Analisi Matematica I

Teoremi, definizioni e formulari

Università di Pisa - Facoltà di Fisica

Lorenzo Sassi

Ultimo aggiornamento: 6 luglio 2022
v2.39

Indice

Introduzione

La stesura di questi appunti, è importante sottolineare, nasce da un desiderio totalmente disimpegnato ed esclusivamente ricreativo; con questo, quindi, intendo precisare che l'origine del materiale non è inedita ma frutto di lezioni, libri e appunti altrui: in primis, la mia fonte principale proviene dagli appunti di Riccardo Mazzarrini, il quale desidero ringraziare per avermi ispirato, sebbene non abbia mai avuto l'onore di conoscerlo; tali appunti mi sono pervenuti attraverso il passaparola e mi hanno permesso di passare l'esame, sono stati per me una salvezza, e da essi ho pensato di ampliarli e correggerli.
Ciò di cui mi si può dar merito è aver dato forma a teoremi, definizioni e formule scollegate e senza connessione tra di loro; ho cercato nelle migliori intenzioni e nel massimo delle mie capacità di dare un filo e di stabilire una sorta di "scala gerarchica" contrassegnata dagli asterischi. Quando incontrerete teoremi o definizioni con a lato due ** sono quelli a cui dovete rivolgere più attenzione, perché quelli più rilevanti; di conseguenza l'importanza va a scalare proporzionalmente al numero di asterischi. Scorrendo le pagine, talvolta, si possono trovare parti di testo riquadrate che possono essere considerate come commenti/riflessioni personali, che mi sono sentito di aggiungere al contenuto.

Il testo risulta diviso in due parti, la prima formata da una vera e propria raccolta di teoremi e definizioni, pensata principalmente per una preparazione orale, sicuramente non esaustiva, ma a cui poter fare riferimento; la seconda invece è una raccolta di formule e strumenti per la risoluzione di esercizi, pensata più per le prove pratiche.

Ovviamente, come ogni stesura, il testo non è esente da errori, pertanto, per facilitarne sia la reperibilità che la correzione, è stato avviato un BOT su Telegram (@SaxNotes_Bot) in cui trovare questi appunti (insieme ad altri) dove è possibile segnalare eventuali errori, correzioni o suggerimenti di qualsiasi tipo che sono ben contento di ricevere.

Per concludere vorrei ringraziare Eleonora Mazzoni e Francesco Mensini: senza l'immensa bravura ed l'estrema accuratezza della mia ragazza, gli appunti avrebbero una resa decisamente più scadente e una introduzione poco invitante,

senza invece la spinta di Francesco questi appunti sarebbero rimasti tra i file personali e non sarebbero mai stati diffusi.

Ringrazio inoltre Marco Pompili, Tommaso Morelli, Nicola Porri, Mattia Apicella, Raffaele Tiede, Francesco Mandracchia, Gilberto, Virginia Todisco, Nicola Sensi, Giuseppe Fontanella, Alfredo Izzo, Filippo, Luca Palumbo ed Ernesto Sangiorgio per aver comunicato gli errori che la versione precedente conteneva, un grazie più che sincero! Buona lettura e buono studio!

Parte I

Teoremi e Definizioni

Capitolo 1

Insiemi

Teorema 1.1 (Binomio di Newton)**.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Newton

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare tale proprietà per induzione. L'asserto è vero per $n = 1$, assumendo vera la formula al passo n, verifichiamola per $n + 1$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k\right) \cdot (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1}\right) \\
&= \left(a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k\right) + \left(b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1}\right) \\
&= \left(a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k\right) + \left(b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} \cdot b^k\right) \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n-k+1} \cdot b^k
\end{aligned}$$

attraverso la *proprietà di Tartaglia* per cui $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} \cdot b^k$$

dato che il termine a^{n+1} rappresenta il primo termine della somma e b^{n+1} rappresenta l'ultimo termine della somma ($\sum_{k=0}^{n+1}$) $\square$

Teorema 1.2 (Dimostrazione per induzione della disuguaglianza di Bernoulli)**.** **

$$1 + nh \leq (1+h)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \mathbb{R}, h \geq -1$$

Bernoulli

Dimostrazione. Vogliamo dimostrarla per induzione. L'espressione è vera per $n = 1$, possiamo quindi assumerla vera al passo n e verificarla al passo $n+1$ ottenendo:

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = \\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h\end{aligned}$$

dimostrando quindi che tale relazione è valida per ogni n. $\square$

Definizione 1.1 (Cardinalità)**.** La cardinalità di un insieme finito A (solitamente indicata con $\#A$) è un numero naturale definito come il numero di elementi che costituiscono l'insieme.

Teorema 1.3 (L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità)**.**

Dimostrazione. La dimostrazione comprende solo i razionali positivi, la sua estensione ai razionali negativi e allo zero è ovvia.
Immaginiamo di disporre su una riga tutte le frazioni con numeratore 1 e denominatore uguale a 1,2,3..., poi di disporre tutte le frazioni con numeratore 2 e denominatore 1,2,3... su una seconda riga parallela alla precedente e così via.
Si otterrà una tabella doppiamente infinita come quella illustrata:

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Figura 1.1

Tale tabella conterrà la frazione ridotta ai minimi termini di tutti i razionali positivi, ora per mettere in relazione gli elementi della tabella con i naturali partiamo da $\frac{1}{1}$ e procediamo come mostrato:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \cdots \\[2ex]
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Figura 1.2

Alla frazione $\frac{1}{1}$ corrisponderà il numero naturale 1, alla frazione $\frac{1}{2}$ il numero naturale 2 etc.

Così facendo abbiamo ottenuto una corrispondenza tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$; tale corrispondenza può esser resa biunivoca eliminando gli elementi che si ripetono, vale a dire le frazioni non ridotte ai minimi termini (si pensi al valore 1/2 considerato anche da 2/4, 3/6 e così via...). $\square$

Definizione 1.2 (Insieme delle parti)**.** L' insieme delle parti di un insieme A, indicato con il simbolo $P(A)$, è un insieme i cui elementi sono a loro volta insiemi; l'insieme delle parti di un insieme A è per definizione l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di A.

Parti

Teorema 1.4 (Teorema di Cantor)**.** *Dato un insieme di qualsiasi cardinalità, esiste sempre un insieme di cardinalità maggiore.*

Cantor

Dimostrazione. Sia $f : X \to P(X)$ una generica funzione da X nell'insieme delle parti $P(X)$:

Vogliamo dimostrare che f è necessariamente non suriettiva. Per farlo procediamo per assurdo assumendo che f sia in effetti suriettiva.

Dato che $P(X)$ è l'insieme delle parti di X, prendendo un qualunque sottoinsieme $A \subseteq X$ esso sarà anche un elemento di $P(X)$, ed essendo f suriettiva esisterà un qualche $y \in X$ tale che $f(y) = A$.
Definiamo quindi $A \subseteq X$ come il sottoinsieme formato dagli elementi $a \in X$ tali che $a \notin f(a)$, ossia $a \in A \iff$ l'immagine di a non contiene a stesso.

$$A = \{a \in X : a \notin f(a)\}$$

Come già accennato essendo f suriettiva ci sarà un qualche $y \in X$ tale che $f(y) = A$. L'elemento y può appartenere o meno al sottoinsieme $A \in X$, esaminiamo allora i due casi: $y \in A$ o $y \notin A$.
Per come abbiamo definito A, se y vi appartiene si ha che $y \notin f(y)$, ma $f(y) = A$; mentre se $y \notin A$ allora $y \notin f(y)$, ma $f(y) = A$ ossia

$$se \quad y \in A \longrightarrow y \notin A$$

$$se \quad y \notin A \longrightarrow y \in A$$

In entrambi i casi si arriva all'assurdo e ne segue che f non può essere suriettiva. Dato quindi un qualunque insieme X finito o infinito l'insieme delle parti $P(X)$ ha cardinalità maggiore.

□

Teorema 1.5 (Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2 = 2$)**.**

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che esista x tale che $x^2 = 2$. Essendo x razionale può essere scritto come $\frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$ primi tra loro. Avremo quindi $\frac{p^2}{q^2} = 2$ dunque $p^2 = 2q^2$.

Dato che p^2 è pari, p deve essere pari. Possiamo quindi scrivere $p = 2r$, estendendo otteniamo:

$$(2r)^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2r^2 = q^2$$

Allora anche q deve essere pari, il che è assurdo perché p e q sono primi tra loro per ipotesi. Dall'assurdo segue la tesi. $\square$

Definizione 1.3 (Maggiorante/Minorante)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali. Diciamo che x_+ è un *maggiorante* di X se per ogni $x \in X$ risulta che $x \leq x_+$ ovvero:

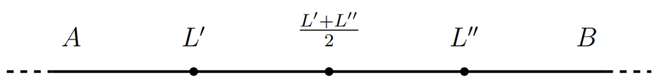
$$x_+ \in \mathbb{R} \text{ maggiorante di } X \Longleftrightarrow \forall x \in X, x \leq x_+$$

similmente, si dice che $x_- \in \mathbb{R}$ è un minorante di X se per ogni $x \in X$ risulta che $x_- \leq x$ ovvero:

$$x_- \in \mathbb{R} \text{ minorante di } X \Longleftrightarrow \forall x \in X, x_- \leq x$$

Teorema 1.6. *Non esistono due elementi separatori L' e L'' in una sezione di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due elementi separatori L' e L'' con $L' \neq L''$. L'elemento $\frac{L'+L''}{2}$ non può stare in A perché maggiore di L', ma non può stare nemmeno in B poiché minore di L''.



$$\forall a \in A,\ a \leq L'$$
$$\forall b \in B,\ b \geq L''$$

Figura 1.3

Ne segue che $\frac{L'+L''}{2}$ non appartiene né ad A né a B, il che è assurdo in quanto $A \cup B = \mathbb{R}$ essendo (A, B) una sezione di $\mathbb{R}$, e quindi $L' = L''$. $\square$

Definizione 1.4 (Estremo superiore/estremo inferiore)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali. Se X è limitato superiormente chiameremo $\sup(X)$ l'estremo superiore dell'insieme X se: *

- $\sup(X)$ è un maggiorante di X;
- comunque scelto $\bar{x} < \sup(X)$ si ha che $\bar{x}$ non è un maggiorante.

Più semplicemente definiamo il $\sup(X)$ come il più piccolo dei maggioranti di X.
Se X è illimitato superiormente, per definizione si ha che $\sup(X) = +\infty$.
In maniera analoga se X è limitato inferiormente chiameremo $\inf(X)$ l'estremo inferiore dell'insieme X se:

- $\inf(X)$ è un minorante di X;
- comunque scelto $\bar{x} > \inf(X)$ si ha che $\bar{x}$ non è un minorante.

Più semplicemente definiamo il $\inf(X)$ come il più grande dei minoranti di X.
Se X è illimitato inferiormente, per definizione si ha che $\inf(X) = -\infty$.

Assioma 1.1 (Assioma di Dedekind)**.** *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti tali per cui $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si abbia che $a \leq b$. Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste allora un* elemento separatore *L, cioè un elemento tale per cui:*

$$a \leq L \leq b$$

Dedekind **Teorema 1.7** (Teorema di Dedekind)**.** *Sia A un insieme limitato superiormente, allora esiste il minimo dei maggioranti, chiamato estremo superiore.* *

Dimostrazione. Chiamiamo M l'insieme dei maggioranti e M' l'insieme dei non maggioranti di A.

$$M = \{m : m \quad \text{maggiorante di } A\}$$
$$M' = \mathbb{R} \setminus M = \{m' : m' \quad \text{non maggiorante di } A\}$$

Risulta $M \cup M' = \mathbb{R}$ e $M \cap M' = \varnothing$, inoltre si ha $m' < m, \forall m' \in M', \forall m \in M$.
(M, M') è quindi una sezione di $\mathbb{R}$, dunque per l'*assioma di Dedekind* esiste l'elemento separatore L. L può appartenere ad M o M'.

Se L appartenesse ad M' ci sarebbe un qualche elemento a di A maggiore di L in quanto M' è l'insieme dei non maggioranti di A.
L'elemento $\frac{L+a}{2}$ dovrebbe quindi appartenere ad M' essendo minore di a, ma

anche ad M essendo maggiore di L.
Dall'assurdo segue che L deve appartenere ad M, ed essendo l'elemento separatore, L è il minimo dell'insieme M dei maggioranti. □

Teorema 1.8 (I numeri razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfano l'assioma di Dedekind).

Dimostrazione. Consideriamo in $\mathbb{Q}$ gli intervalli:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0; q^2 < 2\}$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0; q^2 \geq 2\}$$

Risulta $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \varnothing$, inoltre si ha $a < b, \forall a \in A, \forall b \in B$; (A, B) è quindi una sezione di $\mathbb{Q}$.

Ammettiamo per assurdo che esista l'elemento separatore L, esso dovrà appartenere ad A o a B. Supponendo che $L \in A$, si ha che $L^2 \leq 2$.
Dato che $A \cap B = \varnothing$, deve essere che $L^2 \neq 2$, dunque $L^2 < 2$. Se inoltre sommo una quantità piccola a piacere e positiva ε, l'elemento $(L + \varepsilon)^2$ deve essere maggiore di 2 essendo L l'elemento separatore, eppure prendendo $n > 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\left(L + \frac{1}{n}\right)^2 &= L^2 + \frac{2L}{n} + \frac{1}{n^2} < L^2 + \frac{2L}{n} + \frac{1}{n} = \\ &= L^2 + \frac{2L+1}{n} = m\end{aligned}$$

dunque $\forall n > \frac{2L+1}{2-L^2}$ si ha che $m < 2$, dunque L non era l'elemento separatore e dall'assurdo segue la tesi.

□

Teorema 1.9 (Assioma di Archimede).

$$\forall a, b > 0 \ \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N} : \quad na > b$$

Archimede

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che na sia limitato superiormente, allora esiste per l'*assioma di Dedekind* (1.7), l'estremo superiore L, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha quindi

$$na \leq L$$

considerando $(n + 1)$ si ha:

$$(n + 1)a \leq L \Longrightarrow na \leq L - a$$

l'estremo superiore risulta quindi essere $L - a$, non più L, il che è un assurdo. □

Teorema 1.10. *Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, esiste $q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.*

Dimostrazione. Utilizzando l'*assioma di Archimede* (1.9), esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n > \frac{1}{b-a} \Longrightarrow \frac{1}{n} < b - a$$

Chiamando $k \in \mathbb{N}$ il massimo intero per cui sia verificata la relazione $\frac{k}{n} \leq a$

$$\frac{k}{n} \leq a \Longrightarrow \frac{k+1}{n} > a$$

Inoltre si ha

$$\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} < b - a \Longrightarrow \frac{k+1}{n} < b$$

da cui segue che $a < \frac{k+1}{n} < b$, con $\frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q}$ □

Teorema 1.11 (Disuguaglianza triangolare)**.** *

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Triangolare

Dimostrazione. Per dimostrare tale relazione utilizziamo le definizioni di valore assoluto:

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad -|b| \leq b \leq |b|$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Se $a + b \geq 0$, allora $a + b = |a + b|$, e la tesi è confermata dalla disuguaglianza a destra.
Se $a + b < 0$, osservando il lato sinistro della disuguaglianza sopra riportata si ottiene:

$$-|a| - |b| \leq a + b \Longrightarrow |a| + |b| \geq -(a + b)$$

ma $(a + b) < 0$, quindi $-(a + b) > 0$. Se $-(a + b) > 0$, allora $-(a + b) = |a + b|$ e la tesi risulta confermata anche in questo caso. □

Teorema 1.12 (Disuguaglianza Triangolare inversa)**.**

$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

Triang. inversa

Teorema 1.13 (I numeri algebrici formano un insieme numerabile).

Dimostrazione. Un numero reale si dice algebrico se è soluzione di un polinomio a coefficienti interi $a(x)$. Per dimostrare il teorema consideriamo un'equazione algebrica a coefficienti interi della forma

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Sia $|a| = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$. É evidente che $|a| \in \mathbb{N}$, inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un numero finito di polinomi $a(x)$ tali per cui $|a| = m$.
Dato che l'equazione $a(x) = 0$ può avere al massimo n soluzioni distinte, avremo al massimo n numeri algebrici per ogni equazione.

Dunque enumeriamo i numeri algebrici in questo modo: prima quelli che risolvono tutte le equazioni $a(x) = 0$ con $|a| = 1$, poi tutti quelli con $|a| = 2$ e così via, ottenendo la numerazione voluta degli algebrici. □

Teorema 1.14 (L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile).

Dimostrazione. Se $\mathbb{R}$ fosse numerabile allora sarebbe numerabile qualunque suo sottoinsieme infinito. Sia A l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

Dimostriamo, per assurdo, che A non è numerabile. Se A fosse numerabile, esisterebbe una corrispondenza biunivoca tra A e $\mathbb{N}$, cioè tutti gli elementi di A potrebbero essere elencati così:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots
\end{aligned}$$

dove a_ij è la j-esima cifra decimale del i-esimo numero reale di A.

Per dimostrare la non numerabilità di A ci basta fornire un numero y compreso tra 0 e 1 che sia diverso da tutti gli x_i.
Sia

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$$

un numero reale così costruito:

$$\begin{gathered}
b_1 \neq a_{11} \\
b_2 \neq a_{22} \\
\vdots \\
b_k \neq a_{kk}
\end{gathered}$$

Il numero reale y appartiene ad A, ma è diverso (poiché almeno una cifra è diversa) da tutti gli altri elementi di A.
Quindi A non è numerabile, dunque neppure $\mathbb{R}$ essendo $A \subset \mathbb{R}$. □

Cauchy-Schwarz

Teorema 1.15 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq ||\boldsymbol{x}|| \, ||\boldsymbol{y}||$$

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto scalare tra due vettori abbiamo che:

$$\begin{aligned}\langle \lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \lambda\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x} \rangle + \langle \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \lambda\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \lambda^2||\boldsymbol{x}||^2 + 2\lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + ||\boldsymbol{y}||^2 \geq 0 \qquad \forall\lambda\end{aligned}$$

Essendo tale relazione valida per ogni λ si ha che $\Delta \leq 0$, ovvero:

$$\Delta = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 - ||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{y}||^2 = |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 - ||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{y}||^2 \leq 0$$

ovvero

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \leq (||\boldsymbol{x}|| \, ||\boldsymbol{y}||)^2$$

Dato che sia $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ che $||\boldsymbol{x}|| \, ||\boldsymbol{y}||$ sono sempre non negativi, si ha infine:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq ||\boldsymbol{x}|| \, ||\boldsymbol{y}||$$

□

Definizione 1.5 (Insieme aperto/chiuso)**.** Un insieme A si dice aperto se per ogni punto appartenente ad A esiste almeno un intorno del punto che sia interamente contenuto nell'insieme, in simboli

$$A \, aperto \iff \forall x \in A \, \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$$

∪ di aperti

Teorema 1.16 (L'unione di una famiglia di aperti è un insieme aperto)**.**

Dimostrazione. Se un elemento a appartiene all'unione di una famiglia di insiemi aperti, dovrà appartenere almeno ad un aperto $\mathcal{A}_i$.
Ne segue per la definizione di insieme aperto che esiste un intorno di a tutto contenuto in $\mathcal{A}_i$, quindi contenuto anche nell'unione di tutti gli $\mathcal{A}_i$, di conseguenza $\cup_i \mathcal{A}_i$ è aperto □

∩ aperti

Teorema 1.17 (L'intersezione di aperti)**.** *L'intersezione di un numero finito di aperti è un insieme aperto*

Dimostrazione. Sia $a \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \cdots \mathcal{A}_n$. Esisterà un intorno $B_1 : (a, r_1)$ contenuto in $\mathcal{A}_1$, un intorno $B_2 : (a, r_2)$ contenuto in $\mathcal{A}_2$ e così via fino all'intorno $B_n : (a, r_n)$.

Prendendo $r = \min(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ l'intorno $B : (a, r)$ sarà contenuto in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \cdots \mathcal{A}_n$, che risulta aperto. □

Attenzione! Il teorema cessa di valere se si considera l'intersezione di un numero infinito di aperti.

