Lecture Notes

ความน่าจะเป็นและสถิติ

Probability and Statistics

ศาสตราจารย์ ดร. สุขสันต์ พาณิชพาพิบูล

คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทที่ 1

แบบจำลองความน่าจะเป็น

Probability Model

ในบทนี้เราจะศึกษาองค์ประกอบของแบบจำลองความน่าจะเป็น ตลอดจนวิธีการใช้งานแบบจำลองนี้ในการแก้ปัญหาและจำลองความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ

ปุจฉา 1.1 แบบจำลองความน่าจะเป็น (Probability Model) คืออะไร?

วิสัชนา แบบจำลองความน่าจะเป็น คือ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการประเมินและวัดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีความไม่แน่นอน การมีแบบจำลองความน่าจะเป็นจะช่วยให้เราสามารถเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีความไม่แน่นอนได้อย่างถูกต้องและมีความสมเหตุสมผล

ปุจฉา 1.2 แบบจำลองความน่าจะเป็นประกอบไปด้วยอะไรบ้าง?

วิสัชนา ประกอบไปด้วย 3 ส่วนดังนี้

1. แซมเปิลสเปซ (Sample Space)
2. เหตุการณ์ (Event)
3. ค่าความน่าจะเป็น (Probability)

เราจำลอง "ความเชื่อ (Belief)" เกี่ยวกับความเป็นไปได้ของสิ่งที่เราต้องการศึกษาโดยใช้องค์ประกอบทั้งสามนี้

เนื้อหาในบทนี้อ้างอิงจาก [1–3]

ปุจฉา 1.3 การทดลองสุ่ม (Random Experiment) คืออะไร?

วิสัชนา การทดลองสุ่ม (Random Experiment) คือ การทดลองที่มีผลการทดลอง (outcome) ที่ไม่ตายตัวแน่นอน แม้ว่าจะทำการทดลองซ้ำแบบเดิมก็ตาม ผลการทดลองอาจเปลี่ยนไป ตัวอย่างของการทดลองสุ่ม เช่น การโยนเหรียญแล้วสังเกตว่าหน้าเหรียญออกเป็นอะไร ในกรณีนี้เราไม่สามารถระบุได้แน่นอนว่าหน้าเหรียญที่เป็นผลการทดลองจากการโยนแต่ละครั้งจะเป็นอะไรระหว่างหัวและก้อย

1.1 แซมเปิลสเปซ (Sample Space)

แซมเปิลสเปซนับว่าเป็นองค์ประกอบแรกในการสร้างแบบจำลองความน่าจะเป็น ในส่วนนี้เราจะศึกษาว่าแซมเปิลสเปซคืออะไร รวมถึงเรียนรู้วิธีการสร้างแซมเปิลสเปซ

ปุจฉา 1.4 แซมเปิลสเปซ คืออะไร?

วิสัชนา แซมเปิลสเปซ คือ เซ็ต (Set) ของผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม เรามักแทนแซมเปิลสเปซด้วยสัญลักษณ์ Ω หรือ S

ตัวอย่าง 1.1 ทำการทดลองโดยโยนเหรียญ 1 ครั้ง แล้วสังเกตว่าหน้าเหรียญออกเป็นอะไร จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

วิธีทำ เราหาแซมเปิลสเปซของการทดลองได้โดยเขียนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด และรวมไว้ในเซ็ต แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ

$$\Omega = \{H, T\}$$

โดยที่ H คือ หน้าเหรียญเป็นหัว และ T คือหน้าเหรียญเป็นก้อย

ตัวอย่าง 1.2 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลไว้ 5 ลูก แต่ละลูกมีหมายเลขกำกับอยู่ โดยลูกบอลหมายเลข 1 เป็นสีแดง ลูกบอลหมายเลข 2 และ 3 เป็นสีดำ ลูกบอลหมายเลข 4 และ 5 เป็นสีขาว ทำการทดลอง 3 แบบดังนี้

1. สุ่มหยิบลูกบอลออกมา 1 ลูก สังเกตหมายเลขของลูกบอลที่หยิบได้ $\Omega = \{(1, 2, 3, 4, 5)\}$
2. สุ่มหยิบลูกบอลออกมา 1 ลูก สังเกตสีของลูกบอลที่หยิบได้ $\Omega = \{(R, B, W)\}$
3. สุ่มหยิบลูกบอลออกมา 1 ลูก สังเกตหมายเลขและสีของลูกบอลที่หยิบได้

จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองแต่ละแบบ $\Omega = \{(R,1), (B,2), (B,3), (W,4), (W,5)\}$

วิธีทำ เราหาแซมเปิลสเปซของแต่ละการทดลองได้โดยเขียนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด และรวมไว้ในเซ็ต แซมเปิลสเปซของแต่ละการทดลองสามารถเขียนได้ดังนี้

- การทดลองที่ 1: $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เนื่องจากในการทดลองนี้ผลการทดลองที่เราสนใจคือหมายเลขของลูกบอลที่หยิบได้
- การทดลองที่ 2: $\Omega_2 = \{r, b, w\}$ โดยที่ r คือสีแดง, b คือสีดำ และ w คือสีขาว เนื่องจากในการทดลองนี้ผลการทดลองที่เราสนใจคือสีของลูกบอลที่หยิบได้
- การทดลองที่ 3: $\Omega_3 = \{(1, r), (2, b), (3, b), (4, w), (5, w)\}$ โดยที่ r คือสีแดง, b คือสีดำ และ w คือสีขาว เนื่องจากในการทดลองนี้ผลการทดลองที่เราสนใจคือหมายเลขและสีของลูกบอลที่หยิบได้ ผลการทดลองในแซมเปิลสเปซจึงเป็นคู่ลำดับ ซึ่งประกอบด้วยหมายเลขและสีของลูกบอล

ตัวอย่าง 1.3 ถุงขนมช็อกโกแล็ต m&m มีเม็ดช็อคโกแล็ตบรรจุอยู่ 50 เม็ด แบ่งเป็นสีเขียว 10 เม็ด สีฟ้า 12 เม็ด สีเหลือง 13 เม็ด และสีแดง 15 เม็ด ทำการทดลองโดยสุ่มหยิบเม็ดช็อกโกแล็ตขึ้นมาจากถุงจำนวน 2 เม็ด และสังเกตสีของช็อกโกแล็ตแต่ละเม็ดที่หยิบได้ จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \{&(g,g),(g,b),(g,y),(g,r),\\ &(b,g),(b,b),(b,y),(b,r),\\ &(y,g),(y,b),(y,y),(y,r),\\ &(r,g),(r,b),(r,y),(r,r)\}\end{aligned}$$

โดยที่ g คือสีเขียว, b คือสีฟ้า, y คือสีเหลือง, และ r คือสีแดง

จะสังเกตได้ว่าผลการทดลองในแซมเปิลสเปซเป็นคู่ลำดับ โดยที่สมาชิกตัวแรกในคู่ลำดับเป็นสีของเม็ดช็อคโกแล็ตที่หยิบได้ในครั้งแรก และสมาชิกตัวที่สองในคู่ลำดับเป็นสีของเม็ดช็อคโกแล็ตที่หยิบได้ในครั้งที่สอง

ตัวอย่าง 1.4 ทำการทดลองโดยทอยลูกเต๋าปกติ (6 หน้า) ไปเรื่อยๆ จนกว่าลูกเต๋าจะออกแต้ม 1 เมื่อออกแต้ม 1 แล้วจึงหยุดการทดลอง สังเกตจำนวนครั้งที่ต้องทอยลูกเต๋าจนกว่าการทดลองจะหยุด จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

วิธีทำ ผลการทดลองที่ได้คือจำนวนครั้งที่ต้องทอยลูกเต๋าจนกว่าจะออกแต้ม 1 ดังนั้นแซมเปิลสเปซ

ของการทดลองนี้คือ

$$\Omega \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

จะสังเกตได้ว่าจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซนี้มีเป็นอนันต์

ตัวอย่าง 1.5 สุ่มเลือกเลขจำนวนจริงออกมา 1 ค่า โดยเลือกจากช่วงจำนวน $[0, 1]$ จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

วิธีทำ ตัวอย่างผลการทดลองที่เป็นไปได้ เช่น 0.01, 0.15403892, 0.99998 เป็นต้น ซึ่งเราไม่สามารถแจกแจงระบุเป็นรายตัวได้หมด แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\Omega \quad = \quad \{x : 0 \leq x \leq 1\}$$

จะสังเกตได้ว่าแซมเปิลสเปซนี้เป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous) ซึ่งเราไม่สามารถแจกแจงระบุสมาชิกเป็นรายตัวได้หมด

ตัวอย่าง 1.6 เป้ายิงปืนมีลักษณะเป็นรูปวงกลมรัศมี 1 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัด (0,0) บนระนาบ 2 มิติ ทำการทดลองโดยยิงปืนไปที่เป้าปืนนี้ และสังเกตว่ากระสุนปืนเข้าเป้าที่ตำแหน่งใด จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

