Appendice A

Numeri complessi

L'estensione del campo $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali al campo $\boldsymbol{C}$ dei numeri complessi si rese necessaria nel 16^o secolo, quando furono scoperte le formule risolutive delle equazioni di 3^o e 4^o grado. Naturalmente fin dall'antichità era noto che certe equazioni di 2^o grado non hanno soluzioni reali, ma questo era in accordo con l'interpretazione geometrica che se ne dava. Se infatti si considera il calcolo delle soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

come quello della ricerca dei punti di intersezione della parabola

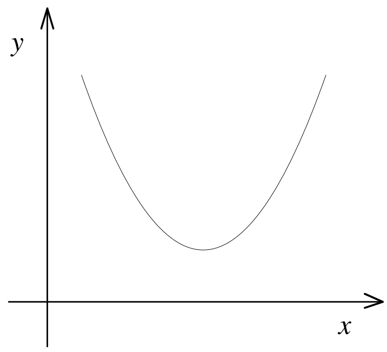
$$y = ax^2 + bx + c$$

con l'asse delle x

$$y = 0,$$

è ragionevole pensare che l'equazione non abbia soluzioni quando la parabola non interseca l'asse delle x, cioè quando

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$$



In questo caso perciò non si avverte alcuna necessità di ampliare il campo in cui si opera per ottenere le soluzioni di una equazione di 2^o grado anche quando il discriminante Δ è negativo. Sembra anzi che una tale estensione rappresenti solo un'elegante costruzione dei matematici, di scarsa utilità pratica.

La questione però cambiò completamete aspetto con la formula risolutiva dell'equazione di 3^o grado: in questo caso infatti è necessario passare attraverso il calcolo di radici quadrate di numeri negativi anche per trovare le soluzioni reali dell'equazione. Ci vollero più di 200 anni perché i matematici completassero l'estensione del campo $\boldsymbol{R}$ al campo $\boldsymbol{C}$, ne studiassero tutte le conseguenze e finalmente ne dessero la rappresentazione grafica, che semplifica di molto la comprensione.

Al giorno d'oggi i numeri complessi sono indispensabili non solo in matematica, ma anche nella applicazioni pratiche, come ad esempio per rappresentare le correnti alternate.

A.1 Definizione di numero complesso

Per definire i numeri complessi dobbiamo innanzi tutto introdurre il simbolo $\boldsymbol{i}$, detto *unità immaginaria* e definito dalla relazione

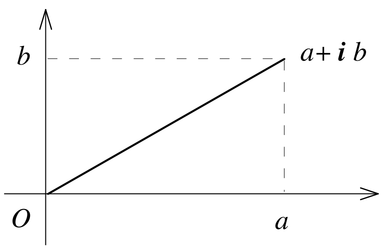
$$\boldsymbol{i}^2 = -1.$$

È chiaro che $\boldsymbol{i}$ non rappresenta alcun numero reale. Si definisce ora *numero complesso* un numero della forma

$$a + \boldsymbol{i}\, b, \quad \text{dove} \quad a, b \in \boldsymbol{R}.$$

a e b vengono detti rispettivamente *parte reale* e *coefficiente dell'immaginario* del numero complesso.

L'interpretazione grafica che Gauss diede dei numeri complessi ci renderà più immediate tutte le definizioni che daremo successivamente. Un numero complesso viene rappresentato in un piano di coordinate ortogonali con un punto, la cui ascissa è uguale alla parte reale e la cui ordinata è uguale al coefficiente dell'immaginario.



