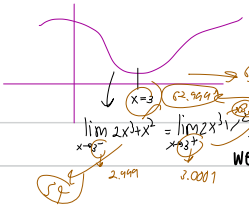
$f(x) = 2x^2 + x^2$

$\lim_{x\to 3} 2x^2 + x^2 = 2(27) + 9 = \sqrt{54+9}$

$= 63$



$\lim_{x\to 3^-} 2x^2 + x^2 = \lim_{x\to 3^+} 2x^2 + x^2$

week 8 - limit & Continuity

นิยาม

$\lim_{x\to c} f(x) = b \longleftrightarrow \left(\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)\right)$

limit ที่หาค่าไม่ได้

1) $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$ ex. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

2) f(x) เพิ่ม/ลด อย่างไม่มีขอบเขตเมื่อเข้าใกล้ c ex. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

3) f(x) แกว่งไปมาเมื่อเข้าใกล้ c ex. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

ex. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

รูปแบบ $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ $\quad \frac{-x}{x} = -1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ $\quad \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ หาค่าไม่ได้ #

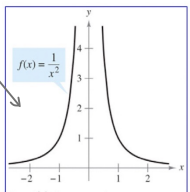
How to หา

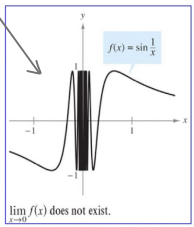
$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$\lim_{x\to c} b = b$

$\lim_{x\to c} x = c$

$\lim_{x\to c} x^n = c^n$





สมบัติ

$\lim_{x\to c} bf(x) = b[\lim_{x\to c} f(x)]$

$\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ $\quad * \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

$\lim_{x\to c} f(x)^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$

$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ เมื่อ n = คี่, ถ้า n = คู่ แล้ว $c \geq 0$

$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim_{x\to c} g(x))$ *

$\lim_{x\to -5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-5}$ ✓

$\lim_{x\to -5} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{-5}$ ✗

$\lim_{x\to 5} \sqrt[n]{x} =$

ตรงๆตัวเลย

1. $\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$
2. $\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$
3. $\lim_{x\to c} \tan x = \tan c$
4. $\lim_{x\to c} \cot x = \cot c$
5. $\lim_{x\to c} \sec x = \sec c$
6. $\lim_{x\to c} \csc x = \csc c$

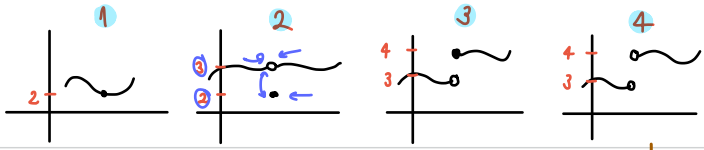
other way

ถ้าแทนค่าแล้วได้ $\frac{0}{0}$

1) Dividing Out = แยกตัวประกอบแล้วตัดกัน

2) Rationalizing = คูณด้วยสังยุค

*



① $f(x)$ ② $\lim_{x\to c} f(x)$ ③ ①−②

Continuity

1. $f(x)$ ต่อเนื่องที่ c

1 — $f(c)$ หาได้

2 — $\lim_{x\to c} f(x)$ หาได้

3 — $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

ถ้าข้อใดข้อหนึ่ง $f = f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ c

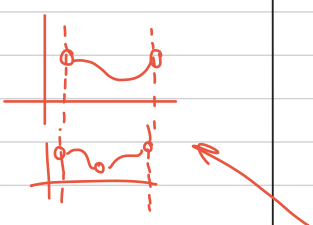
ถ้าไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$

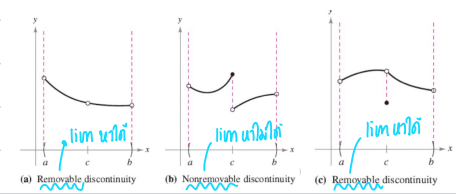
↳ จะพอหาได้อยู่เมื่อ $\lim_{x\to c}$ หาได้

