Lecture Notes

ความน่าจะเป็นและสถิติ

Probability and Statistics

ศาสตราจารย์ ดร. สุขสันต์ พาณิชพาพิบูล

คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทที่ 6

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

Continuous Random Variables

ในบทนี้เราจะศึกษาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variables) ซึ่งมีหัวข้อเรื่องที่จะกล่าวถึงดังนี้

- ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function, PDF)
- ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function, CDF)
- การกระจายแบบปกติ (Normal Distribution)

6.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function, PDF)

ปุจฉา 6.1 ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variables) คืออะไร?

วิสัชนา ตัวแปรสุ่มบางชนิดมีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในเซ็ตซึ่งนับไม่ได้ (Uncountable Set) ยกตัวอย่างเช่น อายุการใช้งานของเครื่องคอมพิวเตอร์ หรือเวลาที่รถประจำทางจะเข้ามาจอดที่ป้าย

เราเรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องถ้าหากมีฟังก์ชัน $f_X(x)$ ที่ไม่เป็นลบ (Non-negative Function) ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น หรือ Probability Density Function (PDF) ของ X

เนื้อหาในบทนี้อ้างอิงจาก [1–3]

มาบรรยาย X โดยที่ $f_X(x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

ปุจฉา 6.2 เราใช้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น หรือ Probability Density Function (PDF) ไปทำอะไร?

วิสัชนา ในทำนองเดียวกันกับที่เราใช้ PMF ในการบรรยายคุณลักษณะของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง เราใช้ PDF ในการบรรยายคุณลักษณะของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง การที่เราทราบ PDF ของตัวแปรสุ่ม ย่อมหมายความว่าเราทราบข้อมูลทางสถิติทุกอย่างเกี่ยวกับตัวแปรสุ่มนั้น

ปุจฉา 6.3 คุณสมบัติที่ PDF ต้องมีคืออะไร?

วิสัชนา PDF ที่ถูกต้อง ต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f_X(x) \geq 0$, $\forall x$ กล่าวคือ ค่า $f_X(x)$ ต้องไม่เป็นลบ
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ กล่าวคือ เมื่อบวกรวมค่าความน่าจะเป็นในทุกกรณีต้องได้เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 6.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Uniform ในช่วง $[a, b]$ แล้ว X จะมี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่านี่เป็นฟังก์ชัน PDF ที่มีคุณสมบัติถูกต้อง

วิธีทำ

1. เราเห็นได้ว่า $f_X(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ ค่า x ดังนั้นคุณสมบัติข้อนี้ผ่าน
2. เราต้องพิสูจน์ว่าผลรวมความน่าจะเป็นในทุกกรณีรวมกันได้ 1 ซึ่งพิสูจน์ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b 1\,dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times (b-a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นคุณสมบัติข้อนี้ผ่าน สรุปว่า $f_X(x)$ เป็น PDF ที่มีคุณสมบัติถูกต้อง

ตัวอย่าง 6.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Exponential ที่มีพารามิเตอร์ λ โดยที่ $\lambda > 0$ แล้ว X จะมี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่านี่เป็นฟังก์ชัน PDF ที่มีคุณสมบัติถูกต้อง

วิธีทำ

1. เราเห็นได้ว่า $f_X(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ ค่า x ดังนั้นคุณสมบัติข้อนี้ผ่าน
2. เราต้องพิสูจน์ว่าผลรวมความน่าจะเป็นในทุกกรณีรวมกันได้ 1 ซึ่งพิสูจน์ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} \\ &= 1 - 0 \;=\; 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นคุณสมบัติข้อนี้ผ่าน สรุปว่า $f_X(x)$ เป็น PDF ที่มีคุณสมบัติถูกต้อง

ปุจฉา 6.4 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี PDF $f_X(x)$ เราจะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ X มีค่าอยู่ในช่วง $[a, b]$ ได้อย่างไร?

วิสัชนา หาได้ดังนี้

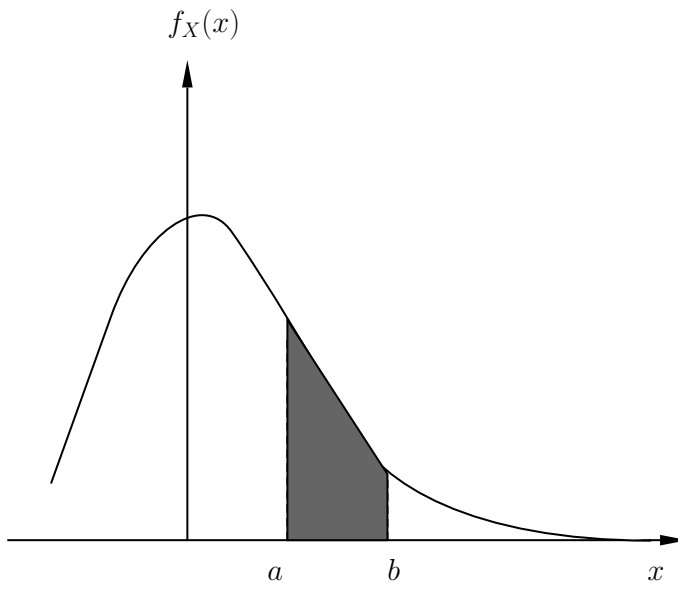
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