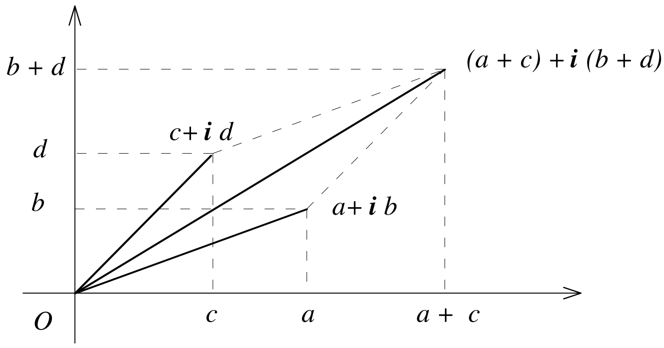
Se identifichiamo un numero complesso con coefficiente dell'immaginario nullo $a + \boldsymbol{i}\ 0$ con il numero reale a, si può dire che l'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri complessi $\boldsymbol{C}$.

A.2 Operazioni fra numeri complessi

Si definiscono su $\boldsymbol{C}$ delle relazioni di uguaglianza e delle operazioni aritmetiche che verificano le stesse proprietà che valgono su $\boldsymbol{R}$. Queste relazioni e definizioni risultano naturali se si applica il calcolo simbolico alle quantità a, b, $\boldsymbol{i}$, sostituendo, dove compare, $\boldsymbol{i}^2$ con -1

$$\begin{aligned}
&a + \boldsymbol{i}\, b = c + \boldsymbol{i}\, d \quad \text{se e solo se} \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d,\\
&(a + \boldsymbol{i}\, b) + (c + \boldsymbol{i}\, d) = (a + c) + \boldsymbol{i}\,(b + d),\\
&(a + \boldsymbol{i}\, b) \cdot (c + \boldsymbol{i}\, d) = (ac - bd) + \boldsymbol{i}\,(bc + ad).
\end{aligned}$$

Graficamente l'addizione di due numeri complessi corrisponde alla cosiddetta *regola del parallelogramma.*



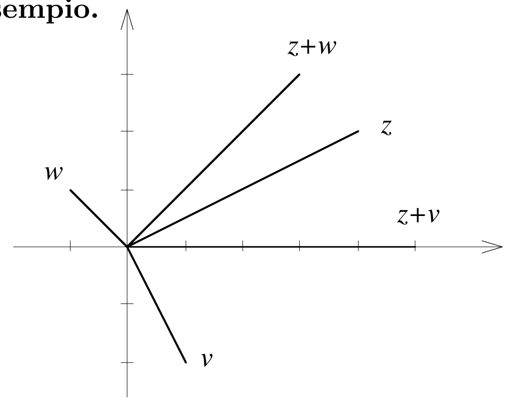
Anche le operazioni inverse di sottrazione e divisione non presentano difficoltà. Si ha infatti

$$(a + \boldsymbol{i}\ b) - (c + \boldsymbol{i}\ d) = (a - c) + \boldsymbol{i}\ (b - d),$$

e se $c^2 + d^2 \neq 0$

$$\frac{a + \boldsymbol{i}\ b}{c + \boldsymbol{i}\ d} = \frac{(a + \boldsymbol{i}\ b) \cdot (c - \boldsymbol{i}\ d)}{(c + \boldsymbol{i}\ d) \cdot (c - \boldsymbol{i}\ d)} = \frac{(ac + bd) + \boldsymbol{i}\ (bc - ad)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \boldsymbol{i}\ \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Esempio.



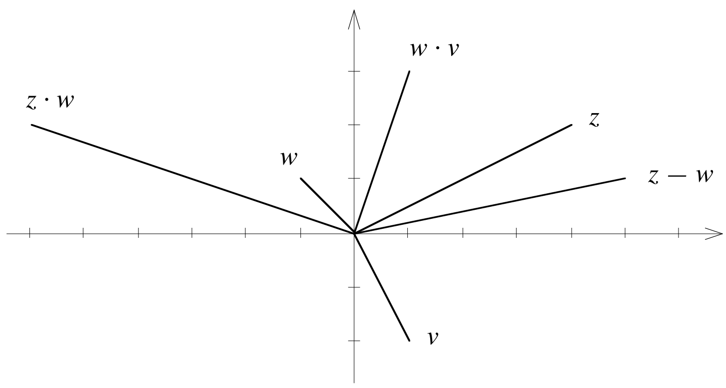
Consideriamo i numeri complessi

$$z = 4 + \boldsymbol{i}\ 2,$$
$$w = -1 + \boldsymbol{i},$$
$$v = 1 - \boldsymbol{i}\ 2.$$