Teorema 1.18 (Unione di chiusi)**.** *L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

$\cup$ *chiusi*

Dimostrazione. Data una famiglia di n insiemi chiusi $\mathcal{C}_i$, l'unione di tutti gli $\mathcal{C}_i$ è pari all'insieme universo (o ambiente) privato dell'intersezione degli $\mathcal{A}_i$, dove $\mathcal{A}_i$ è l'insieme complementare (quindi aperto) di $\mathcal{C}_i$. Ovvero:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i = \mathbb{U} \smallsetminus \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$$

Dato che l'intersezione di una famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto, il suo complementare è chiuso, quindi

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i \text{ è chiuso}$$

□

Definizione 1.6 (Punto di accumulazione)**.** Consideriamo un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, un x_0 (non necessariamente appartenente all'insieme) è di accumulazione per A se comunque scelto un intorno di x_0 esso contiene almeno un punto di A diverso da x_0, ovvero:

Accumulazione

$$x_0 \text{ è di accumulazione per } A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} \neq x_0 \in A : \bar{x} \in B(x_0, \varepsilon)$$

Definizione 1.7 (Punto di frontiera)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, x_0 è un punto di frontiera di A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A e uno del complementare di A.

Frontiera

Definizione 1.8 (Chiusura di un insieme)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, definiamo la chiusura di A come il più piccolo insieme chiuso $\bar{A} \subseteq \mathbb{R}$ che contiene A; la chiusura di un insieme risulta essere l'unione tra l'insieme A e i suoi punti di frontiera.

Chiusura

Insieme chiuso

Teorema 1.19 (Insieme chiuso)**.** *Un insieme è chiuso se e solo se esso contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D}$ un insieme chiuso e sia x un punto di accumulazione per $\mathcal{D}$.

Se x appartenesse al complementare aperto $\mathcal{D}^C$ esisterebbe un intorno $B : (x, \rho)$ in $\mathcal{D}^C$ che non contiene alcun punto di $\mathcal{D}$; quindi x non risulta di accumulazione per $\mathcal{D}$, contro l'ipotesi.

Viceversa, se supponiamo che $\mathcal{D}$ contenga tutti i suoi punti di accumulazione, sia $y \in \mathcal{D}$. Non essendo y punto di accumulazione per $\mathcal{D}$, esisterà un intorno $B : (y, \rho)$ in cui non cade nessun punto di $\mathcal{D}$. Tale intorno sarà allora contenuto in $\mathcal{D}^C$, che risulta essere dunque aperto, quindi il complementare di $\mathcal{D}^C$ (cioè il complementare del complementare di $\mathcal{D}$), vale a dire $\mathcal{D}$ stesso, risulta essere chiuso. □

Bolzano Weierstrass

Teorema 1.20 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ limitato e infinito ha almeno un punto di accumulazione.* *

Dimostrazione. Essendo E limitato esisteranno a_0, b_0 tali per cui $E \subset [a_0, b_0]$. Dividendo $[a_0, b_0]$ in due intervalli uguali $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ e $[\frac{a_0+b_0}{2}, a_0]$, in almeno uno dei due intervalli cadranno infiniti punti di E.
Chiamiamo tale intervallo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo l'operazione precedente. Otterremo così degli intervalli $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$... ognuno contenuto nel precedente e lungo la metà di questo, contenente infiniti punti di E.

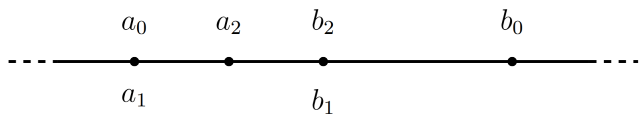


Figura 1.4

Consideriamo i due insiemi:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\}$$

formati rispettivamente dai primi e dai secondi estremi degli intervalli in questione. Si ha per costruzione che:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$
$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

cioè a_n risulta essere decrescente e b_n crescente. Vale inoltre la seguente relazione:

$$a_n \leq b_n$$

Fissando b_n, questa relazione è vera per ogni $a_n \in A$, dunque b_n è un maggiorante dell'insieme A, da cui:

$$\sup\ A \leq b_n$$

Allo stesso modo, dato che tale relazione è valida per ogni $b_n \in B$ si ha che $\sup A$ è un minorante dell'insieme B, dunque

$$\sup\ A \leq \inf\ B$$

D'altra parte, per la definizione di estremo superiore e inferiore si ha $a_n \leq \sup\ A$ e $\inf\ B \leq b_n$, cosicché

$$0 \leq \inf\ B - \sup\ A \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

E dato che questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sup\ A = \inf\ B := \zeta$.

Per verificare che ζ è un punto di accumulazione per E consideriamo un qualunque intorno $I(\zeta, \rho)$ di ζ e mostriamo che esso contiene infiniti punti di E. Essendo ζ contenuto in ciascuno degli intervalli $[a_n, b_n]$, prendendo $r > \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$ l'intervallo $[a_n, b_n]$ sarà contenuto in $I(\zeta, \rho)$.

Dato che ognuno degli intervalli $[a_n, b_n]$, e quindi anche $I(\zeta, \rho)$, contiene infiniti punti di E, ζ è un punto di accumulazione per E. $\square$

Capitolo 2

Serie e successioni

Definizione 2.1 (Successione). Sia A un insieme. Si dice successione a valori in A una legge che a ogni numero intero n associa un elemento di A, che indicheremo con a_n.

Definizione 2.2 (Limite). Sia a_n una successione a valori reali e sia $L \in \mathbb{R}$. Si dirà che il limite della successione a_n, per n tendente all'infinito è L, e si scriverà:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

se per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$ di L, esiste un numero reale ν, tale che per ogni intero $n > \nu$ si abbia $a_n \in I(L, \varepsilon)$.

* **Teorema 2.1** (Teorema di unicità del limite). *Se il limite di una successione $\{a_n\}$ esiste esso è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo che la successione a_n abbia due limiti L_1 e L_2 con $L_1 < L_2$. Prendendo $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{4}$, i due intorni $B_1(L_1; \varepsilon)$ e $B_2(L_2; \varepsilon)$ risulteranno disgiunti per costruzione.

Per la definizione di limite di una successione si ha che:

$$\begin{aligned} \exists \nu_1 \, : \, \forall n > \nu_1 \qquad & L_1 - \varepsilon < a_n < L_1 + \varepsilon \\ \exists \nu_2 \, : \, \forall n > \nu_2 \qquad & L_2 - \varepsilon < a_n < L_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $\forall n > \max(\nu_1, \nu_2)$, a_n cade in entrambi gli intorni B_1 e B_2, ma B_1 e B_2 sono disgiunti per costruzione, il che è un assurdo.

Ne segue che se $a_n \to L_1$ e $a_n \to L_2$ deve necessariamente essere $L_1 = L_2$. $\square$

Teorema 2.2 (Limitatezza successione)**.** *Se una successione $\{a_n\}$ ammette limite, allora essa è limitata.*

Dimostrazione. Dimostrare che a_n è limitata significa trovare un M tale per cui $|a_n| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$. Per determinare M partiamo dalla definizione di limite:

$$\exists \nu \; : \; \forall n > \nu \qquad a_n \in B(L; \varepsilon) \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Se si pone $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu| + |L| + \varepsilon$ risulta $|a_n| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Infatti se $n < \nu$ la disuguaglianza è ovvia, mentre se $n \geq \nu$ per la *disuguaglianza triangolare* (1.11) si ha:

$$|a_n| \leq |L| + |a_n - L| < |L| + \varepsilon$$

□

Teorema 2.3. *Se una successione $\{a_n\}$ ammette limite $L \in \mathbb{R}$, allora la successione $\{|a_n|\}$ ha limite $|L|$.*

Dimostrazione. Per la definizione di limite di una successione si ha che:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

infine per la *disuguaglianza triangolare inversa* (1.12) risulta :

$$\big||a_n| - |L|\big| \leq |a_n - L| < \varepsilon \Longrightarrow \big||a_n| - |L|\big| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$$

□

Due Carabinieri

Teorema 2.4 (Teorema dei due carabinieri)**.** *Date le successioni $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$, se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \nu$ si abbia $a_n \leq b_n \leq c_n$ e le successioni $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ hanno limite L, allora anche $\{b_n\}$ tenderà ad L.* **

Dimostrazione. Dato che le successioni a_n e c_n hanno limite L, allora si ha che:

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0 & \exists \nu_1 \; : \; \forall n \geq \nu_1 & L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists \nu_2 \; : \; \forall n \geq \nu_2 & L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \end{array}$$

e $\forall n \geq \max(\nu_1, \nu_2)$ abbiamo

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$$

e quindi risulta che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

□

Teorema 2.5. *Il limite di una successione crescente $\{a_n\}$ esiste sempre ed è pari al* sup a_n*.*

Dimostrazione. Sia sup $a_n = L$. Iniziamo con $L < +\infty$, risulterà $\forall \varepsilon > 0$

$$a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \forall n \in N \implies a_n < L + \varepsilon$$

$L - \varepsilon$ non è più un maggiorante (per definizione di estremo superiore 1.4), ci sarà certamente un ν tale che $\forall n_0 > \nu$

$$a_{n_0} > L - \varepsilon$$

La successione è una successione crescente pertanto

$$a_n > a_{n_0} \qquad a_n > a_{n_0} > L - \varepsilon \implies a_n > L - \varepsilon$$

Unendo le disuguaglianze trovate ottengo:

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} = L = \sup\, a_n$$

Se invece $L = +\infty$, la successione *non* è limitata superiormente, il che significa che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esisterà un ν per il quale

$$\forall n > \nu, \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n > M \implies \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup\, a_n$$

□

* **Teorema 2.6** (Criterio del rapporto → radice)**.** *Sia a_n una successione a termini positivi, se si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Dimostrazione. Dato che il limite del rapporto tra due termini consecutivi della successione tende a L, esisterà un ν tale che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni naturale k maggiore di ν risulti

$$L - \varepsilon \leq \frac{a_{\nu+k}}{a_{\nu+k-1}} \leq L + \varepsilon$$

$$(L - \varepsilon)a_{\nu+k-1} \leq a_{\nu+k} \leq (L + \varepsilon)a_{\nu+k-1}$$

iterando lo stesso passaggio k volte, otteniamo

$$(L - \varepsilon)^k a_\nu \leq a_{\nu+k} \leq (L + \varepsilon)^k a_\nu$$

Chiamando $\nu + k = m$ ed elevando membro a membro ad $\frac{1}{m}$, otteniamo

$$(L-\varepsilon)^{1-\frac{\nu}{m}} a_\nu^{1/m} \le a_m^{1/m} \le (L+\varepsilon)^{1-\frac{\nu}{m}} a_\nu^{1/m}$$

ovvero

$$\underbrace{(L-\varepsilon)^{-\frac{\nu}{m}} a_\nu^{1/m}}_{a}(L-\varepsilon) \le a_m^{1/m} \le (L+\varepsilon)\,\underbrace{(L+\varepsilon)^{-\frac{\nu}{m}} a_\nu^{1/m}}_{b}$$

Per m che tende all'infinito si ha $a > (1-\varepsilon)$ e $b < (1+\varepsilon)$, quindi la disuguaglianza diventa:

$$(1-\varepsilon)(L-\varepsilon) \le a_m^{1/m} \le (L+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

da cui

$$L - \varepsilon(L+1-\varepsilon) \le a_m^{1/m} \le L + \varepsilon(L+1+\varepsilon)$$

dunque per la definizione di limite

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

□

Teorema 2.7 (Condizione necessaria)**.** *Data una serie $\sum a_n$ convergente, si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$* *

Dimostrazione. Sia $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ la successione delle somme parziali (vale a dire la somma di un numero finito di termini) degli a_n.

Per ipotesi sappiamo che la serie converge ad un numero S, e per la definizione di serie si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} = S \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} s_k = S$$

Inoltre il termine $k+1$ della successione a_n è pari a $s_{k+1} - s_k$, facendo il limite membro a membro di questa disuguaglianza otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{k+1} - \lim_{k\to\infty} s_k = 0$$

□

Attenzione: Non vale il viceversa! L'utilizzo operativo è il seguente:

- se $a_n \to 0$, allora la serie può convergere, ma non è detto;
- se $a_n \not\to 0$, allora posso escludere che converga.

* **Teorema 2.8** (Criterio del confronto). *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi. Se esiste un intero* ν *tale che* $\forall n \geq \nu$ *risulti* $a_n \leq b_n$ *e la serie* $\sum b_n$ *converge, allora anche la serie* $\sum a_n$ *converge.* *Confronto*

Dimostrazione. Siano s_n e σ_n rispettivamente le somme parziali delle serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$.

Si ha per $n > \nu$

$$s_n = s_\nu + \sum_{i=\nu+1}^{n} a_i \leq s_\nu + \sum_{i=\nu+1}^{n} b_i = s_\nu + \sigma_n - \sigma_\nu$$

Dato che questa disuguaglianza è vera $\forall n > \nu$ facciamo il limite per $n \to +\infty$ membro a membro, ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{n\to+\infty} (s_\nu - \sigma_\nu + \sigma_n) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n \leq s_\nu - \sigma_\nu + \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$$

Ed infine ricordando la definizione di serie di ha che

$$\sum a_n \leq s_\nu - \sigma_\nu + \sum b_n$$

□

** **Teorema 2.9** (Divergenza serie armonica). *La serie armonica è divergente.*

Dimostrazione. Per dimostrare che la serie armonica diverge si può osservare che se nella serie si sostituisce il denominatore di ogni termine con la potenza di 2 immediatamente superiore (a meno che il numero non sia già una potenza di 2), si ottiene una seconda serie evidentemente minore. Così la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots$$

viene minorata dalla serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots$$

ma questa seconda serie, avendo 2 termini che valgono $\frac{1}{4}$, 4 termini che valgono $\frac{1}{8}$ ecc. può essere riscritta come

$$1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

la quale diverge a $+\infty$.

La serie armonica viene quindi minorata da una serie divergente, perciò per il *criterio del confronto* (2.8), anche lei è divergente. □

Teorema 2.10 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi, si consideri il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$* *

- *se $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$ allora $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum b_n$ converge;*
- *se $L = 0$ e $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge;*
- *se $L = +\infty$ e $\sum a_n$ converge allora $\sum b_n$ converge.*

Asintotico

Dimostrazione. • Se $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$ applicando la definizione di limite esisterà ν tale che $\forall n > \nu$

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in (0; L)$$

ovvero

$$(L - \varepsilon) b_n < a_n < b_n(L + \varepsilon)$$

Applicando ora il *criterio del confronto* (2.8), dalla prima disuguaglianza si ottiene che se $\sum a_n$ converge allora anche $\sum b_n$ converge; viceversa dalla seconda vediamo che se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum a_n$ converge.
• Se $L = 0$ l'unica disuguaglianza con entrambi i termini positivi è

$$a_n < b_n \varepsilon$$

quindi per il *criterio del confronto* (2.8) (se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge.
• Se $L = +\infty$ applicando la *definizione di limite* (2.2), esisterà ν tale che $\forall n > \nu$

$$\frac{a_n}{b_n} > M \quad \forall M > 0$$

ovvero

$$M b_n < a_n$$

dunque se $\sum a_n$ converge anche $\sum b_n$ converge. □

** **Definizione 2.3** (Serie Geometrica).

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \Longrightarrow \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

che può essere scritto anche nella seguente forma, dimostrabile per induzione:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Il comportamento della serie è il seguente:

- **divergente** per $x \geq 1$ perché si ha $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \geq nx + 1$ e per il *teorema del confronto diverge*;
- **indeterminata** per $x \leq -1$ poiché per $x < -1$ si ha $s_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ e $\lim_{n\to+\infty} x^n$ non esiste e che per $x = -1$ la funzione oscilla tra 1 e 0;
- **convergente** per $|x| < 1$ perché la somma della serie esiste e vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Serie Geom.

** **Teorema 2.11** (Criterio del rapporto). *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, si consideri il $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$*

- *se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge;*
- *se $L > 1$ allora $\sum a_n$ diverge.*

Rapporto

Dimostrazione. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L < 1$ prendiamo un $\gamma \in (L; 1)$ tale che per tutti gli n maggiori o uguali di un certo ν risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \gamma < 1 \quad \forall n \geq \nu \implies a_{n+1} < \gamma a_n$$

dato che la disuguaglianza vale per ogni $n \geq \nu$, partendo da un generico a_n procediamo a ritroso fino a a_ν

$$a_n < \gamma a_{n-1} < \gamma^2 a_{n-2} < \cdots < \gamma^{n-\nu} a_\nu = \left(\frac{a_\nu}{\gamma^\nu}\right)\gamma^n$$

da cui si osserva che il termine n-esimo della successione a_n risulta minore del termine n-esimo della successione γ^n, a meno di una costante moltiplicativa $\frac{a_\nu}{\gamma^\nu}$ che non dipende da n. Dato che la serie geometrica $\sum \gamma^n$ converge in quanto $\gamma < 1$, per il *criterio del confronto* (2.8), anche $\sum a_n$ converge.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L > 1$ prendendo $\gamma \in (1; L)$ ci sarà un ν tale che per tutti gli n maggiori o uguali di ν risulti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \gamma > 1 \quad \forall n \geq \nu \implies a_{n+1} > \gamma a_n$$

Generalizzando la precedente relazione si ottiene

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &> \gamma a_\nu \\ a_{\nu+2} &> \gamma^2 a_\nu \\ &\dots \\ a_{\nu+x} &> \gamma^x a_\nu \end{aligned}$$

Quindi la successione $a_{\nu+x}$ è maggiore della successione γ^x a meno di una costante a_ν che non dipende da x.
Dato che la serie geometrica $\sum \gamma^x$ diverge essendo una serie geometrica di ragione $\gamma > 1$, per il *criterio del confronto* (2.8) anche la serie $\sum_{n=\nu}^{+\infty} a_n$ diverge.
Di conseguenza anche $\sum a_n$ diverge.

□

Attenzione! Se $L = 1$ è sbagliato dire che la serie sia indeterminata, ma c'è comunque qualcosa che possiamo dire: se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad 1 da sopra, la nostra serie divergerà. Infatti se $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, la funzione è crescente, cioè $a_{n+1} > a_n$, con $a_n \not\to 0$ (perché a termini positivi), e per *condizione necessaria (2.7)* quindi non avremo la convergenza. Nel caso opposto in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ non è invece possibile dire nulla.

Teorema 2.12 (Criterio della radice). *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, si consideri il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$* **

- *se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge*
- *se $L > 1$ allora $\sum a_n$ diverge.*

Radice

Dimostrazione. Se $\sqrt[n]{a_n} \to L < 1$ prendiamo un $\gamma \in (L; 1)$, esisterà un ν tale che per tutti gli n maggiori di o uguali di ν vale la seguente:

$$\sqrt[n]{a_n} < \gamma < 1 \quad \forall n \geq \nu \quad \implies \quad a_n < \gamma^n$$

Dato che $\gamma < 1$ la serie geometrica $\sum \gamma^n$ converge, per il *criterio del confronto* (2.8) anche $\sum a_n$ converge.

Se $\sqrt[n]{a_n} \to L > 1$ prendiamo un $\gamma \in (1; L)$, esisterà un ν tale che per tutti gli n maggiori di o uguali di ν vale la seguente:

$$\sqrt[n]{a_n} > \gamma > 1 \quad \forall n \geq \nu \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1$$

Dato che $a_n > 1$ la serie $\sum a_n$ diverge, poiché la *condizione necessaria* (2.7) affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $a_n \to 0$.

$\square$

Attenzione! Se $L = 1$ è sbagliato dire che la serie sia indeterminata, ma c'è comunque qualcosa che possiamo dire: se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ tende ad 1 da sopra, la nostra serie divergerà. Infatti se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, a_n non potrà tendere a 0 e quindi per *condizione necessaria (2.7)* non potrà convergere. Nel caso opposto in cui $\sqrt[n]{a_n} \leq 1$ non è invece possibile dire nulla.

