Lecture Notes

ความน่าจะเป็นและสถิติ

Probability and Statistics

ศาสตราจารย์ ดร. สุขสันต์ พาณิชพาพิบูล

คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทที่ 4

ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

Discrete Random Variables

ในบทนี้เราจะศึกษาตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variables) ซึ่งมีหัวข้อเรื่องที่จะกล่าวถึงดังนี้

- ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function, PMF)
- ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Function of a Discrete Random Variable)
- ค่าคาดหมาย (Expected Value)
- ค่าความแปรปรวน (Variance)

ปุจฉา 4.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) คืออะไร?

วิสัชนา การทดลองสุ่มบางอย่างให้ผลการทดลองเป็นตัวเลข เช่น ผลจากการทดลองโยนลูกเต๋า 1 ครั้ง แต่ก็มีหลายกรณีที่ผลการทดลองไม่ได้เป็นค่าที่เป็นตัวเลข เช่น ผลจากการโยนเหรียญ 1 ครั้ง ซึ่งจะได้ผลการทดลองเป็นหัวหรือก้อย บ่อยครั้งเรามีความจำเป็นที่ต้องกำหนดค่าผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขให้กับผลการทดลองแต่ละตัวในแซมเปิลสเปซ ตัวแปรสุ่ม X คือฟังก์ชันที่กำหนดค่าจำนวนจริง $X(\mu)$ ให้กับแต่ละผลการทดลอง μ ในแซมเปิลสเปซ ซึ่งผลการทดลอง μ ในแซมเปิลสเปซอาจเป็นค่าที่เป็นตัวเลขหรือไม่ได้เป็นตัวเลขก็ได้

เนื้อหาในบทนี้อ้างอิงจาก [1–3]

ปุจฉา 4.2 ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) คืออะไร?

วิสัชนา คือตัวแปรสุ่มชนิดที่เราสามารถแจกแจงค่าที่เป็นไปได้ของมันออกมาเป็นตัวๆได้ กล่าวอีกนัยหนึ่ง ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องก็คือตัวแปรสุ่มชนิดที่สามารถนับได้นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.1 ทำการทดลองโดยโยนเหรียญ 2 ครั้งแล้วสังเกตหน้าเหรียญที่ออก กำหนด X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง จงหาแซมเปิลสเปซ Ω ของการทดลอง และหาเซ็ต S_X ซึ่งรวบรวมค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X

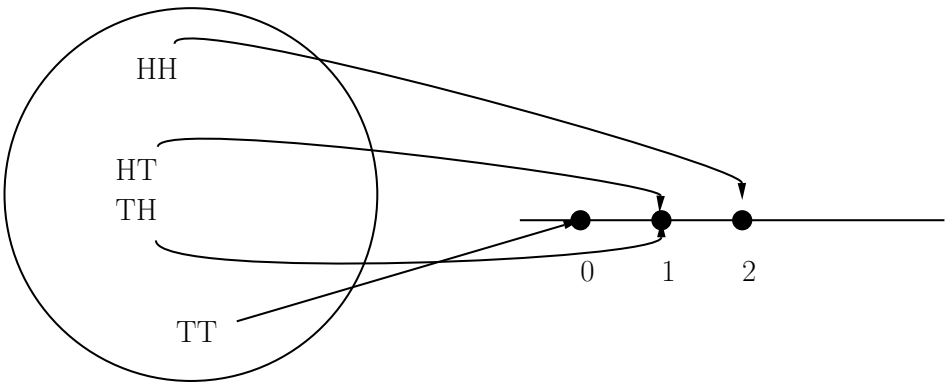
วิธีทำ แซมเปิลสเปซคือ

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

จะเห็นได้ว่า X ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันในการกำหนดค่าให้แก่ผลการทดลองที่อยู่ในเซมเปิลสเปซ Ω ดังแสดงในรูป 4.1



รูป 4.1: ตัวแปรสุ่ม X ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันกำหนดค่าต่างๆที่เป็นจำนวนจริงให้กับผลการทดลองในแซมเปิลสเปซ

ปุจฉา 4.3 การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่ม X ทำอย่างไร?

