot (2x) \\ -2 = \lambda \cdot (2y) \end{cases} \iff (S_2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \end{cases} \iff \left((S_2)^{\heartsuit} \begin{cases} \lambda = +\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases} \wedge (S_2)^{\clubsuit} \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = +\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{cases} \right)$$

Abbiamo quindi 2 possibili moltiplicatori di Lagrange, $(S_2)^{\heartsuit}$ e $(S_2)^{\clubsuit}$.

- I candidati punti di massimo/minimo di f sul bordo:
  - $P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$
    - $f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15} \Longleftarrow max$
    - $f(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{15} \Longleftarrow min$

9.3. Rapporto geometrico tra linee di livello e gradiente

- Il gradiente è perpendicolare alle linee di livello.
- ∇f e $\nabla\Phi$ saranno paralleli. Ed ecco perché nei punti di massimo e minimo risolvo (S_2), quindi cerco un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = \lambda \cdot \nabla f$

Geometricamente:

- Sia V il bordo dell'insieme A tale che $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$.
- Supponiamo che V sia il *luogo di zeri* di $\Phi(x,y)$ e sia *linea di livello* per Φ (con $\lambda = 0$)
  1. Nei punti di massimo e minimo le linee di livello di f e la linea di livello $\lambda = 0$ di Φ sono tangenti. (In soldoni, le linee di livello sono tangenti a V nei punti di massimo e minimo)
  2. ∇f è $\perp$ alle linee di livello di f, $\nabla\Phi$ è $\perp$ alle linee di livello di Φ.
     - Ciò implica che i due gradienti debbano essere paralleli tra loro, affinché siano in un punto di minimo o massimo.
  3. Quindi ∇f deve essere *multiplo* del $\nabla\Phi$.
     - Quest'ultima è una condizione necessaria ma non sufficiente: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla\Phi$
- Geometricamente, risolvere (S_2) con Lagrange equivale a cercare quei punti di V in cui i due gradienti sono uno *multiplo* dell'altro e le linee di livello di f sono tangenti all'insieme di V stesso.

Remark. Quando (S_1) ha soluzione, vuol dire che V è luogo di zeri di Φ e V non è regolare.
Ad esempio ha punti di cuspide (non so definirne la condizione di tangenza).

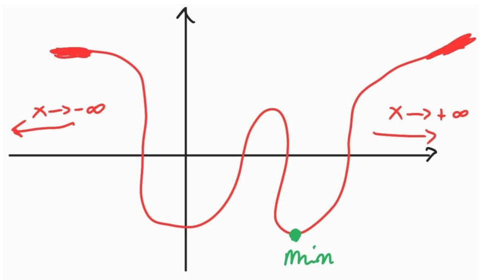
CHAPTER 10

Weierstraß Generalizzato

10.1. Analisi vista fin'ora

DEFINITION 10.1.1. **Weierstraß generalizzato**: Se f è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *continua* e supponiamo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, allora $\exists \underset{x\in\mathbb{R}}{min} f(x)$.

REMARK. f non è definita su un compatto.



10.2. Analisi a n-dimensioni

QUESTION. *Cosa vuol dire per $\mathbb{R}^n$ andare a $+\infty$?*

- Vuol dire semplicemente allontanarsi sempre di più dall'origine, cioé che la $\|x\|$ va all'∞.

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \iff \lim_{x^2+y^2\to\infty} \iff \lim_{\|x\|\to\infty} \iff \lim_{\rho\to\infty}$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty \iff \forall\ M\in\mathbb{R}\ \exists\ R>0\ t.c\ f(x,y)\geq M\ \ \forall (x,y)\in (B_R(0,0))^c$$

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\ M\in\mathbb{R}\ \exists\ R>0\ t.c\ f(x,y)\geq M\ \ \forall (x,y)\in \underbrace{(B_R(0))^c}_{\text{Intorno di } +\infty}$$

THEOREM. **Weierstraß Generalizzato a più dimensioni**: Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua* (definita su tutto $\mathbb{R}^n$, quindi non compatto perché *non limitato*), con un $x \in \mathbb{R}^n$, supponiamo che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty \text{ allora } \exists \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

PROOF. Dalla definizione di limite:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \implies \forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, R > 0\ t.c\ f(x) \geq M\ \forall\, x \in (B_R(0))^c$$