Risulta

$$z + w = 3 + \boldsymbol{i}\ 3,$$
$$z + v = 5 + \boldsymbol{i}\ 0 = 5,$$

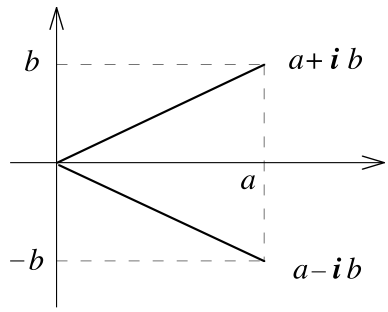
$$z - w = 5 + \boldsymbol{i},$$
$$z \cdot w = (4 + \boldsymbol{i}\ 2) \cdot (-1 + \boldsymbol{i}) = -6 + \boldsymbol{i}\ 2,$$
$$w \cdot v = (-1 + \boldsymbol{i}) \cdot (1 - \boldsymbol{i}\ 2) = 1 + \boldsymbol{i}\ 3.$$



Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ è un numero complesso, il numero

$$\overline{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$$

viene detto il *coniugato* di z. Graficamente $\overline{z}$ è rappresentato da un punto ribaltato attorno all'asse reale rispetto al punto che rappresenta z.



La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono due numeri reali. Risulta infatti

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (a + \boldsymbol{i}\, b) + (a - \boldsymbol{i}\, b) = 2a, \\ z \cdot \overline{z} &= (a + \boldsymbol{i}\, b) \cdot (a - \boldsymbol{i}\, b) = a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

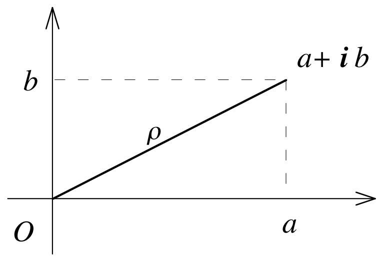
Per esempio, se $z = 2 + \boldsymbol{i}\, 3$, è

$$\overline{z} = 2 - \boldsymbol{i}\, 3, \quad z + \overline{z} = 4, \quad z \cdot \overline{z} = 13.$$

Il numero reale

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

viene detto *modulo* di z e graficamente corrisponde alla distanza del punto che rappresenta z dall'origine O del piano complesso.



Se $b = 0$ e il numero complesso $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ si identifica con il numero reale a, il modulo di z coincide con il valore assoluto di a; per questo motivo si indica di solito con $|z|$ il modulo di z anche quando questo non è reale. Dalla (A.1) risulta che

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

A.3 Equazione di 2^o grado

Verifichiamo adesso che ogni equazione di 2^o grado a coefficienti reali

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{A.2}$$

ha soluzione in $\boldsymbol{C}$. Dividendo per a e portando l'ultimo termine al secondo membro si ha

$$x^2 + \frac{b}{a}\, x = -\, \frac{c}{a}\,,$$

da cui

$$x^2 + \frac{b}{a}\, x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\,,$$

e quindi

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Ponendo $y = x + \dfrac{b}{2a}$, si ottiene l'equazione

$$y^2 = \frac{\Delta}{4a^2}\,, \quad \Delta = b^2 - 4ac,$$

che, se $\Delta \geq 0$, ha, come sappiamo, le due soluzioni reali

$$y_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \quad y_2 = -\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

Se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali, ma può essere scritta nella forma

$$y^2 = (-1)\,\frac{-\Delta}{4a^2}\,, \tag{A.3}$$

e i due numeri complessi

$$y_1 = \boldsymbol{i}\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,, \quad y_2 = -\boldsymbol{i}\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,,$$

sono tali che i loro quadrati soddisfano la (A.3). Le soluzioni di (A.2) risultano quindi

$$x_{1,2} = \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,, & \text{se } \Delta \geq 0, \\[2ex] -\dfrac{b}{2a} \pm \boldsymbol{i}\,\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,, & \text{se } \Delta < 0. \end{cases}$$

Per esempio, l'equazione

$$2x^2 - 2x + 5 = 0$$

ha le due soluzioni complesse $x_1 = \dfrac{1}{2} + \boldsymbol{i}\,\dfrac{3}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1}{2} - \boldsymbol{i}\,\dfrac{3}{2}$, fra loro coniugate.

