

# 多波束测线布设优化

## 摘要

多波束测深系统通过同时发射多个声波束并接收回波，克服单波束测深局限，实现多点测量、广覆盖范围的水深数据采集，对水深测量以及地形分析具有重要意义。本文聚焦建立多波束测深模型，计算相应指标并对测线设计问题进行优化求解。

针对问题一，第一小问要求建立覆盖宽度和相邻条带之间的重叠率模型。根据几何关系并结合相应自变量的关系，建立覆盖宽度模型。由于海底坡面平坦且测线间平行，进而得出相邻条带间重叠率模型。第二小问要求结合所建模型计算相应指标值。表中测线间隔均匀，则船沿测线方向对应位置处海水深度成线性变化，结合几何关系可得海水深度从 **90.9487m** 开始递减到 **49.0513m**，进而得出相应测线的覆盖宽度，从 **315.8133m** 逐渐减小到 **170.3272m**。且从第二条测线开始，随着向前移动重叠率从 **32.8019%** 逐渐减小至负数。其他具体数据见正文或 **result1.xlsx** 文件。

针对问题二，第一小问要求建立沿不同测线方向的多波束测深覆盖宽度模型。通过尝试理解并分析其中可能存在的立体几何关系，总结出与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线与水平面的夹角和海底坡面坡度的关系，最后建立出沿不同测线方向的多波束测深覆盖宽度模型。第二小问利用第一小问所建模型，将表格中均匀测线间隔和测线方向夹角依次代入模型求解相应覆盖宽度，得出覆盖宽度最大为 **770.3323m**，最小为 **63.0514m**。且由于海底坡面平坦情况下，覆盖宽度在给定测量点时呈对称性变化，且当测线方向夹角为  $90^\circ$  和  $270^\circ$  时，所以覆盖宽度始终保持不变，为 **415.6919m**。其他具体数据见正文或 **result2.xlsx** 文件。

针对问题三，基于前两问所建模型，我们证明了在  $\beta$  等于  $90^\circ$  或  $180^\circ$  时（即测线方向与等深线平行时）获得最大覆盖宽度  $W$ 。通过查找参考文献，我们也找到支撑这一观点的文献证据。因此，我们提出并证明了当位置  $\eta = 10\%$  且  $Max(W)$  时，**贪心法则**能够获得最短的测线总长度。接下来，我们将求解最短测线总长度的优化问题分解为三个子问题：何时**终止**、如何**分布**以及**起点**选择。我们利用代码进行**迭代**模拟，解得测线数量和最短测线总长度分别为 **7 条**、**25928 米**。

针对问题四，通过**微分**思想，我们将问题细分为一个  $0.02 \times 0.02$  海里的正方形海域中的优化问题。通过将海域沿其**对角线**划分，我们将问题转化为两个坡面之间的问题。然而，坡面可能会出现倾斜，使得坡度无法直接使用。为了克服这个问题，我们建立了一个模型，用于构建正坡面或反坡面，从而将问题**还原为与问题三相同的坡面情况**。由于向上构建的坡面覆盖宽度  $W_{up}$  小于原始坡面  $W$ ，而向下构建则相反，导致向上构建模型能够覆盖更多的海域，但总测线长度无法最优化。相反，向下构建模型可以得到最优模型，但可能会导致探测海域的缺失。因此，我们首先对第三个问题中的**贪心模型**进行**优化**，然后在全局范围内寻求满足实际条件的最优解。

**关键字：** 多波束测线   立体转化平面   最优化   贪心算法

## 一、问题背景与重述

### 1.1 问题背景

单波束测深技术是一种利用声波在水中传播特性来测量水深的方法。声波在均匀介质中以匀速直线传播，当遇到不同介质的界面时会发生反射。这一原理被用于测量船只上的传感器向下垂直发射声波信号，并且记录从声波发射到接收的传播时间。通过声波在海水中的传播速度以及传播时间，可以测出水深。由于单波束测深采用单点连续测量的方法，因此其测深数据沿着航迹的数据非常密集，而在测量线之间没有数据点的特点。

多波束测深系统以单波束测深为基础，是一种广泛应用于绘制海底 3D 地图的方法，其原理基于声波在水中传播的特性，以测量水深并绘制地图。在多波束测探中，测量设备能够同时发射数十甚至上百个声波束，这些声束在水中呈圆锥状传播，并由接收换能器接收从海底返回的声波信号，克服了单波束测深的限制。在海底地形平坦的区域，它能够测量沿测量船航线为轴线且具有一定宽度的水深区域，进而实现全覆盖的水深数据采集。