วิธีทำ ผลการทดลองก็คือตำแหน่งบนเป้าที่กระสุนตกกระทบ ซึ่งเราระบุได้ด้วยพิกัดในระนาบ 2 มิติ เช่น กระสุนกระทบเป้าที่ตำแหน่ง (0.5, 0.1) หรือกระสุนกระทบเป้าที่ตำแหน่ง (0,0) ซึ่งก็คือตรงใจกลางเป้าพอดี แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\Omega \quad = \quad \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\,; \;\; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1\}$$

กล่าวคือ เป็นพิกัด (x,y) ทั้งหมดที่อยู่บนเป้าวงกลมนี้

<u>ปุจฉา 1.5</u> แซมเปิลสเปซมีกี่แบบ อะไรบ้าง?

วิสัชนา แซมเปิลสเปซมีอยู่ 2 แบบ ดังนี้

1. แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) – เป็นเซ็ตของผลการทดลองประเภทที่สามารถนับ และสามารถแจกแจงเป็นตัวๆได้ ซึ่งแซมเปิลสเปซแบบไม่ต่อเนื่องนี้ อาจมีจำนวนสมาชิกจำกัด (Finite) ดังเช่นในตัวอย่าง 1.1-1.3 หรืออาจมีจำนวนสมาชิกเป็นอนันต์ (Infinite) ดังเช่นในตัวอย่าง 1.4 ก็ได้

2. แบบต่อเนื่อง (Continuous) – เป็นเซ็ตของผลการทดลองประเภทที่ไม่สามารถนับและแจกแจงเป็นตัวๆ ได้ ดังเช่นในตัวอย่าง 1.5 และ 1.6

1.2 เหตุการณ์ (Event)

เหตุการณ์เป็นองค์ประกอบที่สองในการสร้างแบบจำลองความน่าจะเป็น ซึ่งโดยปกติเราจะหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราสนใจ ในส่วนนี้เราจะศึกษาว่าเหตุการณ์คืออะไรและเรียนรู้วิธีการสร้างเหตุการณ์

ปุจฉา 1.6 เหตุการณ์ คืออะไร?

วิสัชนา เหตุการณ์ คือ ซับเซ็ต (Subset) ของแซมเปิลสเปซ

ปุจฉา 1.7 เหตุการณ์ (Event) ต่างกับ ผลการทดลอง (Outcome) อย่างไร?

วิสัชนา เหตุการณ์เป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ ดังนั้นเหตุการณ์จึงเป็น**เซ็ต** แตกต่างกับผลการทดลองซึ่งเป็น**สมาชิก**ในเซ็ตเหตุการณ์ ในแบบจำลองความน่าจะเป็น เราจะกำหนด “ค่าความน่าจะเป็น” ให้แก่เหตุการณ์ต่างๆ เราไม่กำหนดค่าความน่าจะเป็นให้กับผลการทดลอง

ตัวอย่าง 1.7 จากการทดลอง 3 แบบในตัวอย่าง 1.2 จงเขียนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจากการทดลองต่างๆ ดังนี้

- จากการทดลองที่ 1: จงเขียนเหตุการณ์ที่หมายเลขบนลูกบอลที่หยิบได้เป็นเลขคู่
- จากการทดลองที่ 2: จงเขียนเหตุการณ์ที่ลูกบอลที่หยิบได้ไม่เป็นสีแดง
- จากการทดลองที่ 3: จงเขียนเหตุการณ์ที่ลูกบอลที่หยิบได้เป็นสีขาวและมีหมายเลขเป็นเลขคี่

วิธีทำ เหตุการณ์เป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

- การทดลองที่ 1 มีแซมเปิลสเปซคือ $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ดังนั้นเหตุการณ์ที่หมายเลขบนลูกบอลที่หยิบได้เป็นเลขคู่คือ $E_1 = \{2, 4\}$ ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ
- การทดลองที่ 2 มีแซมเปิลสเปซคือ $\Omega_2 = \{r, b, w\}$ ดังนั้นเหตุการณ์ที่ลูกบอลที่หยิบได้ไม่เป็นสีแดงคือ $E_2 = \{b, w\}$ ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ
- การทดลองที่ 3 มีแซมเปิลสเปซคือ $\Omega_3 = \{(1, r), (2, b), (3, b), (4, w), (5, w)\}$ ดังนั้นเหตุการณ์ที่ลูกบอลที่หยิบได้เป็นสีขาวและมีหมายเลขเป็นเลขคี่คือ $E_3 = \{(5, w)\}$ ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่าง 1.8 ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 50 คน ทำการทดลองโดยสุ่มเลือกนักเรียนมา 1 คน แล้วให้นักเรียนแจ้งว่าเกิดวันอะไรและเดือนอะไร จงหา

1. แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้
2. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดวันอังคาร
3. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดเดือนมีนาคม
4. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดวันพุธและมีเดือนเกิดในครึ่งหลังของปี

วิธีทำ ตอบได้ดังนี้

1. แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้ คือ

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\text{(Sun, Jan), (Mon, Jan), (Tue, Jan), (Wed, Jan), (Thu, Jan), (Fri, Jan), (Sat, Jan),}\\ &\text{(Sun, Feb), (Mon, Feb), (Tue, Feb), (Wed, Feb), (Thu, Feb), (Fri, Feb), (Sat, Feb),}\\ &\ldots\\ &\text{(Sun, Dec), (Mon, Dec), (Tue, Dec), (Wed, Dec), (Thu, Dec), (Fri, Dec), (Sat, Dec)}\}\end{aligned}$$

2. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดวันอังคาร คือ

$$\begin{aligned}A = \{&\text{(Tue, Jan), (Tue, Feb), (Tue, Mar), (Tue, Apr), (Tue, May), (Tue, Jun),}\\ &\text{(Tue, Jul), (Tue, Aug), (Tue, Sep), (Tue, Oct), (Tue, Nov), (Tue, Dec)}\}\end{aligned}$$

   ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ

3. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดเดือนมีนาคม คือ

$$B = \{\text{(Sun, Mar), (Mon, Mar), (Tue, Mar), (Wed, Mar), (Thu, Mar), (Fri, Mar), (Sat, Mar)}\}$$

   ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ

4. เหตุการณ์ที่นักเรียนที่สุ่มมาเกิดวันพุธและมีเดือนเกิดในครึ่งหลังของปี คือ

$$C = \{\text{(Wed, Jul), (Wed, Aug), (Wed, Sep), (Wed, Oct), (Wed, Nov), (Wed, Dec)}\}$$

ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่าง 1.9 ทำการทดลองโดยทอยลูกเต๋าปกติ (6 หน้า) 3 ครั้ง และสังเกตผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอยลูกเต๋า 3 ครั้ง จงเขียนเหตุการณ์ที่ผลรวมแต้มมากกว่า 12

วิธีทำ ผลการทดลองคือผลรวมของแต้ม แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ

$$\Omega = \{3, 4, 5, \ldots, 18\}$$

เหตุการณ์ที่ผลรวมแต้มมากกว่า 12 คือ

$$A = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

ซึ่งเป็นซับเซ็ตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่าง 1.10 ภาชนะเปล่าใบหนึ่งหนัก 1 กิโลกรัม แต่หากภาชนะนี้บรรจุน้ำเต็มพอดีจะมีน้ำหนัก 5 กิโลกรัม ด.ช. A และ ด.ญ. B เล่นเกมทายน้ำหนัก โดย A จะสุ่มตวงน้ำมาใส่ในภาชนะเป็นปริมาณเท่าใดก็ได้ แล้วให้ B เป็นผู้ทายน้ำหนักภาชนะที่ A ตวงน้ำมาใส่ จงเขียนเหตุการณ์ที่ภาชนะที่ A บรรจุน้ำไว้จะหนักตั้งแต่ 4.5 กิโลกรัมขึ้นไป

วิธีทำ ผลการทดลองคือ น้ำหนักของภาชนะที่ A บรรจุน้ำไว้ ซึ่งในกรณีนี้เป็นไปได้ตั้งแต่ 1 กก. ถึง 5 กก. แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ

$$\Omega = \{x : 1 \leq x \leq 5\}$$

เหตุการณ์ที่ภาชนะที่ A บรรจุน้ำไว้จะหนักตั้งแต่ 4.5 กิโลกรัมขึ้นไป คือ

$$E = \{x : 4.5 \leq x \leq 5\}$$

ปุจฉา 1.8 เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน (Certain Event) คืออะไร?