A.4 Rappresentazione trigonometrica

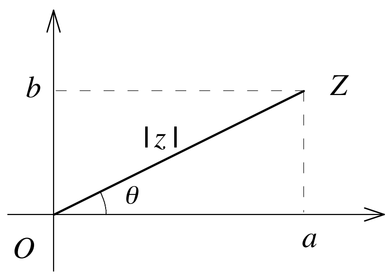
Dei numeri complessi si può dare anche un'altra rappresentazione, detta *trigonometrica*. Dalla figura, in cui il numero complesso $z = a + \boldsymbol{i}\ b$ è rappresentato con il punto Z e l'angolo compreso fra il semiasse reale positivo e il segmento OZ è chiamato θ, risulta che

$$a = |z|\,\cos\theta, \quad b = |z|\,\sin\theta,$$

e quindi

$$z = |z|\,(\cos\theta + \boldsymbol{i}\ \sin\theta).$$

L'angolo θ viene detto *argomento* di z.



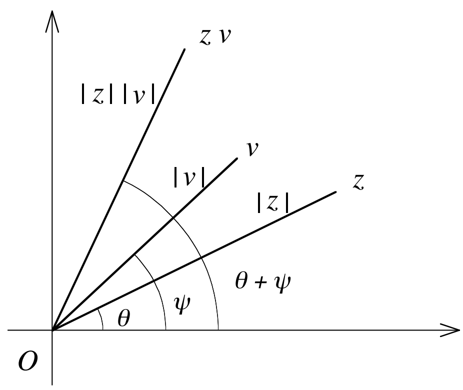
La rappresentazione trigonometrica si usa specialmente quando si vogliono eseguire moltiplicazioni o elevamenti a potenza di numeri complessi. Posto infatti

$$z = |z|\,(\cos\theta + \boldsymbol{i}\,\sin\theta) \quad \text{e} \quad v = |v|\,(\cos\psi + \boldsymbol{i}\,\sin\psi),$$

risulta

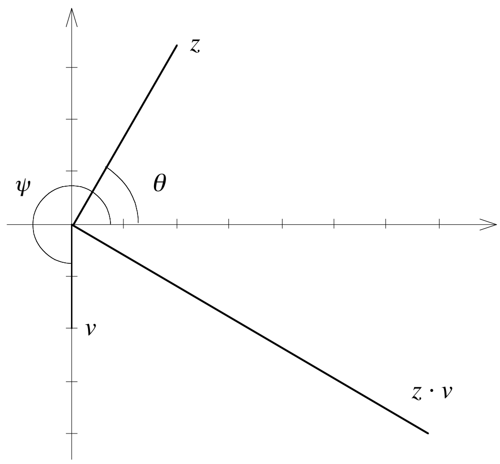
$$\begin{aligned} z \cdot v &= |z|\,|v|\Big[\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi + \boldsymbol{i}\,(\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi)\Big] \\ &= |z|\,|v|\Big[\cos(\theta+\psi) + \boldsymbol{i}\,\sin(\theta+\psi)\Big]. \end{aligned}$$

Perciò il prodotto di due numeri complessi ha il modulo uguale al prodotto dei moduli dei fattori e argomento uguale alla somma degli argomenti dei fattori.



