Lecture Notes

# ความน่าจะเป็นและสถิติ

# Probability and Statistics

**ศาสตราจารย์ ดร. สุขสันต์ พาณิชพาพิบูล**

คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

# บทที่ 10

# ช่วงความเชื่อมั่น

# Confidence Interval

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีการหาช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งมีหัวข้อที่จะกล่าวถึงดังนี้

- ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem, C.L.T.)
- การหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่
- การหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

## 10.1 ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem)

**ปุจฉา 10.1** ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง หรือ Central Limit Theorem (C.L.T.) คืออะไร มีเนื้อหาว่าอย่างไร?

*วิสัชนา* Central Limit Theorem (C.L.T.) คือ ทฤษฎีที่กล่าวว่า ถ้าหากเราสุ่มตัวอย่างที่มีจำนวนมากพอออกมาจากประชากร จะส่งผลให้ค่าเฉลี่ยตัวอย่างหรือแซมเปิลมีน (Sample Mean) มีการกระจายใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติ ไม่ว่าตัวอย่างนั้นจะถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบใดก็ตาม

กำหนด $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างที่สุ่มจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ และค่าความแปรปรวน $\sigma^2$ และกำหนด $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างหรือแซมเปิลมีน ถ้าหาก $n$ มีขนาดใหญ่มากพอ C.L.T. กล่าว

เนื้อหาในบทนี้อ้างอิงจาก [4]

ว่า

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{, approximately}$$

รูป 10.1 แสดงฮิสโทแกรมของ $\overline{X}$ ในกรณีที่ (a) $n = 5$ และ (b) $n = 15$ ตามลำดับ โดยที่ตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 0.5$ กราฟเส้นทึบในรูปทั้งสองเป็นกราฟแสดงการกระจายแบบปกติ จะสังเกตได้ว่าเมื่อ $n$ มีขนาดเล็ก ฮิสโทแกรมของ $\overline{X}$ ยังไม่ค่อยใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกตินัก แต่เมื่อเพิ่ม $n$ มากขึ้นเป็น 15 ฮิสโทแกรมของ $\overline{X}$ ก็จะใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติมากขึ้น

**ปุจฉา 10.2** โดยทั่วไปแล้วจำนวนตัวอย่าง $n$ ต้องมีเท่าใดจึงจะถือว่ามากพอจนทำให้ $\overline{X}$ มีการกระจายใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติ?

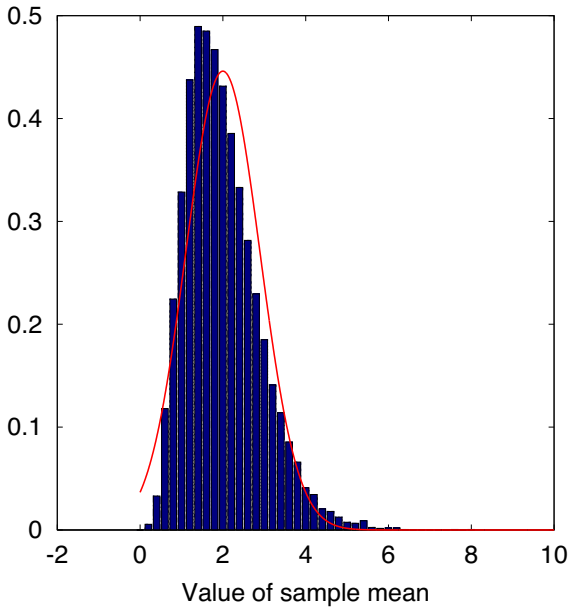
*วิสัชนา* โดยทั่วไปแล้ว ถ้า $n$ ตั้งแต่ 30 ขึ้นไป ก็จะถือว่ามากพอจนทำให้ $\overline{X}$ มีการกระจายใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติ

**ตัวอย่าง 10.1** เวลาเฉลี่ยที่แท้จริงที่นักศึกษาใช้ในการเล่นอินเตอร์เน็ตในแต่ละวันคือ 5.8 ชั่วโมง และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ 1.6 ชั่วโมง ถ้าทำการสุ่มนักศึกษาออกมา 64 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของเวลาที่กลุ่มตัวอย่างนี้ใช้เล่นอินเตอร์เน็ตจะมากกว่า 6 ชั่วโมง