วิสัชนา เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอนก็คือแซมเปิลสเปซนั่นเอง ตัวอย่างเช่น ทดลองโยนลูกเต๋าปกติ 1 ครั้ง แล้วสังเกตแต้มที่ออก ในกรณีนี้แซมเปิลสเปซคือ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ตัวอย่างเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน เช่น เหตุการณ์ที่แต้มที่ออกจะมากกว่าศูนย์ ซึ่งก็คือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ หรือแซมเปิลสเปซนั่นเอง อีกตัวอย่างเช่น เหตุการณ์ที่แต้มที่ออกจะน้อยกว่า 7 ซึ่งก็คือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ หรือแซมเปิลสเปซนั่นเอง

ปุจฉา 1.9 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นแน่นอน (Null Event) คืออะไร?

วิสัชนา เหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นแน่นอน คือ เซ็ตว่าง ตัวอย่างเช่น ทดลองโยนลูกเต๋าปกติ 1 ครั้ง แล้วสังเกตแต้มที่ออก ในกรณีนี้แซมเปิลสเปซคือ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ตัวอย่างเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นแน่นอนเช่น เหตุการณ์ที่แต้มที่ออกจะมากกว่า 10 ซึ่งก็คือ $\{\}$ หรือเซ็ตว่างนั่นเอง

ปุจฉา 1.10 เหตุการณ์พื้นฐาน (Elementary Event) คืออะไร?

วิสัชนา เหตุการณ์พื้นฐาน คือเหตุการณ์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ทดลองโยนลูกเต๋าปกติ 1 ครั้ง แล้วสังเกตแต้มที่ออก ในกรณีนี้แซมเปิลสเปซคือ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เหตุการณ์พื้นฐานของการทดลองนี้จะมี 6 เหตุการณ์ได้แก่ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ จะสังเกตได้ว่าเหตุการณ์พื้นฐานแต่ละเหตุการณ์จะมีสมาชิกเพียง 1 ตัวเท่านั้น

1.3 ความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็นเป็นองค์ประกอบที่สามในการสร้างแบบจำลองความน่าจะเป็น ซึ่งเราจะกำหนดค่าความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์ต่างๆที่เราสนใจ ในส่วนนี้เราจะศึกษาว่าค่าความน่าจะเป็นคืออะไร และเรียนรู้วิธีการกำหนดค่าความน่าจะเป็นให้แก่เหตุการณ์ต่างๆ

ปุจฉา 1.11 ความน่าจะเป็น คืออะไร?

วิสัชนา ความน่าจะเป็น คือ ค่าตัวเลขที่เรากำหนดขึ้นเพื่อบ่งบอก "ความเชื่อ" ของเราต่อความเป็นไปได้ของเหตุการณ์ต่างๆ เราใช้ค่านี้มาเพื่อเปรียบเทียบว่าเหตุการณ์ใดมีโอกาสเกิดขึ้นมากกว่ากัน

ปุจฉา 1.12 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ ต้องมีค่าเท่าไหร่ กำหนดอย่างไร?

วิสัชนา อันที่จริงแล้วเราสามารถใช้เลขจำนวนจริงช่วงใดก็ได้มากำหนดเป็นค่าความน่าจะเป็น แต่โดยหลักปฏิบัติที่ยึดกันเป็นสากลเราจะใช้ค่าในช่วง [0,1] มากำหนดเป็นค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ จะมีค่าอยู่ในช่วง [0,1] ซึ่งหลักวิธีการกำหนดนี้จะกล่าวถึงอีกครั้งเมื่อเรากล่าวถึงเรื่องสัจพจน์ของความน่าจะเป็น (Axioms of Probability) ในส่วนต่อไป

1.3.1 ผลการทดลองที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน (กรณีแซมเปิลสเปซแบบไม่ต่อเนื่อง)

ในส่วนนี้เราจะลองดูวิธีการกำหนดค่าความน่าจะเป็นอย่างง่ายที่สุด ซึ่งจะใช้ได้ในกรณีที่ผลการทดลองแต่ละแบบของการทดลองสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน (equally likely outcome) เท่านั้น

ปุจฉา 1.13 การทดลองที่ผลการทดลองแต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน (equally likely outcome) คืออะไร?