↳ หาไม่ได้เลยเมื่อ $\lim_{x\to c}$ หาไม่ได้

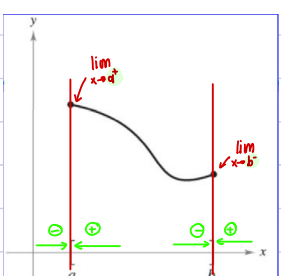
☆ ถ้า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ คือ เกิดความไม่ต่อเนื่องที่จุด c ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ

1. removable discontinuity (กำจัดได้)
   - เมื่อ $\lim_{x\to c} f(x)$ มีค่า แต่ $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$
2. nonremovable discontinuity (กำจัดไม่ได้)
   - เมื่อ $\lim_{x\to c} f(x)$ ไม่มีค่า





(a) Removable discontinuity (b) Nonremovable discontinuity (c) Removable discontinuity



Continuous function on a closed interval

2. $f(x)$ ต่อเนื่องที่ (a, b)

   เมื่อ $f(x)$ ต่อเนื่องทุกจุดในช่วงเปิด (a,b)

3. $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $[a, b]$ ⟶ ใช้กับพวก $\sqrt{\ }$ ex. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

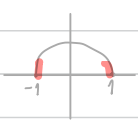
   - $f(x)$ ต่อเนื่องบน (a,b)
   - $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
   - $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

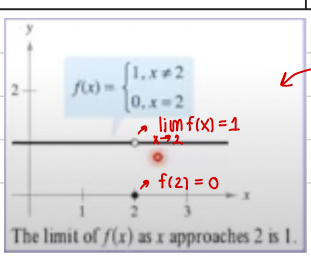
1). $f(x)$ ต่อเนื่องบน $(-1,1)$ ✓

2). $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ ✓

3). $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ ✓

∴ $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-1,1]$ #





The limit of $f(x)$ as x approaches 2 is 1.

Find the limit of $f(x)$ as x approaches 2, where f is defined as

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}.$$

* ข้อควรระวัง $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ เพราะเราไม่ได้ดูจุดที่ $x = 2$

Week 9 - Diff 1

หา Derivative

slope of tangent line

$$m = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leftarrow \Delta y$$

เมื่อ $\Delta x \to 0$ (หา slope ณ จุดๆหนึ่ง)

$$\boxed{m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}}$$

* ถ้า slope m = หาค่าไม่ได้

ex. $f(x) = x^2 + 1$ (c) หา slope @ point $(-1,2)$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(c+\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2c\Delta x + \Delta x^2 - c^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2c + \Delta x$$

$$= 2c + 0$$

$\therefore$ slope @ $(-1,2) = 2(-1) = -2$ #

↳ มันคือ diff

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$ * f(x) ต้องมี limit @ จุด x

Diff & Continuity

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

* ซึ่งการจะหา $\lim_{x \to c}$ ได้ ต้องหา $\lim_{x \to c^+} \wedge \lim_{x \to c^-}$ ได้

คสพ. ถ้าหา f'(x) ที่จุด x=c ได้ ⟶ f(x) ต่อเนื่องที่จุด x=c

แต่! ถ้า f(x) ต่อเนื่องที่จุด x=c ไม่ได้แปลว่า f'(x) จะหาได้!

จุดบนกราฟที่ไม่สามารถหา f'(x) ได้

1. จุดหักมุม

ex. $f(x) = |x|$

2. จุดที่เส้นสัมผัส ⊥ แกน x

3. จุดที่กราฟไม่ต่อเนื่อง

$\lim_{x \to c^+} \neq \lim_{x \to c^-}$

4. จุดที่ปลาย Domain ช่วงปิด

$\lim_{x \to a^-}$ หาไม่ได้ $\lim_{x \to b^+}$ หาไม่ได้

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

How to หา f'(x)

1. constant rule — $f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$
2. power rule — $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
3. constant multiple rule — $f(x) = cx^n \rightarrow cf'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
4. sum & diff rule — $f(x) = h(x) \pm g(x) \longrightarrow f'(x) = h'(x) \pm g'(x)$
5. sine & cosine — $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

   $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
6. Product rule — $f(x) = h(x)g(x) \rightarrow f'(x) = h(x)g'(x) + g(x)h'(x)$
7. Quotient rule — $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. Trigon

   ↳ น่าจะมีในตอนสอบ

$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

$\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

$\rightarrow (\tan x)' = \sec^2 x$

$\rightarrow (\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$

หาสมการเส้นสัมผัสของกราฟ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x = -2$