** **Teorema 2.13** (Criterio di condensazione di Cauchy). *Sia a_n una successione a termini positivi decrescente, allora la serie $\sum a_n$ e la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.* *C.Cauchy*

Dimostrazione. Dato che la successione a_n è decrescente, si ha:

$$\underbrace{a_1}_{\leq a_1} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4a_4} + \cdots$$

e analogamente:

$$\underbrace{a_1}_{\geq \frac{1}{2}\cdot a_1} + \underbrace{a_2}_{\geq \frac{1}{2}\cdot 2a_2} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq \frac{1}{2}\cdot 4a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq \frac{1}{2} 8\cdot a_8} + \cdots$$

Se ora indichiamo con s_n e σ_n le successioni delle somme parziali rispettivamente della serie $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$, otteniamo dalle relazioni precedenti

$$s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n$$
$$s_{2^n} \geq \frac{1}{2}\sigma_n$$

Il che è valido $\forall n$, quindi facendo tendere $n \to +\infty$ si ha:

$$\sum a_n \leq \sum 2^n a_{2^n}$$
$$\sum a_n \geq \frac{1}{2} \sum 2^n a_{2^n}$$

Dalla prima disuguaglianza segue che se $\sum 2^n a_{2^n}$ converge allora $\sum a_n$ converge, mentre se $\sum a_n$ diverge $\sum 2^n a_{2^n}$ diverge.

Dalla seconda disuguaglianza invece si ottiene che se $\sum a_n$ converge allora anche $\frac{1}{2}\sum 2^n a_{2^n}$ converge, e quindi anche $\sum 2^n a_{2^n}$ converge, mentre se $\frac{1}{2}\sum 2^n a_{2^n}$ diverge (e quindi anche $\sum 2^n a_{2^n}$ diverge) anche $\sum a_n$ diverge. □

Perché usarlo? L'uso del criterio è specialmente utile nel caso di serie in cui sono presenti dei *logaritmi*, che vengono 'trasformati' attraverso la *condensazione di Cauchy* in serie armoniche generalizzate, che sono più semplici da trattare!
Esercizio provare con:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ log^{\alpha}(n)}$$

Definizione 2.4 (Convergenza Assoluta). Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è *assolutamente convergente* se la serie dei moduli ad essa associata $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente. **

Teorema 2.14 (Criterio di assoluta convergenza). *Se una serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente, allora essa è convergente (semplicemente) e si ha* **

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

Conv. assoluta

Dimostrazione. Definiamo le successioni

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad e \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che sia b_n che c_n sono $\geq 0\ \forall n$ e risulta

$$a_n = b_n - c_n \qquad |a_n| = b_n + c_n$$

Dato che $0 \leq b_n,\ c_n \leq |a_n|$ e la serie $\sum |a_n|$ converge per ipotesi, per il *criterio del confronto* (2.8), le serie $\sum b_n$ e $\sum c_n$ convergono. Si ha inoltre che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty$$

e quindi $\sum a_n$ è convergente.
Si ha inoltre, per la *disuguaglianza triangolare* (1.11)

$$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{k} |a_n|$$

e passando al limite per $k \to +\infty$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

□

** **Teorema 2.15** (Criterio di Leibnitz)**.** *Sia a_n una successione decrescente tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum(-1)^n \cdot a_n$ è convergente.* Leibnitz

Dimostrazione. Chiamiamo s_k la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{k}(-1)^n \cdot a_n$. Prenderemo quindi due sottosuccessioni, la prima è la *sottosuccessione dei termini pari* e l'altra è la *sottosuccessione dei termini dispari*, e andremo a dimostrare che la prima è decrescente e che la seconda è crescente.

Sia $\{S_{2k}\}$ la sottosuccessione dei termini pari, facciamo la differenza delle somme parziali di due termini tra loro consecutivi:

$$S_{2k+2} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$$

Il termine con pedice $2k+1$ risulta negativo perché con indice dispari. Tale differenza risulta negativa e pertanto la successione è decrescente.

Analogamente possiamo dimostrare che la successione dei termini dispari che chiameremo $\{S_{2k-1}\}$ è crescente. Consideriamo nuovamente la differenza tra due somme parziali di due termini successivi di questa successione:

$$S_{2k+1} - S_{2k-1} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k}a_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0$$

Tale differenza risulta maggiore o uguale a zero e pertanto possiamo dire che la successione dei termini dispari è crescente.

Operiamo adesso la differenza delle somme parziali di due termini successivi di S_k:

$$S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k}(-1)^{2k} = a_{2k} \geq 0$$

Da quest'ultima possiamo derivare la seguente relazione $\forall k$:

$$S_{2k} \geq S_{2k-1}$$

Pertanto estendendo il ragionamento possiamo dire che:

$$S_{2k-1} \leq S_{2k+1} \leq S_{2k+2} \leq S_{2k}$$

La successione $\{S_{2k-1}\}$, che abbiamo dimostrato prima essere crescente, è anche superiormente limitata, ovvero c'è $S_{2k-1} \leq S_2$.
La successione $\{S_{2k}\}$, che abbiamo dimostrato prima essere decrescente, è limitata inferiormente, cioè esiste $S_{2k} \geq S_1$.

Definiamo adesso S_1 e S_2.

$$S_1 = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1} \qquad S_2 = \lim_{k\to\infty} S_{2k}$$

Dimostriamo adesso che tale limite è lo stesso.

$$0 \leq S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k} = 0$$

perché a_n è infinitesima per definizione. Abbiamo quindi che:

$$S_1 = S_2 = S$$

Tutte le somme parziali tendono quindi ad S, pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{converge}$$

La serie, quindi, converge sempre se rispetta le tre condizioni:

- $a_n \geq 0$
- a_n decrescente
- a_n infinitesima

$\square$

Definizione 2.5 (Somma di Cesaro)**.** Data una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

con somme parziali

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n$$

la *somma di Cesàro* è il limite (quando esiste) della media aritmetica delle somme parziali

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}$$

** **Teorema 2.16** (Teorema della media di Cesaro). *Il teorema delle medie di Cesaro permette di calcolare il limite della successione delle medie di una successione a_n, noto il limite di a_n. La successione delle medie di a_n si definisce come:*

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Il teorema della media di Cesaro afferma che se a_n ammette limite, allora

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Media Cesaro

Dimostrazione. Ponendo $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sigma_n$ e $l = \lim_{n \to \infty} a_n$ si ha che:

$$|\sigma_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - l \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k - nl}{n} \right|$$

Spezzando la sommatoria da 1 a $\bar{n}$ e da $\bar{n}$ a n si ha $\forall n \geq \bar{n}$:

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k + \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k - nl}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k}{n} + \frac{\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k - nl}{n} \right|$$

Essendo

$$\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k - nl = \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} a_k - (n - \bar{n})l - \bar{n}l = \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} (a_k - l) - \bar{n}l$$

Allora

$$|\sigma_n - l| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k}{n} + \frac{\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} (a_k - l)}{n} - \frac{\bar{n}l}{n} \right|$$

Osservando la quantità con il modulo, possiamo dire che

- $\frac{\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k}{N} < \varepsilon$ per $\bar{n} \leq N \; \forall n \geq \bar{n}$;
- $\frac{\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} (a_k - l)}{n} < \frac{1}{n} \sum_{k=\bar{n}+1}^{n} \varepsilon = \varepsilon \cdot \frac{n - \bar{n}}{n} = \varepsilon$ per $n \to \infty$;
- $\frac{\bar{n}l}{n} < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$ e $n > N$.

Allora, per l'arbitrarietà di ε si ha

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \,:\, |\sigma_n - l| < \varepsilon\, \forall n > \bar{n}$$

Cioè $(\sigma_n) \to l$ se $(a_n) \to l$.

□

Teorema 2.17 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)**.** *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.* **

B. Weierstrass

Dimostrazione. Essendo la successione a_n limitata esisteranno a_0 e b_0 tali per cui $a_n \subset [a_0, b_0]$. Dividendo $[a_0, b_0]$ in due intervalli uguali $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ e $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, almeno uno dei due intervalli conterrà termini per infiniti indici.
Chiamiamo tale intervallo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo l'operazione precedente. Otterremo così degli intervalli $[a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots$ ognuno contenuto nel precedente e lungo la metà di questo, in ciascuno dei quali cadranno termini per infiniti indici.

Procedendo in questo modo costruiremo due successioni a_k, b_k tali che $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$ e una sequenza di intervalli $I_k : [a_k, b_k]$, con $I_{k+1} \subset I_k$.
Essendo entrambe le successioni *monotone* e *limitate* esse sono convergenti, dunque risulta

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a$$
$$\lim_{k\to\infty} b_k = b$$

Considerando la differenza tra i due estremi di ogni intervallo, e passando al limite membro a membro otteniamo:

$$\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Il limite sinistro è uguale a $b - a$ per quanto detto prima, mentre il limite destro è zero. Da questo segue che $b = a$, dunque le successioni convergono allo stesso limite che chiameremo L.

Per estrarre una sottosuccessione convergente, dall'intervallo $[a_0, b_0]$ prendiamo un qualunque elemento della successione che chiamiamo x_{n_0}. Dall'intervallo $[a_1, b_1]$ prendiamo un ulteriore elemento della successione che chiameremo x_{n_1}. Al passo k-esimo, prendiamo il termine x_{n_k} dell'intervallo $[a_k, b_k]$.
Proseguendo in questo modo costruiamo una successione $(x_{n_k})_k$, si ha inoltre:

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

Facendo tendere k all'infinito, per il *teorema dei due carabinieri* (2.4), si ha che

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$$

□

** **Teorema 2.18** (Successioni di Cauchy). *Una successione* $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ (poiché completo) *converge se e solo se è una successione di Cauchy.* *Success.Cauchy*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Se la successione ammette limite L, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon/2$. Se anche m è maggiore di ν, si ha $|a_m - L| < \varepsilon/2$ e quindi, per $n, m > \nu$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) Supponiamo viceversa che la successione a_n sia di Cauchy, e cominciamo con il far vedere che è limitata.

Sia ν tale per cui per ogni $n, m \geq \nu$ risulti, data l'arbitrarietà di ε, $|a_n - a_m| < 1$. In particolare, si può prendere $m = \nu$ cosicché $|a_n - a_\nu| < 1$ per ogni $n \geq \nu$, si ha quindi:

$$|a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu| + 1$$

infatti se $n \leq \nu$ la disuguaglianza è ovvia, mentre se $n > \nu$ si ha

$$|a_n| \leq |a_\nu| + |a_n - a_\nu| < |a_\nu| + 1$$

Dunque a_n è limitata. Per il *teorema di Bolzano-Weierstrass* (2.17), è possibile estrarre una sottosuccessione $a_{k(n)}$ convergente a un numero L.
Dato che è di Cauchy, fissato $\varepsilon > 0$, esisterà ν tale che per ogni $m, n > \nu$ risulti

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre dato che la successione $a_{k(n)}$ converge ad L, solo un numero finito di termini cadranno fuori di $I(L, \varepsilon/2)$, dunque esisterà un $\bar{n} > \nu$, tale che

$$|a_{\bar{n}} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora, per ogni $n > \nu$ risulta

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e dunque a_n tende ad L.

□

Teorema 2.19 (Costante di Nepero)**.** *La successione* **

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Nepero *è crescente e limitata, dunque è convergente.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che a_n è crescente, cioè che per ogni $n \geq 2$ si ha $a_n \geq a_{n-1}$. E' chiaro che $a_n > 0$ per ogni n, quindi ci riconduciamo a verificare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$.

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

Osserviamo ora che la *disuguaglianza di Bernoulli* (1.2) garantisce

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

da cui si ottiene, come volevamo, $a_n/a_{n-1} \geq 1$ cioè a_n è crescente.

Se ora consideriamo la successione

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

osserviamo che si ha

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Per dimostrare che a_n è limitata sarà quindi sufficiente dimostrare che b_n è superiormente limitata. Vedremo ora che b_n è decrescente (e quindi $a_n \leq b_n \leq b_1$ è superiormente limitata).

Procediamo in maniera analoga a quanto fatto per a_n:

$$\begin{aligned}\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

In base alla *disuguaglianza di Bernoulli* (1.2) otteniamo

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1} \geq 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

Mettendo insieme le due stime si ottiene dunque $b_{n-1}/b_n \geq 1$ che è quanto ci rimaneva da dimostrare. □

* **Definizione 2.6** (Costante di Nepero)**.** Definiamo la *costante di Nepero*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Nepero

Sapendo che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e ponendo $n = 1$ otteniamo $2 \leq e \leq 4$.

* **Teorema 2.20** (approssimazione di e)**.** *Risulta*

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n\cdot n!}.$$

In particolare per $n = 5$ si ottiene

$$2.716 < e < 2.719$$

Dimostrazione. Posto

$$R_n = e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

risulta

$$n!R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$$

e osservando che per $k > n$ si ha

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\dots(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

otteniamo

$$n!R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^j$$
$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

Per $n = 5$ si ha

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120}$$

Dunque da un lato

$$e \geq \frac{326}{120} \geq 2.716$$

e dall'altro

$$e \leq \frac{326}{120} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \leq 2.717 + 0.002 = 2.719$$

□

Teorema 2.21 (Teorema sul riordinamento). *Se la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente e $\sum \alpha_n$ è un suo riordinamento, allora anche $\sum \alpha_n$ è convergente e si ha* **

$$\sum a_n = \sum \alpha_n$$

Riordinam. 1

Dimostrazione. (**Termini positivi**) Supponiamo per ora che la serie $\sum a_n$ (e quindi anche $\sum \alpha_n$) sia a termini positivi. Indicando con s_n e σ_n le successioni delle somme parziali delle due serie, e ponendo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

si ottiene

$$\sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_n} \leq S$$

quindi la serie $\sum \alpha_n$ converge e si ha

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n \leq S$$

D'altra parte, anche $\sum a_n$ è un riordinamento di $\sum \alpha_n$, e ripetendo il ragionamento precedente si ottiene $S \leq \sigma$, da cui

$$S = \sigma$$

(**Termini negativi**) Se ora $\sum a_n$ non è una serie a termini positivi, poniamo

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad e \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

e analogamente

$$\beta_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{se } \alpha_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha_n < 0 \end{cases} \qquad e \qquad \gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n \geq 0 \\ -\alpha_n & \text{se } \alpha_n < 0 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{array}{ll} 0 \leq b_n \leq |a_n| & 0 \leq c_n \leq |a_n| \\ 0 \leq \beta_n \leq |\alpha_n| & 0 \leq \gamma_n \leq |\alpha_n| \end{array}$$

e inoltre

$$\begin{array}{ll} a_n = b_n - c_n & |a_n| = b_n + c_n \\ \alpha_n = \beta_n - \gamma_n & |\alpha_n| = \beta_n + \gamma_n \end{array}$$

Poiché la serie $\sum |a_n|$ converge, per il *criterio del confronto* (2.8) saranno convergenti anche le serie $\sum b_n$ e $\sum c_n$ (a termini positivi).
D'altra parte, le serie $\sum \beta_n$ e $\sum \gamma_n$ sono riordinamenti delle serie $\sum b_n$ e $\sum c_n$ rispettivamente. Per quanto dimostrato precedentemente, ne segue che

$$\sum \beta_n = \sum b_n \quad \text{e} \quad \sum \gamma_n = \sum c_n$$

e infine

$$\sum \alpha_n = \sum \beta_n - \sum \gamma_n = \sum b_n - \sum c_n = \sum a_n$$

□

** **Teorema 2.22** (Teorema di Riemann-Dini)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie reale convergente ma non assolutamente convergente, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ esiste un riordinamento di $\sum a_n$ che converge a λ.* *Riemann-Dini*

Dimostrazione. Esaminiamo il caso$\lambda \in \mathbb{R}^+$, i casi $\lambda \in \mathbb{R}^- \cup \{\pm\infty\}$ sono analoghi.

Osserviamo che la serie $\sum a_n$ contiene infiniti termini strettamente positivi e infiniti termini strettamente negativi, altrimenti essa avrebbe termini definitivamente a segno costante e quindi, essendo convergente, sarebbe anche assolutamente convergente. Poniamo

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad e \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

si ha $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| = \sum_{n=0}^{N} b_n + \sum_{n=0}^{N} c_n$$
$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} b_n - \sum_{n=0}^{N} c_n$$

possiamo dedurre che

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = +\infty$$

Infatti, se entrambe le serie fossero convergenti allora anche $\sum |a_n|$ sarebbe convergente, mentre se solo una delle due serie fosse convergente otterremo che $\sum a_n$ diverge.
Inoltre dato che la serie converge semplicemente, il termine generale di a_n deve tendere a 0 quando $n \to \infty$, dunque anche $|a_n|$ è infinitesimo; dato che si ha $0 \leq b_n, c_n \leq |a_n|$, possiamo affermare che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

Con queste premesse, fissiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ e costruiamo una serie riordinando i termini di $\sum a_n$ che soddisfi la tesi.
In linea generale, sarà formata da un certo numero di b_n, seguita da un certo numero di a_n, poi ancora dei b_n e così via, in modo da oscillare attorno al valore λ.
Costruiamo dunque successioni crescenti di indici, $\{m_n\}$ e $\{k_n\}$, e formiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{m_1} b_n - \sum_{n=0}^{k_1} c_n + \sum_{n=m_1+1}^{m_2} b_n - \sum_{n=k_1+1}^{k_2} c_n + \cdots +$$
$$+ \cdots + \sum_{m_{h-1}+1}^{m_h} b_n - \sum_{k_{h-1}+1}^{k_h} c_n + \cdots$$

Definiamo gli indici m_n e k_n: m_1 è il minimo numero naturale per cui si abbia

$$\sum_{n=0}^{m_1} b_n > \lambda + 1$$

mentre k_1 è il minimo numero naturale per cui risulti

$$\sum_{n=0}^{m_1} b_n - \sum_{n=0}^{k_1} c_n < \lambda - 1$$

L'esistenza di tali indici è garantita dal fatto entrambe le serie $\sum b_n$ e $\sum c_n$ divergono. In generale, definiremo m_h e k_h come i minimi indici, maggiori rispettivamente di m_{h-1} e k_{h-1}, tali che

$$\sum_{n=0}^{m_1} b_n - \sum_{n=0}^{k_1} c_n + \cdots + \sum_{m_{h-1}+1}^{m_h} b_n > \lambda + \frac{1}{h}$$
$$\sum_{n=0}^{m_1} b_n - \sum_{n=0}^{k_1} c_n + \cdots + \sum_{m_{h-1}+1}^{m_h} b_n - \sum_{k_{h-1}+1}^{k_h} c_n < \lambda - \frac{1}{h}$$

Chiamiamo con s_n la somma parziale della serie appena definita, e con σ_n e τ_n le seguenti somme parziali

$$\sigma_n = s_{m_1+k_1+\cdots+m_n} \qquad \tau_n = s_{m_1+k_1+\cdots+m_n+k_n}$$

Si ha, per la minimalità di m_n e k_n,

$$\sigma_n - b_{m_n} \leq \lambda + \frac{1}{n} < \sigma_n \qquad \tau_n < \lambda - \frac{1}{n} \leq \tau_n + c_{k_n}$$

dunque sia σ_n che τ_n tendono a λ per $n \to \infty$.
D'altra parte, considerando una generica somma parziale s_n, esisterà un unico indice h tale che sia vera una delle due relazioni

$$m_1 + k_1 + \cdots + m_h \leq n \leq m_1 + k_1 + \cdots + m_h + k_h$$

oppure

$$m_1 + k_1 + \cdots + m_h + k_h \leq n \leq m_1 + k_1 + \cdots + m_h + k_h + m_{h+1}$$

ne segue

$$\tau_h \leq s_n \leq \sigma_h, \quad \text{oppure} \quad \tau_h \leq s_n \leq \sigma_{h+1}$$

dunque per il *teorema dei due carabinieri* (2.4) anche s_n converge a λ per $n \to \infty$. □

Capitolo 3

Funzioni e continuità

Definizione 3.1 (Funzione)**.** Una funzione è una corrispondenza (o legge) che collega gli elementi di due insiemi associando ad ogni elemento dell'insieme di partenza, uno ed un solo elemento dell'insieme d'arrivo.

$$\forall a \in A \quad \exists_1\, b \in B \quad \text{tale che} \quad : a \to b$$

* **Definizione 3.2** (Suriettività)**.** In matematica, una funzione si dice suriettiva (o *surgettiva*, o una *suriezione*) quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio.

In tal caso si ha che l'immagine coincide con il codominio. Suriettività

* **Definizione 3.3** (Iniettività)**.** In matematica, una funzione iniettiva (detta anche funzione *ingettiva* oppure *iniezione*) è una funzione che associa, a elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio.