然而，由于真实海底地形的复杂性和不均匀性，为了确保测量的准确性和数据的完整性，需要调整水深测量条带之间的重叠率。如果采用海域平均水深来确定测线间隔，虽然可以确保条带之间的平均重叠率达到要求，但在浅水区可能会出现漏测的情况，这会对测量质量产生不利影响。相反，如果以海域最浅处的水深为基准来确定测线间隔，虽然可以确保最浅处的重叠率达到要求，但在深水区可能会出现过多的重叠，导致数据冗余增加，从而影响测量效率。因此在实际测量中，通过精心设计测量航线，我们可以在保证数据质量的同时尽量减少侧线测量的总长度，以降低整体测量成本，提高测量效率。

### 1.2 问题重述

基于多波束测深系统原理，其中附件给出了海水深度数据，横、纵坐标的单位是海里，海水深度的单位是米。根据所给条件以及相关信息建立相应模型，并完成如下问题：

#### 问题一：

- (1) 建立一个数学模型来描述多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间的重叠率。
- (2) 当多波束换能器的开角为  $120^\circ$ ，坡度为  $1.5^\circ$ ，海域中心点处的海水深度为 70 m，分别给定测线距中心点处的距离，利用所建立模型求解对应的海水深度、覆盖宽度以及与前一条测线的重合率三个指标值，并将其填入表格并保存到 {result1.xlsx} 文件中。

#### 问题二：

- (1) 考虑一个矩形待测海域，建立多波束测深覆盖宽度的数学模型。
- (2) 当多波束换能器的开角为  $120^\circ$ ，坡度为  $1.5^\circ$ ，海域中心点处的海水深度为 120 m。分别给定测线方向夹角和测量船距海域中心点处的距离，利用所建模型计算表 2 中所列位置多波束测深的覆盖宽度，并将结果填入表 2 同时保存到 {result2.xlsx} 文件中。

### 问题三：

在一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，位于海域中心点处的海水深度为 110 米。这个海域从西到东逐渐变深，坡度为  $1.5^\circ$ ，同时多波束换能器的开角为  $120^\circ$ 。现需建立优化模型，设计一组测量线，使得该测量线的长度尽可能短，以确保完全覆盖整个待测海域，并且相邻条带之间的重叠率在 10% 到 20% 之间。

### 问题四：

(1) 根据附件中所给出的采用单波束测深技术得出的海水深度数据，设计一组多波束测深船的测线，并满足以下要求：

- a. 确保沿测线扫描形成的条带尽可能覆盖整个待测海域；
- b. 控制相邻条带之间的重叠率在 20% 以下；
- c. 使测线的总长度尽可能短。

(2) 根据所设计出具体的测线，计算以下指标：

- a. 测线的总长度。
- b. 漏测海区占总待测海域面积的百分比。
- c. 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度。

## 二、问题分析

本文基于多波束测深系统，要求建立相关变量模型以及计算相关指标，以下是问题分析和流程图：

### 2.1 问题 1 分析

问题一要求根据已知条件建立多波束测深的覆盖宽度  $W$  和相邻条带之间重叠率  $\eta$  建立相应数学模型，并且给定相应的自变量：开角，坡度，海域中心点处的海水深度的值，利用所建立的模型计算对应的因变量值：相应测线处的海水深度，覆盖宽度，以及与前一条测线的重叠率。当海底出现了坡面，这个坡面是一个具有平滑坡面的锥形，存在坡度  $\alpha$ 。我们假设船只在行驶过程中与坡面的距离是等差变化的，此时对于重叠率的计算方式将会发生改变。根据几何关系我们分别用相应的自变量表示出因变量，然后填入表格。