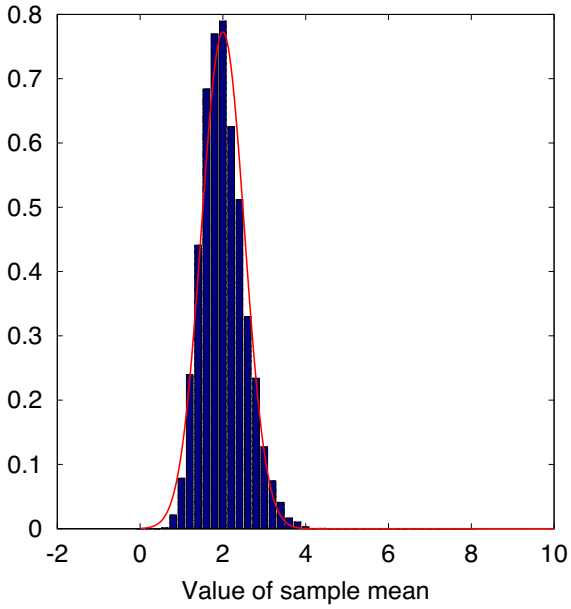
*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\mu = 5.8, \sigma^2 = 1.6^2, n = 64$
เราทราบจาก C.L.T. ว่า $\overline{X} \sim \mathcal{N}(5.8, 0.6^2/64)$ ดังนั้นหา $P(\overline{X} > 6)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} > 6) &= 1 - P(\overline{X} \leq 6) \\
&= 1 - P\left(Z \leq \frac{6 - 5.8}{\sqrt{1.6^2/64}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1) \\
&= 1 - 0.8413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของเวลาที่กลุ่มตัวอย่างนี้ใช้เล่นอินเตอร์เน็ตจะมากกว่า 6 ชั่วโมง มีค่าเท่ากับ 0.1587




(a) ในกรณีที่ $n = 5$




(b) ในกรณีที่ $n = 15$

รูป 10.1: ฮิสโทแกรมของ $\overline{X}$ โดยที่ตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 0.5$

## 10.2 ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร (ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่)

**ปุจฉา 10.3** ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) คืออะไร หาไปทำไม?

*วิสัชนา* โดยปกติแล้วเราหาค่าแซมเปิลมีน ($\overline{X}$) เพื่อไปใช้ประมาณหาค่าเฉลี่ยประชากร ($\mu$) ซึ่งเราไม่ทราบว่าเป็นเท่าใด อย่างไรก็ตาม เราทราบจาก C.L.T. ว่า $\overline{X}$ เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีการกระจายแบบปกติ $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ ดังนั้นค่า $\overline{X}$ ที่เราคำนวณมาจากกลุ่มตัวอย่างก็อาจจะไม่ได้ตรงกับค่าเฉลี่ยประชากรหรือค่าเฉลี่ยที่แท้จริง

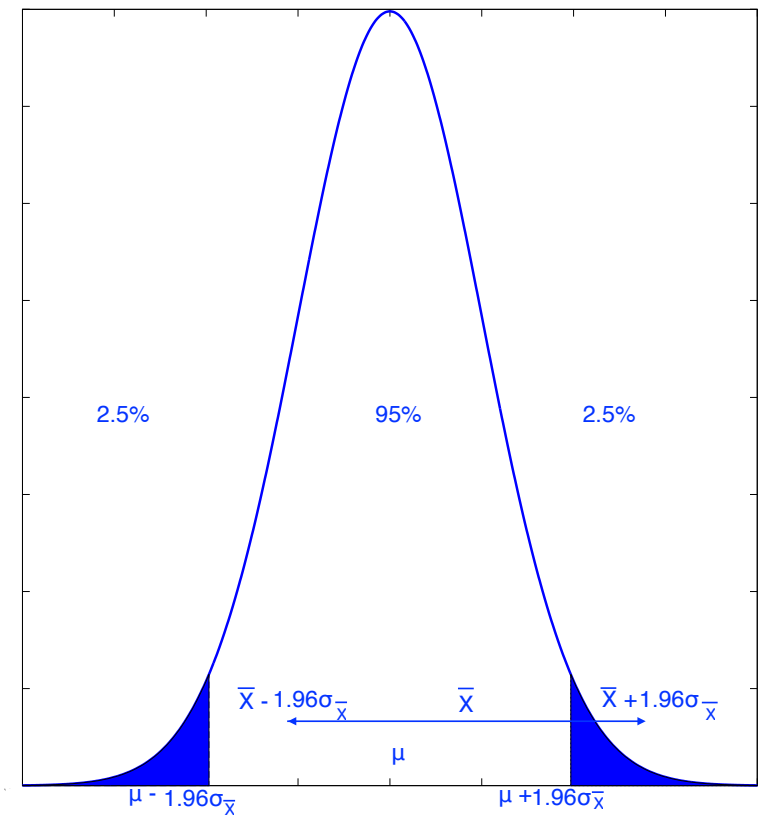
อย่างไรก็ตาม เราอยากที่จะสามารถบอกได้ว่าค่าเฉลี่ยประชากรที่แท้จริงน่าจะอยู่ในช่วงใด และเรามีความมั่นใจระดับใดว่าค่าเฉลี่ยประชากรอยู่ในช่วงนั้น ยกตัวอย่างเช่น เราอาจจะบอกว่าเรามีความมั่นใจที่ระดับ 100% ว่าค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของอายุนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในคณะไอทีลาดกระบังจะต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง 100 ปี ซึ่งช่วง (0,100) ก็คือสิ่งที่เราเรียกว่าช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรนั่นเอง เราสร้างสิ่งที่เรียกว่าช่วงความเชื่อมั่นขึ้นมา เพื่อเป็นเครื่องมือในการประเมินว่าค่าเฉลี่ยที่แท้จริงน่าจะอยู่ในช่วงดังกล่าวด้วยความเชื่อมั่นระดับใด