In altre parole: una funzione da un insieme X a un insieme Y è iniettiva se ogni elemento di Y non può essere ottenuto in più modi diversi partendo dagli elementi di X. Iniettività

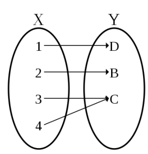


Figura 3.1: Funzione suriettiva

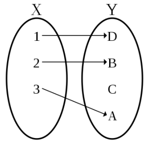


Figura 3.2: Iniettiva

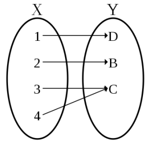


Figura 3.3: Non iniettiva

Teorema 3.1. *Una funzione f strettamente monotona è iniettiva.*

Dimostrazione. Per la definizione di monotonia stretta si ha

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in A \subset \mathbb{R}, x_1 < x_2 &\implies f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 > x_2 &\implies f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

il che equivale a dire che f è iniettiva, infatti risulta

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \implies x_1 < x_2 \vee x_1 > x_2$$

sfruttando l'ipotesi di monotonia otteniamo

$$f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$$

questo equivale a dire che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

che è la definizione di iniettività.

□

Teorema 3.2 (Limite notevole)**.** *Dimostrazione del limite notevole*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dimostrazione. Dato che $\frac{\sin x}{x}$ è una *funzione pari*, basta considerare il caso $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Nella circonferenza goniometrica in figura sono riportati l'arco x e i corrispondenti segmenti di lunghezza $\sin x$ e $\tan x$.

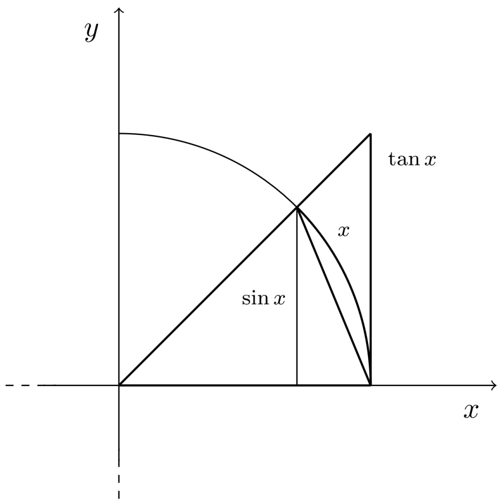


Figura 3.4: Rappresentazione grafica del limite

L'area del triangolo di altezza $\sin x$ e base 1 è $\frac{1}{2}\sin x$, quella del settore circolare che lo contiene è $x/2$ e quella del triangolo di base 1 e altezza $\tan x$ è $\frac{1}{2}\tan x$. Si ha comunque

$$\sin x < x < \tan x$$

dividendo tutto per $\sin x$ e invertendo otteniamo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

dato che $\cos x$ tende ad uno per x che tende a zero, per il *teorema dei due carabinieri* (2.4), anche $\frac{\sin x}{x}$ tende ad 1. □

* **Teorema 3.3** (Teorema unicità del limite)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo A, e sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste, esso è unico.* *Unicità limite*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la funzione ammetta due limiti l_1, l_2 con $l_1 \neq l_2$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $l_1 < l_2$. Risulta quindi, per la definizione di limite, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_1 > 0$ tale che, se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_1$ si abbia

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$

Similmente, esisterà un δ_2 tale che, $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_2$ si abbia

$$|f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Queste due eguaglianze sono verificate qualunque sia $\varepsilon > 0$, prendiamo quindi $0 < \varepsilon < (l_2 - l_1)/2$. Chiamiamo ora con δ il minimo tra δ_1 e δ_2 (così da avere verificate entrambe le relazioni)

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

Per ogni x che soddisfa la relazione $0 < |x - x_0| < \delta$ abbiamo

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$
$$|f(x) - l_2| < \varepsilon$$

ovvero

$$l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$$
$$l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$$

Affinché $f(x)$ soddisfi entrambe le disuguaglianze dobbiamo richiedere che esso sia maggiore del valore più grande tra $l_1 - \varepsilon$ e $l_2 - \varepsilon$ e, allo stesso tempo, minore del valore più piccolo tra $l_1 + \varepsilon$ e $l_2 + \varepsilon$, cioè

$$l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \implies l_2 - \varepsilon < l_1 + \varepsilon \implies \varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$$

che è in contraddizione con la scelta fatta di ε cioè che $\varepsilon < (l_2 - l_1)/2$. L'assurdo segue dall'ipotesi di non unicità del limite, pertanto il limite deve necessariamente essere unico.

$\square$

Teorema 3.4. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se e solo se, per ogni successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

($\Longrightarrow$) *Dimostrazione.* Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e sia x_n una qualsiasi successione in $A - \{x_0\}$ convergente a x_0. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$. D'altra parte $x_n \to x_0$, quindi esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \nu$, risulta $0 < |x_n - x_0| < \delta$ e dunque $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Di conseguenza di ha

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

Viceversa, supponiamo che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ per ogni successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0. $(\Longleftarrow)$

Se non fosse $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, dovrebbe esistere un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\delta > 0$, sarebbe possibile trovare un punto $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Preso successivamente $\delta = 1, 1/2, \ldots, 1/n$ si troverebbero allora dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di $A - \{x_0\}$ per i quali risulterebbe $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

La successione x_n così costruita converge a x_0, ma non si ha $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Contro l'ipotesi, deve dunque essere $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

□

* **Teorema 3.5** (Teorema della permanenza del segno)**.** *Data $f : A \to \mathbb{R}$ sia $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $L \neq 0$, allora esiste un intorno di x_0 contenuto in A nel quale la funzione assume lo stesso segno del limite.* *Perman. segno*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui il limite L esista finito, dunque si ha, per la *definizione di limite* (2.2), che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$, tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

ovvero

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Dato che questa relazione vale per ogni ε positivo, poniamo $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$. Abbiamo dunque

$$L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}$$

Per ipotesi sappiamo che $L \neq 0$, dunque può essere positivo oppure negativo.

Se $L > 0$ allora $|L| = L$ e la relazione precedente diventa

$$\frac{L}{2} < f(x) < 3\frac{L}{2}$$

Possiamo dunque affermare che esiste un intorno di x_0 nel quale la funzione $f(x)$ è positiva, in quanto $f(x) > L/2 > 0$, per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Se L è negativo, si ha $|L| = -L$ dunque

$$3\frac{L}{2} < f(x) < \frac{L}{2}$$

Possiamo così concludere che esiste un intorno di x_0 nel quale $f(x)$ è negativa, in quanto $f(x) < L/2 < 0$, per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$. □

Definizione 3.4 (Continuità di una funzione in un punto)**.** Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice continua in un punto $x_0 \in A$ se **

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si noti che il δ dipende sia dal punto x_0 che si sta considerando, sia da ε. Una funzione f è continua in $A \subseteq \mathbb{R}$ se è continua in ogni punto di A.

Teorema 3.6 (Teorema zeri di una funzione)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo $I : [a, b]$. Se si ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.* **

Zeri funzione

Dimostrazione. (Con il metodo della bisezione) Senza perdita di generalità, possiamo scegliere $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Consideriamo $\frac{a+b}{2}$ e distinguiamo tre casi:

- se $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ allora abbiamo finito;
- se $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, allora poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$;
- se $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, allora poniamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b_0$.

In ogni caso abbiamo ottenuto che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$, ripetendo il procedimento iterativamente al k-esimo passaggio troviamo un intervallo $[a_k, b_k]$ tale che

$$f(a_k) < 0 \qquad e \qquad f(b_k) > 0$$

Se consideriamo la differenza tra gli estremi del nostro intervallo possiamo affermare che:

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

Inoltre a_n è debolmente crescente e limitata dall'alto da b, b_n è debolmente decrescente e limitata dal basso da a. Quindi:

$$a_n \to a_\infty \qquad b_n \to b_\infty$$

per il *teorema delle successioni monotone* e $a_\infty = b_\infty$ perché $b_k - a_k \to 0$.

Chiamato c il valore comune avremo:

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0 \qquad e \qquad f(c) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0$$

e l'unica possibilità è che $f(c) = 0$. □

Dimostrazione. (Con Dedekind) Senza perdita di generalità poniamo $f(a) < 0 < f(b)$. Supponiamo per assurdo che $f(x)$ sia diverso da zero per ogni x dell'intervallo Definiamo l'insieme E nel seguente modo

$$E = \{x \in [a; b] : f(x) < 0\}$$

L'insieme E non è vuoto, poiché contiene a, inoltre E è limitato superiormente da b in quanto $E \subset [a, b]$, dunque per *l'assioma di Dedekind* (1.7) esiste $x_0 = \sup\, E \leq b$. Ricordiamo brevemente le proprietà dell'estremo superiore

1. x_0 è un maggiorante di E ($x \leq x_0\ \forall x \in E$);

2. $\forall \varepsilon > 0$, $x_0 - \varepsilon$ non è più un maggiorante di E (ovvero x_0 è il minimo dei maggioranti di E).

Il valore $f(x_0)$ è diverso da zero, ed è quindi positivo o negativo. In entrambi i casi si giunge ad un assurdo:

- Se $f(x_0) < 0$ per il *teorema della permanenza del segno di funzioni continue* (3.5) esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intorno $(x_0, x_0 + \delta) \in [a, b]$ vale $f(x) < 0$, si avrebbe dunque $f(x_0+\delta) < 0$ con $x_0+\delta > x_0$, ciò è assurdo perché in contrasto con la prima proprietà dell'estremo superiore;

- Se $f(x_0) > 0$, sempre per il *teorema della permanenza del segno di funzioni continue* (3.5) esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intorno $(x_0 - \delta, x_0) \in [a, b]$ vale $f(x) > 0$, il che è in contrasto con la seconda proprietà dell'estremo superiore.

□

* **Teorema 3.7** (Teorema dei valori intermedi). *Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo Q assume tutti i valori compresi tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $f(x)$.*

Valori intermedi

Dimostrazione. Sia y_0 un numero compreso tra $\sup f(x)$ e $\inf f(x)$. Esisteranno due punti a, b in Q tali che

$$\inf f(x) \leq f(a) < y_0 < f(b) < \sup f(x)$$

Introduciamo la funzione $g(x) = f(x) - y_0$ continua in Q. Risulta dunque

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0 \qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

Allora per il *teorema degli zeri* (3.6) di una funzione continua, esiste x_0 compreso tra a e b tale che $g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$, dunque $f(x_0) = y_0$. □

Teorema 3.8 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato (vale a dire in un compatto) e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(x)$ ammette massimo e minimo in tale intervallo.* **

Weierstrass

Dimostrazione. Dimostriamo ad esempio che la funzione f ha massimo (il caso del minimo è uguale).

Sia M l'estremo superiore della funzione f in $[a, b]$, e sia $\lambda < M$. Essendo M l'estremo superiore, esisterà un punto $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) > \lambda$. In particolare, prendendo $\lambda = M - \frac{1}{n}$, troveremo una successione x_n con $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, e quindi tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

Dato che e $[a, b]$ è compatto, dalla successione x_n, per il *teorema di Bolzano-Weierstrass* (2.17), si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente ad un punto $\bar{x} \in [a, b]$. Per la continuità di f si ha allora

$$x_{k_n} \to \bar{x} \implies f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M$$

e quindi x_0 è il punto di massimo cercato. □

Se definiamo la funzione su tutto $\mathbb{R}$? Se la funzione fosse definita su tutto $\mathbb{R}$, il *teorema di Weierstrass* (3.8) non varrebbe più, infatti non è più possibile applicare il *teorema di Bolzano-Weierstrass* (2.17) perché non si è più in un compatto. Come esempio pensare alla funzione $f(x) = x$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

Teorema 3.9. *Una funzione f, continua e invertibile in un intervallo I, è monotona in tale intervallo.*
Sia f una funzione continua e invertibile in un intervallo I, allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. (Lemma) Supponiamo per assurdo che f non sia monotona. Per negare simultaneamente che sia crescente e decrescente, supponiamo che essa ammetta un'oscillazione Esisteranno quindi tre punti, $x_1 < x_2 < x_3$ tali che, ad esempio, $f(x_1) < f(x_2)$ ma $f(x_3) < f(x_2)$. Per ipotesi f è iniettiva, dunque $f(x_1) \neq f(x_3)$, supponiamo ad esempio che sia $f(x_1) < f(x_3)$. Per il *teorema dei valori intermedi* (3.7), applicato nell'intervallo $[x_1, x_2]$, dato che $f(x_3)$ è un valore intermedio tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ esiste necessariamente un $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_0) = f(x_3)$, pur essendo $x_0 < x_2 < x_3$, il che contraddice l'ipotesi di iniettività di f.

Dimostriamo ora che f^{-1} è continua. Dato che f è continua essa trasforma intervalli in intervalli, dunque $J = f(I)$ è un intervallo. Sappiamo inoltre per il

lemma appena dimostrato che f è monotona, possiamo supporre senza perdita di generalità che sia monotona crescente, dunque anche f^{-1} è crescente.
Prendiamo un punto $y_0 \in J$, dato che f^{-1} è monotona crescente avremo

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) \leq \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$$

Osserviamo però che i due limite devono necessariamente essere uguali. Infatti, se fosse presente un salto in y_0 la funzione f assumerebbe al massimo un solo valore dell'intervallo I, il che non è possibile poiché f é continua su tutto I. Quindi si ha

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

dunque $f^{-1}(y)$ è continua su tutto J. □

** **Definizione 3.5** (Uniforme continuità). Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Che differenza c'è? La differenza tra continuità semplice ed uniforme sta nella dipendenza del δ: nella continuità semplice il δ dipenderà sia ε che dal punto x_0, mentre nella continuità uniforme il δ dipenderà sì, da ε, ma non più dalla scelta del punto x_0.

Teorema 3.10. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e sia A limitato, allora $f(A)$ è limitata.*

Dimostrazione. Prendendo $\varepsilon = 1$ nella *definizione di uniforme continuità* (3.5), possiamo affermare che esiste un δ tale che se $x_1, x_2 \in A$ e $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Poiché A è limitato si può ricoprire quest'ultimo con un numero finito di intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ognuno di ampiezza δ, tali che ogni punto x di A sarà contenuto in uno degli intervalli I_i . Si avrà dunque, per qualche i compreso tra 0 ed n, $|x - x_i| < \delta$ e quindi

$$|f(x) - f(x_i)| < 1$$

Inoltre, per la *disuguaglianza triangolare inversa* (1.12), si ha

$$|f(x)| - |f(x_i)| \leq |f(x) - f(x_i)|$$

e quindi ponendo M pari a

$$M = |f(x_0)| + |f(x_1)| + \cdots + |f(x_n)|$$

si ottiene

$$|f(x)| - |f(x_i)| < 1 \implies |f(x)| < |f(x_i)| + 1 < M + 1$$

□

Definizione 3.6 (Funzione Lipschitziana)**.** Sia I un intervallo eventualmente illimitato in $\mathbb{R}$. **

Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ per cui si ha:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

o equivalentemente

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L, \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \neq x_2$$

Teorema 3.11 (Teorema di Heine-Cantor)**.** *Se una funzione f è continua in un intervallo Q chiuso e limitato (quindi compatto), allora essa è uniformemente continua in tale insieme.* **

Heine-Cantor

Dimostrazione. Il seguente teorema si dimostra supponendo per assurdo che la $f(x)$ non sia uniformemente continua, cioè negando la definizione di uniforme continuità, che ricordiamo essere:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Una funzione non uniforme continua risponde alla seguente definizione:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x, y \in A : |x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

In particolare, data l'arbitrarietà di δ, posso scegliere successivamente $\delta = 1, 1/2, \ldots, 1/n$ tale da costruire due successioni x_n e y_n a valori in Q tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad (1)$$

ma

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0 \qquad (2)$$

Poiché Q è compatto, per il *teorema di Bolzano-Weierstrass* (2.17) si possono estrarre due sottosuccessioni x_{n_k} e y_{n_k} convergenti a dei punti $\bar{x}, \bar{y} \in Q$. Dalla (1) segue inoltre che $\bar{y}$ deve essere uguale a $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \bar{y}$$

Poiché f è continua deve allora essere

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$$

il che contraddice la (2).

□

Perché compatto? La compattezza dell'insieme è necessaria per avere una sottosuccessione convergente, altrimenti non sarebbe sempre vero che comunque presa una sottosuccessione questa convergerebbe.

Definizione 3.7 (Funzione $\alpha-$ hölderiana)**.** Si definisce una funzione α -hölderiana un funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con tale per cui:

$$\exists M \geq 0, \exists 0 < \alpha \leq 1 : \forall x_1, x_2 \in I, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$$

Per capire meglio: Si noti che per $\alpha = 1$ la funzione $\alpha-$hölderiana è anche lipschitziana e che se si hanno α, β con $0 < \alpha < \beta \leq 1$, si ha che:

$$|x_1 - x_2|^\alpha > |x_1 - x_2|^\beta$$

quindi se la funzione è $\beta-$hölderiana, questa sarà anche $\alpha-$hölderiana. Per concludere possiamo chiederci perché si imponga che $\alpha \leq 1$ e perché $\alpha > 0$: se $\alpha = 0$, la condizione di hölder si limiterebbe alla limitatezza della funzione, mentre se avessimo $\alpha > 1$ potremmo riscrivere il tutto come:

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \leq |x_2 - x_1|^{\alpha - 1}$$

ma da questa è possibile anche vedere che il rapporto incrementale tendebbe a zero per $x_1 \to x_2$, da cui le uniche funzioni che rispetterebbero la condizione di hölder sarebbero quelle costanti, di poco interesse.

Teorema 3.12. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione $\alpha-$hölderiana, questa sarà anche uniformemente continua in tale intervallo.*

Dimostrazione. Affinché una funzione sia *uniformemente continua (3.5)* si deve avere che:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Per ipotesi, la nostra funzione è $\alpha-$ hölederiana:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha \leq M\delta^\alpha$$

Con $\delta = |x_1 - x_2|$. Affinché la funzione risulti uniformemente continua, sarà sufficiente trovare un ε tale per cui:

$$M\delta^\alpha \leq \varepsilon$$

e questa disuguaglianza risulta vera per

$$\delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$$

In particolare se $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ la funzione sarà *Lipschitziana (3.6)* □

Corollario 3.13 (Lipschitziana e uniforme continuità)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana , questa sarà anche uniformemente continua in tale intervallo.*

Definizione 3.8 (Funzione assolutamente continua)**.** Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione *assolutamente continua* se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall k, j \in \mathbb{N}, (x_k, y_k) \cap (x_j, y_j) = \emptyset \qquad k \neq j$$

con (x_k, y_k) una successione di sottointervalli, se:

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \Longrightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

Teorema 3.14 (Assoluta e uniforme continuità)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua, questa sarà anche uniformemente continua in tale intervallo.*

Dimostrazione. Per ipotesi la nostra funzione è assolutamente continua, cioè:

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta \Longrightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

pertanto è possibile considerare un solo intervallo (anziché la sommatoria degli intervalli) ottenendo semplicemente la definizione di continuità uniforme (3.5). □

Non è vero il viceversa: Una funzione uniformemente continua non è detto che sia assolutamente continua; vedere:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

* **Teorema 3.15** (Limite della derivata e non uniforme continuità). *Sia f una funzione tale che $f \in C^1$ nell'intervallo $[a, +\infty)$, se $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm\infty$ allora f non è uniformemente continua su $[a, +\infty)$*

Dimostrazione. Una funzione non uniformemente continua risponde alla seguente:

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0 : \exists x, y \in A : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Essendo $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ scegliamo ε, δ tali che

$$\exists M : \forall\xi > M \implies f'(\xi) > \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

Dati $x, y > M$ con $y = x + \delta$ si ha:

$$|x - y| \leq \delta$$

e anche che

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \geq \frac{2\varepsilon}{\delta}\delta = 2\varepsilon$$

Pertanto la nostra funzione non è uniformemente continua. □

Nota bene: Se la derivata f' della mia funzione non è limitata, quanto detto prima non è valido e la mia f potrebbe essere uniformemente continua; provare con

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3) \quad \text{in } [1, +\infty)$$

Teorema 3.16. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua e x_0 un punto di acculumulazione di A, allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di uniforme continuità:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in A : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Sia $x_n \in A$ una successione convergente al punto x_0 si ha che:

$$\exists\nu : \forall n, m \geq \nu,\ |x_n - x_m| < \delta \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

pertanto $f(x_n)$ risulta di Cauchy e quindi convergente ad un valore che chiameremo L.