## 2.2 问题 2 分析

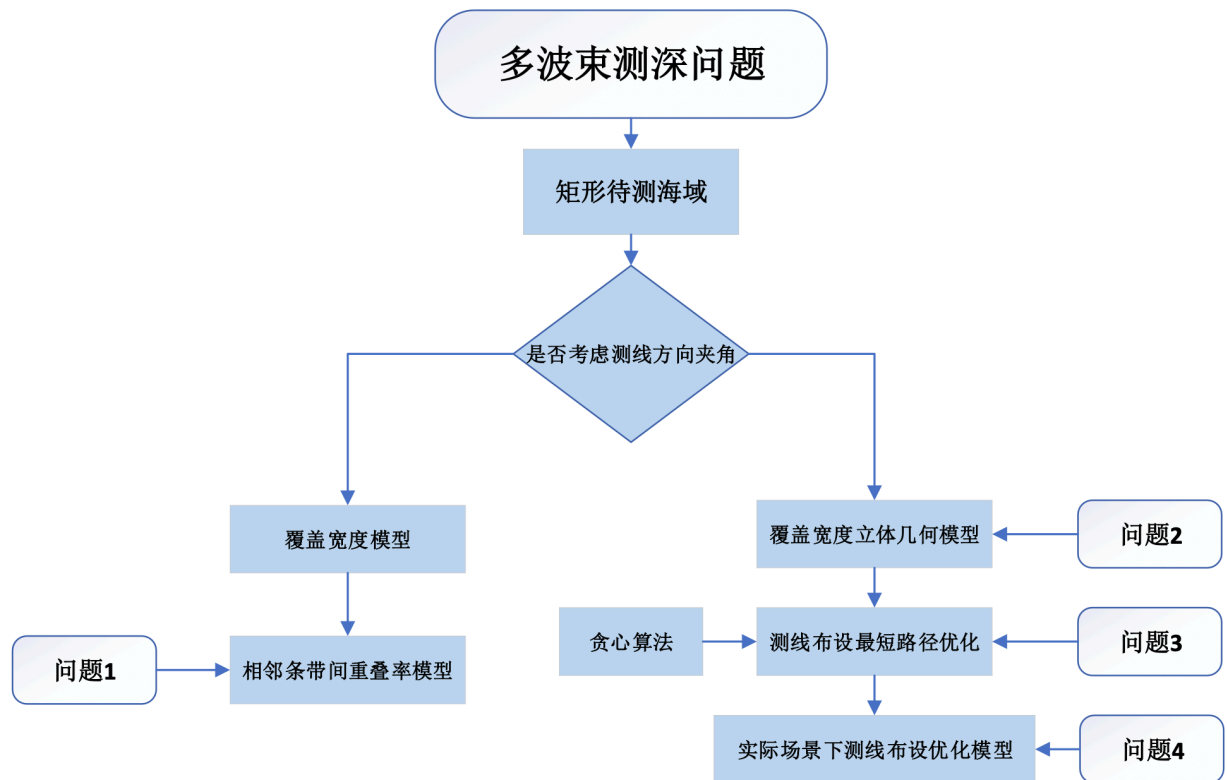
从问题二给出的情景与已知条件可知，问题二是在问题一基础上的延伸，即从求解平面几何到求解立体几何。与问题一相比，问题二增加了测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$ ，使得原先不变的与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面的夹角，我们设为  $\alpha'$ ， $\alpha'$  会随着测线方向夹角  $\beta$  的变化而变化。我们首先通过剖析测量船可能出现的测线测深情景模拟出其中立体几何模型，并通过对立体几何求解，找到夹角  $\alpha'$  与测线夹角  $\beta$  之间的关系，再从立体模型简化到平面模型，从而建立相对应的多波束测深覆盖宽度的数学模型。由于海水深度的等比变化将会收到  $\beta$  角度的影响，该模型需要对问题一的模型进行优化，建立角度  $\beta$  与覆盖宽度  $W$  的数学模型。最后根据题目给出的数据条件，利用建立的数学模型求解得到多波束测深的覆盖宽度，填入表格。

## 2.3 问题 3 分析

该问题是理想情况下，多波束测深路线规划问题，需要使用到问题一与问题二所建立的数学模型和角度关系进行最优化求解。我们仔细研究了问题二中的模型，发现存在一个特定的角度  $\beta$ ，在这个角度下， $W$  能够保持最大值。同时，我们考虑到覆盖率的限制要求，提出并验证了三种贪心法则。随后，我们将最优化问题分解成多个子问题，最终使用程序模拟，采用贪心算法来求解，以获得最佳答案。

## 2.4 问题 4 分析

通过问题四题意和给出的某海域海水深度采样数据，可知问题四已经脱离前三问假设的理想条件，即海底坡面的地形平坦。问题四海底情况更为复杂，更加偏向实际的应用场景。我们将通过题目给出的数据，利用插值的方法模拟出海底地形，通过对地形的观察，我们将海底地形进行微分形成无数个小的子坡面，将每一个子坡面近似成理想条件下的坡面，类比第三问的模型，通过贪心算法进行优化求解，布设测线。



