Boolean Algebra

Lecture 2

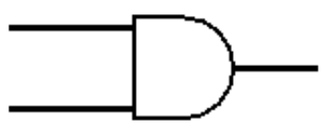
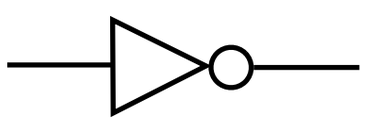
Outline

- Logic gates and Boolean expressions
- Boolean algebra

Boolean Expressions

- เราใช้ประโยคสัญลักษณ์บูลีนในการบรรยายฟังก์ชันตรรก (Logic Functions)
- ฟังก์ชันตรรกใดๆก็ตาม สามารถเขียนและสร้างโดยใช้เกท AND, OR, และ NOT
- Basic Boolean Operations:
  - AND $A \cdot B$
  - OR $A + B$
  - NOT $\overline{A}$

Basic Gates

	AND	OR	NOT
Boolean	$A \bullet B$ คูณ	$A + B$ บวก	$\overline{A}$ BAR
	ต้องเท่านั้น = 1	เท้งเท่านั้น = 0	นิเสธ ~ → กลับค่า
			1 → 0 , 0 → 1
Logic gate			

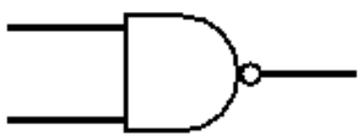
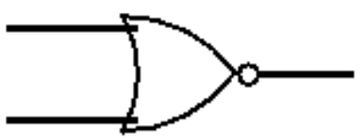
Truth Table

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	Y
0	1
1	0

Other Logic Gates

	NAND	NOR
	จมีอยู่เท่านั้น = 0	เป็นเท่านั้น = 1
Boolean	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A + B}$
Logic gate		

Truth Table

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Other Logic Gates

	XOR	XNOR
	เหมือน 0 , ต่าง 1	เหมือน 1 , ต่าง 0
Boolean	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$
Logic gate		

Truth Table

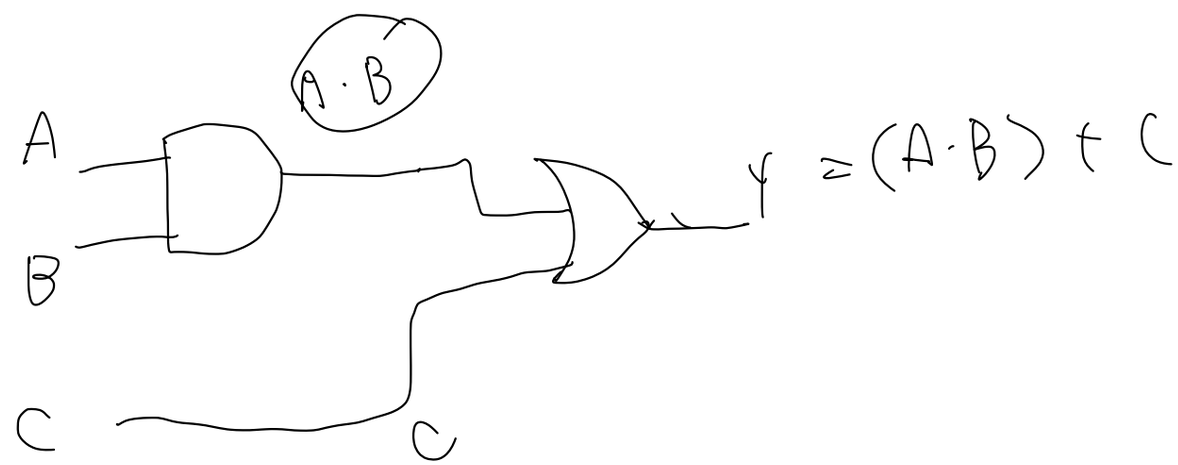
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Boolean to others: Ex 1