วิสัชนา หาได้โดยดูจากความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ในแซมเปิลสเปซ Ω ที่เทียบเท่ากับเหตุการณ์ที่เราสนใจเกี่ยวกับ X

ตัวอย่าง 4.2 จากตัวอย่าง 4.1 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ เหตุการณ์ที่เหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง ก็คือ $B = \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$ เมื่อเทียบย้อนกลับไปในแซมเปิลสเปซ Ω ตั้งต้น จะตรงกับเหตุการณ์ $A = \{HT, TH, HH\}$ ซึ่งเหตุการณ์ A มีความน่าจะเป็น $P(A) = 3/4$ ดังนั้นเหตุการณ์ B จึงมีความน่าจะเป็น $P(B) = 3/4$

อย่างไรก็ตาม จะสังเกตได้ว่าการหาความน่าจะเป็นตามวิธีที่แสดงในตัวอย่างนี้ดูแล้วจะไม่ค่อยสะดวกนัก เนื่องจากต้องเทียบย้อนกลับไปหาเหตุการณ์ที่เทียบเท่ากันในแซมเปิลสเปซ Ω ตั้งต้นทุกครั้ง ในส่วนถัดไป เราจะเรียนรู้วิธีการในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่ม X อย่างเป็นระบบระเบียบ

4.1 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function, PMF)

ปุจฉา 4.4 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น หรือ Probability Mass Function (PMF) คืออะไร?

วิสัชนา ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น หรือ Probability Mass Function (PMF) คือ ฟังก์ชันที่ใช้บรรยายคุณลักษณะของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง PMF ของตัวแปรสุ่ม X เป็นเซ็ตของความน่าจะเป็นในรูปแบบดังนี้

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

ค่า $p_X(x)$ เรียกว่า มวลความน่าจะเป็น (Probability Mass) ของ x ซึ่งบรรยายความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $\{X = x\}$ การเขียน PMF จะต้องเขียนให้ครบทุกๆค่าของ x

ปุจฉา 4.5 เราหา PMF ไปเพื่ออะไร มีประโยชน์อย่างไร?

วิสัชนา เนื่องจาก PMF เป็นฟังก์ชันที่บรรจุข้อมูลทางสถิติทุกอย่างเกี่ยวกับตัวแปรสุ่ม ดังนั้นถ้าเราทราบหรือหา PMF ของ X ได้แล้ว เราก็จะสามารถหาความน่าจะเป็นของทุกเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ X ได้ รวมถึงหาข้อมูลทางสถิติทุกอย่างที่เกี่ยวข้องกับ X ได้ เช่น หาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน

ตัวอย่าง 4.3 กำหนด X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง

- จงหา PMF ของ X
- จงหาความน่าจะเป็นที่มีเหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ การหา PMF ของ X ก็คือการเขียนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $\{X = x\}$ ของทุกๆค่า x ที่เป็นไปได้ ซึ่งหาได้ดังนี้
ในตัวอย่างนี้ค่าทั้งหมดของ X ที่เป็นไปได้คือ $S_X = \{0, 1, 2\}$ เราค่อยๆ เขียน $P(\{X = x\})$ จากเซ็ตนี้
เมื่อ $X = 0$, $P(\{X = 0\}) = P(\{TT\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
เมื่อ $X = 1$, $P(\{X = 1\}) = P(\{HT, TH\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
เมื่อ $X = 2$, $P(\{X = 2\}) = P(\{HH\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
นำข้อมูลที่มีมารวมเขียนสรุปเป็น PMF ได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x = 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \\ \frac{1}{4} & , x = 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

เมื่อเราได้ PMF ของ X แล้ว เราก็จะสามารถหาความน่าจะเป็นของทุกเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ X ได้ โจทย์ให้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีเหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง ซึ่งก็คือเหตุการณ์ $\{X \geq 1\}$ นั่นเอง ในตัวอย่างนี้ $X \geq 1$ เป็นไปได้เพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ $X = 1$ หรือ $X = 2$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(\{X \geq 1\}) &= P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) \\ &= P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.4 กล่องใบหนึ่งโทรศัพท์ไอโฟนไว้ 3 เครื่อง และโทรศัพท์ซัมซุง 2 เครื่อง สุ่มหยิบโทรศัพท์ขึ้นมาครั้งละ 1 เครื่องแล้วสังเกตโทรศัพท์ที่หยิบได้ โดยเมื่อหยิบแล้วจะใส่โทรศัพท์กลับคืนลงไปในกล่อง ทำจนครบ 3 ครั้ง กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนโทรศัพท์ไอโฟนที่หยิบได้จากการสุ่มหยิบ 3 ครั้ง