ลักษณะของช่วงความเชื่อมั่นที่ดีคือ ความกว้างของช่วงต้องไม่มากเกินไปและให้ระดับความมั่นใจที่สูง ถ้าหากช่วงความเชื่อมั่นกว้างเกินไปก็จะไม่มีประโยชน์นัก ดังเช่นตัวอย่างที่ยกมาข้างต้น หากเราบอกว่าเรามีความมั่นใจที่ระดับ 100% ว่าค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของอายุนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในคณะไอทีลาดกระบังจะต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง 100 ปี ก็ดูจะเป็นข้อมูลที่ไม่เป็นประโยชน์นักเนื่องจากช่วงความเชื่อมั่นนี้มีความกว้างมาก ในทางกลับกับหากเราสามารถบอกได้ว่าเรามีความมั่นใจ 95% ว่า ค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของอายุนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในคณะไอทีลาดกระบังจะต้องอยู่ในช่วง 19 ถึง 19.6 ปี ก็ดูจะเป็นประโยชน์มากขึ้นเนื่องจากความกว้างของช่วงไม่กว้างเกินไปจนนำไปใช้ประโยชน์อะไรไม่ได้นั่นเอง

### 10.2.1 ช่วงความเชื่อมั่นแบบสองด้าน (Two-sided Confidence Interval)

**ปุจฉา 10.4** ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร หามาได้อย่างไรตามหลักการทางสถิติ?

*วิสัชนา* เราจะอธิบายวิธีการหาช่วงความเชื่อมั่นจากตัวอย่างก่อน เนื่องจาก $\overline{X}$ มีการกระจายแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย $\mu$ และ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_{\overline{X}}$ ถ้าเราวาดกราฟการกระจายก็จะได้ดังรูป 10.2 สมมติว่าเราต้องการแบ่งพื้นที่ของกราฟเป็น 3 ส่วน โดยให้บริเวณส่วนกลางมีพื้นที่คิดเป็น 95% ของพื้นที่ทั้งหมด ให้บริเวณหางทางด้านซ้ายมีพื้นที่คิดเป็น 2.5% ของพื้นที่ทั้งหมด และหางบริเวณทางด้านขวามีพื้นที่คิดเป็น 2.5% ของพื้นที่ทั้งหมด ถ้าเราต้องการให้บริเวณส่วนกลางมีพื้นที่ 95% ก็จะต้องวัดจากกึ่งกลางกราฟ (ที่ค่า $\mu$) ไปทางด้านซ้ายและขวาเป็นระยะทางด้านละ $1.96\sigma_{\overline{X}}$




รูป 10.2: กราฟการกระจายของ $\overline{X}$

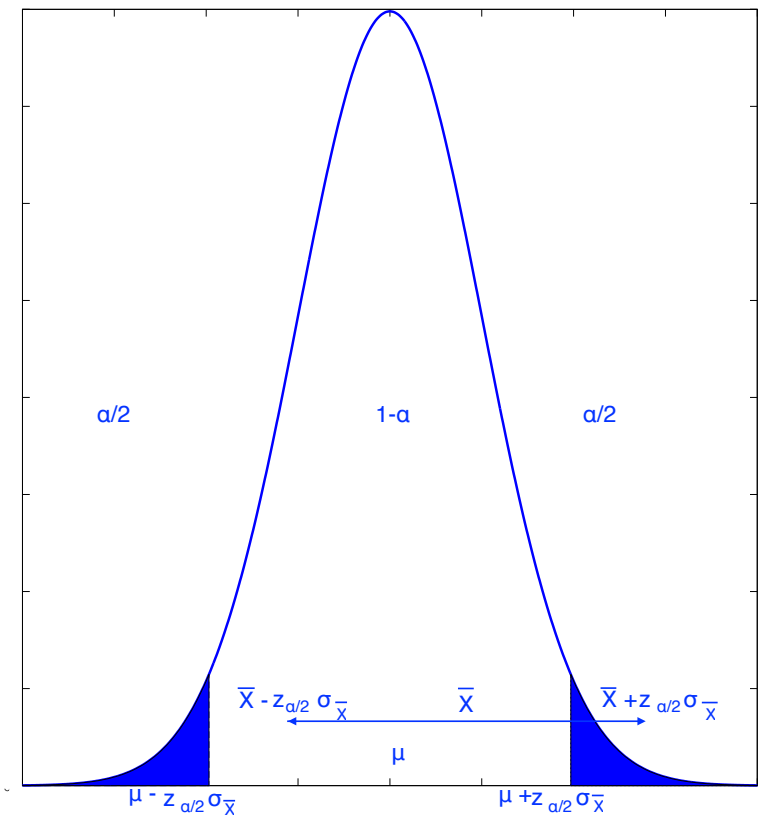
ค่า $\overline{X}$ ที่เราคำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่างอาจไม่ได้ตรงกับค่า $\mu$ ซึ่งค่า $\overline{X}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดก็คือค่าบนแกนนอนของกราฟนี้ สมมติว่าเราคำนวณ $\overline{X}$ แล้วได้ค่ามากกว่า $\mu$ ตามที่แสดงในรูป 10.2 ถ้าเราวัดจาก $\overline{X}$ ไปทางซ้ายและขวาเป็นระยะทางด้านละ $1.96\sigma_{\overline{X}}$ ในกรณีนี้จะพบว่า ช่วงจำนวนที่เราสร้างขึ้นใหม่โดยมีศูนย์กลางที่ $\overline{X}$ นี้ จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร $\mu$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ค่าเฉลี่ยประชากรตกอยู่ในช่วงจำนวนที่เราสร้างขึ้น ถ้าเราสังเกตให้ดีจะพบว่า จะมีช่วงจำนวนซึ่งมีความกว้าง $\pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$ ในลักษณะนี้อยู่ 95% ของค่า $\overline{X}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่สามารถครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร และจะมีช่วงจำนวนซึ่งมีความกว้าง $\pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$ อีก 5% ที่ไม่สามารถครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร (เช่น ถ้าค่า $\overline{X}$ ที่คำนวณได้มีค่าอยู่บริเวณส่วนหางของกราฟ)

ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า เรามีความมั่นใจที่ระดับ 95% ว่าค่าเฉลี่ยประชากรจะตกอยู่ในช่วง $\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$ ช่วงจำนวนนี้เรียกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95%

ต่อไปเราจะขยายแนวความคิดนี้ออกไปเพื่อหาช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับใดๆ ที่เราต้องการ พิจารณาจากรูป 10.3 ซึ่งเป็นกราฟการกระจายของ $\overline{X}$ สมมติว่าเราจะแบ่งพื้นที่ของกราฟเป็น 3 ส่วน โดยให้บริเวณส่วนกลางมีพื้นที่คิดเป็น $1 - \alpha$ ของพื้นที่ทั้งหมด ให้บริเวณหางทางด้านซ้ายมีพื้นที่คิดเป็น $\alpha/2$ ของพื้นที่ทั้งหมด และหางบริเวณทางด้านขวามีพื้นที่คิดเป็น $\alpha/2$ ของพื้นที่ทั้งหมด ถ้าเราต้องการให้บริเวณส่วนกลางมีพื้นที่ $1-\alpha$ ก็จะต้องวัดจากกึ่งกลางกราฟ (ที่ค่า $\mu$) ไปทางด้านซ้ายและขวาเป็นระยะทางด้านละ $z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ โดยค่า $z_{\alpha/2}$ คือค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่ส่วนหางด้านขวามือของกราฟมีค่าเท่ากับ $\alpha/2$

ค่า $\overline{X}$ ที่เราคำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่างอาจไม่ได้ตรงกับค่า $\mu$ ซึ่งค่า $\overline{X}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดก็คือค่าบนแกนนอนของกราฟนี้ สมมติว่าเราคำนวณ $\overline{X}$ แล้วได้ค่ามากกว่า $\mu$ ตามที่แสดงในรูป 10.3 ถ้าเราวัดจาก $\overline{X}$ ไปทางซ้ายและขวาเป็นระยะทางด้านละ $z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ ในกรณีนี้จะพบว่า ช่วงจำนวนที่เราสร้างขึ้นใหม่โดยมีศูนย์กลางที่ $\overline{X}$ นี้ จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร $\mu$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ค่าเฉลี่ยประชากรตกอยู่ในช่วงจำนวนที่เราสร้างขึ้น ถ้าเราสังเกตให้ดีจะพบว่า จะมีช่วงจำนวนซึ่งมีความกว้าง $\pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ ในลักษณะนี้อยู่ $100(1-\alpha)\%$ ของค่า $\overline{X}$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่สามารถครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร และจะมีช่วงจำนวนซึ่งมีความกว้าง $\pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ อีก $\alpha\%$ ที่ไม่สามารถครอบคลุมค่าเฉลี่ยประชากร (เช่น ถ้าค่า $\overline{X}$ ที่คำนวณได้มีค่าอยู่บริเวณส่วนหางของกราฟ)

ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า เรามีความมั่นใจที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ว่าค่าเฉลี่ยประชากรจะตกอยู่ในช่วง $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ ช่วงจำนวนนี้เรียกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$




รูป 10.3: กราฟการกระจายของ $\overline{X}$

**ปุจฉา 10.5** ถ้ามีกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) โดยกลุ่มตัวอย่างนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma$ จะหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ได้อย่างไร?

*วิสัชนา* หาได้ดังนี้

1. ให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\overline{X}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$)
2. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\overline{X}$ ดังนี้คือ $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ ถ้าหากไม่ทราบค่า $\sigma$ ให้สามารถใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง $s$ แทนได้ กรณีนี้จะได้ $\sigma_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$
3. ให้หาค่า $z_{\alpha/2}$ โดยที่ $z_{\alpha/2}$ คือค่า z-score ที่ทำให้ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบปกติมาตรฐานมีพื้นที่เท่ากับ $\alpha/2$ ซึ่งหาได้จากการเปิดตาราง Z-table
4. ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$

**ปุจฉา 10.6** ค่า $z_{\alpha/2}$ สำหรับระดับความเชื่อมั่นที่ใช้บ่อยมีค่าเท่าใดบ้าง?

*วิสัชนา* มีค่าตามตาราง 10.1

ตาราง 10.1: ค่า $z_{\alpha/2}$ สำหรับระดับความเชื่อมั่นที่ใช้บ่อย

| ระดับความเชื่อมั่น | $z_{\alpha/2}$ |
|---|---|
| 68% | 1 |
| 90% | 1.645 |
| 95% | 1.96 |
| 99% | 2.58 |
| 99.7% | 3 |

