Q & A

แนวข้อสอบ 3 ชม. = 180 นาที

10 ข้อ

"กรอกเป็นตัวเลข"

1 ชม.

① เข้ารหัส
② ถอดรหัส } 10 นาที

③ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
- คาร์เมอร์
- เกา
- เกาจอแดน

15 นาที

④ Dot Product, norm, มุม 5 นาที

⑤, ⑥ ปฏิภูมิเวกเตอร์ 10 นาที

⑦ เป็นอิสระเชิงเส้น หรือขึ้นอยู่กับก.เชิงเส้น 10 นาที

⑧ เมทริกซ์มาตรฐานของก.แปลงเชิงเส้น 10 นาที

⑨ ก.แปลงเชิงเส้นมีติผกผัน 10 นาที

⑩ ค่าเจาะจงกับเวกเตอร์เจาะจง 20 นาที

มีกระดาษทด

เครื่องคิดเลขได้

Q & A

Write the uncoded row matrices of size 1×3 for the message MEET ME MONDAY.

① เป็นหน้า

0 = __	14 = N
1 = A	15 = O
2 = B	16 = P
3 = C	17 = Q
4 = D	18 = R
5 = E	19 = S
6 = F	20 = T
7 = G	21 = U
8 = H	22 = V
9 = I	23 = W
10 = J	24 = X
11 = K	25 = Y
12 = L	26 = Z
13 = M	

MEET ME MONDAY

$[13\ \ 5\ \ 5][20\ \ 0\ \ 13][5\ \ 0\ \ 13][15\ \ 14\ \ 4][1\ \ 25\ \ 0]$

Use the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

to encode the message MEET ME MONDAY.

$$[13\ \ 5\ \ 5]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [\overset{13}{13(1)+5(-1)+5(1)}\ \ \overset{-26}{13(-2)+5(1)+5(-1)}\ \ \overset{26}{13(2)+5(3)+5(-4)}]$$

$$= [13\ \ -26\ \ 21]$$

$$[20\ \ 0\ \ 13]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [\overset{20}{20(1)+0+13(1)}\ \ \overset{-40}{20(-2)+0+13(-1)}\ \ \overset{40}{20(2)+0+13(-4)}]$$

$$= [33\ \ -53\ \ -12]$$

$$[5\ \ 0\ \ 13]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [\overset{18}{5(1)+13(1)}\ \ \overset{-23}{5(-2)+13(-1)}\ \ \overset{-42}{5(2)+13(-4)}]$$

$$= [18\ \ -23\ \ -42]$$

$$[15\ \ 14\ \ 4]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [15+(-14)+4\ \ -30+14-4\ \ 30+42-16]$$

$$= [5\ \ -20\ \ 56]$$

$$[1\ \ 25\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [1-25\ \ -2+25\ \ 2+75]$$

$$= [-24\ \ 23\ \ 77]$$

$\therefore$ 13 -26 21 33 -53 -12 18 -23 -42 5 -20 56 -24 23 77 #

Q & A

② กอดาน์

A^{-1}

Use the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

to decode the cryptogram

$$[13 \quad -26 \quad 21] \; [33 \quad -53 \quad -12] \; [18 \quad -23 \quad -42] \; [5 \quad -20 \quad 56] \; [-24 \quad 23 \quad 77.]$$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj}(A)$

$A^{-1}B$ = Answer

หา adj(A) : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1$ $\quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1$ $\quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -10$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5$ $\quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -10 & -6 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Downarrow \begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} [13 \quad -26 \quad 21] = [\overset{-13}{(-1)(13)} + \overset{26}{(-1)(-26)} + 0 \quad \overset{-130}{(-10)(13)} + \overset{156}{(-6)(-26)} + \overset{-21}{(-1)(21)} \quad \overset{-104}{(-8)(13)} + \overset{130}{(-5)(-26)} + \overset{-21}{(-1)(21)}] = [13 \quad 5 \quad 5]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} [33 \quad -53 \quad -12] = [\overset{-33}{(-1)(33)} + \overset{53}{(-1)(-53)} + 0 \quad \overset{-330}{(-10)(33)} + \overset{318}{(-6)(-53)} + \overset{12}{(-1)(-12)} \quad \overset{-264}{(-8)(33)} + \overset{265}{(-5)(-53)} + \overset{12}{(-1)(-12)}] = [20 \quad 0 \quad 13]$$

③ หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 15 นาที

Q & A

คาร์เมอร์
เก๊า
เก๊าจอแดน

Each equation is linear. = เป็นระบบสมการเชิงเส้น

(a) $3x + 2y = 7$ (b) $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$

(c) $x_1 - 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 0$ (d) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)x_1 - 4x_2 = e^2$

Each equation is not linear. : ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

(a) $xy + z = 2$ (b) $e^x - 2y = 4$

(c) $\sin x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ (d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \rightarrow xy\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4xy$

$y + x = 4xy$

คูณด้วย แปลว่าไม่ใช่สมการเชิงเส้น

→ ไม่เป็นฟังก์ชัน ตรีโกณ รากกำลัง

คาร์เมอร์

Use Cramer's Rule to solve

$$4x_1 - 2x_2 = 10$$
$$3x_1 - 5x_2 = 11$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1$$

Use Cramer's Rule to solve the system of linear equations for x.

$$-x + 2y - 3z = 1$$
$$2x + z = 0$$
$$3x - 4y + 4z = 2$$

หาค่า x

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

เก๊า : Gaussian Elimination

Solve the system.

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -2$$
$$x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 = -19$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \\ R_3 - 2R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{3}R_3 \\ R_4 + 6R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} -\frac{1}{13}R_4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$$
$$x_3 - x_4 = -2$$
$$x_4 = 3$$

หา x_3 ; $x_3 = 1$

หา x_2 ; $x_2 = 2$ #

หา x_1 ; $x_1 = -1$

เก๊า - จอแดน

Use Gauss-Jordan elimination to solve the system.

$$x - 2y + 3z = 9$$
$$-x + 3y = -4$$
$$2x - 5y + 5z = 17$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + 2R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \frac{1}{2}R_3$$

$$x - 2y + 3z = 9$$
$$y + 3z = 5$$
$$z = 2$$

หา y ; $y = -1$ #

หา x ; $x - 2(-1) + 3(2) = 9$

$x + 8 = 9$

$x = 1$

Q & A

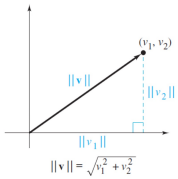
④ Dot Product , Norm , มุม

5 พ.ย.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

พีทากอรัส

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$



หา Norm

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

3. ให้ $\mathbf{u} = (-1, 1, -2)$ และ $\mathbf{v} = (1, -3, -2)$

จงหา (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

(c) $\|\mathbf{u}\|^2$

(a) $u \cdot v = (-1)(1) + (1)(-3) + (-2)(-2)$

$= (-1) + (-3) + (4)$

(b) $u \cdot u = (-1)(-1) + 1 + (-2)(-2)$

$= 1 + 1 + 4$

$= 6$

(c) $\|u\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2$

$= 1 + 1 + 4$

$= 6$

หามุม

ให้ $\mathbf{u} = (3,1), \mathbf{v} = (-2,4)$

จงหามุม θ ระหว่างเวกเตอร์

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$= \frac{3(-2) + 1(4)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{-6 + 4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}}$$

$$= \frac{-2}{10\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \arccos^{-1}\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

Provided that $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ and $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, find

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. (c) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$.

⑤, ⑥ ปฏิภูมิเวกเตอร์ Vector Space

10 คน

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is in V. — Closure under addition
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Commutative property
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ — Associative property
4. V has a **zero vector 0** such that for every $\mathbf{u}$ in V, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. — Additive identity
5. For every $\mathbf{u}$ in V, there is a vector in V denoted by $-\mathbf{u}$ such that $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. — Additive inverse

มีอันนี้มาให้

ต้องแสดง ครบทั้ง 10 ข้อ

Scalar Multiplication:

6. $c\mathbf{u}$ is in V. — Closure under scalar multiplication
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Distributive property
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Distributive property
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ — Associative property
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ — Scalar identity

ให้บอกว่าผิดข้อไหน เพราะอะไร ?