- จงหา PMF ของ X
- จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้โทรศัพท์ไอโฟนเลย

วิธีทำ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนโทรศัพท์ไอโฟนที่หยิบได้จากการสุ่มหยิบ 3 ครั้ง ดังนั้นค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$ เราค่อยๆ เขียน $P(\{X = x\})$ จากเซ็ตนี้
ในการหยิบแต่ละครั้งมีความน่าจะเป็นที่หยิบได้โทรศัพท์ไอโฟน (เรียกย่อๆว่า i) 3/5 และความน่าจะเป็นที่

หยิบได้โทรศัพท์ซัมซุง (เรียกย่อๆว่า s) 2/5 ดังนั้น
เมื่อ $X = 0$, $P(\{X = 0\}) = P(\{(s, s, s)\}) = \binom{3}{0} \times (\frac{2}{5})^3 = \frac{8}{125}$
เมื่อ $X = 1$, $P(\{X = 1\}) = P(\{(i, s, s), (s, i, s), (s, s, i)\}) = \binom{3}{1} \times \frac{3}{5} \times (\frac{2}{5})^2 = \frac{36}{125}$
เมื่อ $X = 2$, $P(\{X = 2\}) = P(\{(i, i, s), (s, i, i), (i, s, i)\}) = \binom{3}{2} \times (\frac{3}{5})^2 \times \frac{2}{5} = \frac{54}{125}$
เมื่อ $X = 3$, $P(\{X = 3\}) = P(\{(s, s, s)\}) = \binom{3}{3} \times (\frac{3}{5})^3 = \frac{27}{125}$
นำข้อมูลที่มีมารวมเขียนสรุปเป็น PMF ได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{125} & , x = 0 \\ \frac{36}{125} & , x = 1 \\ \frac{54}{125} & , x = 2 \\ \frac{27}{125} & , x = 3 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้โทรศัพท์ไอโฟนเลย ก็คือเหตุการณ์ $\{X = 0\}$ ซึ่งเราทราบจาก PMF โดยตรงว่า $P(\{X = 0\}) = 8/125$

ตัวอย่าง 4.5 แพ็กเก็ตถูกส่งจากเครื่องส่งไปยังเครื่องรับ โดยเครื่องส่งจะส่งแพ็กเก็ตซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าเครื่องรับจะได้รับแพ็กเก็ตที่ถูกต้องสมบูรณ์ กำหนด X เป็นจำนวนครั้งที่ต้องส่งแพ็กเก็ตจนกว่าจะส่งได้สำเร็จ ถ้าความน่าจะเป็นที่เครื่องรับจะได้รับแพ็กเก็ตอย่างถูกต้องสมบูรณ์จากการส่งแต่ละครั้งคิดเป็น 0.2

- จงหา PMF ของ X
- จงหาความน่าจะเป็นที่ต้องส่งแพ็กเก็ตอย่างน้อย 3 ครั้งจึงจะสำเร็จ

