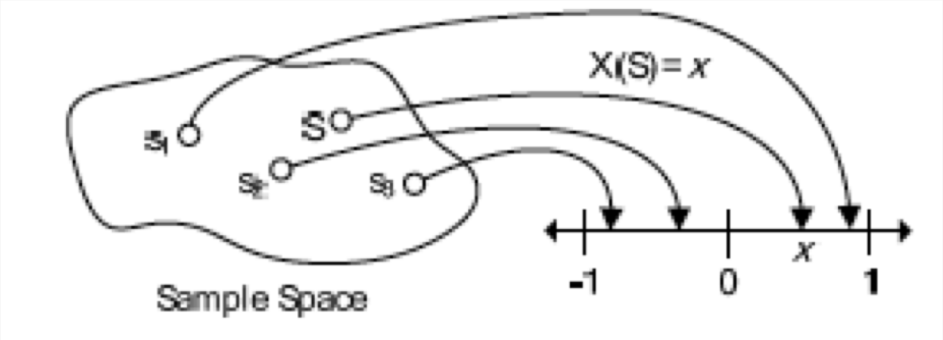
3.ตัวแปรสุ่ม

Random Variable

3.1 ตัวแปรสุ่ม (RANDOM VARIABLE)

- <u>นิยาม</u> **ตัวแปรสุ่ม** คือฟังก์ชันที่เปลี่ยนเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซให้เป็นตัวเลข หรือตัวเลขที่ใช้แทนเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นจากการทดลองหรือการสังเกต ซึ่งบางครั้งผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นของการทดลอง อาจจะไม่ได้เป็นตัวเลข



เช่น การโยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน ซึ่งมีผลลัพธ์ คือ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ให้ตัวแปรสุ่ม x แทน จำนวนเหรียญที่ปรากฏหัวของการโยนเหรียญ 2 เหรียญ พร้อมกัน

ตัวแปรสุ่ม x	เหตุการณ์	ความถี่
0	ไม่ขึ้นหัวเลย {TT}	1
1	การขึ้นหัวทั้ง 1 เหรียญ {HT, TH}	2
2	การขึ้นหัวทั้ง 2 เหรียญ {HH}	1

3.1 ตัวแปรสุ่ม (RANDOM VARIABLE)

- **ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)**

  เป็นตัวแปรสุ่มที่ค่าของ X เป็นจำนวนจำกัดที่นับได้

- **ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)**

  เป็นตัวแปรสุ่มที่ค่าของ X เป็นจำนวนที่นับไม่ได้

<u>ตัวอย่างที่ 2.1</u> โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง ถ้าให้ x แทนจำนวนหัวที่ได้จากการโยน จงแสดง x ให้เป็นตัวแปรสุ่ม ในแบบต่างๆ

วิธีทำ แซมเปิลสเปซ S = {HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT}

x	ค.ถี่
0	1
1	3
2	3
3	1

เมื่อ H หมายถึง โยนเหรียญแล้วได้หัว

T หมายถึง โยนเหรียญแล้วได้ก้อย

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ค่าของ X เป็นดังนี้

X = 0 หมายถึง ไม่ได้หัวเลย หรือได้ก้อยทั้ง 3 ครั้ง คือ TTT

X = 1 หมายถึง ได้หัว 1 ครั้ง และได้ก้อย 2 ครั้ง คือ HTT, THT, TTH

X = 2 หมายถึง ได้หัว 2 ครั้ง และได้ก้อย 1 ครั้ง คือ HHT, HTH, THH

X = 3 หมายถึง ได้หัวทั้ง 3 ครั้ง หรือไม่ได้ก้อยเลย คือ HHH

ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3

<u>ตัวอย่างที่ 2.2</u> โยนลูกเต๋า 1 ลูก จนกว่าลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 5 ถ้าให้ X แทนจำนวนครั้งของการโยนจนกว่าลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 5 จงแสดง x ให้เป็นตัวแปรสุ่ม ในแบบต่างๆ