วิสัชนา คือการที่ผลการทดลองแบบใดแบบหนึ่งไม่ได้มีโอกาสเกิดขึ้นมากกว่าแบบอื่นๆ ยกตัวอย่าง เช่น ทำการทดลองโดยโยนลูกเต๋าปกติ 1 ครั้ง แล้วสังเกตแต้มที่ออก ในการทดลองนี้มีผลการทดลองที่เป็นไปได้คือ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ซึ่งผลการทดลองที่ได้แต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน การที่ลูกเต๋าจะออกแต้ม 1 หรือ แต้ม 6 หรือแต้มอื่นๆ ก็เป็นไปได้อย่างเท่าๆกัน การทดลองลักษณะนี้เป็นแบบที่เรียกว่า equally likely outcome โปรดสังเกตว่านี้เกิดขึ้นในกรณีที่เป็นลูกเต๋าปกติ แต่ถ้าหากมีการดัดแปลงลูกเต๋าให้ออกแต้มใดแต้มหนึ่งเป็นพิเศษ กรณีหลังนี้ก็จะไม่ถือว่าผลการทดลองแต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน

ตัวอย่าง 1.11 ทำการทดลองโดยโยนเหรียญปกติ 3 ครั้ง แล้วสังเกตหน้าเหรียญที่ออกในแต่ละครั้ง จงหาแซมเปิลสเปซ และบอกด้วยว่าการทดลองนี้เป็นแบบ equally likely outcome หรือไม่

วิธีทำ แซมเปิลสเปซคือ $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$ โดยที่ H คือ หัว และ T คือ ก้อย

การทดลองนี้มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ 8 แบบ แต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน การทดลองนี้เป็นแบบ equally likely outcome

ตัวอย่าง 1.12 ทำการทดลองโดยโยนเหรียญปกติ 3 ครั้ง สังเกตจำนวนครั้งที่เหรียญออกก้อย จงหาแซมเปิลสเปซ และบอกด้วยว่าการทดลองนี้เป็นแบบ equally likely outcome หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากเราสนใจจำนวนครั้งที่เหรียญออกก้อย ดังนั้นแซมเปิลสเปซคือ $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

การทดลองนี้มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ 4 แบบ แต่ผลการทดลองแต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นไม่เท่ากัน เช่น การที่เหรียญจะออกก้อย 3 ครั้ง (TTT) นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อยกว่าการที่เหรียญจะออกก้อย 1 ครั้ง (THH, HTH, HHT) การทดลองนี้จึงไม่เป็นแบบ equally likely outcome

ปุจฉา 1.14 ในกรณีที่แซมเปิลสเปซเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง และผลการทดลองเป็นแบบ equally likely outcome จะมีวิธีการกำหนดความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์ต่างๆ อย่างไร

วิสัชนา ถ้าแซมเปิลสเปซเป็นแบบไม่ต่อเนื่องและแซมเปิลสเปซนั้นมีสมาชิก n ตัว โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าศูนย์ ให้กำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์พื้นฐานเท่ากับ $1/n$ ส่วนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อื่นให้คำนวณจากการผสมกันของเหตุการณ์พื้นฐาน

ตัวอย่าง 1.13 ทำการทดลองโดยโยนลูกเต๋าปกติ 1 ครั้ง แล้วสังเกตแต้มที่ออก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่แต้มที่ออกจะน้อยกว่า 3

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
เนื่องจากผลการทดลองแต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน เราจึงสามารถกำหนดค่าความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์พื้นฐานดังนี้ P({1}) = P({2}) = P({3}) = P({4}) = P({5}) = P({6}) = 1/6
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่แต้มที่ออกจะน้อยกว่า 3 สามารถคำนวณได้จากการผสมกันของเหตุการณ์พื้นฐานดังนี้

$$P(\{1, 2\}) \quad = \quad P(\{1\}) + P(\{2\}) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

ตัวอย่าง 1.14 ในวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนอนุบาลหมีน้อย นักเรียนแต่และคนจะได้รับเกรดโดยการจับฉลาก นักเรียนแต่ละคนจะจับฉลาก 1 ใบออกมาจากทั้งหมด 5 ใบคือ A,B,C,D,F จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะได้เกรดตั้งแต่ C ขึ้นไป

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการทดลองนี้คือ $\Omega = \{A, B, C, D, F\}$
เนื่องจากผลการทดลองแต่ละแบบมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน เราจึงสามารถกำหนดค่าความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์พื้นฐานดังนี้ P({A}) = P({B}) = P({C}) = P({D}) = P({F}) = 1/5
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้เกรดตั้งแต่ C ขึ้นไป สามารถคำนวณได้จากการผสมกันของเหตุการณ์พื้นฐานดังนี้

$$P(\{A, B, C\}) \quad = \quad P(\{A\}) + P(\{B\}) + P(\{C\}) = 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5$$

1.3.2 ผลการทดลองที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆกัน (กรณีแซมเปิลสเปซแบบต่อเนื่อง)