□

- Allora scelgo $M = f(0) + 1$ (poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}^n$)
  - Sappiamo che $\exists\, R > 0\ t.c\ f(x) \geq f(0) + 1\ \forall\, x \in (B_R(0))^c$
  - Considero $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}$, cioé $f : \{x \in \mathbb{R}^n\ t.c\ \|x\| \leq \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$
    * Notazione: $\overline{B} = B$ è chiuso
    * $\overline{B_R(0)}$ è compatto, allora per Weierstraß classico so che $\exists \min_{x\in B_r(0)} f(x) = m$
- Vogliamo dimostrare che m è minimo su tutto $\mathbb{R}^n$, non solo su $\overline{B_R(0)}$.
  (1) Se $\|x\| \leq \mathbb{R}$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m.
  (2) Se $\|x\| \geq \mathbb{R}$, allora $f(x) \geq M$,con $M = f(0) + 1$, per la scelta di R, $M \geq f(0)$ e $M \geq m$ e quindi $f(x) \geq m$.

Quindi ho dimostrato che $f(x) \geq m\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e per il teorema di Weierstraß classico:

$$\exists\, x_0 \in \overline{B_r(0)}\ t.c\ f(x) = m$$

Ho quindi trovato il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$.

THEOREM. **Weierstraß Generalizzato (per il max.)**:
Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è *continua* e $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty$, allora $\exists \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

CHAPTER 11

Studi locali nell'intorno di punti stazionari

11.1. Analisi vista fin'ora

Per studiare localmente una funzione all'interno di un punto stazionario, cioé $f'(x_0) = 0$, con x_0 punto stazionario, si studiava il segno di $f''(x)$. Se nel punto x_0 la $f''(x_0) > 0 \implies$ *min. loc.*

11.2. Analisi a più variabili

11.2.1. Derivate successive per funzioni a più variabili.

EXAMPLE. $f(x,y) = x^2 + y^3 + x^4y^5$
$f_x = 2x + 0 + 4x^3y^5 + 0 = \big(g(x,y) = 4x^3y^5 + 2x\big)$
$f_y = 0 + 3y^2 + 0 + 5x^4y^4 = \big(h(x,y) = 5x^4y^4 + 3y^2\big)$

Abbiamo 4 possibilità:

- $g(x,y)$:
  - $\dfrac{\partial g}{\partial x} \implies \dfrac{\partial\partial f}{\partial x\partial x} \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$
  - $\dfrac{\partial g}{\partial y} \implies \dfrac{\partial\partial f}{\partial y\partial x} \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy}$
- $h(x,y)$:
  - $\dfrac{\partial h}{\partial x} \implies \dfrac{\partial\partial f}{\partial x\partial y} \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx}$
  - $\dfrac{\partial h}{\partial x} \implies \dfrac{\partial\partial f}{\partial y\partial y} \implies \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

REMARK. In generale, per una funzione di n variabili ci sono n derivate parziali prime ed n^2 derivate parziali seconde. Il metodo di calcolo rimane uguale.

THEOREM. **Inversione dell'ordine di derivazione**: Se f_{xy} e f_{yx} *esistono in un intorno* del punto (x_0, y_0) allora coincidono. Cioé $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.
In soldoni non conta l'ordine con cui calcolo le derivate parziali successive.

11.2.2. Usare le derivate successive per studiare la funzione nell'intorno dei punti stazionari.

- Derivate parziali prime:
  - $\nabla f = (f_x, f_y)$ vettore gradiente
    - Nei punti stazionari $\nabla f\,(x_0, y_0) = 0$
- Derivate seconde:
  - Le organizzo in una matrice, la matrice Hessiana.

DEFINITION 11.2.1. **Matrice Hessiana**: Si dice matrice Hessiana la matrice formata dalle derivate seconde, si denota con Hf.

EXAMPLE. .

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
  - $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Le righe sono composte dalle derivate seconde di f_x e f_y.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  - $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$

REMARK. Se le derivate parziali seconde esistono e sono continue, allora Hf è *simmetrica.*

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \text{ con } f_{xy} = f_{yx} \Longrightarrow Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

REMARK. Tutte le condizioni che nell'analisi vista fin'ora coinvolgevano il segno della derivata seconda, nell'analisi a più variabili coinvolgono la segnatura della matrice Hessiana.