### 三、模型假设

为了建立更为精确的数学模型，本文结合题意并根据实际情况建立了一些合理的假设如下：

- 假设声波束在水中呈圆锥状传播，并由接收换能器接收从海底返回的声波信号。
- 假设前三问中所涉及海域水底表面光滑且海底地形平坦。
- 多波束测深假设水体中的声速是均匀的且假设声波在水中以直线传播。
- 波束之间相互独立，即不同波束之间的声波传播不会相互干扰，每个波束可以独立测量深度。
- 假设测深仪在使用前已经经过校准，以确保准确测量。
- 假设水质条件（如盐度和浊度）是均匀的，以减少声波传播的不确定性。
- 无外部干扰：假设在测量时没有外部干扰，如其他声源或大的水流干扰声波传播。
- 假设适用贪心算法时，每次决策都会遵循贪心法则。

## 四、符号说明

表 1 符号说明

符号	意义	单位
$W$	多波束测深条带的覆盖宽度	$m$
$d$	相邻两条测线的间距	$m$
$D$	海域某点处的海水深度	$m$
$\theta$	多波束换能器开角	
$\eta$	相邻条带之间的重叠率	%
$\alpha$	坡度	
$\beta$	测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角	
$\Delta h$	船沿测线方向移动时，船所处海水深度的增量	$m$
$d'$	船沿测线方向移动的距离	$m$
$S$	问题三的矩形海域面积	$m^2$
$L_k$	每条测量船的测量长度	$m$

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

当船进行多波束测深时，在两个相对位置下我们可以确定船行走的测线方向，进而确定与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成的夹角为  $\alpha$  的斜线。根据题意可以得出，所测量的海域不变，即在相同的海底坡面情况下，此时多波束测深条带的覆盖宽度  $\alpha$  随换能器开角  $W$  和水深  $D$  的变化而变化，且此处测线相互平行且海底地形平坦，因此根据船在前一次位点测深时对应的覆盖宽度，我们可以得出对应相邻条带之间的重叠率。并且为了保证测量的便利性和数据的完整性，重叠率应处于 10% 到 20% 之间。结合已知条件，我们可以建立对应的二维模型，分别给出海水深度，多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间重叠率的数学表达式。

### 5.1.1 建立模型准备

如图 1 所示，我们选取船行时所在的海面中心点为原点，建立水平坐标轴，以船沿测线方向为正方向。

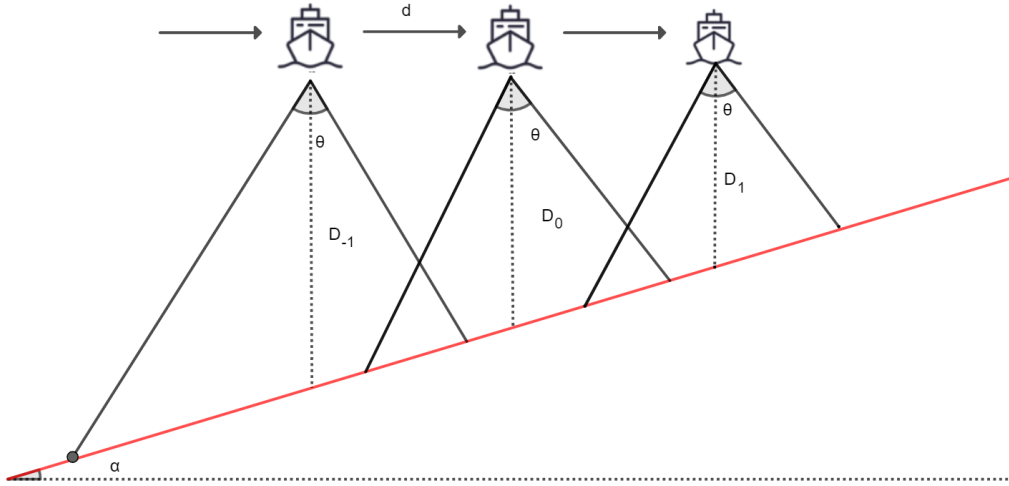


图 1 多波束测深平面示意图

根据几何关系：

$$\Delta_k = d_k * \tan(\alpha)$$

$$D_k = D_{k-1} - \Delta_k$$

其中，

- $d_k$ : 中心点与船所在位置  $k$  的向量距离。
- $\Delta_k$ : 相邻点处海水深度距中心点  $k$  处的深度的差值。
- $D_k$ : 水平坐标为  $k$  处的所在点时对应的海水深度。
- $\tan \alpha$ : 坡度的正切值