- สมการจาก $y - y_1 = m(x - x_1)$
- หา m จาก f'(x)
- หา y จากการแทน x ไปใน f(x)

$\longrightarrow m = f'(x) = 2x = -4$

$\longrightarrow y = (-2)^2 = 4$

$y - 4 = -4(x + 2)$

$y = -4x - 4$ #

หา y' ของ $y = 3x^2 \sin x$

$y' = 3x^2(\sin x)' + \sin x(3x^2)'$

$= 3x^2 \times (\cos x) + \sin x \times 6x$

$= 3x^2 \cos x + 6x \sin x$

อัตราการเปลี่ยนแปลง

Average velocity $= \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

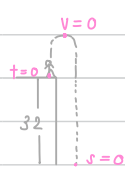
$$v(t) = \lim_{t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{v(t) = s'(t)}$$

ตอน $t = 0$ กระโดดลงมาจากจุดที่ห่างจากพื้น 32 feet

$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$

หา (1) t ที่ถึงพื้น (2) V ที่กระทบพื้น



(1) t ถึงพื้น = ตอนที่ s เป็น 0

$-16t^2 + 16t + 32 = 0$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t - 2)(t + 1) = 0$

$t = \cancel{-1}, 2$ #

(2) $v(t) = s'(t) = -32t + 16$

v ถึงพื้นตอน $t = 2$

$\therefore v = -32(2) + 16 = -48$ feet/s #

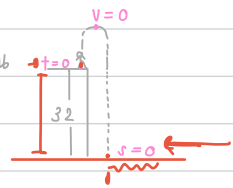
$v(t) = s'(t)$

$a(t) = v'(t)$

ตอน $t=0$ กระโดดลงมาจากจุดที่ห่างจากพื้น 32 feet

$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$

หา (1) t ที่ถึงพื้น (2) v ที่กระทบพื้น



(1) $0 = -16t^2 + 16t + 32$

$0 = t^2 - t + 2$

$0 = (t-2)(t+1)$

$t = -1, 2$

$\therefore$ ถึงพื้นตอน 2 s

(2) v ตี กระทบ

$v(t) = s'(t)$

$s'(t) = -32t + 16$

$s = 0, t = 2$

$-32 \times 2 + 16 = -64 + 16 = -48$ feet/s

$s(t)$ $a(t)$

$s''(t) = a(t)$

week 10 - Diff 2

Higher-Order

ระยะกระจัด $= s(t)$

ความเร็ว $= v(t) = s'(t)$

ความเร่ง $= a(t) = v'(t) = s''(t)$

ex. Third diff $= f'''(x)$

สมการคลื่นตกพื้น moon $s(t) = -0.81t^2 + 2$

หา a บน moon

$a(t) = v(t) = s''(t)$

$s'(t) = -1.62t \rightarrow s''(t) = -1.62$

Chain Rule

Diff ก็อน อย่าลืม Diff ไส้

$\tan u = (\tan u)' \cdot u'$

$\boxed{\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ or ถ้ากำหนด $u = g(x)$ จะได้ $\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \cdot u'$

$\tan x$

* Trigon ก็ Diff ไส้ ex. $f(x) = \tan(\overset{u}{3x^2})$: $f'(x) = \sec^2 \overset{u}{3x^2} \times \overset{u'}{6x}$

$\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)\, u'$

$\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)\, u'$

$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\, u'$

$\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\, u'$

$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\, u'$

$\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\, u'$

$\cos^2 x = (\cos x)^2 \neq \cos x^2$

$\cos(2x) \neq 2\cos x$

log

Domain $(0, \infty)$ Range $(-\infty, \infty)$

* หลัง log > 0 *

$\ln(1) = 0$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

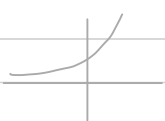
$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$ $\boxed{\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot u'}$