ปุจฉา 1.15 ในกรณีที่แซมเปิลสเปซเป็นแบบต่อเนื่อง และผลการทดลองเป็นแบบ equally likely outcome จะมีวิธีการกำหนดความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์ต่างๆ อย่างไร

วิสัชนา กรณีที่แซมเปิลสเปซเป็นแบบต่อเนื่องและผลการทดลองเป็นแบบ equally likely outcome เราจะกำหนดความน่าจะเป็นโดยดูว่าขนาดของเซ็ตเหตุการณ์คิดเป็นสัดส่วนเท่าใดของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่าง 1.15 สุ่มเลือกจำนวนจริง 1 ค่าจากช่วงจำนวน [10,12] จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เลขที่สุ่มมาจะมีค่ามากกว่า 11.58

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้คือ $\Omega = \{x : 10 \leq x \leq 12\}$
เหตุการณ์ที่เลขที่สุ่มมาจะมีค่ามากกว่า 11.58 คือ $A = \{x : 11.58 < x \leq 12\}$ ในการทดลองนี้โอกาสที่จะสุ่มได้ค่าใดๆเกิดขึ้นได้เท่าๆกัน ดังนั้นเราจะกำหนดความน่าจะเป็นโดยดูว่าขนาดของเซ็ตเหตุการณ์คิด

เป็นสัดส่วนเท่าใดของแซมเปิลสเปซ ในตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าแซมเปิลสเปซเป็นแบบ 1 มิติ ซึ่งก็คือช่วงจำนวนที่มีขนาดความยาว (12-10) = 2 หน่วย และเหตุการณ์ A ก็เป็นช่วงจำนวนที่มีขนาดความยาว (12-11.58) = 0.42 หน่วย

ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \frac{0.42}{2} = 0.21$

ตัวอย่าง 1.16 เป้ายิงปืนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 1 หน่วย กำหนดให้มุมซ้ายล่างของเป้าอยู่ที่พิกัด (0,0) บนระนาบ 2 มิติ บนเป้านั้นมีวงกลมรัศมี 0.5 หน่วยบรรจุอยู่ โดยวงกลมมีศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของเป้า ยิงปืนแล้วสังเกตว่าลูกกระสุนตกกระทบเป้าที่ตำแหน่งใด จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกปืนจะตกกระทบเป้าภายในบริเวณรูปวงกลม

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้คือ $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$
เหตุการณ์ที่ลูกปืนจะตกกระทบเป้าภายในบริเวณรูปวงกลมคือ

$$A \quad = \quad \{(x, y) : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.5^2\}$$

ในการทดลองนี้โอกาสที่ลูกกระสุนจะตกกระทบเป้าที่จุดใดๆมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน เราหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้จากการเทียบสัดส่วนขนาดของเหตุการณ์ต่อขนาดของแซมเปิลสเปซ

ขนาดของแซมเปิลสเปซ คือ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = 1 หน่วย

ขนาดของเหตุการณ์ที่ลูกกระสุนตกกระทบภายในรูปวงกลม คือ พื้นที่ของวงกลมซึ่งมีรัศมี 0.5 หน่วย ซึ่งเท่ากับ $\pi \times 0.5^2$

ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \frac{0.25\pi}{1} = \frac{\pi}{4}$

1.4 สัจพจน์ของความน่าจะเป็น (Axioms of Probability)

ในส่วนนี้เราจะศึกษาหลักเกณฑ์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองความน่าจะเป็น อย่างเป็นระเบียบและมีแบบแผนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเราจะใช้หลักเกณฑ์และแบบแผนเหล่านี้ในการกำหนดและสร้างทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ปุจฉา 1.16 สัจพจน์ (Axioms) คืออะไร?

วิสัชนา สัจพจน์ คือ สิ่งที่ยอมรับกันว่าเป็นจริงโดยที่ไม่ต้องพิสูจน์

ปุจฉา 1.17 สัจพจน์ของความน่าจะเป็น (Axioms of Probability) คืออะไร?

วิสัชนา สัจพจน์ของความน่าจะเป็น คือ หลักเกณฑ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองความน่าจะเป็น ที่เรายอมรับกันว่าเป็นจริงโดยที่ไม่ต้องพิสูจน์ หากเราเชื่อหรือยอมรับสัจพจน์เหล่านี้ เราก็จะสามารถใช้มันในการกำหนดทฤษฎีอื่นๆที่เกี่ยวกับความน่าจะเป็นได้

ปุจฉา 1.18 สัจพจน์ของความน่าจะเป็นมีอะไรบ้าง?