ซึ่งสามารถตีความได้ว่าเป็นพื้นที่ใต้กราฟของ PDF ในช่วง $X \in [a, b]$ ดังแสดงในรูป 6.1

ปุจฉา 6.5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง ความน่าจะเป็น $P(X = a)$ เป็นเท่าไร?

วิสัชนา

$$\begin{aligned} P(X = a) &= \int_a^a f_X(x)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$



รูป 6.1: พื้นที่ใต้กราฟในช่วง $X \in [a, b]$ คือ $P(a \leq X \leq b)$

กล่าวคือ ถ้าหาก X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง ความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งเป็น 0 ทั้งนี้เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งจำนวนค่าที่เป็นไปได้ของ X มีเป็นอนันต์ ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งอย่างเจาะจงจึงมีน้อยมากจนเป็น 0 นั่นเอง

ปุจฉา 6.6 การที่เราทราบว่า $P(X = a) = 0$ ส่งผลอย่างไร?

วิสัชนา ส่งผลให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆเหล่านี้เท่ากัน

$$P(a < X < b) \;=\; P(a \leq X < b) \;=\; P(a < X \leq b) \;=\; P(a \leq X \leq b)$$

เนื่องจาก $P(X = a) = 0$ และ $P(X = b) = 0$

ตัวอย่าง 6.3 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Exponential โดยมีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ ดังนี้

- $P(1 \leq X \leq 3)$
- $P(X > 5)$

วิธีทำ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Exponential โดยมีค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ ดังนั้น X มี

PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ความน่าจะเป็น $P(1 \leq X \leq 3)$ หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= \int_1^3 2e^{-2x}\,dx \\ &= -e^{-2x}\Big|_1^3 \\ &= e^{-2} - e^{-6} \\ &= 0.1329 \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็น $P(X > 5)$ หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= \int_5^\infty 2e^{-2x}\,dx \\ &= -e^{-2x}\Big|_5^\infty \\ &= e^{-10} - 0 \\ &= 4.54 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

ปุจฉา 6.7 เราหาค่าคาดหมาย (Expected Value) ของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง X อย่างไร?

วิสัชนา หาจาก PDF ของ X ดังนี้

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 6.4 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1, 5]$ จงหา $E[X]$

วิธีทำ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1, 5]$ ดังนั้น X มี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} & , x \in [1, 5] \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

เราหา $E[X]$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \\ &= \int_1^5 x \cdot \frac{1}{4}\,dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

ปุจฉา 6.8 ถ้า $Y = g(X)$ เราหาค่าคาดหมาย $E[Y]$ จาก PDF ของ X ได้อย่างไร?

วิสัชนา หาจาก PDF ของ X ดังนี้

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 6.5 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1, 5]$ จงหา $E[Y]$ เมื่อ $Y = 2X + 3$

วิธีทำ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1, 5]$ (เหมือนในตัวอย่าง 6.4) ดังนั้น X มี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} & , x \in [1, 5] \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

เนื่องจาก $Y = 2X + 3$ เราหา $E[Y]$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx \\ &= \int_1^5 (2x+3) \cdot \frac{1}{4}\,dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 3x)\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\left((5^2 + 3 \times 5) - (1^2 + 3 \times 1)\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

หรือเราอาจหาอีกวิธีตามนี้ก็ได้

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[2X+3] \\ &= 2E[X]+3 \end{aligned}$$

แต่เราทราบจากตัวอย่าง 6.4 ว่า $E[X]=3$ ดังนั้นจะได้ $E[Y]=(2\times 3)+3=9$

ปุจฉา 6.9 เราหาค่าความแปรปรวน (Variance) จาก PDF ของ X ได้อย่างไร?