วิธีทำ ค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ $S_X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ในการส่งแต่ละครั้ง ความน่าจะเป็นที่แพ็กเก็ตจะถูกต้องสมบูรณ์คือ 0.2 เราหา PMF ของ X ได้ดังนี้
เมื่อ $X = 1$, $P(\{X = 1\}) = 0.2$ กล่าวคือ ส่งครั้งเดียวสำเร็จเลย
เมื่อ $X = 2$, $P(\{X = 2\}) = (0.8)(0.2)$ กล่าวคือ ส่งครั้งแรกไม่สำเร็จและครั้งที่สองสำเร็จ
เมื่อ $X = 3$, $P(\{X = 3\}) = (0.8)^2(0.2)$ กล่าวคือ ส่งสองครั้งแรกไม่สำเร็จและครั้งที่สามสำเร็จ
เมื่อ $X = n$, $P(\{X = n\}) = (0.8)^{n-1}(0.2)$ กล่าวคือ ส่ง $n - 1$ ครั้งแรกไม่สำเร็จและครั้งที่ n สำเร็จ
นำข้อมูลที่มีมารวมเขียนสรุปเป็น PMF ได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} (0.8)^{x-1}(0.2) & , x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ต่อมาโจทย์ให้หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องส่งแพ็กเก็ตอย่างน้อย 3 ครั้งจึงจะสำเร็จ ซึ่งก็คือเหตุการณ์ $\{X \geq 3\}$ เราหาความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (0.2 + (0.8 \times 0.2)) \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ต้องส่งแพ็กเก็ตอย่างน้อย 3 ครั้งจึงจะสำเร็จ คือ 0.64

ปุจฉา 4.6 เงื่อนไขสำคัญที่ PMF ของ X ต้องมีคืออะไร?

วิสัชนา คือเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

กล่าวคือ เมื่อนำความน่าจะเป็นของทุกเหตุการณ์ที่ค่า x เป็นไปได้มาบวกรวมกัน ผลรวมที่ได้ต้องเท่ากับ 1 เสมอ ถ้าหากเงื่อนไขนี้ไม่เป็นจริง แสดงว่าฟังก์ชันที่นำมาใช้เป็น PMF เป็นฟังก์ชันที่ไม่ถูกต้อง

ปุจฉา 4.7 ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่ใช้กันบ่อยๆ มีอะไรบ้าง?

วิสัชนา ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่ใช้กันบ่อยๆ ได้แก่

- ตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลี (Bernoulli Random Variable) ซึ่งมี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ 1 - p & , x = 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

  โดยที่ $p \in [0, 1]$

- ตัวแปรสุ่มแบบไบโนเมียล (Binomial Random Variable) ซึ่งมี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ $p \in [0, 1]$

- ตัวแปรสุ่มแบบจีโอเมตริก (Geometric Random Variable) ซึ่งมี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ $p \in [0, 1]$

- ตัวแปรสุ่มแบบปัวซอง (Poisson Random Variable) ซึ่งมี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & , x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ $\lambda > 0$

ตัวอย่าง 4.6 จงพิสูจน์ว่า PMF ของตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลี มีผลรวมความน่าจะเป็นเท่ากับ 1

วิธีทำ จาก PMF ของตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลี ในปุจฉา 4.7 เมื่อนำมาหาผลรวมของทุกๆค่า x จะได้

$$\begin{aligned} \sum_x p_X(x) &= \sum_{x=0}^{1} p_X(x) && ;[\text{เนื่องจากค่า } x \text{ ที่เป็นไปได้คือ 0, 1}] \\ &= p_X(0) + p_X(1) \\ &= (1-p) + p \\ &= 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.7 จงพิสูจน์ว่า PMF ของตัวแปรสุ่มแบบไบโนเมียล มีผลรวมความน่าจะเป็นเท่ากับ 1

วิธีทำ จาก PMF ของตัวแปรสุ่มแบบไบโนเมียล ในปุจฉา 4.7 เมื่อนำมาหาผลรวมของทุกๆค่า x จะได้

$$\begin{aligned} \sum_x p_X(x) &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} && ;[\text{เนื่องจากค่า } x \text{ ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, ..., } n] \\ &= (p + (1-p))^n && ;[\text{binomial theorem}] \\ &= 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

4.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Function of a Discrete Random Variable)

ปุจฉา 4.8 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม คืออะไร?

วิสัชนา ในหลายๆ กรณีเราอาจต้องการสร้างตัวแปรสุ่มใหม่จากตัวแปรเดิม ยกตัวอย่างเช่น สมมติ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนน้ำหนักของนักเรียนในหน่วยกิโลกรัม เราอาจสร้างตัวแปรใหม่คือ $Y = 2.2X$ เพื่อแทนน้ำหนักของนักเรียนในหน่วยปอนด์ ตัวแปรใหม่ Y ก็เป็นตัวแปรสุ่มเช่นกัน เนื่องจาก Y เป็นฟังก์ชันของ X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

ปุจฉา 4.9 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี PMF $p_X(x)$ และ $Y = g(X)$ เป็นฟังก์ชันของ X เราจะหา PMF ของ Y อย่างไร?