วิธีทำ แซมเปิลสเปซ S = {Y, NY, NNY, NNNY, ...}

เมื่อ Y หมายถึง โยนลูกเต๋าแล้วได้แต้ม 5

N หมายถึง โยนลูกเต๋าแล้วไม่ได้แต้ม 5

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนครั้งของการโยนลูกเต๋า 1 ลูก จนกว่าจะขึ้นแต้ม 5 ค่าของ X อาจมีค่าเป็นดังนี้

X = 1 หมายถึง โยนลูกเต๋าเพียง 1 ครั้ง และได้แต้ม 5 คือ Y

X = 2 หมายถึง โยนลูกเต๋า 2 ครั้ง จึงจะได้แต้ม 5 คือ NY

X = 3 หมายถึง โยนลูกเต๋า 3 ครั้ง จึงจะได้แต้ม 5 คือ NNY

ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 1, 2, 3, ...

<u>ตัวอย่างที่ 2.3</u> ผสมสารเคมี 2 ชนิด เข้าด้วยกัน ถ้าให้ X แทนเวลาในการเกิดปฏิกิริยาเคมีจนเสร็จสมบูรณ์ จงแทน x ในรูปแบบฟังก์ชันของตัวเลข

วิธีทำ

จะเห็นว่าค่าของ X เป็นเซทของเลขจำนวนจริงบวก และ ศูนย์

ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น $\{x \mid x \geq 0\}$

3.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (PROBABILITY FUNCTION)

- <u>นิยาม</u> **เป็นฟังก์ชันที่แสดงว่าตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งในแซมเปิลสเปซ ด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด**

  - ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

    (Probability Function of Discrete Random Variable)

  - ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

    (Probability Function of Continuous Random Variable)

3.2.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Probability Function of Discrete Random Variable)

- **คุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็น**

1. $f(x) \geq 0$ * คนจป. แต่ละอัน ≥ 0

2. $\sum_{x \in S} f(x) = 1$ * ผลรวมคนจป. $= 1$

3. $P(X = x) = f(x)$

4. $P(A) = \sum_{x \in A} f(x)$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4</u> บริษัทฟูจิสึประเทศไทย จำกัด ขายอุปกรณ์คอมพิวเตอร์ หน่วยงานราชการแห่งหนึ่งซื้อเครื่องคอมพิวเตอร์จากบริษัทนี้ 8 เครื่อง หลังจากใช้งานเป็นเวลา 5 ปี ปรากฏว่ามีเครื่องคอมพิวเตอร์เสีย 3 เครื่อง ถ้าสุ่มเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ซื้อมา 2 เครื่อง

X = จน. เสีย
0
1
2

สุ่ม 2 จาก 8 $= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$

ดี 5 เสีย 3

ได้ดี 2 เครื่อง → $\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$

ได้ดี 1 เครื่อง → $\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{28} = \frac{15}{28}$

ได้ดี 0 → $\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{28} = \frac{3}{28}$

ก. จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของจำนวนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เสีย

ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เสียมีไม่น้อยกว่า 1 เครื่อง

วิธีทำ

ก. ให้ X แทน จำนวนเครื่องที่คอมพิวเตอร์ที่เสีย X = 0, 1, 2

จะเห็นว่า ถ้าสุ่มเครื่องคอมพิวเตอร์ 2 เครื่อง จากทั้งหมด 8 เครื่อง สามารถกระทำได้ $\binom{8}{2}$ = 28 วิธี

ถ้าสุ่มได้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้งานได้ 2 เครื่อง แสดงว่า X = 0

$$f(0) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

ถ้าสุ่มได้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่เสีย 1 เครื่อง แสดงว่า X = 1

$$f(1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

ถ้าสุ่มได้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่เสียทั้ง 2 เครื่อง แสดงว่า X = 2

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{28} & ; \quad x = 0 \\ \frac{15}{28} & ; \quad x = 1 \\ \frac{3}{28} & ; \quad x = 2 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ข. $P(X \geq 1) = f(1) + f(2)$

$$= \frac{15}{28} + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

3.2.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Probability Function of Continuous Random Variable)

คุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$
4. $P(X = a) = 0$
5. $P(X \leq a) = P(X < a) = P(-\infty < X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$
6. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

<u>ตัวอย่างที่ 2.5</u> อายุการใช้งานของขวดใส่สารเคมีชนิดหนึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(x+100)^3} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่ขวดใส่สารเคมีนี้จะมีอายุการใช้งาน

ก. อย่างน้อย 200 วัน $P(X \geq 200) = \int_{200}^{\infty} f(x)\,dx$

ข. ระหว่าง 80 และ 120 วัน $P(80 < X < 120) = \int_{80}^{120} f(x)\,dx$

วิธีทำ ให้ X แทน อายุการใช้งานของขวดใส่สารเคมีชนิดหนึ่ง

ก. P(X≥200) $= \int_{200}^{\infty} \frac{20000}{(x+100)^3}\, dx$

$= 20000 \int_{200}^{\infty} (x+100)^{-3}\, d(x+100)$

$= 20000 \left[\frac{(x+100)^{-2}}{-2}\right]_{200}^{\infty}$

$= -10000 \left(0 - \frac{1}{90000}\right)$

$= 0.1111$

ข. P(80<X<120) $= \int_{80}^{120} \frac{20000}{(x+100)^3}\, dx$

$= 20000 \int_{80}^{120} (x+100)^{-3}\, d(x+100)$

$= 20000 \left[\frac{(x+100)^{-2}}{-2}\right]_{80}^{120}$

$= -10000 \left(\frac{1}{48400} - \frac{1}{32400}\right)$

$= 0.1020$

<u>ตัวอย่างที่ 2.6</u> อายุการให้งานของหลอดรังสีคาโธดเป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดรังสีคาโธดจะมีอายุการใช้งานมากกว่า 100 ชั่วโมง $\int_{100}^{\infty} f(x)dx$

ข. จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดรังสีคาโธดจะมีอายุการใช้งานอย่างน้อย 100 ชั่วโมง

เมื่อกำหนดว่ามีอายุการใช้งานมาแล้วมากกว่า 99 ชั่วโมง

วิธีทำ ก. ให้ X แทน อายุการใช้งานของหลอดรังสีคาโธด

$$P(X>100) = \int_{100}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_{100}^{\infty} e^{-\lambda x}\, d(\lambda x)$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{100}^{\infty} = e^{-100\lambda}$$

ข. $$P(X \geq 100 | X>99) = \frac{P(X \geq 100 \cap X>99)}{P(X>99)}$$

$$= \frac{P(X \geq 100)}{P(X>99)} = \frac{\int_{100}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{99}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}$$

$$= \frac{\int_{100}^{\infty} e^{-\lambda x} d(\lambda x)}{\int_{99}^{\infty} e^{-\lambda x} d(\lambda x)} = \frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{100}^{\infty}}{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{99}^{\infty}}$$

3.3 ค่าคาดหวัง (EXPECTED VALUE)

ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X **(MEAN OF THE RANDOM VARIABLE X)** หรือค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X **(MEAN OF THE PROBABILITY FUNCTION OF X)**

- **3.3.1 ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง**

$\forall \rightarrow$ for All
$\exists \rightarrow$ for sum

(Expected Value of Discrete Random Variable)

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\forall x} x f(x)$$

$$\mu_{g(X)} = E\left[g(X)\right] = \sum_{\forall x} g(x) f(x)$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.9</u> สโมสรนักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์มีตำแหน่งต่างๆ ให้เลือกดังนี้ ประธาน 1 ตำแหน่ง รองประธาน 1 ตำแหน่ง และเหรัญญิก 1 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้สมัครจากสาขาวิศวกรรมเคมี 4 คน และวิศวกรรมอาหาร 3 คน จงหาค่าคาดหวังของจำนวนนักศึกษาสาขาวิศวกรรมเคมีที่ได้รับเลือก