วิสัชนา หาจาก PDF ของ X ดังนี้

$$\begin{aligned} VAR[X] &= \sigma_X^2 = E[(X-E[X])^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(X-E[X])^2 f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

หรือหาอีกวิธีคือ

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2]-(E[X])^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right)^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.6 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1,5]$ จงหา $VAR[X]$

วิธีทำ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบ Uniform ในช่วง $[1,5]$ (เหมือนในตัวอย่าง 6.4) ดังนั้น X มี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-1} & , x\in[1,5] \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

เราหา $VAR[X]$ ได้โดยหา $E[X^2]-(E[X])^2$

เราทราบจากตัวอย่าง 6.4 แล้วว่า $E[X] = 3$ ดังนั้นเหลือส่วนที่ต้องหาคือ $E[X^2]$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx \\ &= \int_1^5 x^2 \cdot \frac{1}{4}\,dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3} - \frac{1}{3}\right) \quad = \quad \frac{124}{12} \end{aligned}$$

สรุปจะได้ $VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{124}{12} - 3^2 = \frac{4}{3}$

6.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function, CDF)

ปุจฉา 6.10 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม หรือ Cumulative Distribution Function (CDF) คืออะไร?

วิสัชนา ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม หรือ Cumulative Distribution Function (CDF) ของตัวแปรสุ่ม X เป็นฟังก์ชันที่ใช้บรรยายความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ประเภท $P(X \leq x)$ ซึ่งเราเขียน CDF ดังนี้

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

CDF นั้นสามารถใช้บรรยายตัวแปรสุ่มทั้งชนิดต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง

- กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง เราเขียน CDF ของ X ได้ดังนี้

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

- กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง เราเขียน CDF ของ X ได้ดังนี้

$$F_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} p_X(k)$$

ปุจฉา 6.11 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี PDF เป็น $f_X(x)$ และมี CDF เป็น $F_X(x)$ PDF และ CDF ของ X มีความสัมพันธ์กันอย่างไร?

วิสัชนา เนื่องจาก $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ ดังนั้นเราเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

กล่าวคือ $f_X(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ $F_X(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 6.7 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Exponential ที่มีพารามิเตอร์ λ จงหา $F_X(x)$

วิธีทำ โจทย์กำหนด X มี PDF ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

ในช่วง $x \geq 0$ หา $F_X(x)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt \\ &= -e^{-\lambda t}\Big|_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

ในช่วง $x < 0, f_X(x) = 0$ ส่งผลให้ $F_X(x) = 0$
นำข้อมูลมาเขียนเป็นฟังก์ชันที่ครบถ้วนดังนี้

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

<u>ปุจฉา 6.12</u> คุณสมบัติที่ฟังก์ชัน CDF จะต้องมีได้แก่อะไรบ้าง?

วิสัชนา ฟังก์ชัน CDF หรือ $F_X(x)$ จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ลด (Monotonically Non-decreasing) ซึ่งหมายความว่า ถ้า $x \leq y$ แล้ว $F_X(x) \leq F_X(y)$
2. $F_X(x)$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ x เข้าใกล้ $-\infty$

3. $F_X(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ ∞

4. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง $F_X(x)$ จะเป็นฟังก์ชันแบบ Piecewise Constant กล่าวคือ จะมีการกระโดดของค่า $F_X(x)$ นั่นคือเราจะเห็นว่าฟังก์ชัน $F_X(x)$ มีลักษณะเหมือนขั้นบันได

5. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง $F_X(x)$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x (Continuous Function of x)

6. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง $F_X(x)$ กับ $p_X(x)$ สัมพันธ์กันดังนี้

$$F_X(x) = \sum_{i=-\infty}^{x} p_X(i)$$

$$p_X(x) = P(X \leq x) - P(X \leq x-1) = F_X(x) - F_X(x-1)$$

7. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง $F_X(x)$ กับ $f_X(x)$ สัมพันธ์กันดังนี้

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) \quad ; \text{ เฉพาะ } X \text{ ที่มี PDF แบบต่อเนื่อง}$$

6.3 ตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติ (Normal Random Variable)

ปุจฉา 6.13 ตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติ มี PDF อย่างไร?

วิสัชนา ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการกระจายแบบปกติ จะมี PDF ในรูปแบบนี้

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \;\; ; \;\; -\infty < x < \infty$$

โดยที่ μ คือค่าคาดหมายของ X และ σ^2 คือค่าความแปรปรวนของ X
เราอาจเรียกการกระจายแบบปกติ (Normal Distribution) ว่า การกระจายแบบเกาส์ (Gaussian Distribution) ก็ได้

ปุจฉา 6.14 ถ้า X มีการกระจายแบบปกติซึ่งมีค่าคาดหมาย $E[X] = \mu$ และมีค่าความแปรปรวน σ_X^2 แล้ว $Y = aX + b$ มีการกระจายอย่างไร?