วิสัชนา หา PMF ของ Y ได้โดยคำนวณจาก PMF ของ X ดังนี้

$$p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$$

ตัวอย่าง 4.8 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & , x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

กำหนด $Y = |X|$ จงหา PMF ของ Y

วิธีทำ เนื่องจาก $Y = |X|$ ดังนั้นค่าของ Y ที่เป็นไปได้คือ $S_Y = \{0,1,2,3\}$ เราสามารถหา PMF ของ Y ดังนี้

เมื่อ $Y = 0$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 0$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X = 0\}$

ดังนั้น $P(\{Y = 0\}) = P(\{X = 0\}) = \frac{1}{7}$

เมื่อ $Y = 1$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 1, -1$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X = 1\} \cup \{X = -1\}$

ดังนั้น $P(\{Y = 1\}) = P(\{X = 1\}) + P(\{X = -1\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

เมื่อ $Y = 2$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 2, -2$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X = 2\} \cup \{X = -2\}$

ดังนั้น $P(\{Y = 2\}) = P(\{X = 2\}) + P(\{X = -2\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

เมื่อ $Y = 3$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 3, -3$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X = 3\} \cup \{X = -3\}$

ดังนั้น $P(\{Y=3\}) = P(\{X=3\}) + P(\{X=-3\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
นำข้อมูลมาเขียนสรุปเป็น PMF ของ Y ได้ดังนี้

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & , y = 0 \\ \frac{2}{7} & , y \in \{1,2,3\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จะสังเกตได้ว่า $p_Y(y)$ มีคุณสมบัติของ PMF ที่ถูกต้องคือเมื่อบวกรวม $p_Y(y)$ ในทุกๆค่าของ y ต้องได้ 1

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{3} p_Y(y) &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.9 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี PMF ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & , x \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

กำหนด $Y = X^2$ จงหา PMF ของ Y

วิธีทำ เนื่องจาก $Y = X^2$ ดังนั้นค่าของ Y ที่เป็นไปได้คือ $S_Y = \{0,1,4,9\}$ เราสามารถหา PMF ของ Y ดังนี้
เมื่อ $Y = 0$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 0$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X = 0\}$
ดังนั้น $P(\{Y=0\}) = P(\{X=0\}) = \frac{1}{7}$
เมื่อ $Y = 1$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 1, -1$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X=1\} \cup \{X=-1\}$
ดังนั้น $P(\{Y=1\}) = P(\{X=1\}) + P(\{X=-1\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
เมื่อ $Y = 4$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 2, -2$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X=2\} \cup \{X=-2\}$
ดังนั้น $P(\{Y=4\}) = P(\{X=2\}) + P(\{X=-2\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
เมื่อ $Y = 9$, กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $X = 3, -3$ ซึ่งตรงกับเหตุการณ์ $\{X=3\} \cup \{X=-3\}$
ดังนั้น $P(\{Y=9\}) = P(\{X=3\}) + P(\{X=-3\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

นำข้อมูลมาเขียนสรุปเป็น PMF ของ Y ได้ดังนี้

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & , y = 0 \\ \frac{2}{7} & , y \in \{1, 4, 9\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จะสังเกตได้ว่า $p_Y(y)$ มีคุณสมบัติของ PMF ที่ถูกต้องคือเมื่อบวกรวม $p_Y(y)$ ในทุกๆค่าของ y ต้องได้ 1

$$\begin{aligned} \sum_y p_Y(y) &= p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(4) + p_Y(9) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4.3 ค่าคาดหมาย (Expected Value)

ปุจฉา 4.10 ค่าคาดหมาย (Expected Value) ของตัวแปรสุ่ม คืออะไร?