expo

$y = e^x \longleftrightarrow \ln y = x$

Domain $(-\infty, \infty)$ Range $(0, \infty)$

$\boxed{\frac{de^x}{dx} = e^x}$ $\boxed{\frac{de^u}{dx} = e^u \cdot u'}$



$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$f(x) = e^{2x^5}$

$= e^{2x^5} \cdot (2x^5)'$

$= e^{2x^5} \cdot 10x^4$

$f(x) = \ln x^3$

$= \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)'$

$= \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$

Implicit Diff

พวกที่จัดรูป $y =$ ____ ไม่ได้

– Diff ปกติ แต่อันไหนมี y ให้คูณ y' เข้าไปด้วย → แล้วจัดรูปให้เป็น $y' =$ ____

ex. $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

$$(y^3)' + (y^2)' - (5y)' - (x^2)' = (-4)'$$

$$3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' - 5 \cdot y' - 2x = 0$$

$$(3y^2 + 2y - 5)y' - 2x = 0$$

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

ex. หาอนุพันธ์อันดับ 2 $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$ ของ $x^2 + y^2 = 25$

$$(x^2)' + (y^2)' = 25'$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \boxed{\frac{-x}{y}}$$

$$\frac{-x}{y} = \frac{y(-x)' - (-x)(y)'}{y^2}$$

$$= \frac{-y + x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}$$

1st → $2x + 2yy' = 0$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

2st → เอา $\frac{-x}{y}$ มา Diff ต่อ

$$\frac{y(-x)' - (-x)(y')}{y^2} = \frac{-y + xy'}{y^2}$$

$$= \frac{-y + x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2 - x^2}{y^3} \quad \#$$

EXAMPLE 12 Repeated Application of the Chain Rule

$f(t) = \sin^3 4t$ $\quad (\sin x)' = \cos x$ — Original function

กำหนด $u = 4t$ $\quad = (\sin 4t)^3$ $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$ — Rewrite.

$f'(t) = (\sin u)^{3\,\prime}$ — Apply Chain Rule once.

$= 3\sin u^2 \cdot (\sin u)' \cdot u'$ — Apply Chain Rule a second tim

$= 3\sin u^2 \cdot \cos u \cdot u'$

$= 3(\sin 4t)^2 \cdot \cos 4t \cdot 4$ — Simplify.

$= 12(\sin 4t)^2 \cdot \cos 4t \quad \#$

* สอนตอนประยุกต์

related rates อัตราการเปลี่ยนแปลงที่ขึ้นกับตัวอื่น

ex. $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ อัตราการปป. ของ V ขึ้นกับ r และ h

เพราะ $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\pi}{3} r^2 h$

$= \frac{\pi}{3}\left[r^2(h)' + h(r^2)'\right]$

$= \frac{\pi}{3}\left[r^2 h' + 2rhr'\right]$ #

---

ex. เมื่อหินตกลงน้ำ ทำให้เกิดคลื่น กระจายออกเป็นวงกลม ซึ่ง r เพิ่มขึ้น 1 feet/s

เมื่อ r = 4 feet พื้นที่ A ของน้ำจะปป. ไปเป็นอัตราเท่าใด ↳ $r' = 1$

$A = \pi r^2 \rightarrow \pi(r^2)' = \pi 2r \cdot r'$

$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot r'$

$= \pi \times 2 \times 4 \times 1$

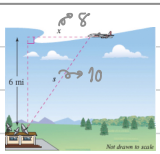
$= 8\pi$ feet^2/s #

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

---

ex. เครื่องบินบินผ่านสถานีโดย s จะลดลงทุก 400 miles / hour

เมื่อ s = 10 miles , v = ? * เครื่องบินสูง 6 miles จากสถานี



$s'(t) = -400$

เมื่อ s = 10 , $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$ * x คือระยะห่าม → x' คือ ค.เร็ว

v คือ $x'(t)$: $x^2 + 6^2 = s^2$

$2x \cdot x' = 2s \cdot s'$

$x' = \frac{2s \cdot s'}{2x}$

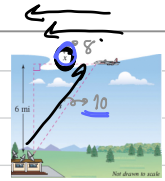
$= \frac{\cancel{2} \times 10 \times (\cancel{-400}^{-50})}{\cancel{2} \times \cancel{8}}$

$= -500$ miles/hour #

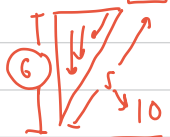
ex. เครื่องบินบินผ่านสถานีโดย s จะลดลงทุก 400 miles / hour