船沿着水平坐标轴往前行走 ( $d > 0$ ) 或者往后走 ( $d < 0$ )。由于确定测线间隔的方法多种多样，因此在不知测线间隔设计方法时，我们无法确定对应的测线间隔，即无法确定向量  $d$ ，因此我们在此以  $d_{-1}, d_1$  的向量符号来表示对应的相邻条带间的间隔。其中： $d_{-1}$  表示距中心点负方向上最近的一点的距离，即中心点往后走  $|d_{-1}|$ ，间隔为  $|d - 1|$ ，此时  $d_{-1}$  小于 0;  $d_1$  表示距中心点正方向上最近的一点的距离，即中心点往后走  $|d_1|$ ，间隔为  $|d_1|$ ，此时  $d_1$  大于 0。

由于  $d_k$  是向量，所以对变化量含正负。例如，当  $\Delta$  大于 0 时，说明此时水深  $D$  比相邻点深度少  $\Delta$ ；当  $\Delta$  小于 0 时，说明此时水深  $D$  比相邻点深度多  $\Delta$ 。根据几何角度关系，在已知与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角  $\alpha$  和海域中心点与  $k$  处的向量距离以及前一次船所在位置的海水深度时，可以得出该点船所在的海水深度  $D$ 。

### 5.1.2 覆盖宽度模型

在对应的点都有对应多波束测深条带的覆盖宽度，由于在  $\alpha$  确定的情况下，覆盖宽度  $W$  随换能器开角  $\theta$  和水深  $D$  的变化而变化，如图 2 所示：根据几何关系和数学推导我们可以得出对应的覆盖宽度：

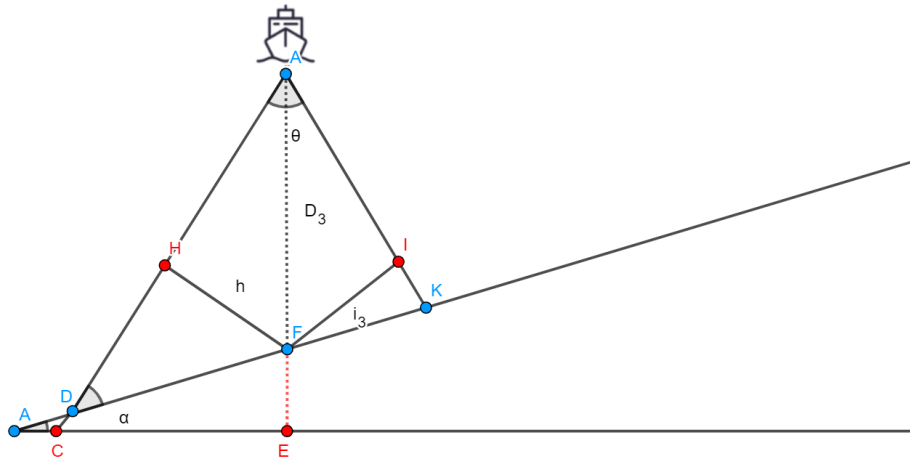


图 2 角度分析平面图

设  $W_k = W_{k_1} + W_{k_2}$ ，将  $W_k$  分为  $W_{k_1}$  和  $W_{k_2}$ 。分别由  $F$  点向  $AC$ 、 $AG$  两条线段作垂线，所交垂点分别为  $H$ 、 $I$ 。由于测量船测线是轴线，因此测线平分换能器开角  $\theta$ 。根据几何关系和数学推导我们可以得出对应的覆盖宽度：

- $W_{k_1}$  处：

在  $\triangle CBD$  中，由  $\angle ACE = \angle B + \angle BDC$ ，得

$$\angle BDC = \frac{\pi - \theta}{2} - \alpha$$

由对顶角知， $\angle BDC = \angle ADC = \frac{\pi - \theta}{2} - \alpha$



在 $Rt\triangle ADH$ 中，由正弦定理得

$$HF = AF \cdot \sin \frac{\theta}{2} = D_k \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\text{在 } Rt\triangle DHF \text{ 中, } W_{k1} = DF = \frac{HF}{\sin \angle HDF} = \frac{D_k \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha)}$$