วิสัชนา ค่าคาดหมาย ของตัวแปรสุ่มก็คือ ค่าเฉลี่ย หรือ ค่ากลาง ของตัวแปรสุ่ม

ปุจฉา 4.11 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี PMF $p_X(x)$ เราจะหาค่าคาดหมายของ X อย่างไร?

วิสัชนา ค่าคาดหมายของ X หาได้ดังนี้

$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

ตัวอย่าง 4.10 กำหนด X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง ถ้าหากความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวจากการโยนแต่ละครั้งเป็น 2/3 จงหาค่าคาดหมายของ X

วิธีทำ ก่อนอื่นต้องหา PMF ของ X ซึ่งค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ $S_X = \{0, 1, 2\}$
เมื่อ $X = 0$, $P(\{X = 0\}) = P(\{TT\}) = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$
เมื่อ $X = 1$, $P(\{X = 1\}) = P(\{HT\} \cup \{TH\}) = 2 \times (\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$
เมื่อ $X = 2$, $P(\{X = 2\}) = P(\{HH\}) = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

นำข้อมูลมาเขียนสรุปเป็น PMF ของ X ได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & , x = 0 \\ \frac{4}{9} & , x \in \{1, 2\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

หาค่าคาดหมายของ X ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x p_X(x) \\ &= (0 \times \frac{1}{9}) + (1 \times \frac{4}{9}) + (2 \times \frac{4}{9}) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.11 ถังใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 2 ลูกและสีขาว 3 ลูก บนลูกสีแดงแต่ละลูกมีหมายเลข 5 กำกับอยู่ และบนลูกสีขาวแต่ละลูกมีหมายเลข -2 กำกับอยู่ ทำการทดลองโดยสุ่มหยิบลูกบอล 2 ครั้ง โดยหยิบแล้วใส่คืน กำหนด X เป็นผลรวมของหมายเลขบนลูกบอลจากการหยิบ 2 ครั้ง จงหาค่าคาดหมายของ X

วิธีทำ ก่อนอื่นต้องหา PMF ของ X ซึ่งหาได้ดังนี้
ค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ $S_X = \{10, 3, -4\}$ ตามผลการทดลองที่หยิบได้คือ (r, r), $\{(r, w), (w, r)\}$, และ (w, w) ตามลำดับ โดยที่ r คือสีแดง และ w คือสีขาว
เมื่อ $X = 10$, $P(\{X = 10\}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
เมื่อ $X = 3$, $P(\{X = 3\}) = 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$
เมื่อ $X = -4$, $P(\{X = -4\}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
นำข้อมูลที่มีมาเขียนสรุปเป็น PMF ของ X ได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{25} & , x = 10 \\ \frac{12}{25} & , x = 3 \\ \frac{9}{25} & , x = -4 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

หาค่าคาดหมายของ X ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x p_X(x) \\ &= (10 \times \frac{4}{25}) + (3 \times \frac{12}{25}) + (-4 \times \frac{9}{25}) \\ &= 1.6 \end{aligned}$$

ปุจฉา 4.12 กำหนด c เป็นค่าคงที่ $E[c] =?$

วิสัชนา หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[c] &= \sum_x c\, p_X(x) \\ &= c \sum_x p_X(x) \\ &= c \times 1 \\ &= c \end{aligned}$$

กล่าวคือ ถ้า c เป็นค่าคงที่ ค่าเฉลี่ยของ c ก็คือ c

ปุจฉา 4.13 เมื่อนำค่าคงที่ c มาคูณตัวแปรสุ่ม X ส่งผลให้ค่าคาดหมายเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร?

วิสัชนา ส่งผลให้ค่าคาดหมายใหม่เปลี่ยนไป c เท่าของค่าคาดหมายของ X ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[cX] &= \sum_x (cx)\, p_X(x) \\ &= c \sum_x x p_X(x) \\ &= cE[X] \end{aligned}$$

ปุจฉา 4.14 เมื่อนำค่าคงที่ c มาบวกเข้าไปที่ตัวแปรสุ่ม X ส่งผลให้ค่าคาดหมายเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร?