เมื่อ $s = 10$ miles , $v = ?$

$s'(t) = -400$



$\leftarrow \boxed{s'}$



$10^2 - 6^2 = \sim$

$\sqrt{64} = 8$

$v = \sqrt{s^2 - 6^2}$

$$\boxed{x = \sqrt{s^2 - 6^2}}$$

$x^2 = s^2 - 6^2$

$$\frac{dx}{dt} = (s^2 - 6^2)^{\frac{1}{2}\prime}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{s^2 - 6^2}} \cdot 2s \cdot s'$$

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \times$$

$$=$$

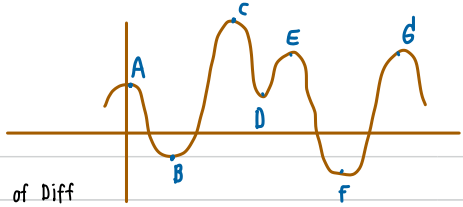
x

$\rightarrow x^2 = s^2 - 6^2$

$\rightarrow x = \sqrt{s^2 - 6^2}$

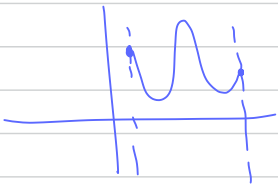
x'

max = C
min = F
local max =



week 11 - Application of Diff

Extrema of func → จุดสุดขีด → max / min



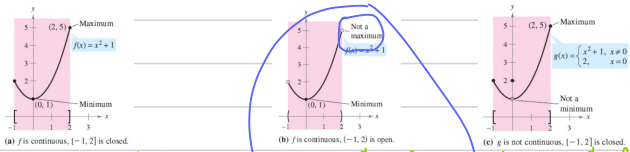
f(x) อยู่ในช่วง I และต่อเนื่องบน c

- f(c) คือ minimum ของ f(x) บน I เมื่อ f(c) ≤ f(x) ทุกๆ x บน I
- f(c) maximum " f(c) ≥ f(x) "

หรือเรียกว่า absolute → max / min , global → max / min

ถ้า f(x) ต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] ⟶ f(x) จะมีทั้ง maximum & minimum

ถ้าไม่ต่อเนื่อง or ไม่ช่วงปิด อาจจะมีจุดเดียว, สองจุด, ไม่มีเลย



(a) f is continuous, [−1, 2] is closed.
(b) f is continuous, (−1, 2) is open.
(c) g is not continuous, [−1, 2] is closed.

↳ con และ close : มีทั้ง min, max
↳ con อย่างเดียว หาค่าไม่ครบ
↳ close อย่างเดียว หาไม่ครบ

Relative Extrema คือ local max, local min = จุดที่กราฟเป็นหุบเขา ∩ ∪
= จุดที่ f'(x) = 0
= จุดที่กราฟหักศอก ∧ ∨ คือ f'(x) หาค่าไม่ได้

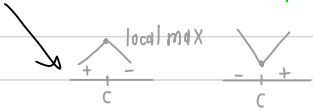
Critical numbers จุดที่ f'(x) = 0 or f'(x) หาค่าไม่ได้

local max
5, 7, 8, −1
local min

สรุป Relative Extrema เกิดที่ critical nums เท่านั้น * (แต่จุด critical ไม่จำเป็นต้องเป็น Relative)

การหา Extrema คือ 1. หา critical num → f'(x) = 0 / f'(x) หาไม่ได้ [ex. ส่วนเป็น 0]
2. เอา critical แทนใน f(x) *
3. เอาจุดปลาย [a, b] แทนใน f(x) *
4. เทียบหา Extrema (maximum, minimum)

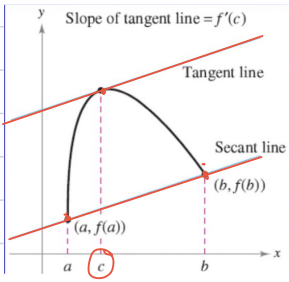
การหา Relative Extrema 1. หา critical num → f'(x) = 0 / f'(x) หาค่าไม่ได้
2. หา f'(x) ของทั้ง 2 ฝั่งของจุด c



ถ้า +, + หรือ −, −
คือไม่เป็นทั้งสอง

* เดี๋ยวมี mean value ของ ∫ด้วย

Mean Value



ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

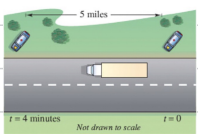
และ สามารถหา $f'(x)$ ได้ ทุกๆจุดบน (a,b)

มันจะมีจุด $x = c$ ที่ทำให้

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\boxed{\text{slope ณ จุด } c = \text{ ค่าเฉลี่ยการปป. จากจุด } a \to b}$$

ex.