**ตัวอย่าง 10.2** สกาวเดือนต้องการหาค่าเฉลี่ยอายุของนักศึกษาในคณะไอที จึงได้สุ่มตัวอย่างนักศึกษามา 50 คน และนำมาหาค่าเฉลี่ยอายุซึ่งได้ 19.2 ปี และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.8 ปี จงหาค่าช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 80% และ 95%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 19.2, s = 0.8, n = 50$
หาช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 80% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 80% ดังนั้น $1-\alpha = 0.8$ หรือ $\alpha = 0.2$ และ $\alpha/2 = 0.1$

2. หาค่า $z_{\alpha/2}$ จากตาราง Z-table โดยหาค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.1 จะได้ $z_{\alpha/2} \approx 1.28$

3. ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 80% คือ

$$\begin{aligned} \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} &= 19.2 \pm 1.28 \times \frac{0.8}{\sqrt{50}} \\ &= 19.2 \pm 0.145 \\ &= (19.055, 19.345) \end{aligned}$$

หาช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ดังนั้น $1 - \alpha = 0.95$ หรือ $\alpha = 0.05$ และ $\alpha/2 = 0.025$

2. หาค่า $z_{\alpha/2}$ จากตาราง Z-table โดยหาค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.025 จะได้ $z_{\alpha/2} = 1.96$

3. ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 95% คือ

$$\begin{aligned} \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} &= 19.2 \pm 1.96 \times \frac{0.8}{\sqrt{50}} \\ &= 19.2 \pm 0.222 \\ &= (18.978, 19.422) \end{aligned}$$

### 10.2.2 **ช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียว** (One-sided Confidence Interval)

ในบางกรณี เราอาจไม่ได้สนใจว่าค่าเฉลี่ยประชากรจะตกอยู่ในช่วงใด แต่เราอาจสนใจแค่เพียงว่าค่าเฉลี่ยประชากรมีค่ามากกว่าค่าขั้นต่ำ หรือมีค่าน้อยกว่าค่าขั้นสูง เช่น วิศกรที่สร้างอาคารอาจมีความต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยน้ำหนักที่เสาอาคารสามารถรับได้มีค่ามากกว่า 10 ตันขึ้นไป ในกรณีเช่นนี้ เราจะหาช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียว (One-sided Confidence Interval)

**ปุจฉา 10.7** ถ้ามีกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) โดยกลุ่มตัวอย่างนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ และ ค่าเบี่ยงเบนมาตฐาน $\sigma$ เราจะหาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ได้อย่างไร?

*วิสัชนา* หาได้ดังนี้

1. ให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\overline{X}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$)

2. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\overline{X}$ ดังนี้คือ $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ ถ้าหากไม่ทราบค่า $\sigma$ ให้สามารถใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง $s$ แทนได้ กรณีนี้จะได้ $\sigma_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$

3. ให้หาค่า $z_\alpha$ โดยที่ $z_\alpha$ คือค่า z-score ที่ทำให้ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบปกติมาตรฐานมีพื้นที่เท่ากับ $\alpha$ ซึ่งหาได้จากการเปิดตาราง Z-table

4. ขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} - z_\alpha\sigma_{\overline{X}}$

**ปุจฉา 10.8** ถ้ามีกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) โดยกลุ่มตัวอย่างนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ และ ค่าเบี่ยงเบนมาตฐาน $\sigma$ เราจะหาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ได้อย่างไร?

*วิสัชนา* หาได้ดังนี้

1. ให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\overline{X}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$)

2. หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\overline{X}$ ดังนี้คือ $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ ถ้าหากไม่ทราบค่า $\sigma$ ให้สามารถใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง $s$ แทนได้ กรณีนี้จะได้ $\sigma_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$

3. ให้หาค่า $z_\alpha$ โดยที่ $z_\alpha$ คือค่า z-score ที่ทำให้ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบปกติมาตรฐานมีพื้นที่เท่ากับ $\alpha$ ซึ่งหาได้จากการเปิดตาราง Z-table

4. ขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} + z_\alpha\sigma_{\overline{X}}$

**ตัวอย่าง 10.3** กลุ่มตัวอย่างของนักเรียน 75 คนมีค่าเฉลี่ยน้ำหนัก 52.1 กก.และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4.1 กก. จงหาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ 95%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 52.1, s = 4.1, n = 75$
หาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ $95\%$ ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ $95\%$ ดังนั้น $1-\alpha = 0.95$ หรือ $\alpha = 0.05$

2. หาค่า $z_\alpha$ จากตาราง Z-table โดยหาค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.05 จะได้ $z_\alpha = 1.645$

3. ขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 95% คือ

$$\begin{aligned}\overline{X} - z_\alpha \sigma_{\overline{X}} &= 52.1 - 1.645 \times \frac{4.1}{\sqrt{75}} \\ &= 51.321\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 10.4** ละอองดาวต้องการทดสอบปริมาณฝุ่นละอองในอากาศ โดยได้สุ่มตัวอย่างอากาศมา 100 ตัวอย่าง เมื่อนำมาทดสอบพบว่ามีค่าเฉลี่ยปริมาณฝุ่นละอองอยู่ที่ 200 มก. และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 มก. จงหาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ 90%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 200, s = 10, n = 100$
หาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% ดังนั้น $1 - \alpha = 0.90$ หรือ $\alpha = 0.1$
2. หาค่า $z_\alpha$ จากตาราง Z-table โดยหาค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.1 จะได้ $z_\alpha = 1.28$
3. ขอบบนของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% คือ

$$\begin{aligned}\overline{X} + z_\alpha \sigma_{\overline{X}} &= 200 + 1.28 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \\ &= 201.28\end{aligned}$$

## 10.3 ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร (ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก)

ในส่วนนี้เราจะศึกษาวิธีการหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

### 10.3.1 ช่วงความเชื่อมั่นแบบสองด้าน (Two-sided Confidence Interval)

**ปุจฉา 10.9** กรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก เกิดปัญหาขึ้นอย่างไร?

*วิสัชนา* กรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) จะส่งผลให้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$) มีค่าผิดเพี้ยนไปจากค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร ($\sigma$) มาก นอกจากนี้ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กก็จะทำให้ $\overline{X}$ ไม่ได้มีการกระจายที่ใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติตาม C.L.T.

**ปุจฉา 10.10** ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ค่า $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ มีการกระจายแบบใด?

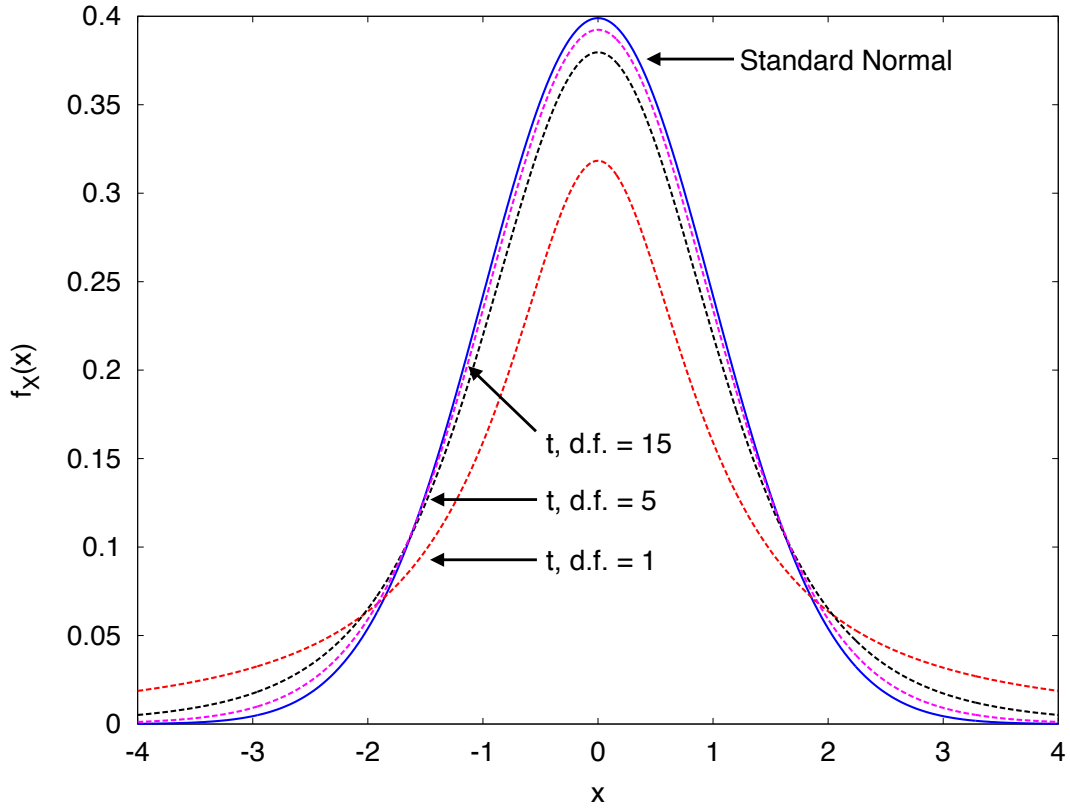
*วิสัชนา* ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ค่า $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ จะมีการกระจายใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติมาตรฐาน กล่าวคือ

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{, approximately}$$

**ปุจฉา 10.11** ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก และกลุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ ค่า $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ มีการกระจายแบบใด?