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนนักศึกษาสาขาวิศวกรรมเคมีที่ถูกเลือก

$$X = 0, 1, 2, 3$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}} & ; \quad x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ดังนั้น $\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x \dfrac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}$

$$= (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{12}{7} = 1.7 \text{ คน}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.10</u> บริษัทอุตสาหกรรมขนาดใหญ่สั่งซื้อเครื่องพิมพ์เลเซอร์ตอนปลายปี โดยจำนวนของการสั่งซื้อขึ้นอยู่กับความถี่ของการซ่อมเครื่องพิมพ์ในปีที่ผ่านมา สมมติว่าจำนวนเครื่องพิมพ์เลเซอร์ (x) ที่ซื้อในแต่ละปี มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังตาราง

จำนวนเครื่องพิมพ์

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

ถ้าราคาที่ต้องการคือ 12000 บาท ต่อเครื่อง รวมกับส่วนลด $500\,x^2$ บาท จงหาจำนวนเงินโดยเฉลี่ยที่บริษัทนี้จะต้องจ่ายในการซื้อเครื่องพิมพ์เลเซอร์ใหม่ในปลายปีนี้

วิธีทำ ในที่นี้ *วิธี1*

$$g(X) = 12000X - 500X^2$$ *

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = E(12000X - 500X^2)$$

$$= 12000\,E(x) - 500\,E(x^2)$$

หา $E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\ f(x)$

$$= (0)\left(\frac{1}{10}\right) + (1)\left(\frac{3}{10}\right) + (2)\left(\frac{2}{5}\right) + (3)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{17}{10} = 1.7$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2\ f(x)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{10}\right) + (1)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{2}{5}\right) + (9)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} = \frac{37}{10} = 3.7$$

ดังนั้น $E[g(X)] = 12000(1.7) - 500(3.7) = 18550$ บาท

วิธีใช้

$$\mu_{g(X)} = E\left[g(X)\right] = \sum_{\forall x} g(x) f(x)$$

$$E\left(12000X - 500X^2\right) = \sum_{\forall x}\left(12000x - 500x^2\right) f(x)$$

$$\sum_{x=0}^{3}\left(12000x - 500x^2\right) f(x) = \left[12000(0) - 500(0)^2\right]\left(\frac{1}{10}\right) + \left[12000(1) - 500(1)^2\right]\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$+\left[12000(2) - 500(2)^2\right]\left(\frac{2}{5}\right) + \left[12000(3) - 500(3)^2\right]\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= 18850$$

- **3.3.2 ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง**

(Expected Value of Continuous Random Variable)

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\mu_{g(X)} = E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.11</u> อายุการใช้งานในหน่วยชั่วโมงของอุปกรณ์อิเลคทรอนิคส์เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

เราอินทริเกตแค่ 0 - ∞

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & ; \quad x \geq 0 \\ \cancel{0} & ; \quad \cancel{\text{กรณีอื่น}} \end{cases}$$

ปกติไม่ยุ่ง

$u = \alpha x$

$du = d(\alpha x)$

$$\int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x \alpha^2 x e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \alpha^2 e^{-\alpha x}\,dx$$

จงหาอายุการใช้งานเฉลี่ยของอุปกรณ์อิเลคทรอนิคส์ชนิดนี้

วิธีทำ

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \alpha^2 x e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (\alpha x)^2 e^{-\alpha x}\,d(\alpha x) \quad ; \quad \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(\alpha)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\Gamma(3)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \text{ ชั่วโมง}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.12</u> สมมติว่าร้านค้าขายของชำแห่งหนึ่งซื้อนมพร่องมันขาดเนยมา 5 กล่อง จากบริษัทหนองโพไทยเดนมาร์ค จำกัด ในราคากล่องละ 9 บาท แต่เขาขายไปในราคากล่องละ 12 บาท ถ้าหลังจากถึงวันที่นมหมดอายุแล้ว นมที่ยังขายไม่หมด จะต้องนำออกจากชั้นวางของ สามารถส่งคืนบริษัท ฯ ได้ และคนขายจะได้รับเงินคืนในส่วนของนมที่ยังคงเหลืออยู่จากบริษัท ฯ เป็นเงินเท่ากับสามในสี่ของราคาที่ซื้อมา ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งแทนจำนวนนมที่ขายได้ โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