รถบรรทุกวิ่งผ่านสถานี 2 อันที่ห่างกัน 5 miles

ผ่านสถานีแรก $v = 55$ miles/h

ผ่านสถานีสอง $v = 50$ miles/h

พิสูจน์ว่า รถบรรทุกมี v เกินกำหนด (55 mi/h) ในช่วง 4 mins

ใช้ Mean Value พิสูจน์

Sol^n $4 \text{ min} \times \frac{1 \text{ hr}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{15} \text{ hr}$

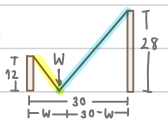
ใช้ $s(t)$; ตอน $s(0) = 55$, $s(\frac{1}{15}) = 50$

$$V_{mean} = \frac{s(\frac{1}{15}) - s(0)}{\frac{1}{15} - 0} = \frac{55-50}{1/15} = 75 \text{ mile/h} \ \#$$

โจทย์ปัญหาหา min, max

คิดจาก 1. critical num 2. จุดขอบ

ex.



หาค่า W ที่ใช้สั้นที่สุด

วิธีทำ L = ค.ยาวสวด

$$L = \sqrt{12^2+W^2} + \sqrt{28^2+(30-W)^2}, \quad 0 \le W \le 30$$ * ห้ามลืม *

$$\frac{dL}{dW} = \frac{1}{2}\left(144+W^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2W + \frac{1}{2}\left(784+900-60W+W^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2(30-W) \times -1$$

$$0 = \frac{W}{\sqrt{144+W^2}} + \frac{-30+W}{\sqrt{1684-60W+W^2}}$$

$$\frac{W}{\sqrt{144+W^2}} = \frac{30-W}{\sqrt{1684-60W+W^2}}$$

$$\frac{W^2}{144+W^2} = \frac{900-60W+W^2}{1684-60W+W^2}$$

$$1684W^2 - \cancel{60W^3} + \cancel{W^4} = 129600 - 8640W + 144W^2 + 900W^2 - \cancel{60W^3} + \cancel{W^4}$$

$$640W^2 + 8640W - 129600 = 0$$

$$320W^2 + 4320W - 64800 = 0$$

$$8W^2 + 108W - 1620 = 0$$

$$2W^2 + 27W - 405 = 0$$

$$(2W+45)(W-9) = 0$$

$$W = 9, \cancel{-\frac{45}{2}}$$ can't

หาจุดดีสุดจาก critical num + จุดขอบ

$W(0) \approx 53$, $W(9) \approx 50$, $W(30) \approx 60$

∴ ตำแหน่ง 9 feet จากเสาที่สูง 12 feet จะใช้สวด ≈ 50 feet #

ex. ลวด 4 feet เอามาสร้างรูป □ จตุ กับ ○ วงกลม ให้ได้ พท. รวมมากสุด

<u>รอบ</u> – หา A มากสุด

– พท. □ = x^2 , รอบรูป = $4x$

– พท. ○ = πr^2 , รอบรูป = $2\pi r$

$4x + 2\pi r = 4$ * เส้นรอบรูป

$$r = \frac{4-4x}{2\pi} = \frac{2-2x}{\pi}$$

รอบ □ = 4x

$A = x^2 + \pi r^2$; $0 \le x \le 1$

$$A = x^2 + \pi\left(\frac{2-2x}{\pi}\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{\pi(4-8x+4x^2)}{\pi^2}$$

$$= x^2 + \frac{(4x^2-8x+4)}{\pi}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}(8x-8)$$

$$0 = 2x + \frac{8x-8}{\pi}$$

$$0 = 2x\pi + 8x - 8$$

$$0 = x\pi + 4x - 4$$

$$4 = (\pi+4)x$$

$$x = \frac{4}{\pi+4}$$

หา พท. มากสุด $A(0) \approx 1.27$

$A\left(\frac{4}{\pi+4}\right) \approx 0.56$

$A(1) \approx 1$

∴ ใช้ลวดทำ □ = 0 feet

ทำ ○ = 4 feet

จึงได้ พท. รวมมากสุด #

l'Hopital ถ้า $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ เป็น $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ พวกนี้ ใช้ทำวิธี