11.3. Studio locale nell'intorno di punti stazionari

Trovare massimi e minimi locali. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\nabla f\,(x_0, y_0) = 0 \text{ (cioé un punto stazionario)}$$

- Se $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ è *definita positiva* $\implies$ (x_0, y_0) è punto di *minimo locale.*

Definition 11.3.1. **Definita positiva**: Hf è definita positiva $\iff$ tutti i suoi autovalori sono > 0

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ Hf \in M_{(2\times 2)} \implies 2 \text{ autovalori } (+,+)$$

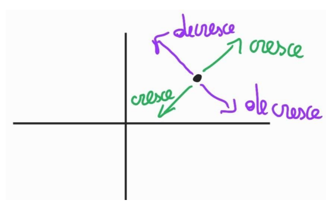
- Se $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ è *definita negativa* $\implies$ (x_0, y_0) è punto di *massimo locale.*

Definition 11.3.2. **Definita negativa**: Come sopra ma con autovalori < 0, cioé $(-,-)$.

- Se $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ è *indefinita* $\implies$ (x_0, y_0) è punto di *sella.*

Definition 11.3.3. **Indefinita**: Né *definita positiva* né *definita negativa.*
Se $\exists$ due autovalori discordi, $(+,-)$ oppure $(-,+)$.

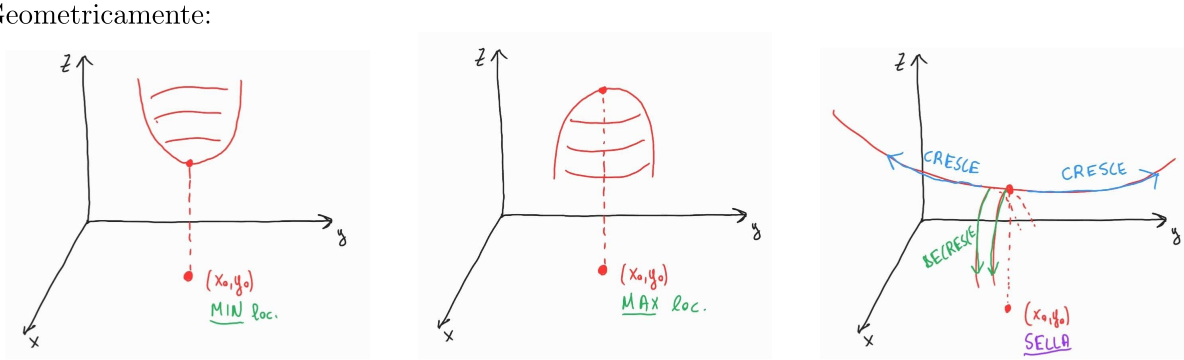
Definition 11.3.4. **Punto di sella**: Esistono rispetto ad (x_0, y_0) delle direzione lungo le quali la funzione cresce e delle altre direzioni lungo le quali decresce.
Non è né massimo né minimo locale.



- Se Hf è *degenere* $\implies$ Non posso *concludere niente.*

Definition 11.3.5. **Degenere**: $\det(Hf) = 0$. Cioé zero è tra gli autovalori di Hf

Geometricamente:



Remark. La matrice Hessiana fornisce informazioni locali, cioé ci permette di concludere l'esistenza di massimi e minimi vicino al punto (x_0, y_0), ma non ci da informazioni globali.

- Analisi vista fin'ora
  - Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed x_0 è punto di *minimo locale*, allora:
    - $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$ (Supponendo l'esistenza delle derivate)
  - Se x_0 è punto di *massimo locale*, allora:
    - $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$ (Supponendo l'esistenza delle derivate)
- Analisi a più variabili
  - Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di *minimo locale*, allora:
    - $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \geq 0$ (Condizione necessaria ma non sufficiente)
    - Quando $Hf \geq 0$ sappiamo che la Matrice è semi-definita positiva, cioé che i suoi autovalori sono sicuramente non negativi.
  - Come sopra per il punto di *massimo locale*, ma:
    - $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ e $Hf(x_0, y_0) \leq 0$ (Condizione necessaria ma non sufficiente)
    - Quando $Hf \leq 0$ sappiamo che la Matrice è semi-definita positiva, cioé che i suoi autovalori sono sicuramente non positivi.