วิสัชนา ส่งผลให้ค่าคาดหมายใหม่เท่ากับค่าคาดหมายเดิมของ X บวกด้วย c ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[X+c] &= \sum_x (x+c)\, p_X(x) \\ &= \sum_x x p_X(x) + \sum_x c\, p_X(x) \\ &= \sum_x x p_X(x) + c \sum_x p_X(x) \\ &= E[X] + c \end{aligned}$$

4.4 ค่าความแปรปรวน (Variance)

ปุจฉา 4.15 ค่าความแปรปรวน (Variance) คือ อะไร?

วิสัชนา ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม เป็นค่าสรุปที่ใช้วัดการกระจายตัวของค่าต่างๆที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มจากค่าคาดหมาย ถ้าค่าความแปรปรวนมีมากแสดงว่าค่าของตัวแปรสุ่มมีการกระจายตัวจากค่าคาดหมายมาก

ปุจฉา 4.16 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X หาอย่างไร?

วิสัชนา หาได้ตามนิยามดังนี้

$$\text{VAR}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$

หรือหาตามสมการนี้ก็ได้

$$\text{VAR}[X] = \sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

ตัวอย่าง 4.12 กำหนด X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง ถ้าหากความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวจากการโยนแต่ละครั้งเป็น 2/3 จงหาค่าความแปรปรวนของ X

วิธีทำ เราทราบจากตัวอย่าง 4.10 ว่า PMF ของ X คือ

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & , x = 0 \\ \frac{4}{9} & , x \in \{1, 2\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

และทราบว่าค่าคาดหมายของ X คือ $E[X] = \frac{4}{3}$ สิ่งที่เราต้องหาเพิ่มเติมคือ $E[X^2]$ ดังนี้

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_x x^2 p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x^2 p_X(x) \\ &= (0^2 \times \frac{1}{9}) + (1^2 \times \frac{4}{9}) + (2^2 \times \frac{4}{9}) \\ &= \frac{20}{9} \end{aligned}$$

หาค่าความแปรปรวนของ X ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{20}{9} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

ปุจฉา 4.17 ค่าความแปรปรวนของค่าคงที่ c มีค่าเท่าไร?

วิสัชนา ค่าความแปรปรวนของค่าคงที่ c หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{VAR}[c] &= E[c^2] - (E[c])^2 \\ &= c^2 - c^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

สรุปค่าความแปรปรวนของค่าคงที่ c คือ 0 หรือไม่มีความแปรปรวนนั่นเอง

ปุจฉา 4.18 การคูณตัวแปรสุ่ม X ด้วยค่าคงที่ c ส่งผลต่อค่าความแปรปรวนอย่างไร?

วิสัชนา เราหา VAR$[cX]$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{VAR}[cX] &= E[(cX)^2] - (E[cX])]^2 \\
&= c^2E[X^2] - (cE[X])^2 \\
&= c^2E[X^2] - c^2(E[X])^2 \\
&= c^2(E[X^2] - (E[X])^2) \\
&= c^2\text{VAR}[X]
\end{aligned}$$

สรุปคือค่าความแปรปรวนใหม่เปลี่ยนไป c^2 เท่าของค่าความแปรปรวนของ X

ปุจฉา 4.19 การบวกตัวแปรสุ่ม X ด้วยค่าคงที่ c ส่งผลต่อค่าความแปรปรวนอย่างไร?

วิสัชนา เราหา VAR$[X+c]$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{VAR}[X+c] &= E[(X+c)^2] - (E[X+c)])^2 \\
&= E[X^2 + 2cX + c^2] - (E[X] + c)^2 \\
&= E[X^2] + 2cE[X] + E[c^2] - \left\{(E[X])^2 + 2cE[X] + c^2\right\} \\
&= E[X^2] + 2cE[X] + c^2 - \left\{(E[X])^2 + 2cE[X] + c^2\right\} \\
&= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \text{VAR}[X]
\end{aligned}$$

สรุปคือค่าความแปรปรวนใหม่ไม่เปลี่ยนไปจากค่าความแปรปรวนเดิมของ X

บรรณานุกรม

[1] S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th ed. Pearson, 2012.

[2] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed. Athena Scientific, 2008.

[3] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed. Pearson, 2008.

[4] W. Navidi, *Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2010.