Sia ora y_n un'ulteriore successione convergente allo stesso x_0, possiamo dire che anche $f(x_n)$ tenda ad L (lo stesso L)? Se sia x_n che y_n sono convergenti allo stesso x_0 il modulo della loro differenza sarà infinitesimo:

$$|x_n - y_n| \to 0$$

Quindi

$$\exists \nu \colon \forall n > \nu,\ |x_n - y_n| < \delta \Longrightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Essendo x_0 un punto di accumulazione, possiamo farne il limite di $x \to x_0$

$$\exists \nu \colon \forall n \geq \nu,\ f(x_n) \to L \Longrightarrow f(y_n) \to L$$

cioè tendono allo stesso valore. Possiamo quindi estendere il ragionamento e dire che:

$$\forall z_n \to x_0,\ f(z_n) \to L \Longrightarrow \exists \lim_{z \to x_0} f(x) = L$$

□

Corollario 3.17 (Estensione con continuità). *Sia f una funzione uniformemente continua in A, allora essa si può estendere a $\hat{f}$ continua (uniformemente continua) su chiusura di A.* **

$$\bar{A} = A \cup \{\bar{x} \text{ di accumulazione per } A\}$$

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \lim_{y \to x} f(y) & x \text{ di accumulazione per } A,\ x \notin A \end{cases}$$

Teorema 3.18. *Sia f una funzione uniformemente continua su $[a, b]$ e anche su $[b, c]$, allora tale funzione sarà uniformemente continua anche su $[a, c]$.*

Dimostrazione. Essendo la funzione uniformemente continua su $[a, b]$, dalla definizione si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x_1', x_2' \in [a, b] : |x_1' - x_2'| < \delta_1 \implies |f(x_1') - f(x_2')| < \varepsilon$$

Analogamente sarà possibile dire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x_1'', x_2'' \in [b, c] : |x_1'' - x_2''| < \delta_2 \implies |f(x_1'') - f(x_2'')| < \varepsilon$$

Sia $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, possiamo combinare le due espressioni sopra in questo modo:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \vee [b, c] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

quindi se riusciamo a definire un ε tale per cui la relazione sopra è valida, avremo dimostrato il teorema.

Se $x_1 \in [a,b]$ e $x_2 \in [b,c]$

$$|x_1 - b| \leq |x_1 - x_2| \leq \delta_1$$
$$|x_2 - b| \leq |x_1 - x_2| \leq \delta_2$$

Allora avremo:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(b)| + |f(b) - f(x_2)| \leq 2\varepsilon$$

□

* **Definizione 3.9** (Asintoto obliquo). Sia $f : dom\,(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che il suo dominio sia illimitato sia superiormente che inferiormente, o equivalentemente supponiamo esista $M > 0$ tale per cui la funzione sia definita per $x < -M$ e $x > M$. Diciamo che

$$r : y = mx + q \quad \text{con} \quad m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$$

è l'asintoto obliquo della funzione $f(x)$ se valgono le condizioni

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad e \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q$$

distinguendo l'asintoto obliquo sinistro con il limite per $x \to -\infty$ e quello destro con il limite per $x \to +\infty$.

Teorema 3.19. *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, +\infty)$, se ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ allora è uniformemente continua in $[a, +\infty)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che $\forall x > M$ si ha $|f(x) - (mx + q)| < \varepsilon$, possiamo quindi considerare gli intervalli $[a, M]$ e $[M, +\infty)$.

Nel primo intervallo la funzione è uniformemente continua per il *teorema di Heine-Cantor* (3.11).

Siano ora $x, y \in [M, +\infty)$, si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - (mx + q)| + |mx + q - f(y)| < \varepsilon + |mx + q - f(y)|$$

Inoltre una funzione del tipo $h(x) = mx+q$ è certamente uniformemente continua, ovvero per l'ε fissato in precedenza esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in [M, +\infty)$ e

$|x-y|<\delta$ allora $|h(x)-h(y)|<\varepsilon$, ovvero $|mx+q-my-q| = |m(x-y)| < \varepsilon$. Consideriamo quindi la seguente catena di disuguaglianze

$$\varepsilon + |mx+q-f(y)| \leq \varepsilon + |m(x-y)| + |my+q-f(y)| < 3\varepsilon$$

Si ha dunque, per ogni $x, y \in [M, +\infty)$ tali che $|x-y|<\delta$

$$|f(x)-f(y)| < 3\varepsilon$$

Pertanto la condizione di uniforme continuità è verificata anche nell'intervallo $[M, +\infty)$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, chiamando δ_{min} il minore tra il δ che soddisfa la condizione di *uniforme continuità* (3.5), in $[a, M]$ e il δ che soddisfa tale condizione in $[M, +\infty)$, si ha infine che

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_{min} : \forall x, y \in [a, +\infty) \\ \text{tali che} \quad |x-y| < \delta_{min} \quad \text{si ha} \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon\end{gathered}$$

dunque f è uniformemente continua in $[a, +\infty)$. □

Farfalla

Teorema 3.20 (Teorema della farfalla)**.** *Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, allora esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \leq mx + q$.*

Dimostrazione. Per la *definizione di uniforme continuità* (3.5), abbiamo che

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta : \forall x', x'' \in [0, +\infty), \quad |x'-x''| < \delta \implies |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

Allora preso un qualunque $x \geq 0$ prendiamo un $n \in \mathbb{N}$ che soddisfi la seguente relazione

$$n\delta \leq x < (n+1)\delta$$

L'esistenza di n è garantita dall'*assioma di Archimede* (1.9). A questo punto, dividiamo l'intervallo $[0, x]$ in $n+1$ sottointervalli di ampiezza $\frac{x}{n+1}$, mediante i punti $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, con $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x$ e $x_{i+1} - x_i = \frac{x}{n+1} < \delta$. Avremo dunque

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(0)| = |f(x_{n+1})-f(x_0)| = \\ =&|f(x_{n+1})-f(x_n)+f(x_n)+\cdots-f(x_1)+f(x_1)-f(x_0)| = \\ =&\left|\sum_{i=0}^{n} f(x_{n+1})-f(x_i)\right| \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n}|f(x_{n+1})-f(x_i)| < (n+1)\varepsilon}_{\text{per l'ipotesi di uniforme continuità}} = \\ =&n\varepsilon+\varepsilon = \delta^{-1}(n\delta)\varepsilon+\varepsilon \leq \delta^{-1}x\varepsilon+\varepsilon\end{aligned}$$

Ricapitolando, abbiamo dimostrato la seguente relazione

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\delta}x + \varepsilon$$

Inoltre si ha, per *disuguaglianza triangolare inversa* (1.12)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{\delta} + \varepsilon \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{\delta} + \varepsilon + |f(x_0)|$$

che dimostra la tesi, ponendo $m = \frac{\varepsilon}{\delta}$ e $q = \varepsilon + |f(x_0)|$. $\square$

Capitolo 4

Derivate

** **Definizione 4.1** (Derivabilità di una funzione in un punto). Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in un punto $x_0 \in A$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o analogamente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando ciò avviene tale limite si chiama *derivata della funzione* f nel punto x_0.

** **Definizione 4.2** (Limite di una funzione). Sia f una funzione tale che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \forall M \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 : f(x) \geq M$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \forall M \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 : f(x) \leq M$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +l \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \text{NON ESISTE se le precedenti sono false}$$

Tutte valide per $\forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

* **Teorema 4.1** (Derivabilità e continuità). *Sia $f : A \to R$ derivabile in $x_0 \in A$, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che f è continua in x_0, vale a dire che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

o equivalentemente che

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Consideriamo la seguente uguaglianza

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0)$$

e riscriviamola nella forma

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h$$

e passiamo ora al limite per $h \to 0$ ad entrambi i membri

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(x_0+h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h = \\ &= \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h\end{aligned}$$

Il primo limite al secondo membro è il limite di una funzione costante. Il secondo limite lo riscriviamo come prodotto di due limiti e otteniamo

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} h$$

Essendo la funzione derivabile in x_0, i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale esistono finiti e coincidono.

Ponendo $c = f'(x_0) \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + c \cdot 0$$

ovvero

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

□

Teorema 4.2 (Derivata funzione inversa)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua e invertibile in A e sia $x_0 \in A$. Se esiste $f'(x_0) \neq 0$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha* *

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. La derivata della funzione inversa f^{-1} calcolata in y_0 è, per definizione, data da

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Per ipotesi la funzione f è continua e invertibile, dunque anche la funzione f^{-1} è continua, ovvero se y tende a y_0 allora $f^{-1}(y)$ tende a $f^{-1}(y_0)$.

Essendo $f^{-1}(y)$ pari a x, possiamo scrivere

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Dato che $f'(x_0)$ esiste ed è diverso da zero, si ha infine

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

** **Teorema 4.3** (Teorema di Fermat). *Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo (o di minimo), se f è derivabile in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$.* *Fermat*

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdere di generalità che x_0 sia un punto di massimo relativo, la dimostrazione nel caso di minimo relativo è analoga. Se x_0 è un punto di massimo relativo esiste un intorno I di tale punto nel quale si ha $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$.
Andando a scrivere i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ del rapporto incrementale avremo quindi

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Essendo f per ipotesi derivabile in x_0 i due limiti, destro e sinistro, devono coincidere, quindi deve necessariamente essere $f'(x_0) = 0$. □

** **Teorema 4.4** (Teorema di Darboux). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $[a,b]$ con $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.* *Darboux*

Dimostrazione. Dalla definizione di *derivabilità (4.1)*, essendo $f'(a) < 0$ si ha che nell'intervallo $[a, a+\delta)$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \Longrightarrow f(x) < f(a) \qquad \forall x \in [a, a+\delta)$$

Analogamente, essendo $f'(b) > 0$ si ha che nell'intervallo $(b-\delta, b]$

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0 \Longrightarrow f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (b-\delta, b]$$

in quanto $x - b$ è una quantità negativa.

La funzione $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$, pertanto sarà continua in tale intervallo. Con la continuità sarà possibile dire che $f(x)$ ammette un punto di massimo e di minimo globale in $[a, b]$, grazie al *teorema di Weierstrass (3.8)*.

Date le relazioni sopra, la funzione $f(x)$ presenterà un punto di minimo interno che chiameremo $c \in (a, b)$ in cui, per il *teorema di Fermat (4.3)*, in tal punto la derivata sarà nulla.

Si noti che il punto $c \neq a, b$, condizione necessaria per l'applicazione del *teorema di Fermat (4.3)*, dovuta al fatto che $f(x) < f(a)$ nell'intervallo $[a, a+\delta)$, e $f(x) < f(b)$ nell'intervallo $(b-\delta, b]$. □

Darboux

Corollario 4.5 (Corollario di Darboux)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $[a, b]$ con $f'(a) < m < f'(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = m$.* **

Dimostrazione. Sia $g(x) = f(x) - mx$, si ha $g'(x) = f'(x) - m$.

Valutando $g'(x)$ in a e in b risulta

$$g'(a) < 0 < g'(b)$$

Essendo g continua in $[a, b]$ ammette per il *teorema di Weierstrass* (3.8) minimo (e massimo) in tale intervallo, ma questo minimo non può trovarsi in a in quanto $g'(a) < 0$, cioè g è *localmente decrescente* in a, e in modo analogo non può trovarsi in b in quanto $g'(b) > 0$, ovvero g è *localmente crescente* in b.

Pertanto il minimo deve stare in un punto $c \in (a, b)$ nel quale, per il *teorema di Fermat* (4.3), si ha $g'(c) = 0$, ovvero $f'(c) = m$. □

Rolle gen.

Teorema 4.6 (Teorema di Rolle generalizzato)**.** *Sia f una funzione derivabile in $\mathbb{R}$, sia L il limite di tale funzione tale che $L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Allora esiste un punto ξ tale per cui $f(\xi) = 0$.* **

Dimostrazione. Si consideri il caso in cui $L = +\infty$ (il caso di $L = -\infty$ è analogo). $L = \pm\infty$

Grazie alla *definizione di limite (4.2)*:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_2| \geq x_1 : f(x_1) = M > 0, f(x_2) \geq 2M$$

per cui la $f(x)$ nell'intervallo $[-x_2, x_2]$ ha un punto di minimo interno ξ (per il *teorema di Weierstrass (3.8)*) in cui la sua derivata (per il *teorema di Fermat (4.3)*) è nulla.

Si consideri ora il caso in cui $L = l$ con $l \in \mathbb{R}$. $L = l$

Se $f(x) = l \quad \forall x$, il caso è banale perché la derivata della nostra funzione è nulla per ogni x si scelga.

Se invece $f(x)$ assume diversi valori, vediamo il caso in cui:

$$\exists \bar{x} : f(\bar{x}) = \lambda, \quad \lambda > l$$

per cui esisteranno due punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, con $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$, tali per cui $f(x) < \lambda$ sia in $(-\infty, \bar{x}_1)$ che in $(\bar{x}_2, +\infty)$. Detto ciò la funzione risulta avere un punto di massimo interno in $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ che chiameremo $\bar{\xi}$, in cui, sempre per il *teorema di Fermat (4.3)* la derivata si annulla. Si può estendere facilmente il ragionamento nel caso in cui $\lambda < l$. □

** **Teorema 4.7** (Teorema di Rolle). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), con $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.* Rolle

Dimostrazione. Essendo f continua in $[a, b]$ ammette, per il *teorema di Weierstrass* (3.8), massimo e minimo in tale intervallo.

Si hanno dunque due casi, o sia il massimo che il minimo sono assunti agli estremi a e b dell'intervallo, oppure uno dei due è interno ad esso.

Nel primo caso risulta $f(a) = f(b) = \max = \min$, questo implica che la funzione è costante in $[a, b]$ e quindi $f'(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$.

Nel secondo caso, se o il massimo o il minimo è assunto in $c \in (a, b)$ si ha $f'(c) = 0$ per il *teorema di Fermat* (4.3). □

** **Teorema 4.8** (Lagrange). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagrange

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Per verifica diretta si osserva che

$$g(b) = g(a) = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a}.$$

La funzione g soddisfa quindi le ipotesi del *teorema di Rolle* (4.7) e dunque esisterà $x_0 \in (a, b)$ tale che $g'(x_0) = 0$. Ma si osserva che

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e dunque se $g'(x_0) = 0$ si ottiene il risultato desiderato. □

Teorema 4.9. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile con derivata nulla in (a, b), allora la funzione è costante in tale intervallo.*

Dimostrazione. Le ipotesi del *teorema di Lagrange* (4.8) sono soddisfatte per ogni $x \in (a, b)$, dunque esiste almeno un punto $c \in (a, x)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ma per ipotesi risulta $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a, b)$, ovvero $f(x) = f(a) \, \forall x \in (a, b)$ il che implica che la funzione è costante. □

Teorema 4.10 (Segno della derivata)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in A con derivata positiva, allora f è strettamente crescente in tale intervallo.*

Dimostrazione. Siano x_1 ed x_2 due punti generici di $[a, b]$, con $x_2 > x_1$. Per il *teorema di Lagrange* (4.8) esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dato che $x_2 > x_1$ deve essere $f(x_2) > f(x_1)$, ovvero la funzione è strettamente crescente in $[a, b]$. □

** **Definizione 4.3** (Funzione convessa). Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto I. Una funzione si dice *convessa* se:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall x : x_1 < x < x_2$$

si ha che:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

oppure:

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

Per una *funzione concava* le disuguaglianze cambiano verso. Convessa

Nota bene: Il termine del secondo membro delle precedenti disuguaglianze rappresenta la retta secante a $f(x)$ passante per $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(x_2, f(x_2)\big)$.

* **Teorema 4.11** (Criterio di convessità tramite derivata seconda). *Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte (cioè f è derivabile e anche f' è derivabile). Se $f''(x) \geq 0$ allora f è convessa in (a, b).*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$, si consideri un punto x compreso tra x_1 e x_2.

Per il *teorema di Lagrange (4.8)*, esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x tale per cui:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

che equivale a dire:

$$f(x) = f(x_1) + f'(\xi)(x - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x)$ è crescente (perché $f''(x) \geq 0$) e $x > x_1$, pertanto risulta:

$$f(x) \leq f(x_1) + f'(x)(x - x_1)$$

Introduciamo adesso una funzione

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

La cui derivata sarà:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_1) - f(x) + f(x_1)}{(x - x_1)^2}$$

che risulterà positiva per la disuguaglianza sopra scritta.
La funzione $g(x)$ è quindi crescente, cioè $g(x) \leq g(x_2)$. Esplicitando $g(x) \leq g(x_2)$ si ottiene:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

per cui moltiplicando per $(x-x_1)$, quantità positiva, si ha:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

che è quanto si voleva dimostrare. □

Teorema 4.12. *Sia* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa e derivabile*

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$$

che equivale a dire che la funzione sta sempre sopra la retta tangente ad ogni punto di (a,b)

Dimostrazione. Dati $x_1, x_2 \in (a,b)$, si scelga un punto x compreso tra x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$, possiamo sempre dire che:

$$f(x) - f(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Moltiplicando per $\frac{(x_2-x_1)}{(x-x_1)}$, quantità positiva nell'intervallo (x_1, x_2), vale:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}(x_2-x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$$

Al tendere di $x \to x_1$ si avrà:

$$f'(x_1)(x_2-x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$$

cioé:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$$

□

Teorema 4.13. *Sia* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *convessa in* (a,b) *e derivabile, allora si che* $f'(x)$ *è crescente. Se inoltre esiste* $f''(x)$*, allora si avrà che* $f''(x) \geq 0$

Dimostrazione. Essendo la nostra funzione convessa, presi due punti $x_1, x_2 \in (a, b)$, si ha che:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ma possiamo anche dire che:

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

Sommando queste due disuguaglianze si ha che:

$$f(x_2) + f(x_1) \geq f(x_1) + f(x_2) + \big(f'(x_1) - f'(x_2)\big)(x_2 - x_1)$$

cioè:

$$\big(f'(x_1) - f'(x_2)\big)(x_2 - x_1) \leq 0$$

La nostra funzione è dunque crescente, e se esiste la derivata seconda $f''(x)$ allora risulterà che $f''(x) \geq 0$ □

Definizione 4.4 (Funzione convessa)**.** Possiamo dare un'ulteriore definizione di *funzione convessa*: se convessa, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ e $\forall x \in (x_1, x_2)$ vale la relazione:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

Posto $x = tx_1 + (1 - t)x_2$, con $t = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ compreso tra 0 e 1, possiamo dare una nuova definizione di funzione convessa:

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq f(x_2) + [f(x_1) - f(x_2)]t \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

Quindi se $t_1, t_2 > 0$ e $t_1 + t_2 = 1$, possiamo prendere $t_1 = t$ e $t_2 = 1 - t$ e si avrà che:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

se e solo se f è convessa. Convessa

Teorema 4.14 (Teorema delle combinazioni baricentriche)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, dati $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ e $t_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ allora:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha $t_1 = 1$ e i lati dell'uguaglianza sono effettivamente uguali. Supponendo il teorema dimostrato per un certo n, procediamo a dimostrarlo per $n+1$. Dimostriamo che la seguente sia vera:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

Per ipotesi si ha che $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Poniamo $t = \sum_{i=1}^{n} t_i$, si ha che $t + t_{n+1} = 1$ e anche che:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) &= f\left(t_{n+1}x_{n+1} + t\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t} x_i\right) \leq \\ &\leq t_{n+1} f(x_{n+1}) + tf\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t} x_i\right) \leq \\ &\leq t_{n+1} f(x_{n+1}) + t\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i) \end{aligned}$$

Dove nell'ultima disuguaglianza è abbiamo posto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{t}{t} = 1$$

□

Teorema 4.15. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $(a,b) \setminus x_0$ e sia $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = L$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$.*

Dimostrazione. Per il *teorema di Lagrange* (4.8) si ha (prendendo $x > x_0$)

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

con $\xi \in (x_0, x)$. Facendo tendere x ad $x_0^\pm$ anche ξ tende a x_0, in quanto $x_0 < \xi < x$. Dunque

$$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^\pm} f'(\xi) = L$$

□

Teorema 4.16 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) con $g(b) \neq g(a)$ e $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che* **

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Cauchy

Dimostrazione. Consideriamo la funzione h definita come

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

La funzione h è continua e derivabile essendo (a meno di due costanti) somma di funzioni continue e derivabili. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} h(a) &= [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) \\ h(b) &= [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a) \end{aligned}$$

dunque per il *teorema di Rolle* (4.7) applicato ad h esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $h'(x_0) = 0$, cioè

$$[g(b) - g(a)]f'(x_0) - [f(b) - f(a)]g'(x_0) = 0 \implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

** **Teorema 4.17** (Teorema di de Hôpital (0/0))**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in $(a, b) \setminus \{x_0\}$, con $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Se esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Hôpital (0/0)

Dimostrazione. Sia $x \in (a, b)$, per il *teorema di Cauchy* (4.16) esiste un punto ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Quando x tende a x_0 il punto ξ, che è compreso tra x_0 ed x, tende anch'esso a x_0, si ha dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L$$

□

Nota bene: L'ipotesi che si abbia anche $g(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ è superflua, in quanto se si avesse $g(x_1) = 0$ per $x_1 \neq x_0$ si potrebbe applicare il *teorema di Rolle* (4.7) nell'intervallo $[x_0, x_1]$, trovando un punto in (x_0, x_1) nel quale la derivata si annulla, contro l'ipotesi che $g'(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

Teorema 4.18 (Teorema di de Hôpital (∞/∞))**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in $(a, b) \setminus \{x_0\}$, con $g'(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Sia inoltre* **

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

Se esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Hôpital (∞/∞)

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso in cui x_0 sia uno degli estremi, ad esempio a. Il caso generale segue considerando separatamente il limite destro e sinistro.