Esempio. Se $z = 2 + \boldsymbol{i}\,2\sqrt{3}$ e $v = -2\boldsymbol{i}$, si ha $|z| = 4$, $\theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$, $|v| = 2$, $\psi = \arg(v) = \dfrac{3}{2}\pi$ e risulta

$$\begin{aligned} z \cdot v &= 8\Big(\cos\frac{11}{6}\pi + \boldsymbol{i}\,\sin\frac{11}{6}\pi\Big) \\ &= 8\Big(\cos\frac{\pi}{6} - \boldsymbol{i}\,\sin\frac{\pi}{6}\Big). \end{aligned}$$



A.5 Formula di de Moivre

Applicando ripetutamente la formula del prodotto di numeri complessi, si ottiene la seguente formula di *de Moivre* per la potenza n-esima, con n intero positivo

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\,\sin n\theta), \tag{A.4}$$

cioè la potenza n-esima di z ha modulo uguale alla potenza n-esima del modulo di z e argomento multiplo dell'argomento di z. Per esempio, se

$$z = 2 + \boldsymbol{i}\, 2\sqrt{3} = 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\Big),$$

si ha

$$\begin{aligned} z^2 &= 4^2\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{i}\,\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = 8(-1 + \boldsymbol{i}\,\sqrt{3}),\\ z^3 &= 4^3(\cos\pi + \boldsymbol{i}\,\sin\pi) = -64,\\ z^4 &= 4^4\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + \boldsymbol{i}\,\sin\frac{4\pi}{3}\Big) = -128(1 + \boldsymbol{i}\,\sqrt{3}), \end{aligned}$$

e così via.

È facile verificare che la (A.4) vale anche quando n è un intero negativo o nullo. In particolare per $n = 0$ si ha

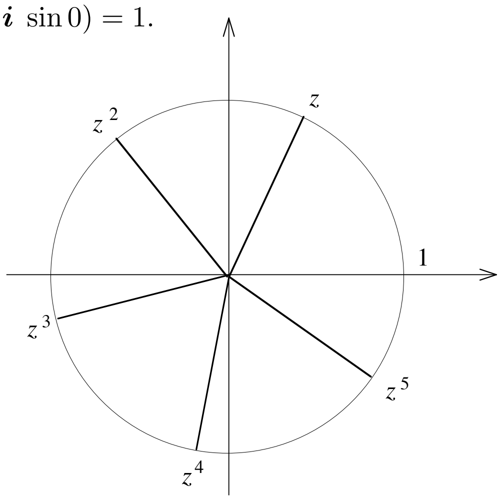
$$z^0 = |z|^0\,(\cos 0 + \boldsymbol{i}\,\sin 0) = 1.$$

Se z è un numero complesso di modulo uguale ad 1, cioè è della forma

$$z = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\sin\theta,$$

le sue potenze n-esime hanno ancora modulo 1 e sono della forma

$$z^n = \cos n\theta + \boldsymbol{i}\,\sin n\theta.$$



A.6 La radice n-esima

L'operazione inversa della potenza n-esima, cioè la radice n-esima, merita di essere studiata con più cura. Dato il numero

$$w = |w|\,(\cos\psi + \boldsymbol{i}\,\sin\psi),$$

si cerca un numero complesso

$$z = |z|\,(\cos\theta + \boldsymbol{i}\,\sin\theta),$$

tale che $z^n = w$. Per la (A.4) deve essere

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\,\sin n\theta) = |w|(\cos\psi + \boldsymbol{i}\,\sin\psi), \tag{A.5}$$

cioè

$$|z|^n = |w|, \quad \cos n\theta = \cos\psi \quad \text{e} \quad \sin n\theta = \sin\psi,$$

da cui

$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{e} \quad n\theta = \psi + 2k\pi, \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Allora, posto

$$\theta_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{A.6}$$

i numeri

$$z_k = |w|^{1/n} (\cos\theta_k + \boldsymbol{i}\, \sin\theta_k), \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sono radici n-esime di w. Però dei θ_k scritti nella (A.6), solo i primi n valori producono soluzioni diverse dell'equazione (A.5). Si ha infatti

$$\theta_n = \frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \theta_0 + 2\pi,$$