มากสุดขายได้ 4 กล่อง

X	0	1	2	3	4	5
f(x)	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$

$\mu_x = \sum_{\forall x} x f(x)$

จงหากำไรที่คาดว่าจะได้รับโดยเฉลี่ยของร้านค้าขายของชำ

วิธีทำ $g(X) = \overset{\text{กำไร}}{3X} - \overset{\text{ขาดทุน}}{9(5-X)} + \overset{\text{เงินที่ได้คืน}}{\frac{3}{4}(9)(5-x)} = 5.25X - 11.25$

$\mu_{g(x)} = E[g(X)] = E(5.25X - 11.25) = 5.25\,E(X) - 11.25$

หา $E(X) = \sum_{x=0}^{5} x\,f(x) = (0)\left(\frac{1}{15}\right) + (1)\left(\frac{2}{15}\right) + (2)\left(\frac{2}{15}\right) + (3)\left(\frac{3}{15}\right) + (4)\left(\frac{4}{15}\right) + (5)\left(\frac{3}{15}\right)$

$= \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{9}{15} + \frac{16}{15} + \frac{15}{15} = \frac{46}{15}$

ดังนั้น $E(5.25\,X - 11.25) = 5.25\left(\frac{46}{15}\right) - 11.25 = 4.85$ บาท

3.4 ความแปรปรวน (VARIANCE)

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X (VARIANCE OF THE RANDOM VARIABLE X) หรือความแปรปรวนของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X (VARIANCE OF THE PROBABILITY FUNCTION OF X)
เป็นค่าที่ใช้วัดการกระจายของตัวแปรสุ่ม X

- **3.4.1 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง**

(Variance of Discrete Random Variable)

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = \sum_{\forall x}\left(x - \mu_X\right)^2 f(x)$$

หรือ

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = \sum_{\forall x} x^2 f(x) - \mu_X^2$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.13</u> ให้ตัวแปรสุ่ม X แทน จำนวนรถยนต์ที่ใช้ในโรงงานในวันทำงานหนึ่งๆ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสำหรับบริษัท A และ B เป็นดังตารางข้างล่างนี้

บริษัท A

x	1	2	3
f(x)	0.3	0.4	0.3

บริษัท B

X	0	1	2	3	4
f(x)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

อยากทราบว่าความแปรปรวนของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสำหรับบริษัทไหนมากกว่ากัน

วิธีทำ บริษัท A

หาค่าคาดหวังก่อน ; เอา $\sum_{\forall x} x f(x)$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x)$$

$$= (1)(0.3) + (2)(0.4) + (3)(0.3) = 2.0$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X-\mu_x)^2 = \sum_{x=1}^{3} (X-\mu_x)^2\, f(x)$$

$$= (1-2)^2(0.3) + (2-2)^2(0.4) + (3-2)^2(0.3) = 0.6$$

บริษัท B

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x\, f(x)$$

$$= (0)(0.2) + (1)(0.1) + (2)(0.3) + (3)(0.3) + (4)(0.1) = 2.0$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X-\mu_x)^2 = \sum_{x=0}^{4} (X-\mu_x)^2\, f(x)$$

$$= (0-2)^2(0.2) + (1-2)^2(0.1) + (2-2)^2(0.3) +$$

$$(3-2)^2(0.3) + (4-2)^2(0.1)$$

$$= 1.6$$

จะเห็นได้ว่า ความแปรปรวนของจำนวนรถยนต์ที่ใช้ในโรงงานของบริษัท B มากกว่าบริษัท A

<u>ตัวอย่างที่ 2.14</u> ให้ X แทนจำนวนแผงวงจรไฟฟ้าที่ต่อกระแสไฟฟ้าไม่ถูกต้อง พบว่ามีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x+1} \; \overset{0.438}{} & ; \quad x = 0, 1, \ldots, 4 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{c}{1}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{5}$