Example. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^4$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

- $\nabla f(x, y) = \left(2x, 4y^3\right)$
  - $\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies (0, 0)$ punto stazionario
- $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \implies Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \impliedby$ Matrice diagonale
  - Autovalori di $Hf(0, 0)$: $\lambda_1 = 2 > 0$ e $\lambda_2 = 0$ nullo.
    - Allora $Hf(0, 0) \geq 0$ è semidefinita positiva, $(0, 0)$ non è il massimo locale.
    - Se $(0, 0)$ fosse massimo locale, allora Hf sarebbe ≤ 0 in quel punto.
- $f(x, y) = x^2 + y^4$ è sempre ≥ 0.
  - Si vede ad occhio, $f(0, 0) = 0$, che $(0, 0)$ è punto di minimo globale

11.4. Superfici

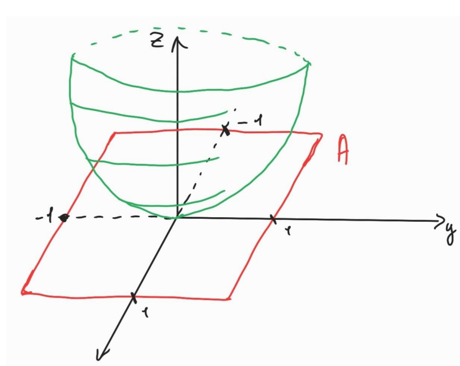
Tratteremo di superfici in $\mathbb{R}^3$, abbiamo 3 diversi approcci per descrivere matematicamente tali superfici:

(1) Cartesiano
(2) Implicito
(3) Parametrico

Definition 11.4.1. **Superficie cartesiana**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, sia $f : A \to \mathbb{R}$, la superficie è *graph*(f).

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ z = f(x, y) \ \ con \ \ (x, y) \in A\right\}$$

Example. $A = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 =$ Piano xy
$f(x, y) = x^2 + y^2 =$ Paraboloide
$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ z = x^2 + y^2 \ con \ (x, y) \in A\right\} =$ Parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A

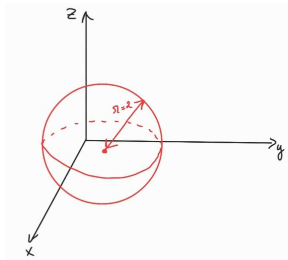


Definition 11.4.2. **Superficie implicita**: La superficie S la interpreto come *luogo di zeri* di una funzione di 3 variabili $\Phi(x,y,z)$.

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ \Phi(x,y,z) = 0\right\}$$

Si dice anche che $\Phi(x,y,z) = 0$ è l'equazione della superficie. Si parla di superficie implicita perché non viene ricavata una variabile rispetto alle altre.

Example. $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\right\}$ = Sfera di raggio 2 in $\mathbb{R}^3$



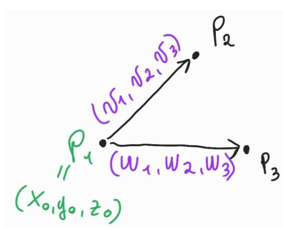
Definition 11.4.3. **Superficie parametriche**: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con A preso come insieme dove variano i parametri (sono 2), e siano 3 funzioni $\underbrace{x(u,v), y(u,v), z(u,v)}_{x,y,z:A\to\mathbb{R}}$ con $u,v \in A$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \text{ al variare di } (u,v) \in A\right\}$$

Example. Un piano di $\mathbb{R}^3$ ha equazione parametrica del tipo:

$$\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\text{Punto per cui passa il piano}} \qquad + \underbrace{t(v_1,v_2,v_3) + s(w_1,w_2,w_3)}_{\text{Vettori che generano il piano}}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & tv_1 & sw_1 \\ y_0 & tv_2 & sw_2 \\ z_0 & tv_3 & sw_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} \text{ con } t \text{ e } s \text{ parametri } (t,s) \in \mathbb{R}^2$$



Legame tra le diverse funzioni. Tutte le superfici cartesiane sono in realtà superfici parametriche.

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ t.c \ z = f(x,y) \ \ con \ \ (x,y) \in A\right\} : \text{Superficie Cartesiana}$$

$$S = \{(u,v,f(u,v)) \ \ con \ \ (u,v) \in A\} : \text{Superficie Parametrica}$$