$$Y = (A \cdot B) + C$$

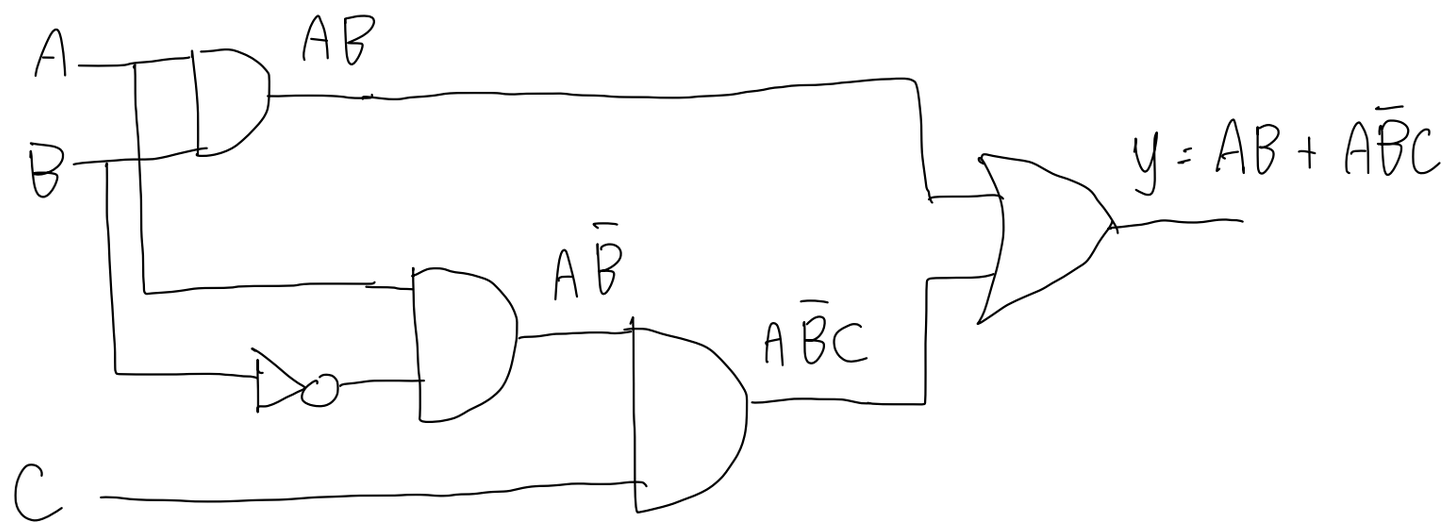
A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1



Boolean to others: Ex 2

$$Y = AB + A\overline{B}C$$

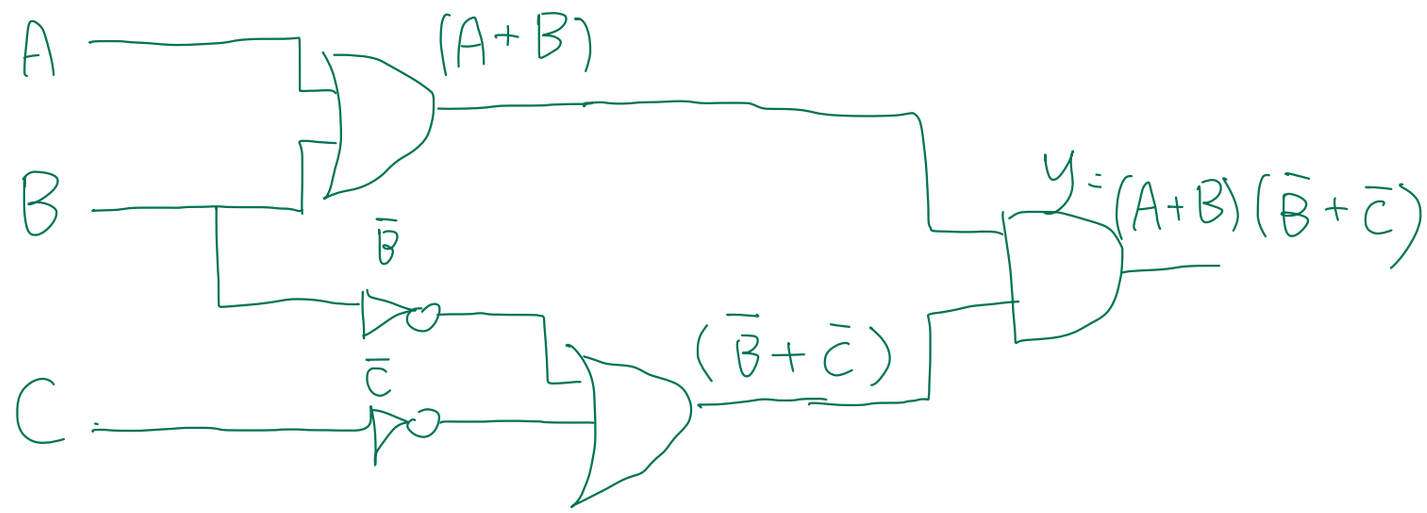
A	B	C	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Boolean to others: Ex 3