*วิสัชนา* ในกรณีนี้ $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ จะมีการกระจายแบบ Student's t Distribution โดยมี $n-1$ degree of freedom (d.f.) ซึ่งเราเรียกค่า $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ นี้ว่าค่า t-statistic

รูป 10.4 แสดงการกระจายของค่า t-statistic ที่ระดับ d.f. ต่างๆ จะเห็นได้ว่า เมื่อ d.f. มีค่าน้อย การกระจายของ $t$ จะมีความแตกต่างจากการกระจายแบบปกติมาก แต่เมื่อ d.f. เพิ่มมากขึ้น การกระจายของ $t$ ก็จะใกล้เคียงกับการกระจายแบบปกติมากขึ้น




รูป 10.4: กราฟการกระจายของ $t = \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ ที่ระดับ d.f. ต่างๆ เปรียบเทียบกับการกระจายแบบปกติ

**ปุจฉา 10.12** ถ้ามีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 30$) โดยกลุ่มตัวอย่างนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ เราจะหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ได้อย่างไร?

*วิสัชนา* หาได้ดังนี้

1. ให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\overline{X}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$)
2. ให้หาค่า $t_{n-1,\alpha/2}$ โดยที่ $t_{n-1,\alpha/2}$ คือค่า t-statistic ที่ ระดับ d.f. $= n-1$ ซึ่งทำให้ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบ Student's t Distribution มีพื้นที่เท่ากับ $\alpha/2$ ซึ่งหาได้จากการเปิดตาราง t-table (รูป A.2 ในภาคผนวก A)
3. ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

**ตัวอย่าง 10.5** สกาวเดือนต้องการหาค่าเฉลี่ยอายุของนักศึกษาในคณะไอที จึงได้สุ่มตัวอย่างนักศึกษามา 10 คน และนำมาหาค่าเฉลี่ยอายุซึ่งได้ 19.7 ปี และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.3 ปี ถ้ากลุ่มตัวอย่างนี้ถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ จงหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 90% และ 95%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 19.7, s = 1.3, n = 10$
หาช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 90% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 90% ดังนั้น $1-\alpha = 0.9$ หรือ $\alpha = 0.1$ และ $\alpha/2 = 0.05$
2. หาค่า $t_{n-1,\alpha/2}$ จากตาราง t-table โดยหาค่า t-statistic ที่ d.f. = 9 ซึ่งทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.05 จะได้ $t_{n-1,\alpha/2} = 1.833$
3. ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 90% คือ

$$\begin{aligned}\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} &= 19.7 \pm 1.833 \times \frac{1.3}{\sqrt{10}} \\ &= 19.7 \pm 0.7535 \\ &= (18.9465, 20.4535)\end{aligned}$$

หาช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ดังนั้น $1-\alpha = 0.95$ หรือ $\alpha = 0.05$ และ $\alpha/2 = 0.025$

2. หาค่า $t_{n-1,\alpha/2}$ จากตาราง t-table โดยหาค่า t-statistic ที่ d.f. = 9 ซึ่งทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.025 จะได้ $t_{n-1,\alpha/2} = 2.262$

3. ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ 95% คือ

$$\begin{aligned} \overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} &= 19.7 \pm 2.262 \times \frac{1.3}{\sqrt{10}} \\ &= 19.7 \pm 0.9299 \\ &= (18.7701, 20.6299) \end{aligned}$$

**ปุจฉา 10.13** ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กและถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ โดยที่เราทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร $\sigma$ เราจะหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ อย่างไร?

*วิสัชนา* ในกรณีที่เราทราบ $\sigma$ ช่วงความเชื่อมั่นหาได้จาก $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ โดยที่ $z_{\alpha/2}$ คือค่า z-score ที่ทำให้พื้นที่ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบปกติมาตรฐานมีพื้นที่เท่ากับ $\alpha/2$ ซึ่งหาได้จาก Z-table

### 10.3.2 ช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียว (One-sided Confidence Interval)

**ปุจฉา 10.14** ถ้ามีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 30$) โดยกลุ่มตัวอย่างนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu$ จะหาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ และจะหาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ ได้อย่างไร?

*วิสัชนา* หาได้ดังนี้

1. ให้คำนวณหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\overline{X}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง ($s$)

2. ให้หาค่า $t_{n-1,\alpha}$ โดยที่ $t_{n-1,\alpha}$ คือค่า t-statistic ที่ระดับ d.f. = $n-1$ ซึ่งทำให้ส่วนหางของกราฟการกระจายแบบ Student's t Distribution มีพื้นที่เท่ากับ $\alpha$ ซึ่งหาได้จากการเปิดตาราง t-table

3. ในกรณีหาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่น ค่าขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} - t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$

4. ในกรณีหาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น ค่าขอบบนของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ $100(1-\alpha)\%$ คือ $\overline{X} + t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$

**ตัวอย่าง 10.6** กลุ่มตัวอย่างของนักเรียน 15 คนมีค่าเฉลี่ยน้ำหนัก 53.7 กก.และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5.2 กก. กลุ่มตัวอย่างนี้ถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ จงหาค่าขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ 95%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 53.7, s = 5.2, n = 15$
หาขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 95% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 95% ดังนั้น $1 - \alpha = 0.95$ หรือ $\alpha = 0.05$
2. หาค่า $t_{n-1,\alpha}$ จากตาราง t-table โดยหาค่า t-statistic ที่ระดับ d.f = 14 ซึ่งทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.05 จะได้ $t_{n-1,\alpha} = 1.761$
3. ขอบล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 95% คือ

$$\begin{aligned} \overline{X} - t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} &= 53.7 - 1.761 \times \frac{5.2}{\sqrt{15}} \\ &= 51.3356 \end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 10.7** ละอองดาวต้องการทดสอบปริมาณฝุ่นละอองในอากาศ โดยได้สุ่มตัวอย่างอากาศมา 12 ตัวอย่าง เมื่อนำมาทดสอบพบว่ามีค่าเฉลี่ยปริมาณฝุ่นละอองอยู่ที่ 180 มก. และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 มก. ถ้าตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติ จงหาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Confidence Bound) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากรแบบด้านเดียวที่ระดับ 90%