Possiamo limitarci ad un intorno di a nel quale sia g' (per ipotesi) che g, per la *permanenza del segno* (3.5), siano diverse da zero. Supponiamo inoltre che L sia finito.
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{x} > a$ tale che per ogni $x \in (a, \bar{x})$ risulti

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon$$

Inoltre per il *teorema di Cauchy* (4.16) esiste un punto $\xi \in (x, \bar{x})$ tale che

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

e quindi

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} < L + \varepsilon$$

D'altra parte

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\bar{x})}{f(x)}}{1 - \frac{g(\bar{x})}{g(x)}}$$

e quindi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} \cdot \frac{1 - \frac{g(\bar{x})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\bar{x})}{f(x)}}$$

Dato che per $x \to a^+$ sia $f(x)$ che $g(x)$ tendono all'infinito, la quantità

$$\frac{1 - \frac{g(\bar{x})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\bar{x})}{f(x)}}$$

tende ad uno, esiste quindi un punto $\tilde{x} < \bar{x}$ tale che per ogni $x \in (a, \tilde{x})$ si abbia

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{g(\tilde{x})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\tilde{x})}{f(x)}} < 1 + \varepsilon$$

Di conseguenza

$$(1 - \varepsilon)(L - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (1 + \varepsilon)(L + \varepsilon)$$

e pertanto il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende ad L. □

* **Teorema 4.19** (Criterio di Lipschitz)**.** *Sia $f\colon A \subset \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L. Se f è derivabile in un punto $x \in A$ allora $|f'(x)| \le L$. Viceversa se $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita su un intervallo I e se esiste L tale che per ogni $x \in I$ si ha $|f'(x)| \le L$ allora f è lipschitziana.*

Dimostrazione. Se f è Lipschitziana significa che il rapporto incrementale è limitato. Cioè esiste $L > 0$ tale che ($\Longrightarrow$)

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \le L \qquad \forall x, y \in A.$$

Dunque la derivata, che è il limite del rapporto incrementale, se esiste è anch'essa limitata dalla stessa costante: $|f'(x)| \le L$ per ogni $x \in A$.

Viceversa se la derivata è limitata $|f'(z)| \le L$ per ogni $z \in I$ e se $x, y \in I$ sono punti qualunque, allora, per il *teorema di Lagrange* (4.8), il rapporto incrementale di f è uguale alla derivata in un punto $z \in (x, y)$: ($\Longleftarrow$)

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(z)| \le L.$$

e dunque la funzione è L lipschitziana:

$$[f(x) - f(y)] \le L(x - y).$$

□

Capitolo 5

Formula di Taylor

* **Teorema 5.1** (Teorema di Cauchy generalizzato). *Siano f, g due funzioni derivabili n volte in un intervallo I e sia $x_0 \in I$ tale che*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$$

allora $\forall x \in I$, $\exists \xi$ tra x e x_0 tale che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$ *Cauchy gen.*

Dimostrazione. Per il *teorema di Cauchy* (4.16), ricordando che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

dove ξ_1 è compreso tra x e x_0. Poiché $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ si può applicare nuovamente il *teorema di Cauchy* (4.16), ottenendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$$

dove ξ_2 è compreso tra ξ_1 e x_0. Si può proseguire allo steso modo finché le derivate si annullano in x_0, trovando dei punti $\xi_3, \xi_4, \cdots, \xi_{n-1}$ tali che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \cdots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}$$

Poiché le derivate $n-1$-esime si annullano in x_0, un'ultima applicazione del *teorema di Cauchy* (4.16) dà infine

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}$$

per un opportuno ξ tra x e x_0.

□

Teorema 5.2 (Formula di Taylor con in resto di Lagrange). *Sia f derivabile n volte su un intervallo I e siano $x, x_0 \in I$. Allora esiste un punto ξ compreso tra x e x_0, con $x > x_0$ tale che* **

$$f(x) = \underbrace{\sum_{h=0}^{n-1} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h}_{P(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n}_{R_n(x)}$$

dove $P(x)$ è il Polinomio di Taylor mentre $R_n(x)$ è il Resto del polinomio di Resto Lagrange *Taylor.*

Dimostrazione. Definiamo $F(x)$ e $G(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - P(x) \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ G(x) &= (x-x_0)^n \end{aligned}$$

entrambe le funzioni si annullano in x_0 insieme alle loro derivate fino all'ordine $n-1$, possiamo quindi applicare il *teorema di Cauchy generalizzato* (5.1).

Esiste dunque uno ξ tra x e x_0 tale che

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(\xi)}{G^{(n)}(\xi)}$$

dove

$$\begin{aligned} F^{(n)}(x) &= \frac{f^{(n)}(x)}{n!} n! \\ G^{(n)}(x) &= n! \end{aligned}$$

pertanto

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(\xi)}{G^{(n)}(\xi)} G(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

e quindi

$$f(x)=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

□

Nota bene: Il resto di Lagrange fornisce informazioni quantitative sul resto.

** **Teorema 5.3** (Formula di Taylor con il resto di Peano). *Sia f una funzione di classe C^n su un intervallo I e siano x, $x_0 \in I$, allora si ha:*

$$f(x)=\sum_{h=0}^{n}\frac{f^{h}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h+o\big((x-x_0)^n\big)$$

Resto Peano

Dimostrazione. Dalla *formula di Taylor con resto di Lagrange* (5.2) si ha

$$f(x)=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

che si può riscrivere come

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{h=0}^{n}\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\&=\sum_{h=0}^{n}\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h+\left[\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n\end{aligned}$$

Dividendo $\left[\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n$ per $(x-x_0)^n$ e passando al limite per $x\to x_0$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

dato che ξ è compreso tra x e x_0 se $x\to x_0$ anche $\xi\to x_0$, dunque il limite è nullo e $\left[\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{n!}\right](x-x_0)^n$ risulta essere un o-piccolo di $(x-x_0)^n$

□

Nota bene: Il resto di Peano fornisce informazioni di tipo qualitativo.

Teorema 5.4 (Formula di Taylor con il resto integrale). *Sia f una funzione di classe C^{n+1} su un intervallo I e siano $x, x_0 \in I$, allora si ha*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{n} \frac{f^h(x_0)}{h!}(x - x_0)^h + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt$$

Resto Integrale

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, la formula si riduce all'identità:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) \, dt$$

verificata per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* (6.8).

Supponendo sia vero per n, verifichiamolo per $n + 1$. Integrando per parti e usando l'ipotesi induttiva si ha:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} \, dt =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} \Big|_{x_0}^{x} + (n+1) \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \right] =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + f(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h =$$
$$= f(x) - \sum_{h=0}^{n+1} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h$$

□

Definizione 5.1 (Funzione analitica). Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(A)$, essa si dice analitica in A se per ogni $x_0 \in A$ la serie di Taylor centrata in x_0 converge a $f(x)$ per ogni x in un intorno di x_0. **

Esempi di funzione analitica? Tutti i polinomi sono funzioni analitiche. Per un polinomio, l'espansione in serie di potenze contiene solo un numero finito di termini non nulli. Altre funzioni analitiche sono le funzioni esponenziali, la funzioni trigonometriche, logaritmi e funzioni di potenza.

** **Teorema 5.5** (Criterio di analiticità I). *Sia f di classe C^∞ su un intervallo $I(x_0, r)$, se esistono $M, L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in I$ si abbia*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n n!$$

allora f è analitica in $I(x_0, \rho)$, con $\rho = \min\{r, \frac{1}{L}\}$

Analiticità I

Dimostrazione. Considerando l'n-esimo resto di Lagrange, si ha

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!} \leq \frac{ML^n n!(x - x_0)^n}{n!} = M[L(x - x_0)]^n$$

al tendere di $n \to \infty$, l'ultimo termine converge a 0 se $|x - x_0| < \min\{r, \frac{1}{L}\}$, dunque la funzione f coincide con il suo sviluppo in serie. □

** **Teorema 5.6** (Criterio di analiticità II). *Sia f di classe C^∞su un intervallo $I(x_0, r)$, se esistono $M, L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in I$ si abbia*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n$$

allora f è analitica in $I(x_0, r)$.

Analiticità II

Dimostrazione. Considerando l'n-esimo resto di Lagrange, si ha

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!} \leq \frac{M[L(x - x_0)]^n}{n!}$$

e al tendere di $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M[L(x - x_0)]^n}{n!} = 0$$

dunque, dato che il resto si annulla al tendere di $n \to \infty$, la funzione f coincide con il suo sviluppo in serie. □

Capitolo 6

Integrali

Definizione 6.1 (Funzione semplice)**.** Si definisce funzione semplice una combinazione lineare di funzioni caratteristiche φ_{I_h} di intervalli I_h aperti a destra e a due a due disgiunti, ovvero

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \varphi_h(x)$$

Per capire meglio il concetto... Una funzione semplice è una funzione misurabile la cui immagine è finita.

Definizione 6.2 (Integrale di una funzione semplice)**.** Sia data una funzione semplice Φ su un intervallo $[a, b]$ diviso in n intervalli I_h, si definisce integrale di Φ su $[a, b]$ la quantità

$$\int_a^b \Phi(x)\, dx = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h m(I_h)$$

dove con $m(I_h)$ si è indicata l'ampiezza dell'intervallo I_h.

Definizione 6.3 (Funzione integrabile secondo Riemann). Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ limitata e siano $\mathcal{F}^-$ e $\mathcal{F}^+$ rispettivamente la classe delle funzioni semplici minoranti e maggioranti la funzione f in $[a, b)$, allora f si dice integrabile secondo Riemann se **

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{F}^-} \int_a^b \Phi(x)\, dx = \inf_{\Phi \in \mathcal{F}^+} \int_a^b \Psi(x)\, dx$$

Esempio di funzione non integrabile? Un esempio di funzione non integrabile è la *funzione di Dirichlet* definita come

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tale funzione è la funzione caratteristica dei numeri razionali, risulta non continua in nessun punto del suo dominio.
La *funzione di Dirichlet* non è integrabile secondo Riemann perché, considerato ad esempio l'intervallo $[0, 1)$, la funzione semplice maggiorante deve valere almeno 1 in tutti i punti razionali, e quindi in tutto $[0, 1)$ dato che in ogni intervallo cadono dei punti razionali. Allo stesso modo una funzione semplice minorante deve valere al più 0 in $[0, 1)$ dato che in ogni intervallo cadono dei punti irrazionali. Si ha allora $\int \varphi\, dx \geq 1$ per ogni funzione semplice maggiorante, e $\int \psi\, dx \leq 0$ per ogni funzione semplice minorante, di conseguenza la funzione non è integrabile.

Teorema 6.1. *Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ limitata, allora f è integrabile in $[a, b)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione semplice maggiorante Ψ e una funzione semplice minorante Φ tali che* *

$$\int_a^b \Psi(x)\, dx - \int_a^b \Phi(x)\, dx < \varepsilon$$

($\Longrightarrow$) *Dimostrazione.* Se f è integrabile, indicando con χ il valore di tale integrale, avremo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice maggiorante Ψ tale che

$$\int_a^b \Psi(x)\, dx < \chi + \frac{\varepsilon}{2}$$

e una funzione semplice minorante Φ tale che

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx > \chi - \frac{\varepsilon}{2}$$

Sottraendo la seconda disequazione dalla prima otteniamo

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$$

(⟸)

Viceversa, se per ogni ε esistono Ψ, Φ tali che

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$$

Poniamo

$$\int_{a^*}^b f(x)\,dx = \sup_{\Phi \in \mathcal{F}^-} \int_a^b \Phi(x)\,dx$$
$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \inf_{\Psi \in \mathcal{F}^+} \int_a^b \Psi(x)\,dx$$

Si ha

$$0 \le \int_{a^*}^b f(x)\,dx - \int_a^{b^*} f(x)\,dx \le \int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon$$

e dato che ε può essere scelto arbitrariamente piccolo, la differenza tra l'integrale superiore e quello inferiore è nulla, dunque f è integrabile in $[a, b)$.

□

** **Teorema 6.2** (Integrabilità delle funzioni continue). *Una funzione f continua in $[a, b]$ è integrabile in $[a, b)$* *Int. continue*

Dimostrazione. Essendo f continua in $[a, b]$ per il *teorema di Heine-Cantor* (3.11) è ivi uniformemente continua. Ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che se I è un intervallo contenuto in $[a, b]$ di ampiezza minore di 2δ, l'oscillazione $\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$ è minore di 2ε.

Dividiamo ora $[a, b]$ in n intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ognuno di ampiezza minore di 2δ. Ponendo

$$M_j = \sup_{x \in I_j} f(x), \qquad m_j = \inf_{x \in I_j} f(x)$$

e

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} M_j \varphi_{I_j}, \qquad \Phi = \sum_{j=1}^{n} m_j \varphi_{I_j}$$

si ha, per quanto detto

$$M_j - m_j < 2\varepsilon \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

quindi indicando con $m(I_j)$ l'ampiezza dell'intervallo I_j

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)m(I_j) < 2\varepsilon \sum_{j=1}^{n} m(I_j) = 2\varepsilon(b-a)$$

dunque f è integrabile. □

Teorema 6.3. *Una funzione f continua e limitata in (a,b) è integrabile in $[a,b)$.*

Dimostrazione. Essendo f limitata in (a,b) esisterà $M > 0$ tale che per ogni $x \in (a,b)$ si ha $|f(x)| \leq M$. Poniamo dunque $\Psi(x) = M$, $\Phi(x) = -M$ in $[a, a+\varepsilon)$ ed in $(b-\varepsilon, b]$.
D'altra parte in $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ la funzione è continua, quindi nell'intervallo $[a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ si possono definire Ψ e Φ come nel *teorema* 6.2.

Si ha allora:

$$\begin{aligned}\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx &= \left(2M\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} M_j m(I_j)\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} m_j m(I_j) - 2M\varepsilon\right)\\ &= 4M\varepsilon + \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)m(I_j) < 4M\varepsilon + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{n} m(I_j)\\ &= 4M\varepsilon + 2\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

dunque f è integrabile in $[a,b)$.

□

Int. monotone

Teorema 6.4 (Integrabilità delle funzioni monotone)**.** *Una funzione f monotona in $[a,b]$ è integrabile in $[a,b)$.* **

Dimostrazione. Supponiamo per esempio che f sia crescente.
Dato $\varepsilon > 0$, dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli $I_k = [x_{k-1}, x_k)$, $k =$

$1, \dots, n$ tutti di ampiezza minore di ε. Essendo la funzione crescente, il suo valore nell'intervallo I_k sarà compreso tra i valori assunti agli estremi:

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \quad \forall x \in I_k$$

pertanto la funzione

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varphi_{I_k}$$

è una funzione maggiorante, e allo stesso modo

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varphi_{I_k}$$

è una funzione minorante. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})]m(I_k) \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})]\end{aligned}$$

Nell'ultimo termine compare una *somma telescopica*, in cui i termini si cancellano due a due, lasciando solamente $f(b) - f(a)$. Si avrà dunque

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon\big(f(b) - f(a)\big)$$

dunque per il teorema 6.1 la funzione f è integrabile in $[a, b)$.

□

** **Teorema 6.5.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile allora $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.*

Dimostrazione. Siano

$$a^+ = \max(a, 0) \qquad e \qquad a^- = \max(-a, 0)$$

Se f è integrabile per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione semplice maggiorante Ψ e una funzione semplice minorante Φ tali che:

$$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \qquad e \qquad \int \Psi(x)\,dx - \int \Phi(x)\,dx < \varepsilon$$

Quel che si vuole dimostrare è che f^+e f^- sono integrabili.

Per f^+ possiamo dire che questa sia compresa tra due funzioni semplici Φ^+ e Ψ^+ cioè:

$$\Phi^+(x) \leq f(x)^+ \leq \Psi^+(x)$$

con

$$\Psi^+(x) - \Phi^+(x) \leq \Psi(x) - \Phi(x)$$

quindi possiamo dire che

$$\int_a^b (\Psi^+(x) - \Phi^+(x)) \leq \int (\Psi(x) - \Phi(x)) < \varepsilon$$

quindi f^+ è integrabile.

Per f^- si può applicare il medesimo ragionamento e dimostrare che anch'essa è integrabile.

$\square$

Teorema 6.6. *Sia f una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$, allora si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in [a, b]$ risulta

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Per la *monotonia dell'integrale* si ha dunque

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

infine, quest'ultima disuguaglianza può essere espressa i termini di valore assoluto come

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$\square$

* **Teorema 6.7** (Teorema della media integrale)**.** *Sia f una funzione integrabile su $[a, b)$, siano inoltre*

$$m = \inf_{x \in [a,b)} f(x) \qquad e \qquad M = \sup_{x \in [a,b)} f(x)$$

allora si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq M$$

Se poi f è continua, esiste un punto ξ compreso tra a e b tale che

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(t)\, dt}{b-a}$$

Media Integrale

Dimostrazione. Per il *teorema di Weierstrass* (3.8) si ha:

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a, b)$$

e dunque integrando

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$$

da cui, dividendo per $(b-a)$, segue l'enunciato.

Supponiamo ora che f sia continua in $[a, b)$. Per quanto abbiamo visto, il valore

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

è compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f, allora per il *teorema dei valori intermedi* (3.7) esisterà un punto $\xi \in (a, b)$ in cui la funzione $f(x)$ assume tale valore.

□

Teorema 6.8 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia f continua e limitata in $[a,b)$, allora la sua funzione integrale* *

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile con derivata continua, e si ha $F'(x) = f(x)$.
Inoltre se $G(x)$ è una funzione derivabile e $G'(x) = f(x)$ risulta

$$G(x) - G(a) = F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione della prima parte è una conseguenza del *teorema della media integrale* (6.7). Si ha infatti

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\end{aligned}$$

dove ξ è un punto compreso tra x e $x+h$. Quando h tende a zero il punto ξ compreso tra x e $x+h$ tenderà ad x.

Per la continuità della funzione f, $f(\xi)$ tenderà ad $f(x)$, e quindi

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

La funzione integrale $F(x)$ è dunque derivabile, e la sua derivata è $f(x)$.

Passiamo ora alla seconda parte, sia $G(x)$ una funzione che verifica la relazione $G'(x) = f(x)$. Si ha allora $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, cioè la differenza $G(x) - F(x)$ ha derivata nulla in $[a,b)$. Ma allora $G(x) - F(x)$ è costante ed è uguale al suo valore nel punto a, ovvero

$$G(x) - F(x) = G(a) - F(a) = G(a) - \int_a^a f(t)\,dt = G(a)$$

□

Teorema 6.9. *Sia f integrabile in $[a,b]$, allora la funzione integrale $F(x)$ è continua e lipschitziana in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in [a, b]$, si ha

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^y f(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f(t)\, dt + \int_y^a f(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f(t)\, dt \right| \end{aligned}$$

Ora consideriamo l'estremo superiore di $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$:

$$L = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Il precedente integrale può essere maggiorato nel seguente modo

$$\left| \int_y^x f(t)\, dt \right| \le \left| \int_y^x |f(t)|\, dt \right| \le \left| \int_y^x L\, dt \right| = L|x - y|$$

Dunque si ha

$$|F(x) - F(y)| \le L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

dividendo per $|x - y|$ si ottiene la lipschitzianeità.