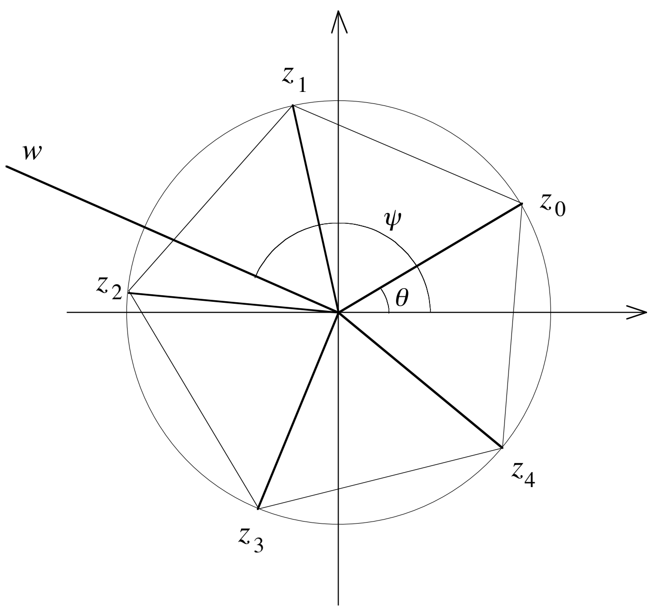
per cui

$$\begin{aligned} z_n &= |w|^{1/n} (\cos\theta_n + \boldsymbol{i}\, \sin\theta_n) = |w|^{1/n} (\cos(\theta_0 + 2\pi) + \boldsymbol{i}\, \sin(\theta_0 + 2\pi)) \\ &= |w|^{1/n} (\cos\theta_0 + \boldsymbol{i}\, \sin\theta_0) = z_0. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione $z^n = w$ ha le n soluzioni

$$z_k = |w|^{1/n} (\cos\theta_k + \boldsymbol{i}\, \sin\theta_k), \quad \text{per} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

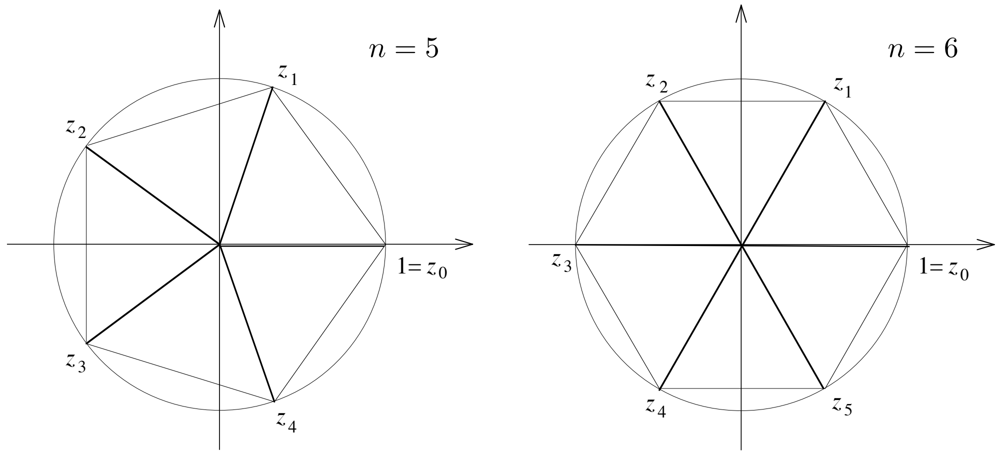
Graficamente risulta, per esempio per $n = 5$



Cioè le radici n-esime di z, di modulo $|w|^{1/n}$, stanno ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine del piano complesso e raggio $|w|^{1/n}$, e avente il primo vertice in corrispondenza di z_0. Di particolare interesse sono le radici n-esime dell'unità, cioè del numero complesso $w = 1$. Nella notazione trigonometrica w ha modulo 1 e argomento $\psi = 0$, per cui le sue radici n-esime risultano

$$z_k = \cos\theta_k + \boldsymbol{i}\ \sin\theta_k, \quad \theta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Graficamente si ha



