แบบฝึกหัดชุดที่ 4

Probability and Statistics

คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

---

1. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีต่างๆ ไว้ดังนี้ สีขาว 8 ลูก สีดำ 4 ลูก และสีส้ม 2 ลูก เจนี่เล่นเกมโดยสุ่มหยิบลูกบอลออกมา 2 ลูก ถ้าหยิบได้ลูกสีดำจะได้รับเงิน 20 บาท ถ้าหยิบได้ลูกสีขาวจะต้องเสียเงิน 10 บาท กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแทนเงินที่เจนี่จะได้รับ จงหาแซมเปิลสเปซ S_X ของตัวแปรสุ่ม X และหา PMF ของ X

2. บริษัทแห่งหนึ่งมีสินค้าสำหรับจำหน่าย 2 รุ่น คือ รุ่น A และ รุ่น B โดยที่รุ่น A มีราคา 50,000 บาท และรุ่น B มีราคา 20,000 บาท พนักงานขายสินค้ามีนัดเพื่อเจรจาขายสินค้าให้กับลูกค้า 2 รายคือ สมชายและสมหญิง ความน่าจะเป็นที่พนักงานขายจะหว่านล้อมให้สมชายซื้อสินค้าได้คิดเป็น 0.3 และความน่าจะเป็นที่พนักงานขายจะหว่านล้อมให้สมหญิงซื้อสินค้าได้คิดเป็น 0.6 ถ้าหากลูกค้าตกลงใจซื้อสินค้าจะซื้อเพียงชิ้นเดียวเท่านั้น โอกาสที่ลูกค้าจะเลือกรุ่น A หรือ รุ่น B มีเท่าๆกัน กำหนดให้ X เป็นจำนวนยอดเงินที่พนักงานขายทำได้จากการขายสินค้าให้สมชายและสมหญิง จงหา PMF ของ X

3. ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ n ครั้ง โดยความน่าจะเป็นที่เหรียญออกหัวในการโยนแต่ละครั้งคือ p แล้ว X จะมี PMF แบบ Binomial ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัว 3 ครั้ง จากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวอย่างน้อย 3 ครั้ง จากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

(c) โดยเฉลี่ยแล้วเหรียญจะออกหัวกี่ครั้งจากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

4. ลังใบหนึ่งบรรจุไอโฟนไว้ 20 เครื่อง ในจำนวนนี้มีเครื่องที่เสียอยู่ 4 เครื่อง สุ่มเลือกไอโฟนออกมา 3 เครื่องจากลัง จงหาว่าโดยเฉลี่ยแล้วจะมีเครื่องเสียจำนวนกี่เครื่องในจำนวน 3 เครื่องที่สุ่มหยิบมา

5. กำหนดให้ $E[X] = 1$ และ $VAR[X] = 5$ จงหา

(a) $E[(2 + X)^2]$

(b) $VAR[4 + 3X]$

6. ข้อสอบรับตรงคณะไอทีเป็นแบบปรนัย โดยแต่ละข้อมี 3 ตัวเลือก ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ คุณฉงนทำข้อสอบโดยเลือกคำตอบแบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่คุณฉงนจะตอบถูกตั้งแต่ 4 ข้อขึ้นไป

1. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีต่างๆ ไว้ดังนี้ สีขาว 8 ลูก สีดำ 4 ลูก และสีส้ม 2 ลูก เจนี่เล่นเกมโดยสุ่มหยิบลูกบอลออกมา 2 ลูก ถ้าหยิบได้ลูกสีดำจะได้รับเงิน 20 บาท ถ้าหยิบได้ลูกสีขาวจะต้องเสียเงิน 10 บาท กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแทนเงินที่เจนี่จะได้รับ จงหาแซมเปิลสเปซ S_X ของตัวแปรสุ่ม X และหา PMF ของ X

-10 20

$S_X = \{40, 20, 10, 0, -10, -20\}$

$\Omega = \binom{14}{2}$

$x = 40 \rightarrow \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}$ $\quad x = 20 \rightarrow \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}$

$x = 10 \rightarrow \dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}}$ $\quad x = 0 \rightarrow \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}}$

$x = -10 \rightarrow \dfrac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\frac{14}{2}}$ $\quad x = -20 \rightarrow \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}$

$$p_X(x) \begin{cases} \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} ; & x = 40 \\ \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} ; & x = 20 \\ \dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}} ; & x = 10 \\ \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}} ; & x = 0 \\ \dfrac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\frac{14}{2}} ; & x = -10 \\ \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} ; & x = -20 \\ 0 ; & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