ก. จงหาค่าคงที่ c * ผลรวม ค.น.จป. = 1

ข. จงหาค่าเฉลี่ย $E(X)$ ความแปรปรวน σ^2 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

$\Sigma f(x) = 1$

$1 = \dfrac{60c + 30c + 20c + 15c + 12c}{60}$

$60 = 137c$

$c = \dfrac{60}{137}$ #

วิธีทำ ก. เนื่องจาก f(x) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

ดังนั้น $\sum_{\forall x} f(x) = 1$

$$\sum_{x=0}^{4} \frac{c}{x+1} = 1$$

$$c\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1$$

$$\left(\frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12}{60}\right) c = 1$$

$$\frac{137\,c}{60} = 1$$

$$C = \frac{60}{137} = 0.438$$

ข. $E(X) = \sum_{x=0}^{4} \frac{0.438}{x+1} X = 0.438\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)$

$= 0.438\left(\frac{30 + 40 + 45 + 48}{60}\right)$

$= 0.438\left(\frac{163}{60}\right) = 1.1899$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} \frac{0.438}{x+1} X^2 = 0.438\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5}\right)$

$= 0.438\left(\frac{30 + 80 + 135 + 192}{60}\right)$

$= 0.438\left(\frac{437}{60}\right) = 3.1901$

$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$= 3.1901 - (1.1899)^2 = 1.7742$

$\sigma_x = SD(X) = \sqrt{V(X)}$

$= \sqrt{1.7742} = 1.3320$

- **3.4.2 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง**

(Variance of Continuous Random Variable) เปลี่ยน Σ เป็น $\int$

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_X\right)^2 f(x)\,dx$$

หรือ

$$\sigma_X^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu_X^2$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.15</u> ความหนาของเครื่องห่อหุ้มสื่อความร้อนในหน่วยไมโครเมตรพบว่ามีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \begin{cases} 600x^{-2} & ; \quad 100 < x < 120 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ก. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของความหนาของเครื่องห่อหุ้มสื่อความร้อน

ข. ถ้าความหนาของเครื่องห่อหุ้มสื่อความร้อนมีราคาเท่ากับ 20 บาท ต่อไมโครเมตร

จงหาราคาเฉลี่ยของเครื่องห่อหุ้มสื่อความร้อน

วิธีทำ ก. ให้ X แทน ความหนาของเครื่องห่อหุ้มสื่อความร้อน

$$\mu_x = E(X) = \int_{100}^{120} x \; 600x^{-2} \, dx$$

$$= 600 \int_{100}^{120} \frac{1}{x} \, dx = 600 \, [\ln x]_{100}^{120}$$

$$= 600 \, (4.79 - 4.61) = 108$$ ไมโครเมตร

$$E(X^2) = \int_{100}^{120} x^2 \; 600x^{-2} \, dx = 600 \int_{100}^{120} dx$$

$$= 600 \, [x]_{100}^{120} = 600 \, (120\text{-}100)$$

$$= 12000$$

ดังนั้น $\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= 12000 - (108)^2 = 336$$ (ไมโครเมตร)^2

ข. ราคาเฉลี่ย = 108 ไมโครเมตร x 20 บาท/ไมโครเมตร

= 2160 บาท

ตัวอย่างที่ 2.16 จากการวัดรัศมีของวงกลมที่สว่านเจาะในแผ่นโลหะพบว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \begin{cases} 20\, e^{-20(x-12.5)} & ; \quad x \geq 12.5 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ก. ถ้ารัศมีวงกลมของแผ่นโลหะมากกกว่า 12.6 มิลลิเมตร จะทิ้งแผ่นโลหะนั้นเสีย จงหาสัดส่วนของแผ่นโลหะที่ถูกทิ้ง

ข. จงหาสัดส่วนของแผ่นโลหะที่มีรัศมีวงกลมอยู่ระหว่าง 12.5 กับ 12.6 มิลลิเมตร

ค. จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสม F(x) พร้อมทั้งเขียนกราฟ