Per quanto riguarda la continuità, fissato un $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, per cui se

$$|x - y| < \delta \implies |F(x) - F(y)| < L\delta = \varepsilon$$

□

Teorema 6.10 (Criterio dell'integrale)**.** *Sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $n_0 \in \mathbb{N}$ una funzione positiva decrescente, sia inoltre $\{a_n\}$ la successione data da*

$$a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0$$

allora $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ e consideriamo l'intervallo $[n, n+1]$, essendo la funzione decrescente si avrà

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n) \quad \forall x \in [n, n+1]$$

dunque

$$f(n+1) = \int_{n}^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_{n}^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$$

poiché $a_n = f(n)\,\forall n \geq n_0$, la precedente relazione diventa

$$a_{n+1} \leq \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq a_n$$

di conseguenza, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$ si ha

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} \leq \sum_{n=n_0}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{N} a_n$$

per l'additività dell'integrale risulta

$$\sum_{n=n_0}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{n_0}^{N} f(x)\,dx$$

dunque

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{N} a_n$$

facendo tendere $N \to +\infty$, si ha infine

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n+1} \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

il che dimostra che la serie converge se e solo se converge l'integrale.

$\square$

Capitolo 7

Successioni di Funzioni

** **Definizione 7.1** (Convergenza puntuale)**.** Sia $f_n(x) : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni, essa converge puntualmente ad una funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

** **Definizione 7.2** (Convergenza uniforme)**.** Sia $f_n(x) : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni, essa converge uniformemente ad una funzione $f(x)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ν tale che, se $n \geq \nu$, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Una definizione equivalente è la seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

dove $\|\cdot\|_\infty$ è la norma infinito.

Teorema 7.1. *Se una successione di funzioni f_n converge uniformemente ad una funzione f su un intervallo I, allora f_n converge puntualmente ad f in I.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ e d'altra parte, per la definizione di $\|\cdot\|_\infty$, risulta

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

Quindi passando al limite e utilizzando il *teorema del confronto* (2.8), si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in I$$

che significa $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. □

Teorema 7.2 (Teorema sulla continuità del limite)**.** *Se una successione di funzioni continue f_n converge uniformemente in E a una funzione f, quest'ultima è continua in E.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in E$ un arbitrario punto di E. Vogliamo far vedere che f è continua in x_0, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in E$, se $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dato $\varepsilon > 0$, per la *convergenza uniforme* (7.2) sappiamo che se esiste un $n_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n > n_0$ e per ogni $x \in E$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Fissiamo ora $\bar{n} = n_0 + 1$. Poiché $f_{\bar{n}}$ è continua in x_0, esisterà un $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ e $|x - x_0| < \delta$, si ha $|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \varepsilon$.
Per la *disuguaglianza triangolare* (1.11) si ha dunque, se $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

La funzione f è quindi continua in x_0, e per l'arbitrarietà di x_0, è continua in E.

Teorema 7.3 (Teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale)**.** *Sia f_n una successione di funzioni continue su un intervallo $[a, b]$, se f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione. Per il *teorema sulla continuità del limite* (7.2) la funzione f è continua in $[a, b]$ e quindi *integrabile secondo Riemann* (6.3) in $[a, b)$ e si ha

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

Ora, dato che f_n converge a f uniformemente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ν tale che per tutti gli $n > \nu$ si abbia

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

dunque, per $n > \nu$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

da cui la tesi. □

Teorema 7.4 (Teorema del passaggio al limite sotto il segno di derivata)**.** *Sia f_n una successione di funzioni di classe C^1 in $[a,b]$; se esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge a $\lambda \in \mathbb{R}$ e la successione delle derivate f_n' converge uniformemente a g, ovvero*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = g(x) \quad \textit{uniformemente}$$

allora f_n converge uniformemente ad una funzione f derivabile e tale che

$$f'(x) = g(x)$$

Dimostrazione. Per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* (6.8) possiamo dire che:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha, per il *teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale* (7.3),

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lambda + \int_{x_0}^x g(t)\,dt := f(x)$$

che definisce una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sempre per il *teorema fondamentale del calcolo integrale* (6.8), la funzione f così definita è di classe C^1 e $f'(x) = g(x)$. Resta ora da dimostrare che la convergenza della successione $f_n(x)$ ad f è uniforme. Si ha

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt\right) - \left(\lambda + \int_{x_0}^x g(t)\,dt\right)\right| \\
&= \left|(f_n(x_0) - \lambda) + \left(\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^x g(t)\,dt\right)\right| \\
&= \left|(f_n(x_0) - \lambda) + \int_{x_0}^x f_n'(t) - g(t)\,dt\right| \\
&\le \left||f_n(x_0) - \lambda| + \int_{x_0}^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt\right|
\end{aligned}$$

Ora, il primo termine è una successione di funzioni costanti che converge (uniformemente) a zero, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_1 tale che per ogni $n > n_1$ si ha

$$|f_n(x_0) - \lambda| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Mentre per il secondo termine osserviamo che per ipotesi f_n' converge a g uniformemente, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_2 tale che per ogni $n > n_2$ si ha

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Dunque per ogni $n > \max\{n_1, n_2\}$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \left|\varepsilon + \int_{x_0}^{x} \varepsilon \, dt\right| = |\varepsilon + \varepsilon(x - x_0)|$$
$$\varepsilon + \varepsilon(b - a) = \varepsilon(b - a + 1)$$

dove nell'ultima disuguaglianza è stato tolto il modulo in quanto $\varepsilon + \varepsilon(b - a)$ è una quantità positiva. Avendo quindi

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon(b - a + 1) \quad \forall x \in [a, b]$$

la successione f_n tende ad f uniformemente per la *definizione di convergenza uniforme* (7.2). □

Capitolo 8

Equazioni Differenziali

** **Definizione 8.1** (Spazio metrico)**.** Diremo che $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è una *distanza* su X se per ogni $x, y, z \in X$ valgono le seguenti proprietà

1. $d(x, y) \geq 0$ (positività);
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare);
3. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (separazione);
4. $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria).

Se d è una distanza diremo che X è uno *spazio metrico* (metrizzato da d). Spazio metrico

** **Definizione 8.2** (Completezza)**.** Uno spazio metrico (X, d) si dice essere completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

** **Definizione 8.3** (Lipschitzianeità)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $f : X \to X$ una funzione, se vale

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

diremo che f è Lipschitziana.

** **Definizione 8.4** (Contrazione)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia $f : X \to X$ una funzione lipschitziana con $\alpha < 1$, diremo che questa è una contrazione.

Contrazioni

Teorema 8.1 (Teorema delle contrazioni o del punto fisso di Banach-Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione, allora esiste uno e un solo punto $\bar{x}$ tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$.* **

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ un generico punto, consideriamo la successioni di punti definita per ricorrenza partendo da x_0 e tale che $x_{n+1} = T(x_n)$. Vogliamo dimostrare che la successione così costruita è una *successione di Cauchy*, ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : n, m > \nu \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Cominciamo con la distanza tra due punti consecutivi x_n e x_{n+1}, si ha, per come è stata definita precedentemente la successione

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1}))$$

e, per la definizione di contrazione, $(\alpha < 1)$

$$\begin{aligned} d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq &\alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \\ \leq &\alpha^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dato che $\alpha < 1$, quando $n \to +\infty$ la distanza tende a zero. Prendiamo ora n, m con $n > m$, per la *disuguaglianza triangolare* (1.11) si ha

$$d(x_{n+1}, x_m) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m)$$

e, per la *definizione di contrazione* (8.4), possiamo dire

$$d(x_{n+1}, x_n) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \leq (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^m)\, d(x_1, x_0)$$

che raccogliendo per il α^m (vale a dire il valore più piccolo), possiamo riscrivere come:

$$\alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + a^{n-m})\, d(x_1, x_0)$$

Quest'ultimo fattore è una somma parziale della serie geometrica di ragione α, dato che α è minore di uno (perché è una contrazione) la serie converge e possiamo maggiorare l'ultimo termine della disuguaglianza con la serie completa, ottenendo

$$d(x_{n+1}, x_m) \leq \alpha^m \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) d(x_1, x_0)$$

che è minore di ε pur di prendere m sufficientemente grande.

Abbiamo quindi dimostrato che la successione degli x_n è di Cauchy; essendo X uno spazio metrico completo ogni successione di Cauchy converge, ovvero esiste finito il limite

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$$

Per continuità —contrazioni sono funzioni lipschitziane, e funzioni lipschitziane sono continue— $T(x_n)$ tende a $T(\bar{x})$ quando $n \to +\infty$, ma per costruzione $T(x_n) = x_{n+1}$ che tende a $\bar{x}$ quando $n \to +\infty$, si deve avere dunque

$$T(\bar{x}) = \bar{x}$$

Dimostriamo infine l'unicità: supponiamo esista un altro punto fisso $\bar{y}$ tale che $T(\bar{y}) = \bar{y}$, allora si avrebbe

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) \leq \alpha d(\bar{x}, \bar{y})$$

ma $\alpha < 1$ perché una contrazione, quindi deve necessariamente essere $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, ovvero $\bar{x} = \bar{y}$.

□

** **Definizione 8.5** (Cauchy-Lipschitz)**.** Diremo che una funzione $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soddisfa la *Cauchy-Lipschitz* se f è continua e se per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ esiste un intorno U di (x_0, y_0) ed esiste $L \geq 0$ tale che se $(x, y_1) \in U$ e $(x, y_2) \in U$ si ha

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

A parole potremmo dire: $f(x, y)$ è localmente lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a x.

Teorema 8.2 (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale). *Sia dato il seguente problema di Cauchy:* **

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

e sia f così definita

$$f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^2 \qquad (t_0, u_0) \in A$$

Siano I e J due intervalli chiusi così definiti:

$$I = \mathcal{F}(t_0, R_1) \qquad J = \mathcal{F}(u_0, R_2)$$

Sia poi f continua in A, Lipschitziana in u e uniforme continua rispetto a t (cioè sia f una funzione con le proprietà di Cauchy-Lipschitz come nella definizione 8.5).
Siano poi M e R_0 definiti come:

$$M = \max |f(t, u)|, \quad (t, u) \in I \times J$$

$$0 < R_0 < \min\left(R_1, \frac{R_2}{M}, \frac{1}{L} \right)$$

allora si dimostra che il problema di Cauchy ha una sola soluzione in $I_0 : [t_0 - R_0, t_0 + R_0]$.

Cauchy-Lipschitz

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre dimostrazioni più brevi che andremo a sviscerare adesso.
L'idea della dimostrazione è quindi la seguente:

$$(*) \begin{cases} u' = f(t, u) \qquad u \in C^1(I_0) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$(**) \qquad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \qquad u \in C(I_0)$$

Date $(*)$ e $(**)$, ciò che vogliamo far vedere è che se la $(*)$ è vera, questa implica la $(**)$ integrando tra t_0 e t, mentre se è vera la $(**)$, possiamo ottenere la $(*)$ derivando. (Se è vera la $(**)$ e u è solo continua, dato che f è continua, allora la primitiva è di classe C^1 e posso derivare e ottenere la $(*)$).
Dimostrazione (i). [La $(**)$ ha soluzione unica] Prendiamo $C(I_0)$ con $\| \quad \|_\infty$, sia X un insieme

$$X = \{u \in C(I_0) : \|u - u_0\|_\infty \leq R_2\}$$

allora X sarà chiuso in $C(I_0) \Longrightarrow X$ è completo. Sia $F : X \to X, \quad v \to F(v) = y$ unidefinita.

$$F(v)(t) = y(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds$$

ovviamente $s \to f(s, v(s))$ è continua.

Dimostrazione (ii). $[v \in X \Longrightarrow y \in X]$ Sappiamo che y è continua e possiamo vedere che (ricordandosi che per ipotesi $|f(v), v(s)| \leq M$)

$$|y(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, v(s))|ds$$

che a sua volta

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, v(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq MR_0 < R_2 \Longrightarrow y \in X$$

Dimostrazione (iii). [F è una contrazione] Siano $v, w \in X$, con $y = F(v)$ e $z = F(w)$. Possiamo vedere che

$$\begin{aligned} y(t) - z(t) &= \int_{t_0}^{t} f(s, v(s)) - f(s, w(s))ds \\ |y(t) - z(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, v(s)) - f(s, w(s))|ds \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |v(s) - w(s)|ds \right| \leq LR_0 \|v - w\|_\infty \end{aligned}$$

dove per la terza disuguaglianza abbiamo usato la condizione di Lipschitzianeità della funzione.

$$\Longrightarrow \|y - z\|_\infty = \|F(v) - F(w)\|_\infty \leq LR_0 \|v - w\|_\infty$$

Inoltre sappiamo che $LR_0 < 1$ per ipotesi pertanto

$$LR_0 < 1 \Longrightarrow F \text{ è una contrazione}$$

pertanto per il *teorema delle contrazioni* (8.1) esiste un unico punto fisso $\bar{u}$ tale che $\bar{u}$ è soluzione di $(**)$:

$$\bar{u} = F(\bar{u}) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{u}(s))ds$$

□

Extra: La stessa dimostrazione vale per sistemi e per le equazioni di ordine superiore che si richiamano a sistemi.

Parte II

Formulari

Appendice A

Limiti

$\boxed{\text{Strumenti per il calcolo dei limiti}}$

Formula di Stirling

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} \cdot en$$

$\boxed{\text{Limiti da tabellina}}$

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty}$	
$\sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$	$\frac{a^n}{n^b} \quad \forall a > 1,\, b > 0$
$\frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \forall a > 1$	$\sqrt[n]{polinomio} = 1$
$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$	$n^2 - \sin(n) = +\infty$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	$\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^n = e^\gamma$
$(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$	$\frac{e^n - 1}{n} = 1$
$\sqrt[n]{n!} = +\infty$	$\frac{(1+b_n)^\alpha - 1}{b_n} = \alpha$

Appendice B

Serie

$\boxed{\text{Comportamento}}$

Data una serie

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

il suo limite

$$\lim_{n \to +\infty} S_n$$

può avere 4 tipi di comportamento:

1. $S_n \to l \in \mathbb{R}$, cioè la serie *converge*;
2. $S_n \to +\infty$, cioè la serie *diverge*;
3. $S_n \to -\infty$, cioè la serie *diverge*;
4. S_n non ha limite, cioè è *indeterminata*.

Proprietà delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \lambda \neq 0$$

Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad \Longrightarrow \qquad s_n = \sum_{n=0}^{n} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

Il comportamento della serie è il seguente:

$$\begin{cases} a \geq 1 \text{ divergente} \\ a \leq -1 \text{ indeterminata} \\ |a| < 1 \text{ convergente} \end{cases}$$

Strumenti per la convergenza delle serie

Condizione necessaria

$$\text{se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge } \Longrightarrow a_n \to 0$$

Attenzione: Non vale il viceversa! L'utilizzo operativo è il seguente:

- se $a_n \to 0$, allora la serie può convergere, ma non è detto;
- se $a_n \not\to 0$, allora posso escludere che converga.

Criterio del confronto

Date due successioni a_n e b_n tali per cui $0 \leq a_n \leq b_n$

$$\begin{cases} \text{se } \sum b_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \text{se } \sum a_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum b_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Criterio della radice

Sia a_n una successione a termini positivi. Sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$$

allora:

$$\begin{cases} \text{Se } l > 1 \text{ si ha che } \sum a_n \text{ diverge} \\ \text{Se } l < 1 \text{ si ha che } \sum a_n \text{ converge} \\ \text{Se } l = 1 \text{ BOH} \end{cases}$$

Utilizzo: può essere utile in caso di serie con esponenziali.

Criterio del rapporto

Sia a_n una successione a termini positivi. Sia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$$

allora:

$$\begin{cases} \text{Se } l > 1 \text{ si ha che } \sum a_n \text{ diverge} \\ \text{Se } l < 1 \text{ si ha che } \sum a_n \text{ converge} \\ \text{Se } l = 1 \text{ BOH} \end{cases}$$

Utilizzo: può essere utile in caso di serie con fattoriali.

Criterio del confronto asintotico

Siano a_n e b_n due successioni a termini positivi. Sia:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \to l \in (0, +\infty)$$

se:

$$\begin{cases} 0 < l < +\infty \text{ si ha che } \sum a_n \sim \sum b_n \\ l = 0 \text{ e } \sum b_n \text{ converge } \implies \sum a_n \text{ converge} \\ l = +\infty \text{ e } \sum b_n \text{ diverge } \implies \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Condensazione di Cauchy

Sia a_n una successione tale che :

- $a_n \geq 0$
- $a_{n+1} \leq a_n$

allora è vero che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

cioè hanno lo stesso comportamento.

Utilizzo: può essere utile in caso di serie con logaritmi.

Criterio dell'assoluta convergenza

Sia data la serie $\sum a_n$ e la serie $|\sum a_n|$

$$\sum |a_n| \text{ converge } \implies \sum a_n \text{ converge}$$
$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

Criterio di Leibnitz

Si prenda una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Se sono verificate verificate queste 3 condizioni (contemporaneamente):

1. segno alterno (presenza di $(-1)^n$ e $a_n \geq 0$),
2. decrescente ($a_{n+1} \leq \alpha_n$),
3. infinitesima ($a_n \to 0$)

allora la serie converge.

Serie telescopica

Si dice *telescopica* una serie del tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+k})$$

oppure

$$\sum_{n=m}^{+\infty}(a_{n+k} - a_n)$$

Se $\lim_{n\to+\infty}(a_n)$ esiste ed è finito, allora tale serie converge ed ha come somma:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_k$$

dove il k è esattamente il k che appare nella definizione.

Come calcolare la somma di una serie telescopica Quando una serie telescopica non è nella forma canonica, dobbiamo prima di tutto ricondurci ad essa per calcolarne la somma. Fatto ciò si deve controllare che essa converga, calcolandone il limite del termine generale al tendere di n all'infinito, e controllare se tale limite è finito o meno. Fatto ciò è possibile ricavarne la somma come:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

$\boxed{\text{Serie notevoli}}$

Armonica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \text{diverge}$$

Mengoli

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1, \qquad \text{converge}$$

Armonica generalizzata

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & a \leq 1 \\ \text{converge} & a > 1 \end{cases}$$

Parente dell'armonica generalizzata

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & a \leq 1 \\ \text{converge} & a > 1 \end{cases}$$

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{converge} & -1 < q < 1 \\ \text{irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Serie geometrica (2)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{converge} & -1 < q < 1 \\ \text{irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Appendice C

Derivate Notevoli

Tabella derivate notevoli			
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\log(a)}$
a^x	$a^x \ln a$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	$\|x\|$	$\frac{x}{\|x\|}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt[n]{x^\alpha}$	$\frac{\alpha}{n}x^{\frac{\alpha-n}{n}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Regole di derivazione

Derivata di una costante per una funzione

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

Derivata di una somma di funzioni

$$D[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

Derivata di un prodotto

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Derivata di un quoziente

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Derivata del reciproco

$$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}, \qquad f(x) \neq 0$$

Derivata di una funzione composta

$$D[f(g(x))] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

Derivata di una funzione composta esponenziale

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

Derivata di una funzione inversa

$$D[f^{-1}(y)] = \left[\frac{1}{f'(x)}\right], \qquad x = f^{-1}(y)$$

Appendice D

Sviluppi di McLaurin

Tabella sviluppi di Taylor (centrati in 0) elementari	
$e^x =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x) =$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}o(x^{2n+2})$
$\cos(x) =$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x) =$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$
$\sinh(x) =$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cosh(x) =$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tanh(x) =$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$
$\ln(1+x) =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$
$\arctan(x) =$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha =$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$

Tabella sviluppi di Taylor (centrati in 0) meno elementari

$\frac{1}{1-x} =$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} =$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x^2} =$	$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} x^{2n} + o(x^{2n})$
$\cot(x) =$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945}x^5 + o(x^6)$
$\cos(x)^{\sin(x)} =$	$1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{80}x^7 + o(x^7)$
$\arcsin(x) =$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x \rvert < 1$
$\arccos(x) =$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x \rvert < 1$
$\operatorname{arctanh}(x) =$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^n)$
$\ln(1 + \sin(x)) =$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$
$\ln(1 + \tan(x)) =$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$
$\ln(\cos(x)) =$	$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
$e^{\sin(x)} =$	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$

Appendice E

Integrali

Tabella primitive notevoli			
$f(x)$	Primitiva	$f(x)$	Primitiva
$\int dx$	$x+c$		
$\int x^\alpha\,dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\int \frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln\|f(x)\|+c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x+c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$	$\arctan(f(x))+c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$		
$\int e^x\,dx$	e^x+c	$e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx$	$e^{f(x)}+c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx$	$\arcsin f(x)+c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arccos x+c$	$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx$	$\arccos f(x)+c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x+c$	$\int f'(x)\cdot\cos f(x)\,dx$	$\sin f(x)+c$
$\int \sin x\,dx$	$\cos x+c$	$\int f'(x)\cdot\sin f(x)\,dx$	$-\cos f(x)+c$
$\int \tan x\,dx$	$-\ln\|\cos x\|+c$		
$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x+c$	$\int f'(x)\cdot\cosh f(x)\,dx$	$\sinh f(x)+c$
$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x+c$	$\int f'(x)\cdot\sinh f(x)\,dx$	$\cosh f(x)+c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx$	$\tan f(x)+c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx$	$-\cot f(x)+c$
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$	$\tanh x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)}\,dx$	$\tanh f(x)+c$

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni reali di classe C^1 nell'intervallo $[a, b]$, si ha:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Integrazione di funzioni reali fratte

Definizione Definiamo $f(x)$ *funzione razionale* una funzione data dal rapporto tra due polinomi $N(x), D(x)$ scritta nella forma:

$$f(x)\frac{N(x)}{D(x)}$$

L'*integrale di una funzione razionale* sarà nella forma:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx$$

Per la risoluzione di questi integrali abbiamo diversi metodi in base al tipo di funzione razionale.