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}} = \lim_{x\to c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \sim$$ ถ้าซ้ำไม่ได้อีกก็ทำต่อไปเรื่อยๆ

ex. หา $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{e^{-x}\cdot(-1)} \quad \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \ \#$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ แทนค่าเลยๆ

$\Downarrow$

1st $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{(-1)(e^{-x})} = \frac{-\infty}{-\infty}$$ โลปิตาล #1 ก็ซ้ำไม่ได้

$\Downarrow$

2st $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \ \#$$ โลปิตาล #2 ผลลัพ

week 12 - integrate 1

อินทิเกรต Expo-log

(15) $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$

(16) $\int e^u\,du = e^u + c$

(17) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

Integration Rule

$\int 0\,dx = c$

$\int k\,dx = kx + c$

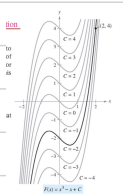
$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ ← $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $n \neq -1$

$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

การหาค่า c



The particular solution that satisfies the initial condition $F(2) = 4$ is $F(x) = x^2 - x - 2$.

เวลาวาดกราฟมันได้หลายอันมากตามค่า c

โจทย์จะบอกว่า กราฟผ่านจุด (a,b) เราก็เอา F(a) = b ไปแทน

จะได้ค่า c ที่โจทย์ต้องการออกมา $c \in R$

$f(x) = 5x$ $(1,1)$

$\int f(x)) = \frac{5x^2}{2} + C$

$\frac{5(1)^2}{2} + C = 1$

ex โยนบอลขึ้นด้วย v = 64 feet/s ตน.ที่โยนสูงจากพื้น 80 feet

a) หาสมการตำแหน่ง s(t)

b) ตกถึงพื้นเมื่อไหร่

sol^n (a) $s(0) = 80$ ตำแหน่งตอนเริ่ม t = 0 80 feet

$v(0) \leftarrow s'(0) = 64$ $v(t) = s'(t)$ ตอน t = 0 v = 64

$a(t) \leftarrow v'(t) \leftarrow s''(t) = -32$ feet/s² ★ แรงเนื่องโลก = 32 feet/s² ★

ติดลบเพราะทิศลง

$\rightarrow \int s''(t)\,dt = -32t + c = s'(t)$ $\int a(t)\,dt = v(t)$

$s'(0) = 64 \rightarrow -32(0) + c = 64$ $\therefore c = 64$

$s'(t) = -32t + 64$ ★ v(t)

$\rightarrow \int s'(t)\,dx = -16t^2 + 64t + c = s(t)$ $\int v(t)\,dt = s(t)$

$s(0) = 80 \rightarrow -16(0^2) + 64(0) + c = 80$ $\therefore c = 80$

$\therefore s(t) = -16t^2 + 64t + 80$ #

(b) ตกถึงพื้นคือ $s(t) = 0$

$-16t^2 + 64t + 80 = 0$

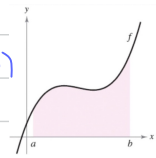
$t^2 - 4t - 5 = 0$

$(t-5)(t+1) = 0$

$t = \cancel{-1}, 5$ #

หาพท.ใต้กราฟ

$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

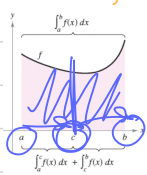


$-F(a) - F(b)$

- ถ้า $a = b$ จะเป็น $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- ถ้า ช่วง $[a, b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