ง. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของรัศมีวงกลมของแผ่นโลหะ

วิธีทำ ให้ X แทน รัศมีวงกลมของแผ่นโลหะ

ก. $P(X>12.6) = \int_{12.6}^{\infty} 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

$$= \int_{12.6}^{\infty} e^{-20(x-12.5)}\, d\{20(x-12.5)\}$$

$$= \left[-e^{-20(x-12.5)}\right]_{12.6}^{\infty} = 0.135$$

ข. $P(12.5<X<12.6) = \int_{12.5}^{12.6} 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

$$= \int_{12.5}^{12.6} e^{-20(x-12.5)}\, d\{20(x-12.5)\}$$

$$= \left[-e^{-20(x-12.5)}\right]_{12.5}^{12.6} = 1 - 0.135 = 0.865$$

ค. หา F(X) ในกรณีที่ $x<12.5$

$$F(x) = 0$$

ในกรณีที่ $x \geq 12.5$

$$F(x) = \int_{12.5}^{x} 20\, e^{-20(t-12.5)}\, dt$$

$$= \int_{12.5}^{x} e^{-20(t-12.5)}\, d\{20(t-12.5)\}$$

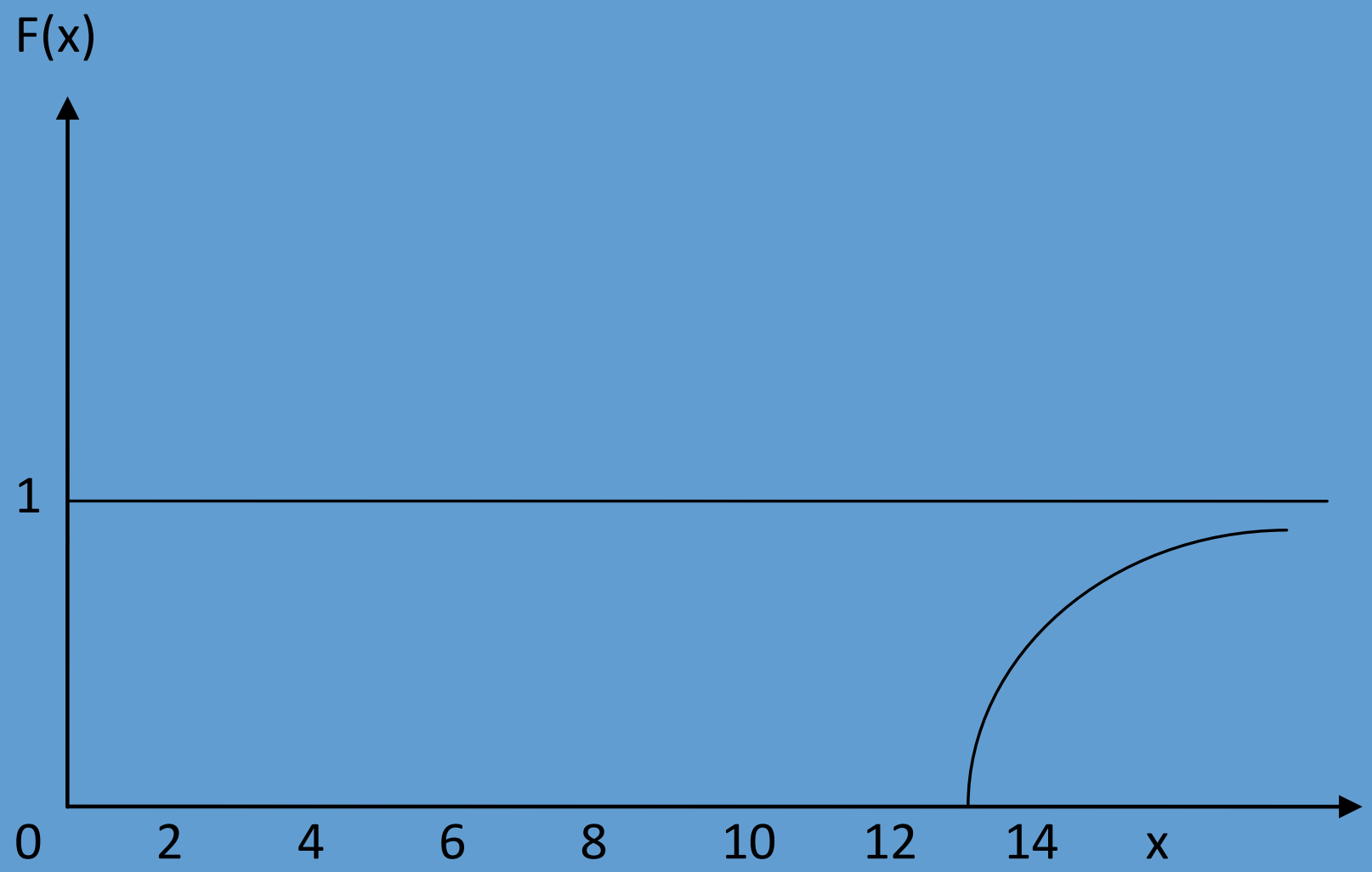
$$= \left[-e^{-20(t-12.5)}\right]_{12.5}^{x}$$