Funzioni razionali con numeratore di grado maggiore o uguale al denominatore In questo caso abbiamo un integrale di questo tipo:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx \qquad \text{con } \deg(N) \geq \deg(D)$$

Se il grado del polinomio al numeratore è maggiore o uguale al grado del polinomio al denominatore si deve effettuare la *divisione polinomiale* tra numeratore e denominatore, così da determinare il polinomio quoziente $Q(x)$, di grado minore di quello di $N(x)$, e il polinomio resto $R(x)$, di grado minore di quello di $D(x)$.

Così facendo atteniamo:

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

e sostituendo tale espressione nella funzione integranda abbiamo:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Così facendo possiamo scrivere l'integrale di partenza nella forma:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}$$

trovando così una somma di integrali di più facile risoluzione: il primo è immediato mentre rappresenta un integrale di una funzione razionale fratta con grado del numeratore minore del grado del denominatore. Per risolvere quest'ultima vedere il prossimo paragrafo.

Funzioni razionali con numeratore di grado minore del denominatore Quando abbiamo di fronte un integrale di una funzione razionale fratta in cui il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore ci sono essenzialmente tre possibili sottocasi:

(i) $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ con $\deg(N) = 0, \deg(D) = 1$;

(ii) $\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$ con $\begin{cases} \deg(N) = 0, \deg(D) = 2 \\ \deg(N) = 1, \deg(D) = 2 \end{cases}$ e $\Delta_D < 0$

(iii) Tutti gli altri casi in cui $\deg(N) < \deg(D)$

Nel caso (i) avremo sempre a che fare con un'integranda che ammette una primitiva logaritmica, dunque un integrale fondamentale.

Nel caso (ii) abbiamo che Δ_D indica il discriminante dell'equazione associata al polinomio $D(x)$; queste rappresentano una sezione a parte.

Per tutti gli altri casi con grado del numeratore minore del grado del denominatore (iii), bisogna procedere con il metodo di integrazione dei fratti semplici.

Metodo di integrazione dei fratti semplici Il metodo consiste nell'esprimere la funzione integranda come somma di funzioni razionali fratte i cui integrali sono noti.

I passi da seguire sono i seguenti:

1. scomporre il polinomio al denominatore come prodotto di fattori lineari e/o quadratici con discriminante associato minore di 0;

2. associare a ciascun fattore trovato nella fattorizzazione del polinomio $D(x)$ il fratto corrispondente. In seguito una tabella a cui far riferimento:

Polinomio	Fratto corrispondente
$x - a_i$	$\frac{A_i}{x-a_i}$
$(x - a_i)^n$	$\frac{A_{i,1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i,2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,n}}{(x-a_i)^n}$
$x^2 + a_i x + b_i, \quad \Delta < 0$	$\frac{A_i x+B_i}{x^2+a_i x+b_i}$
$(x^2 + a_i x + b_i)^n, \quad \Delta < 0$	$\frac{A_{i,1}x+B_{i,1}}{x^2+a_i x+b_i} + \frac{A_{i,2}x+B_{i,2}}{(x^2+a_i x+b_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,n}x+B_{i,n}}{(x^2+a_i x+b_i)^n}$

3. determinare le costanti reali che compaiono nei fratti semplici. Per farlo è necessario impostare un *sistema lineare*, che possiamo costruire grazie al *principio di identità dei polinomi*;
4. integrare i fratti semplici ottenuti. Essi saranno degli integrali elementari, o comunque di facile risoluzione.

Integrazione per sostituzione

Tale tecnica è forse la più ricorrente e cerca di trasformare l'integrale dato in un integrale equivalente, attraverso un'opportuna sostituzione, più facile da risolvere.

Integrali di prima specie Supponiamo di voler calcolare un integrale che si presenta nella forma:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

Poniamo $t = g(x)$ e si deriviamo membro a membro, ottenendo:

$$dt = g'(x)\,dx$$

sostituiamo nell'integrale e otteniamo:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,dx}_{dt} = \int f(t)\,dt$$

Calcoliamo quindi l'integrale nella nuova variabile sperando che sia effettivamente più semplice di quello di partenza, così da ottenere la famiglia delle primitive della funzione f in funzione della variabile t, cioè:

$$F(t) + c$$

Infine sostituiamo a t l'espressione analitica della funzione $g(x)$ nella famiglia di funzioni $F(t) + c$.

Integrali di seconda specie Supponiamo di voler calcolare l'integrale:

$$f(x)\,dx$$

In questo caso andremo alla ricerca di una funzione $g(t)$ da sostituire alla variabile x. Qui però dobbiamo richiedere che la funzione g sia non soltanto derivabile ma anche invertibile.

Si pone

$$x = g(t)$$

e deriviamo membro a membro ottenendo:

$$dx = g'(t)\,dt$$

Sostituiamo il tutto nell'integrale in modo da ricavare

$$\int f(\underbrace{x}_{g(t)})\underbrace{dx}_{g'(t)\,dt} = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Calcoliamo quindi l'integrale ottenuto e ricaviamo una funzione nella variabile t.

Torniamo alla variabile x e per farlo è necessario esprimere la variabile t in funzione di x, determinando l'inversa:

$$t = g^{-1}(x)$$

Integrali definiti per sostituzione Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ continua ed una funzione $g : J \to I$ derivabile, vale la prima forma del metodo di sostituzione

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx$$

Nel caso in cui la funzione g sia anche invertibile, allora sussiste anche la relazione:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dx$$

Appendice F

Integrali: Criteri di Convergenza

Tabella integrali impropri notevoli

Integrali di potenze con intervallo di integrazione $[\mathbf{0},\alpha)$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^p} dx, \qquad \alpha > 0 \tag{F.1}$$

$$\begin{cases} converge & p < 1 \\ diverge & p \geq 1 \end{cases}$$

generalizzando:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \tag{F.2}$$

$$\begin{cases} converge & p < 1 \\ diverge & p \geq 1 \end{cases}$$

Integrali di potenze con intervallo di integrazione $[\alpha,+\infty)$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, \qquad \alpha > 0 \tag{F.3}$$

$$\begin{cases} converge & p > 1 \\ diverge & p \leq 1 \end{cases}$$

Integrale improprio con potenza e logaritmo in $[0, \alpha)$

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^a |ln(x)|^b} dx, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{F.4}$$

$$\begin{cases} converge & a < 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}, \qquad a = 1 \quad b > 1 \\ diverge & a > 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}, \qquad a = 1 \quad b \leq 1 \end{cases}$$

Integrale improprio con potenza e logaritmo in $[\alpha, +\infty)$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^a ln^b(x)} dx, \qquad \alpha > 1 \tag{F.5}$$

$$\begin{cases} converge & a > 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}, \qquad a = 1 \quad b > 1 \\ diverge & a < 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}, \qquad a = 1 \quad b \leq 1 \end{cases}$$

Integrale improprio logaritmo in $(1, \alpha]$

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{ln^p(x)} dx, \qquad \alpha > 1 \tag{F.6}$$

$$\begin{cases} converge & p < 1 \\ diverge & p \geq 1 \end{cases}$$

Integrale dell'esponenziale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{e^{\gamma x}}, \qquad a > 0, \qquad a \in \mathbb{R} \tag{F.7}$$

$$\begin{cases} converge & \gamma > 0 \\ diverge & \gamma \leq 0 \end{cases}$$

Integrali impropri notevoli e confronto asintotico

infinitesimo campione:

$$\frac{1}{x^{\alpha}}$$

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente positiva tale che:

$$f(x) \sim_{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \iff \lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = 1$$

allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{converge} \Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \quad \text{converge} \tag{F.8}$$
$$\Longleftrightarrow \alpha > 1$$

Numeri Complessi

Introduzione

La forma cartesiana di un numero complesso è:

$$z = a + ib$$

dove a è la **parte reale**, mentre b è la **parte immaginaria**. i è detta **unità immaginaria** ($i^2 = -1$).

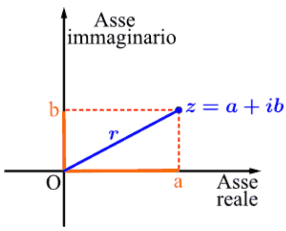


Figura F.1: Piano di Argand-Gauss

Operazioni nel campo dei complessi

Siano $z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di$ definiamo adesso le operazioni nel campo dei complessi:

Somma

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Differenza

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Rapporto

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Forme

Forma trigonometrica

Da considerazioni trigonometriche si ricava che:

$$a = \rho\cos(\theta) \quad b = \rho\sin(\theta)$$

quindi possiamo definire nuovamente z come:

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

per passare della forma cartesiana a quella trigonometrica definiamo il modulo ρ e l'argomento θ.

Modulo

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

Argomento Definiamo l'argomento nell'intervallo $[0, 2\pi)$

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & se\ a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & se\ a > 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & se\ a < 0, \forall b \end{cases}$$

Operazioni in forma trigonometrica

Se abbiamo $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ definiamo:

Prodotto

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

Rapporto

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Nel prodotto e nel rapporto si può notare che i moduli hanno struttura moltiplicativa mentre gli argomenti hanno struttura additiva.

Forma esponenziale

Si definisce $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ quindi:

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Coniugato

Si definisce *complesso coniugato* di un numero complesso z il numero complesso ottenuto cambiando il segno alla parte immaginaria di z.

Forma Cartesiana

$$z = a + ib \to \overline{z} = a - ib$$

$$\Re(\overline{z}) = \Re(z) \qquad \Im(\overline{z}) = \Im(z)$$

Forma trigonometrica

$$z = \rho[\cos\theta + i\sin\theta] \to \overline{z} = \rho[\cos\theta - i\sin\theta]$$
$$z = \rho[\cos\theta + i\sin\theta] \to \overline{z} = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

Forma esponenziale

$$z = \rho e^{i\theta} \to \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$$

Radici e Potenze

Per l'**elevamento a potenza** si usa la forma esponenziale: elevare z^n scritto come $(a + ib)^n$ risulta più complicato che elevarlo nella forma $(\rho e^{i\theta})^n$. Pertanto ottengo la seguente formula (detta formula di De Moivre):

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Dato un numero complesso w, si dice che z è una **radice n-esima complessa** di w se $z^n = w$. Se $z \neq 0$ allora esistono sempre n numeri complessi che soddisfano

l'equazione, ovvero n radici n-esime complesse.
Se $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = re^{i\psi}$ allora si ottiene:

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad e \qquad \theta_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

Come calcolare le radici n-esime

Per determinare le radici ennesime di un numero complesso:

$$z = a + ib$$

ossia per calcolare

$$\omega = \sqrt[n]{z}$$

bisogna prima scriverlo nella forma trigonometrica e applicare la seguente formula:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Dunque ogni numero complesso (o reale) ammette n radici complesse. Se rappresentiamo tali radici nel piano complesso (Argand Gauss) si ottengono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e centro in O.

Equazioni con i complessi

Per risolvere l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ si può usare la tradizionale formula risolutiva:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a patto di intendere la radice quadrata in senso complesso.

Appendice G

Equazioni Differenziali: metodi risolutivi

Lineari di Primo Ordine

Per le equazioni lineari del tipo: $u' = a(t)u + b(t)$ con $a, b \in C^0(I)$ si usa la seguente formula:

$$u(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt \tag{G.1}$$

dove $A(t)$ è una qualsiasi primitiva di $a(t)$ sull'intervallo I. Per risolvere invece il problema di Cauchy per le equazioni del tipo descritto sopra usiamo la seguente formula:

$$u(t) = u_o e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_o}^{t} e^{-A(t)} b(t) dt \tag{G.2}$$

tale formula fornisce direttamente la soluzione del problema di Cauchy lineare con la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$. Qui $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$ è la primitiva di $a(t)$ che si annulla nel punto $t_0 \in I$

Lineari di Primo Ordine a Variabili Separabili

Si usa la formula che fornisce implicitamente le soluzioni non constanti dell'equazione a variabili separabili $\frac{du}{dt} = a(t)b(u)$, cioè:

$$\int \frac{du}{b(u)} = \int a(t) dt \tag{G.3}$$

A queste vanno aggiunte le eventuali soluzioni costanti $u(t) = \bar{u}, \forall t$,dove $\bar{u}$ sono gli zeri di $b(u)$

Omogenee del Secondo Ordine

La forma generale di tali equazioni è:

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

con a, b, c numeri reali. In base alle soluzioni che si ottengono possiamo fare le seguenti distinzioni:

2 soluzioni reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{G.4}$$

2 soluzioni reali uguali $\lambda_1 = \lambda_2$

$$u(x) = c_1 e^{\lambda t} + t c_2 e^{\lambda t} \tag{G.5}$$

2 soluzioni complesse $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$u(x) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \tag{G.6}$$

Lagrange per Equazioni del Secondo Ordine

Si applica alle equazioni che si presentano nella forma:

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = g(t)$$

con $a_o, a_1 \in \mathbb{R}$ e g una funzione continua. Di seguito gli step da seguire:

- Si trova la soluzione dell'**equazione omogenea associata**

  $$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0$$

  la cui soluzione è

  $$u_0(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

- si trova una soluzione (detta **soluzione particolare**) della non omogenea $\bar{u}(t)$;

- La soluzione o integrale generale dell'equazione differenziale è data da:

$$u(t) = u_0(t) + \bar{u}(t) \tag{G.7}$$

Per trovare la soluzione particolare partiamo dalla soluzione dell'omogenea associata che ci ha dato due valori:

$$u_1(t) \quad u_2(t)$$

e cerchiamo una **soluzione particolare** della non omogenea del tipo:

$$\bar{u}(t) = \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t) \tag{G.8}$$

ed impostiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \psi_1' u_1(t) + \psi_2' u_2(t) = 0 \\ \psi_1' u_1'(t) + \psi_2' u_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

che è un sistema non omogeneo di due equazioni con $\psi_1'(t)$ e $\psi_2'(t)$ come incognite. Per come è stato costruito il sistema ammette solo una soluzione. Trovate $\psi_1'(t)$ e $\psi_2'(t)$, possiamo determinare $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ semplicemente integrando:

$$\psi_1(t) = \int (\psi_1'(t))dt; \quad \psi_2(t) = \int (\psi_2'(t))dt$$

E quindi sostituendo troveremo $\bar{u}(t)$.

Somiglianza per Equazioni del Secondo Ordine

Si applica alle equazioni che si presentano nella forma:

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = g(t)$$

con $a_o, a_1 \in \mathbb{R}$ termine noto del tipo particolare, cioè del tipo descritti sotto. Gli step da seguire sono:

- Si trova la soluzione dell'**equazione omogenea associata**

  $$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0$$

  la cui soluzione è

  $$u_0(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

- si trova una soluzione (detta **soluzione particolare**) della non omogenea $\bar{u}(t)$, troviamo le sue derivate $\bar{u}'(t)$ e $\bar{u}''(t)$ e le andiamo a sostituire nell'equazione differenziale di partenza;

- La soluzione o integrale generale dell'equazione differenziale è data da:

$$u(t) = u_0(t) + \bar{u}(t) \tag{G.9}$$

IMPORTANTE: se il termine noto è formato dalla somma algebrica di due o più termini. si ripeterà lo stesso procedimento per ogni termine e la soluzione finale sarà la somma di tutte le soluzioni ottenute.

Tipo 1

Se $g(t)$ è del tipo $\boxed{Q(t)}$ oppure del tipo $\boxed{Q(t)e^{\lambda t}}$ si distinguono tre casi:

- se

$$\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$$

ovvero se λ coincide con una delle radici del polinomio caratteristico, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo

$$\bar{u}(t) = te^{\lambda t}\bar{Q}(t) \tag{G.10}$$

con $\bar{Q}(t)$ polinomio nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$;

- se

$$\lambda = \lambda_0$$

ovvero se λ coincide con la radice multipla del polinomio caratteristico, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = t^2e^{\lambda t}\bar{Q}(t) \tag{G.11}$$

con $\bar{Q}(t)$ polinomio nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$;

- se

$$\lambda = non\ coincide$$

con nessuna delle radici allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = e^{\lambda t}\bar{Q}(t) \tag{G.12}$$

con $\bar{Q}(t)$ polinomio nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$;

Tipo 2

Se $g(t)$ è del tipo $\boxed{\cos(\beta t)Q(t)}$ oppure del tipo $\boxed{\sin(\beta t)Q(t)}$ si distinguono due casi:

- se $i\beta$ **è una radice** del polinomio caratteristico, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = t[\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)R(t)] \tag{G.13}$$

  con $\bar{Q}(t)$ e $R(t)$ polinomi nella stessa variabile t e dello stesso grado di $Q(t)$;

- se $i\beta$ **non è una radice** del polinomio caratteristico, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = \cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)R(t) \tag{G.14}$$

  con $\bar{Q}(t)$ e $R(t)$ polinomi nella stessa variabile t e dello stesso grado di $Q(t)$;

Tipo 3

Se $g(t)$ è del tipo $\boxed{e^{\alpha t}\cos(\beta t)Q(t)}$ oppure del tipo $\boxed{e^{\alpha t}\sin(\beta t)Q(t)}$ si distinguono due casi:

- se

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1$$

  con α_1 e β_1 termini delle radici, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = te^{\alpha t}[\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)R(t)] \tag{G.15}$$

  con $\bar{Q}(t)$ e $R(t)$ polinomi nella stessa variabile t e dello stesso grado di $Q(t)$;

- se

$$\alpha, \beta = \textit{non coincidono}$$

  con α_1 e β_1 termini delle radici del polinomio caratteristico, allora la soluzione particolare $\bar{u}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{u}(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)R(t)] \tag{G.16}$$

  con $\bar{Q}(t)$ e $R(t)$ polinomi nella stessa variabile t e dello stesso grado di $Q(t)$;

Soluzioni

Soluzione Massimale Una funzione y si dice soluzione massimale dell'equazione differenziale se non esistono **prolungamenti propri** di y. Pensate ad esempio ad una soluzione $y : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che presenta sia in a che in b un **asintoto verticale**. In questo caso y sarebbe una soluzione massimale perché non prolungabile. In parole povere non potremmo estenderla né a destra né a sinistra.

Soluzione Globale Una soluzione y si dice soluzione globale se:

- y è una soluzione locale;
- il dominio di y coincide con I, ossia $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Osserviamo che **una soluzione globale è una soluzione massimale**, ma in generale non vale il viceversa.

Indice analitico