Per n dispari solo la soluzione $z_0 = 1$ è reale, le altre $n-1$ soluzioni non sono reali. Per n pari invece vi sono due soluzioni reali, $z_0 = 1$ e $z_{n/2} = -1$ e le altre $n-2$ non sono reali. Le soluzioni non reali sono coniugate a coppie: $\overline{z}_1 = z_{n-1}$, $\overline{z}_2 = z_{n-2}$, e così via.

A.7 Esercizi

1. Rappresentare nel piano complesso i punti

$$\begin{aligned}
&z_1 = 2 + \boldsymbol{i}\,2, \quad z_2 = 1 - \boldsymbol{i}, \quad z_3 = -2, \quad z_4 = \boldsymbol{i},\\
&\overline{z}_1, \quad \overline{z}_2, \quad \overline{z}_3, \quad \overline{z}_4,\\
&z_5 = z_1 + z_2, \quad z_6 = z_3 + z_4, \quad z_7 = z_1 + \overline{z}_4,\\
&z_8 = z_1 \cdot z_2, \quad z_9 = z_3 \cdot z_4, \quad z_{10} = z_3 \cdot \overline{z}_4, \quad z_{11} = (z_1 \cdot \overline{z}_3)^2.
\end{aligned}$$

2. Verificare che il quoziente di due numeri complessi ha modulo uguale al quoziente dei moduli e argomento uguale alla differenza degli argomenti.

3. Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \boldsymbol{i}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \boldsymbol{i}\ \frac{1}{2},$$

e calcolare

$$z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^2, \quad z_2^{-3}.$$

4. Verificare che la definizione di uguaglianza fra numeri complessi verifica le proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva.

5. Verificare che le operazioni di addizione e moltiplicazione di numeri complessi, definite in (A.2) verificano le proprietà commutativa, associativa e distributiva, e che vale la legge di annullamento del prodotto.

6. Verificare che il modulo della somma di due numeri complessi è minore o uguale alla somma dei moduli dei due numeri.

7. Verificare che il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei due numeri.

8. Verificare che se $z = \cos\theta + \boldsymbol{i}\ \sin\theta$, allora $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

9. Dedurre dalla formula di de Moivre le relazioni trigonometriche che legano $\sin k\theta$ e $\cos k\theta$ con $\sin\theta$ e $\cos\theta$ per $k = 2, 3, 4, \ldots$

(Traccia: posto $z = a + \boldsymbol{i}\ b$, con $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, è

$$z^2 = (a + \boldsymbol{i}\ b)^2 = (a^2 - b^2) + \boldsymbol{i}\ 2ab = \cos^2\theta - \sin^2\theta + \boldsymbol{i}\ 2\sin\theta\cos\theta;$$

d'altra parte per la formula di de Moivre è

$$z^2 = (\cos\theta + \boldsymbol{i}\ \sin\theta)^2 = \cos 2\theta + \boldsymbol{i}\ \sin 2\theta.\ )$$

10. Calcolare le radici quadrate del numero

$$z = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Calcolare le radici cubiche di $\boldsymbol{i}$.

12. Calcolare le radici seste di 1.

13. Calcolare le radici seste di -1.

14. Calcolare le radici quarte di $1 - \boldsymbol{i}$.

15. Risolvere l'equazione $z^2 + (4 + \boldsymbol{i})z + 5 - \boldsymbol{i}\ = 0$.

16. Verificare che $\overline{z}^k = \overline{(z^k)}$. Sfruttando questa proprietà dimostrare che se z è soluzione dell'equazione algebrica di grado n

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

con i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reali, allora $\overline{z}$ è anch'esso soluzione dell'equazione. Verificate che questa proprietà può non valere se i coefficienti non sono numeri reali, come nel caso dell'equazione dell'esercizio 15.