$$= 1 - e^{-20(x-12.5)}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X คือ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 12.5 \\ 1 - e^{-20(t-12.5)} & ; \quad x \geq 12.5 \end{cases}$$

กราฟของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ F(x)



ง. $\mu = E(X) = \int_{12.5}^{x} x\, 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u_1 = x$ และ $dv_1 = 20\, e^{-20(x-12.5)}$

$du_1 = dx \qquad v_1 = \int 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

$= \int e^{-20(x-12.5)}\, d\{20(x-12.5)\}$

$= -\, e^{-20(x-12.5)}$

ดังนั้น $E(X) = \left[-x\, e^{-20(x-12.5)}\right]_{12.5}^{\infty} + \int_{12.5}^{\infty} e^{-20(x-12.5)}\, dx$

$= 12.5 + \frac{1}{20} \int_{12.5}^{\infty} e^{-20(x-12.5)}\, d\{20(x-12.5)\}$

$= 12.5 - \frac{1}{20} \left[e^{-20(x-12.5)}\right]_{12.5}^{\infty} \qquad = 12.5 + \frac{1}{20}$

$= 12.55$ มิลลิเมตร

$E(X^2) = \int_{12.5}^{x} x^2\, 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u_2 = x^2$ และ $dv_2 = 20\, e^{-20(x-12.5)}$

$du_2 = 2xdx$ $\quad v_2 = \int 20\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$

$= \int e^{-20(x-12.5)}\, d\{20(x-12.5)\}$

$= -\, e^{-20(x-12.5)}$

$$\therefore\ E(X^2) = \left[-x^2\, e^{-20(x-12.5)}\right]_{12.5}^{\infty} + 2\int_{12.5}^{\infty} x\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$$

$$= (12.5)^2 + \frac{1}{10}\int_{12.5}^{\infty} 20\, x\, e^{-20(x-12.5)}\, dx$$

$$= 12.5 - \frac{1}{10}(12.55)$$

$$= 157.505$$

ดังนั้น $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= 157.505 - (12.55)^2$

$= 0.0025$ (มิลลิเมตร)^2

- **กฎของความแปรปรวน**

1. ถ้า a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$V(\mathrm{a}) = 0$$

2. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$V(\mathrm{aX}) = \mathrm{a}^2 V(X)$$

3. ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$V(\mathrm{aX} \pm \mathrm{bY}) = \mathrm{a}^2 V(X) \pm \mathrm{b}^2 V(Y)$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.17</u> ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน โดยมี $V(X) = 9$ และ $V(Y) = 3$

จงหาค่าของ $V(4X - 2Y + 6)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
V(4X - 2Y + 6) &= V(4X) + V(-2Y) + V(6) \\
&= 16V(X) + 4V(Y) + 0 \\
&= 16(9) + 4(3) \\
&= 159
\end{aligned}
$$