*วิธีทำ* โจทย์กำหนด $\overline{X} = 180, s = 15, n = 12$
หาขอบบนของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% ได้ดังนี้

1. ต้องการช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% ดังนั้น $1 - \alpha = 0.90$ หรือ $\alpha = 0.1$
2. หาค่า $t_{n-1,\alpha}$ จากตาราง t-table โดยหาค่า t-statistic ที่ระดับ d.f = 11 ซึ่งทำให้พื้นที่หางด้านขวามือของกราฟมีค่า 0.1จะได้ $t_{n-1,\alpha} = 1.796$
3. ขอบบนของช่วงความเชื่อมั่นแบบด้านเดียวที่ระดับ 90% คือ

$$\begin{aligned} \overline{X} + t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} &= 180 + 1.796 \times \frac{15}{\sqrt{12}} \\ &= 187.78 \end{aligned}$$

ภาคผนวก A

# ตารางความน่าจะเป็นของการกระจายแบบต่าง ๆ

**Standard Normal Probabilities**

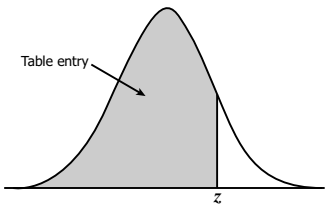



Table entry for $z$ is the area under the standard normal curve to the left of $z$.

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

รูป A.1: ตารางค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Standard Normal (ที่มา: `http://www.stat.ufl.edu/~athienit/Tables/Ztable.pdf`)

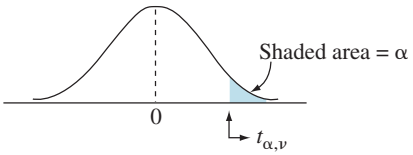


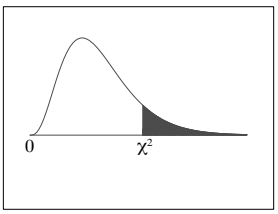

**TABLE 2**
Percentage points of Student's *t* distribution

| df/$\alpha$ = | .40 | .25 | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 | .001 | .0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.309 | 636.619 |
| 2 | 0.289 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 | 31.599 |
| 3 | 0.277 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 | 12.924 |
| 4 | 0.271 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.267 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | 0.265 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.263 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | 0.262 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.261 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.260 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.260 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.259 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.259 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.258 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.258 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.258 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.257 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.257 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | 0.257 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.257 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.257 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.256 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.256 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.768 |
| 24 | 0.256 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.256 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.256 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.256 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.256 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.256 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.256 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| 35 | 0.255 | 0.682 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.340 | 3.591 |
| 40 | 0.255 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| 50 | 0.255 | 0.679 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.261 | 3.496 |
| 60 | 0.254 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 | 3.460 |
| 120 | 0.254 | 0.677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.160 | 3.373 |
| inf. | 0.253 | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 |

Source: Computed by M. Longnecker using Splus.

รูป A.2: ตารางค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Student's t Distribution (ที่มา: `http://www.stat.ufl.edu/~athienit/Tables/tables.pdf`)

## Chi-Square Distribution Table




The shaded area is equal to $\alpha$ for $\chi^2 = \chi^2_\alpha$.

| $df$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.990}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.950}$ | $\chi^2_{.900}$ | $\chi^2_{.100}$ | $\chi^2_{.050}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.010}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.010 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 0.072 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.070 | 12.833 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.085 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.865 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 11.651 | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 12.443 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 14.041 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| 23 | 9.260 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 14.848 | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| 24 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.559 |
| 25 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| 26 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| 27 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 36.741 | 40.113 | 43.195 | 46.963 | 49.645 |
| 28 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| 29 | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 39.087 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 |
| 30 | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |
| 40 | 20.707 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 51.805 | 55.758 | 59.342 | 63.691 | 66.766 |
| 50 | 27.991 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 37.689 | 63.167 | 67.505 | 71.420 | 76.154 | 79.490 |
| 60 | 35.534 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 74.397 | 79.082 | 83.298 | 88.379 | 91.952 |
| 70 | 43.275 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 55.329 | 85.527 | 90.531 | 95.023 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 51.172 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 64.278 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 59.196 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 73.291 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 67.328 | 70.065 | 74.222 | 77.929 | 82.358 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |

รูป A.3: ตารางค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Chi-square Distribution (ที่มา: `http://kisi.deu.edu.tr/joshua.cowley/Chi-square-table.pdf`)

# บรรณานุกรม


[1] S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th ed. Pearson, 2012.

[2] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed. Athena Scientific, 2008.

[3] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed. Pearson, 2008.

[4] W. Navidi, *Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2010.