$$Y = (A + B)(\overline{B} + \overline{C})$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



$$Y = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{C + D})$$

Equivalent Equations

- พิจารณาสมการบูลีน 2 สมการนี้
  - $Z_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
  - $Z_2 = AB\overline{C} + \overline{(AB)}C$
- เขียน Schematic Diagram และตารางค่าความจริงของสมการบูลีนทั้งสอง

Equivalent Equations

$$Z_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	Z_1
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

$$Z_2 = AB\overline{C} + \overline{(AB)}C$$

A	B	C	$AB\overline{C}$	$\overline{(AB)}C$	Z_2
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Boolean Minimization

- ฟังก์ชันตรรกเดียวกันสามารถเขียนได้หลายรูปแบบของสมการบูลีน
- การลดรูปสมการมีข้อดีคือ
  - ช่วยลดจำนวนเกทที่ใช้
  - ประหยัดพื้นที่ของวงจร
  - ประหยัดต้นทุน

Boolean Algebra

- ในการจัดการสมการบูลีน เราจำเป็นต้องมีกฎ
- กฎเหล่านี้เกี่ยวข้องกับข้อกำหนดต่างๆ ของตัวแปรตรรก (Logic Variables) ซึ่งจะกำหนดว่าเราสามารถทำอะไรกับตัวแปรตรรกได้บ้าง
- ทฤษฎีพีชคณิตบูลีนนี้ถูกคิดค้นโดย George Boole ในปี ค.ศ. 1854

Boolean Algebra

- พีชคณิตบูลีนประกอบไปด้วย
    - เซตของตัวแปรตรรก S
    - Binary operators 2 ตัวคือ AND และ OR
    - Unary operator 1 ตัวคือ NOT

Laws and Properties

1. สมบัติปิด (Closure): For every A, B in S

(i) $A + B \in S$

(ii) $AB \in S$

2. กฎการสลับที่ (Commutative):

(i) $A + B = B + A$

(ii) $AB = BA$

Laws and Properties

3. กฎการจัดหมู่ (Associative):

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A(BC) = (AB)C$

4. กฎการกระจาย (Distributive):

(i) $A + BC = (A + B)(A + C)$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$

Laws and Properties

5. เอกลักษณ์ (Identities):

(i) $A + 0 = A$ $\qquad$ $A + 1 = 1$

(ii) $A \cdot 1 = A$ $\qquad$ $A \cdot 0 = 0$

6. ส่วนกลับ (Complements):

(i) $\overline{(\overline{A})} = A$

(ii) $A + \overline{A} = 1$

(iii) $A\overline{A} = 0$

Basic Rules of Boolean Algebra

1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Laws and Properties

7. Self Operation:

(i) $A + A = A$

(ii) $A \cdot A = A$

8. กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's Laws):

(i) $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

(ii) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

Useful Laws

9. $AB + A\overline{B} = A$

10. $A + AB = A$

11. $A + \overline{A}B = A + B$

Minimization: Ex 1

$$Y = (A + \overline{B})B$$

$AB + \overline{B}B$

$AB + 0$

$A \cdot B$

A	B	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Minimization: Ex 2

$$Y = B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$

$\overline{A}BC + ABC + B\overline{C}$

$1(BC) + B\overline{C}$

$BC + B\overline{C}$

$\boxed{B \cdot 1 = B}$

Basic Rules of Boolean Algebra

1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Minimization: Ex 3

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$$

$(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cdot 1) + (\overline{A}\,B\,\overline{C}\cdot 1)$

$\overline{A}\cdot 1\cdot \overline{C}$

$\boxed{\overline{A}\cdot\overline{C}}$

	A	B	C	D	X
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Basic Rules of Boolean Algebra

1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Minimization: Ex 4

$$Y = (\overline{A} + BC + D)(\overline{A} + BC + \overline{D})$$

$\overline{A} + (BC + D)\overline{D}$

$\overline{A} + BC$

Basic Rules of Boolean Algebra

1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$