

## Résumé de la recherche proposée – BESC maîtrise – Patricia Sorya

Développée au courant du 20<sup>e</sup> siècle, la topologie est une branche des mathématiques étudiant les espaces et leurs propriétés. Son essor des dernières décennies en fait une discipline moderne en constante évolution, où s'entremêlent diverses techniques algébriques et analytiques.

L'un des outils ayant contribué à la progression des connaissances dans ce domaine est l'homologie de Floer, introduite dans les années 80. Elle a depuis été raffinée en plusieurs variantes permettant des avancées spectaculaires en topologie de basse dimension, un sous-domaine se concentrant sur les espaces de dimension quatre et moins.

Ces progrès ont notamment mené à la résolution d'un problème resté ouvert pendant plus de 80 ans : en 2013, la conjecture de triangulation fût réfutée par le mathématicien Ciprian Manolescu[1]. Émanant des questionnements des premiers topologistes, la conjecture suggérait que pour toute variété – un objet qui peut être décrit localement comme un espace euclidien de dimension donnée – il existe une fonction biunivoque, un homéomorphisme, l'associant à l'espace topologique d'un complexe simplicial. Cet espace est formé des triangles multidimensionnels qui définissent le complexe, appelés *simplexes*. Une variété homéomorphe à un tel espace topologique est dite munie d'une triangulation.

La conjecture, d'une importance primordiale en topologie géométrique, avait été réfutée en dimension quatre par Andrew Casson en 1990. La généralisation, voulant qu'il existe des variétés n'admettant pas de triangulation en dimension cinq et plus, s'avère équivalente à un problème de basse dimension, et sa démonstration bouleverse le domaine.

Dans ce projet, nous explorerons l'approche novatrice à l'homologie de Floer menant à ce résultat surprenant. L'acquisition des outils de base de la topologie géométrique, à travers la vaste littérature, les cours et les conférences sur le sujet, posera une base solide pour ensuite aborder le problème en profondeur. L'exercice nous amènera à comprendre l'homologie de Floer dans sa généralité, et plus particulièrement en sa variante basée sur les équations de Seiberg-Witten, appelée *homologie de Floer monopole*, telle que développée par Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka[2].

Cet outil sert de fondation aux travaux de Manolescu sur la conjecture de triangulation, pour lesquels nous chercherons à raffiner les résultats intermédiaires, mettant ainsi en lumière les champs d'application de notions précédemment étudiées. De plus, cette activité permettra de préciser et de simplifier des concepts récemment développés dans ce champ d'étude. En effet, ceux-ci gagneraient à être synthétisés, afin de les rendre accessibles à la communauté scientifique, notamment aux étudiants avancés, et d'ainsi leur donner une portée potentiellement plus large.

Ce projet se veut aussi une amorce à une perspective de carrière en recherche mathématique. En visant à expliciter des méthodes fort récentes, cette étude approfondie ouvre la voie à l'élaboration de nouvelles applications et conceptions de ces techniques. Bien qu'espérer en entamer le développement lors de ce projet de maîtrise soit un désir ambitieux, il s'agit sans doute d'un objectif envisageable pour un futur projet de recherche au doctorat.

D'ailleurs, les compétences et l'expérience que j'aurai acquises en travaillant sur ce sujet de pointe contribueront certainement à la réalisation de projets à long terme. Elles ouvriraient la porte à une collaboration éventuelle avec d'autres milieux d'expertise dans le domaine, où j'espère poursuivre ma contribution à la recherche mathématique.

## Bibliographie

1. Manolescu, Ciprian (2016). *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*. Journal of the American Mathematical Society, 29. 147-176.
2. Kronheimer, Peter B. et Mrowka, Tomasz (2007). *Monopoles and three-manifolds*. Cambridge University Press, Cambridge.
3. Manolescu, Ciprian (2016). *Lectures on the triangulation conjecture*. Proceedings of the Gökova Geometry / Topology Conference 2015, Gökova, 1-38.
4. Lin, Francesco (2016). *Lectures on monopole Floer homology*. Proceedings of the Gökova Geometry / Topology Conference 2015, Gökova, 39-80.
5. Donaldson, S. K. (1996). *The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology*. Bulletin of the American Mathematical Society, 33(1), 45-70.