① ก. บวกกันของเวกเตอร์

② ก. คูณกันของเวกเตอร์ กับสเกลาร์

ตัว. Vector space R^n, $M_{m \times n}$, P^n แนบ่อย

$R^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

$R^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

Ex. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; x, y \in R \; ; \; y = 2x \right\}$ เป็นจริง

V เป็น vector space ?

จัดรูปให้เป็นเวกเตอร์ก่อน

$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; y = 2x \right\}$

$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} ; x \in R \right\}$

$V_1 + V_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$ ✓

check ① ; $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

$V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

check ② ; $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \cdot \alpha$ สเกลาร์

$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ 2\alpha x_2 \end{bmatrix}$ ✓

เซตของพหุนามดีกรีเท่ากับ 2 เป็นปฏิภูมิเวกเตอร์ไหม

2, 3, 4, 5 จ. ไม่เป็น Vector space

$\bar{w} = 2x^2$, $\bar{v} = -2x^2$

In $V = ax^2$

$\bar{w} + \bar{v} = 2x^2 + (-2x^2)$

$= 0$

No #

Q & A

(7) ' ' สระเชิงเส้น หรือขึ้นอยู่กับก.เชิงเส้น 1ว หาที่

ถ้า คำตอบ = 0 จะเป็น อิสระเชิงเส้น

A vector **v** in a vector space V is called a **linear combination** of the vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ in V if **v** can be written in the form

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k,$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are scalars.

4. ให้ $S = \{(6,2,1), (-1,3,2)\}$

จงพิจารณาว่า S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

$$S = c_1(6,2,1) + c_2(-1,3,2)$$

$$= (6c_1, 2c_1, c_1) + (c_2, 3c_2, 2c_2)$$

$$6c_1 - c_2 = 0$$

$$2c_1 + 3c_2 = 0$$

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

$$c_1 = 2c_2 \rightarrow c_1 = 2(0) = 0 \quad \#$$

$$2(2c_2) + 3c_2 = 0 \qquad 7c_2 = 0$$

$$4c_2 + 3c_2 = 0 \qquad c_2 = 0 \quad \#$$

5. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $M_{4,1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้น

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ 0 \\ 2c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3c_3 \\ c_3 \\ -2c_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 \\ -c_4 \\ 2c_4 \end{bmatrix}$$

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_2 + 3c_3 + c_4 = 0$$
$$-c_1 + c_3 - c_4 = 0$$
$$2c_2 - 2c_3 + 2c_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 + R_1 \\ R_4 - 2R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{2}R_3 \\ R_4 - 2R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ \\ \frac{1}{8}R_4 \\ \\ \end{array}$$

$$c_1 - 3c_3 - 1c_4 = 0$$
$$c_2 = 0$$
$$c_3 + c_4 = 0$$
$$c_4 = 0$$

$$c_3 = 0$$
$$c_1 - 3(0) - 1(0) = 0$$
$$c_1 = 0$$

A

อ เมทริกซ์มาตรฐานของก.แปลงเชิงเส้น 10 นาที

Show that the function given in Example 1 is a linear transformation from R^2 into R^2.

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$

To show that the function T is a linear transformation, you must show that it preserves vector addition and scalar multiplication. To do this, let $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ and $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ be vectors in R^2 and let c be any real number. Then, using the properties of vector addition and scalar multiplication, you have the two statements below.

1. Because $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, you have

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= ((u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)) \\ &= ((u_1 - u_2) + (v_1 - v_2), (u_1 + 2u_2) + (v_1 + 2v_2)) \\ &= (u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) + (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

2. Because $c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2)$, you have

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T(cu_1, cu_2) \\ &= (cu_1 - cu_2, cu_1 + 2cu_2) \\ &= c(u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) \\ &= cT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

ทำค.เข้าใจอีก

$T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$

$T(v_1, v_2)$: $v_1 + v_2 = x$, $v_1 - v_2 = y$

1. ใช้ฟังก์ชันเพื่อหา (a) ภาพ (image) ของ $\mathbf{v}$ และ (b) บุพภาพ (preimage) ของ $\mathbf{w}$