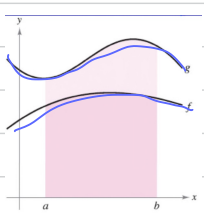
$\hookrightarrow F(b) - F(a)$

สามารถแบ่งช่วง $\int$ ได้



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

1. $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$



$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

จากรูปคือ พท. $g(x) \geq f(x)$

week 13 - integrate 2

การ ∫ ในช่วงปิด (หา Area)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

ex. $\int_0^2 |2x-1|\,dx$ *ถ้าเป็น | | ต้องหา x ที่ทำให้ | | = 0

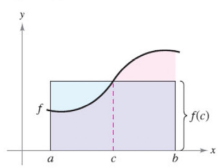
$2x-1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$ ดังนั้นจะได้ช่วง $(0, \frac{1}{2})$ กับ $(\frac{1}{2}, 2)$

ซึ่งเครื่องหมาย ⊖ ⊕

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)\,dx$

Mean Value (average value)



Mean value rectangle:

$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

พท.ของกราฟ = พท.ของสี่เหลี่ยมที่กว้าง $(b-a)$ สูง $f(c)$

∴ เราจะมีค่า c ที่อยู่ระหว่าง a, b ที่ทำให้

$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$

$$\boxed{\therefore \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$

ขอ diff

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

การกำหนดขอบเขต

ปกติจะเป็น $F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$ a, b เป็น constant ทั้งคู่

แต่เราสามารถกำหนด $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ได้ (เปลี่ยนไปตามค่า x ที่โจทย์บอก)

ex. หา $F(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ @ $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

เราสามารถ ∫ ปกติมาก่อน คือ $\int_0^x \cos t\,dt = (\sin t)\Big|_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x$

∴ $\int_0^x \cos t\,dt = \sin x$ แล้วค่อยเอา x ที่โจทย์บอกมาแทน

$u = x^3$

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt$$

การหา diff ของ $\int$

→ สูตรมั่ง ถ้า f ต่อเนื่อง at a แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)}$$

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{u} \cos t \, dt$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{\pi/2}^{u} \cos t \, dt\right)}_{\cos u \times u'} \times \frac{du}{dt}$$

$$= \boxed{\cos x^3 \times 3x^2}$$

ex. หา derivative (diff) $F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt$

วิธีทำ แทนค่า $u = x^3$

→ ตอนก diff ก่อน จะ diff ใส่ u

$$F'(x) = \underbrace{\frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t \, dt\right]}_{\text{เข้าสูตร}} \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot u'$$

$$= \cos x^3 \cdot 3x^2 \ \#$$

net change

$$\boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

คือเจ้าตัวให้ $F'(x)$ มาแล้วอะ

ex. แก้งเก็บน้ำ $180 + 3t$ ลิตร/นาที ณ $0 \le t \le 60$ หาน้ำที่เก็บได้ใน 20 นาทีแรก

โจทย์ปริมาณ = $\int$ ให้ $F'(t) = 180 + 3t$

จะเป็น $\int_0^{20} \underbrace{(180+3t)}_{F'(t)}\,dt = \left(180t + \frac{3}{2}t^2\right)\Big|_0^{20}$

ธรรมดาทั่วไปปกติไม่ต้องสนใจสูตร

$$= 180 \times 20 + \frac{3(400)}{2}$$

$$= 3600 + 600$$

$$= 4200 \text{ ลิตร} \ \#$$

การ $\int$ แบบมี Pattern

$$\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int g(x)\,dx}$$

ถ้าแทน $u = g(x)$

$$\boxed{\int f(u)\cdot u'\,dx = \int f(u)\,du}$$

สมมติ $\int [g(x)]^n \cdot g'(x)\,dx$ ก็แทน $u = g(x)$

$$\boxed{\text{จะได้} \quad \int u^n \cdot u'\,dx = \int u^n\,du}$$

เหมือนกันหมด แล้วแต่จะมอง

ex. ตย. ที่สนใจคือ $\int \frac{x}{3x^2+4}\,dx$

ถ้าให้ $u = 3x^2+4$

$du = 6x\,dx$

แต่ทั้งบนมีแค่ x เราเลย $\times \frac{6}{6}$

$$\int \frac{6}{6} \times \frac{x}{3x^2+4}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+4}\,dx$$ (ดึงตัวล่างออก)

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\ln|u| + C \quad \#$$

ถ้าเอา $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ มาจัด ก็ดูเบตาจะเป็น $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$ ซึ่งให้ $g(x) = u$

$$\boxed{\text{จะได้} \quad \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$