2. บริษัทแห่งหนึ่งมีสินค้าสำหรับจำหน่าย 2 รุ่น คือ รุ่น A และ รุ่น B โดยที่รุ่น A มีราคา 50,000 บาท และรุ่น B มีราคา 20,000 บาท พนักงานขายสินค้ามีนัดเพื่อเจรจาขายสินค้าให้กับลูกค้า 2 รายคือ สมชายและสมหญิง ความน่าจะเป็นที่พนักงานขายจะหว่านล้อมให้สมชายซื้อสินค้าได้คิดเป็น 0.3 และความน่าจะเป็นที่พนักงานขายจะหว่านล้อมให้สมหญิงซื้อสินค้าได้คิดเป็น 0.6 ถ้าหากลูกค้าตกลงใจซื้อสินค้าจะซื้อเพียงชิ้นเดียวเท่านั้น โอกาสที่ลูกค้าจะเลือกรุ่น A หรือ รุ่น B มีเท่าๆกัน กำหนดให้ X เป็นจำนวนยอดเงินที่พนักงานขายทำได้จากการขายสินค้าให้สมชายและสมหญิง จงหา PMF ของ X

ชA ญA $x = 100000 \rightarrow 0.3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(0.6) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

ชA ญB $x = 70000 \rightarrow 0.3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0.6 \left(\frac{1}{2}\right)$

$\Big\} 0.045$

ชB ญA $x = 70000 \rightarrow$

ชB ญB $x = 40000 \rightarrow$

ชx ญA $x = 50000 \rightarrow$

ชx ญB $x = 20000 \rightarrow$

$\Big\} 0.7 \cdot 0.6 \cdot \frac{1}{2} = 0.21$

ชA ญx $x = 50000 \rightarrow$

ชB ญx $x = 20000 \rightarrow$

$\Big\} 0.4 \cdot 0.3 \cdot \frac{1}{2} = 0.06$

ชx ญx $x = 0 \rightarrow 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.045 & ; x = 100000 \\ 0.9 & ; x = 70000 \\ 0.27 & ; x = 50000 \\ 0.045 & ; x = 40000 \\ 0.27 & ; = 20000 \\ 0.28 & ; = 0 \\ 0 & ; \text{อื่น} \end{cases}$$

3. ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวจากการโยนเหรียญ n ครั้ง โดยความน่าจะเป็นที่เหรียญออกหัวในการโยนแต่ละครั้งคือ p แล้ว X จะมี PMF แบบ Binomial ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$n=5$

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัว 3 ครั้ง จากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

$$P(x=3) = \binom{5}{3}(0.25)^3(1-0.25)^{5-3}$$
$$= 0.88$$

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวอย่างน้อย 3 ครั้ง จากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

(c) โดยเฉลี่ยแล้วเหรียญจะออกหัวกี่ครั้งจากการโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นในการออกหัวแต่ละครั้งคือ 0.25

0 ___ 5

b) $P(x \geq 3) \sum_{x=3}^{5} p_X(x)$

$$= \binom{5}{3}(0.25)^3(0.75)^2 + \binom{5}{4}(0.25)^4(0.75) + \binom{5}{5}(0.25)^5$$

c) $0\binom{5}{0}\cdot(0.75)^5 + 1\binom{5}{1}(0.25)(0.75)^4 + 2\binom{5}{2}(0.25)^2(0.75)^3 + \ldots + 5\binom{5}{5}(0.25)^5$

$= 1.25$

4. ลังใบหนึ่งบรรจุไอโฟนไว้ 20 เครื่อง ในจำนวนนี้มีเครื่องที่เสียอยู่ 4 เครื่อง สุ่มเลือกไอโฟนออกมา 3 เครื่อง จากลัง จงหาว่าโดยเฉลี่ยแล้วจะมีเครื่องเสียจำนวนกี่เครื่องในจำนวน 3 เครื่องที่สุ่มหยิบมา

$E[X]$

$$x=0 \rightarrow \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.4912$$

$$x=1 \rightarrow \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = 0.4211$$

$$x=2 \rightarrow \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{1}}{\binom{20}{3}} = 0.0842$$

$$x=3 \rightarrow \frac{\binom{4}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.0035$$

$$\begin{cases} 0.4912 ; & x=0 \\ 0.4211 ; & x=1 \\ 0.0842 ; & x=2 \\ 0.0035 ; & x=3 \\ 0 ; & \text{อื่น} \end{cases}$$

$$E[X] = 0 \cdot (0.4912) + 1(0.4211) + 2(0.0842) + 3(0.035) = 0.6$$

5. กำหนดให้ $E[X] = 1$ และ $VAR[X] = 5$ จงหา

(a) $E[(2+X)^2]$

(b) $VAR[4+3X]$

$$E[(2+X)^2] = E[4+4X+X^2]$$
$$= E[4] + 4E[X] + E[X^2]$$
$$= 4 + 4(1) + E[X^2]$$
$$= 8 + (VAR[X] + (E[X])^2)$$
$$= 8 + (5+1^2)$$
$$= 14$$

$$VAR[4+3X] = 3^2 VAR[X]$$
$$= 9 \times 5$$
$$= 45$$

6. ข้อสอบรับตรงคณะไอทีเป็นแบบปรนัย โดยแต่ละข้อมี 3 ตัวเลือก ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ คุณฉงนทำข้อสอบโดยเลือกคำตอบแบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่คุณฉงนจะตอบถูกตั้งแต่ 4 ข้อขึ้นไป

$P(x \geq 4) = P(x=4) + P(x=5)$

$P(x=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) = 0.412$

$P(x=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0.00412$

$P(x \geq 4) = 0.04532$