วิสัชนา สัจพจน์ของความน่าจะเป็นมีอยู่ด้วยกัน 3 ข้อหลักๆ ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ หรือเขียนได้ดังนี้

$$P(A) \geq 0$$

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน (ซึ่งก็คือแซมเปิลสเปซ) มีค่าเท่ากับหนึ่ง หรือเขียนได้ดังนี้

$$P(\Omega) = 1$$

3. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (Disjoint Events) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ A **หรือ** B เกิดขึ้นเท่ากับผลรวมของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ ; \ A \cap B = \emptyset$$

ปุจฉา 1.19 เราใช้สัจพจน์ของความน่าจะเป็นไปทำอะไร?

วิสัชนา เราใช้สัจพจน์เหล่านี้ในการค้นหาความจริงอื่นหรือทฤษฎีอื่น

ปุจฉา 1.20 อนุนัย (Corollary) สำคัญๆที่เราพัฒนาต่อมาจากสัจพจน์ของความน่าจะเป็นมีอะไรบ้าง?

วิสัชนา อนุนัยสำคัญๆที่เราพัฒนาต่อมาจากสัจพจน์ของความน่าจะเป็นมีดังนี้

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ตรงกันข้ามกับ A เท่ากับหนึ่งลบด้วยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A กล่าวคือ

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ซึ่งเราสามารถใช้สัจพจน์ที่มีในการพิสูจน์อนุนัยนี้ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \quad \text{; สัจพจน์ที่ 2} \\ P(A \cup A') &= 1 \quad \text{; เนื่องจาก } A \cup A' = \Omega \\ P(A) + P(A') &= 1 \quad \text{; สัจพจน์ที่ 3} \\ \therefore P(A') &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง กล่าวคือ

$$P(A) \leq 1$$

ซึ่งเราสามารถใช้สัจพจน์ที่มีในการพิสูจน์อนุนัยนี้

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') \quad \text{; จากอนุนัยที่ได้พิสูจน์แล้วข้างต้น} \\ P(A') &\geq 0 \quad \text{; สัจพจน์ที่ 1} \\ \therefore P(A) &\leq 1 \end{aligned}$$

3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นแน่นอน (ซึ่งก็คือเซ็ตว่าง) มีค่าเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ

$$P(\emptyset) = 0$$

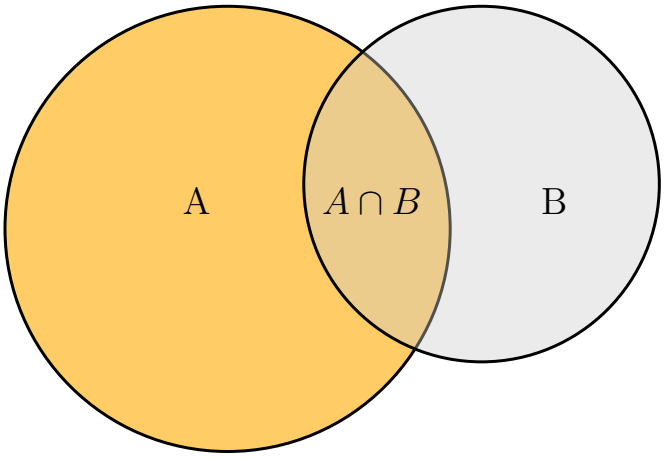
ซึ่งเราสามารถใช้สัจพจน์ที่มีในการพิสูจน์อนุนัยนี้

$$\begin{aligned} P(\Omega \cup \emptyset) &= P(\Omega) + P(\emptyset) \quad \text{; สัจพจน์ที่ 3} \\ P(\Omega \cup \emptyset) &= P(\Omega) \quad \text{; เนื่องจาก } \Omega \cup \emptyset = \Omega \\ P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) \\ \therefore P(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A \cup B$ สามารถหาได้ดังนี้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ซึ่งเราสามารถพิสูจน์อนุนัยนี้ได้อย่างง่ายๆโดยใช้ Venn's Diagram ดังแสดงในรูป 1.1 จะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A \cup B$ เท่ากับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A บวกกับ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B และหักออกด้วยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A \cap B$



รูป 1.1: Venn's Diagram แสดงเหตุการณ์ $A \cup B$

บรรณานุกรม

[1] S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th ed. Pearson, 2012.

[2] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed. Athena Scientific, 2008.

[3] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed. Pearson, 2008.

[4] W. Navidi, *Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2010.