วิสัชนา เนื่องจาก X มีการกระจายแบบปกติ และ Y เป็นการแปลงเชิงเส้น (Linear Transformation) ของ X จึงส่งผลให้ Y ยังคงมีการกระจายแบบปกติ โดยที่ $E[Y] = a\mu + b$ และ $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$

หมายเหตุ: ถ้า X ไม่ได้มีการกระจายแบบปกติ Y ซึ่งเป็น Linear Transformation ของ X อาจมีการกระจายที่เปลี่ยนแปลงรูปแบบไปโดยที่ไม่เหมือนรูปแบบการกระจายของ X

ปุจฉา 6.15 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการกระจายแบบ Standard Normal หมายความว่าอย่างไร?

วิสัชนา หมายความว่า X มีการกระจายแบบปกติโดยที่มีค่าคาดหมาย $\mu = 0$ และมีค่าความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$ เมื่อเขียน PDF ของ X จะได้ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \;\; ; \;\; -\infty < x < \infty$$

ปุจฉา 6.16 หาก X มีการกระจายแบบปกติโดยมีค่าคาดหมาย $E[X] = \mu$ และมีค่าความแปรปรวน σ^2 แล้วจะแปลง X ให้อยู่ในรูปของ Standard Normal ได้อย่างไร

วิสัชนา ทำได้โดยกำหนดตัวแปรใหม่ Z โดยที่ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
เนื่องจาก Z เป็น Linear Transformation ของ X ดังนั้น Z ยังคงมีการกระจายแบบปกติ
โดยมี $E[Z] = \frac{E[X]-\mu}{\sigma} = 0$
และ $VAR[Z] = \frac{VAR[X]}{\sigma^2} = 1$

ปุจฉา 6.17 ถ้า Z มีการกระจายแบบ Standard Normal เราหาความน่าจะเป็น $P(Z \leq z)$ อย่างไร?

วิสัชนา หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \\ &\triangleq \Phi(z) \end{aligned}$$

ซึ่งในทางปฏิบัติเราจะเปิดหาค่า $\Phi(z)$ จากตาราง ดังตัวอย่างที่แสดงในรูป A.1 ในภาคผนวก A

ตัวอย่าง 6.8 ถ้า Z มีการกระจายแบบ Standard Normal จงหา

- $P(Z \leq 1.22)$
- $P(-0.5 < Z \leq 0.5)$
- $P(Z > 2.54)$

วิธีทำ หาได้ดังนี้

1. $P(Z \leq 1.22) = \Phi(1.22)$ เมื่อเปิดตารางในรูป A.1 พบว่า $\Phi(1.22) = 0.8888$
ดังนั้น $P(Z \leq 1.22) = 0.8888$

2. $P(-0.5 < Z \leq 0.5) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5)$
เมื่อเปิดตารางในรูป A.1 พบว่า $\Phi(0.5) = 0.6915$
และเนื่องจากความสมมาตรของ PDF ของ Standard Normal เราหา $\Phi(-0.5)$ ได้จาก
$\Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$
ดังนั้นสรุปได้ว่า $P(-0.5 < Z \leq 0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

3. $P(Z > 2.54) = 1 - P(Z \leq 2.54) = 1 - \Phi(2.54)$ เมื่อเปิดตารางในรูป A.1 พบว่า $\Phi(2.54) = 0.9945$
ดังนั้นสรุปได้ว่า $P(Z > 2.54) = 1 - 0.9945 = 0.0055$

ปุจฉา 6.18 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย μ และค่าความแปรปรวน σ^2 เราจะหาความน่าจะเป็น $P(X \leq x)$ อย่างไร ในทางปฏิบัติ?

วิสัชนา หาโดยใช้กระบวนการที่มี 2 ขั้นตอนดังนี้

1. แปลง X ให้อยู่ในรูป Standard Normal โดยสร้างตัวแปรใหม่ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

2. อ่านค่าจากตารางค่า Standard Normal โดย $P(X \leq x)$ หาดังนี้

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.9 กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย $\mu = 2$ และมีค่าความแปรปรวน $\sigma^2 = 4$ จงหา $P(X \leq 0)$

วิธีทำ

$$P(X \leq 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right) = \Phi(-1)$$

เนื่องจากความสมมาตรของ PDF ของ Standard Normal จะได้ $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$ เมื่อเปิดดูรูป A.1 พบว่า $\Phi(1) = 0.8413$
ดังนั้นสรุปได้ว่า $P(X \leq 0) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

บรรณานุกรม

[1] S. Ross, *A First Course in Probability*, 9th ed. Pearson, 2012.

[2] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 2nd ed. Athena Scientific, 2008.

[3] A. Leon-Garcia, *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*, 3rd ed. Pearson, 2008.

[4] W. Navidi, *Statistics for Engineers and Scientists*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2010.