$T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$, $\mathbf{v} = (\overset{v_1}{3}, \overset{v_2}{-4})$, $\mathbf{w} = (\overset{x}{3}, \overset{y}{19})$

หา image ของ v

$T(v_1, v_2) = (3+4, 3-4)$

$v = (7, -1)$

หา preimage ของ w

$v_1 + v_2 = 3$ —(1)

$v_1 - v_2 = 19$ —(2)

(1)+(2) ; $2v_1 = 22$

$v_1 = 11$

$v_2 = -8$

$w = (19, -8)$

2. การแปลงเชิงเส้น $T: R^n \to R^m$ ถูกกำหนดโดย $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ จงหาขนาด (มิติ) ของ R^n และ R^m

$$A = \overset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \qquad v = \overset{4\times 1}{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 + v_2 - 2v_3 + v_4 \\ -v_1 + 4v_2 + 5v_3 + 0 \\ 0 + v_2 + 3v_3 + v_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 - 2v_3 + v_4 \\ -v_1 + 4v_2 + 5v_3 \\ v_2 + 3v_3 + v_4 \end{bmatrix}$$

$R^n = 1$ $\qquad$ $R^m = 3$

3. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T

$T(x, y, z) = (3z - 2y, 4x + 11z)$

$$\overset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}} \overset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0(1)+0+0 & 0+(-2)+0 & 0+0+3 \\ 4+0+0 & 0+0+0 & 0+0+11 \end{bmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการประกอบ $T = T_2 \circ T_1$ และ $T' = T_1 \circ T_2$

$T_1: R^2 \to R^2, T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$ ← อ่านแล้วยังงง!

$T_2: R^2 \to R^2, T_2(x, y) = (2x, x - y)$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = T_2 \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+0 & 2(-2)+0 \\ 1(1)+(-1)(2) & 1(-2)+(-1)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$T' = T_1 \cdot T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-2)(1) & 1(0) + (-2)(-1) \\ (2)(2) + 3(1) & 2(0) + 3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

5. จงพิจารณาว่าการแปลงเชิงเส้นหาตัวผกผันได้หรือไม่ ถ้าหาได้ ให้แสดงการหาตัวผกผัน

T^{-1} $\qquad$ หา det ด้วย ⇒ $\neq 1$

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] R_3 - R_2$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}v = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$

* ระวังมาตายตอนจบ เขียนผิด *

Q & A

(9) ก.แปลงเชิงเส้นมีตัวผกผัน 10 นาที

5. จงพิจารณาว่าการแปลงเชิงเส้นหาตัวผกผันได้หรือไม่ ถ้าหาได้ ให้แสดงการหาตัวผกผัน

T^{-1} หา det ด้วย $\Rightarrow = 1$

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] R_3 - R_2$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}v = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3)$

* ระวังมาตายตอนจบ เขียนผิด *

⟸ ไปหาเพิ่ม น่าจะมียากกว่านี้

Q & A

(10) ค่าเจาะจงกับเวกเตอร์เจาะจง 20 นาที

1. จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① หา λ ก่อน → หา det ได้ค่า λ

② $\lambda_{1,2,3}$ ไปใน $\lambda I - A$

① $|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) =$

$\lambda = 1$

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$

$(\lambda=1)$ ② $I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & - \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ ทำสมการให้น้อย

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1R_1 \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ \end{matrix}$

④ แปลงเข้าสมการ

$x_1 + x_3 = 0$ | $x_1 = -x_3$

$x_2 + 2x_3 = 0$ | $x_2 = -2x_3$

ให้ $x_3 = t$ → $\begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(\lambda=2)$ $2I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1R_1 \leftrightarrow R_2 \\ -1R_2 \\ R_2 + R_3 \end{matrix}$

$x_2 + 4x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = -4x_3$

$x_1 = t$; $\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\lambda-3)$ $3I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4}R_2 \\ \frac{1}{2}R_3 \end{matrix}$

x_1

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = t$; $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$