•  $W_{k2}$  处:

由三角形外角与对应内角关系得,

$$\angle AFG = \angle CAE + \angle ADG = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi - \theta}{2} - \alpha$$

在 $\triangle AFG$ 中，由三角形内角和为 180 度得，

$$\angle AGF = \pi - \angle FAG - \angle AFG = \pi - \frac{\theta}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi - \theta}{2} + \alpha$$

在 $Rt\triangle AFI$ 中，由正弦角度关系得，

$$FI = AF \cdot \sin \angle FAG = D_k \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

在 $Rt\triangle FIG$ 中，由正弦角度关系得

$$W_{k2} = FG = \frac{FI}{\sin \angle AGF} = \frac{D_k \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

因此  $W_k = W_{k1} + W_{k2}$ ，则可以得出覆盖深度为：

$$W_k = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

其中，

- $W_k$ : 水平坐标为  $k$  所在点的多波束所测深度条带的覆盖宽度
- $\Delta_k$ : 相邻点处海水深度距中心点  $k$  处的深度的差值。
- $D_k$ : 水平坐标为  $k$  处的所在点时对应的海水深度。
- $\tan \alpha$ : 与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角  $\alpha$  的正切值
- $\theta$ : 多波束换能器开角。

### 5.1.3 相邻条带间重叠率模型

假设问题一中测线相互平行且海底地形平坦，根据定义我们知道相邻条带之间的重叠率:

$$\eta = 1 - \frac{d_k}{W_{k-1}}$$

其中  $d$  为相邻两条测线的间距， $W_{k-1}$  为前一次相邻条带的覆盖宽度。由于相邻条带之间的重叠率  $\eta$  和上一次的测量深度  $W_{k-1}$  和  $d_k$  有关，在出发点处没有前一次的覆盖宽

度，因此在出发点处无覆盖率。

结合海水深度和覆盖宽度，在存在相邻条带之间的重叠率情况下，我们可以得出在 k 处的  $\eta$ ：

$$\eta = 1 - \frac{d_k}{\frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2}+\alpha)}}$$

#### 5.1.4 对应指标值求解

##### • 海水深度

问题 1 的表格中给出了测线距中心点处的距离，即测线间隔，我们发现相邻测线间的间隔是相等的，均为 200m, 即

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 200$$

$$d_{-1} = d_{-2} = d_{-3} = d_{-4} = -200$$

因此我们此处设

$$d = d_1 = \dots = d_4 = 200$$

$$-d = d_{-4} = \dots = d_{-1} = -200$$

由于变化量  $\Delta$  与海水深度密切相关，由于间隔距离相等均为 200，因此我们设  $\Delta = d \tan \alpha$ ，且

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = d \tan \alpha = \Delta$$

$$\Delta_{-1} = \Delta_{-2} = \Delta_{-3} = \Delta_{-4} = -d \tan \alpha = -\Delta$$

因此我们根据  $D_k = D_{k-1} - d_k * \tan(\alpha)$  并带入相应的数值可得出结果。由于表格中给出了中心点处的海水深度，利用等差公式，我们从中心点出发递推得出相应点的海水深度：

当处于水平坐标轴正半轴时，

$$D_1 = D_0 - \Delta_1 = D_0 - \Delta$$

...

$$D_4 = D_3 - \Delta_3 = D_3 - \Delta$$

当处于水平坐标轴负半轴时，

$$D_{-1} = D_0 - \Delta_1 = D_0 + \Delta$$

...

$$D_{-4} = D_{-3} - \Delta_3 = D_3 + \Delta$$

根据  $d=200$  以及对应的  $\Delta$  值，我们可以分别得出相应的海水深度并填入表格。

- **覆盖宽度**

当海底坡面已知，且多波束换能器的开角和坡度一定时，船所处的每个位置都有对应的海水深度，而由 5.1.2 中所建立的覆盖宽度模型可知，每个点的覆盖宽度随对应点的海水深度变化而变化。根据已求解出的海水深度值，可以代入公式求出对应的覆盖宽度。

其中，

$$\theta = 120^{\circ}$$

$$\tan \alpha = \tan 1.5^{\circ}$$

$$\sin\left(\frac{\pi - \theta}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi - \theta}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

根据对应的 D 值，我们可以分别得出相应的海水深度 W 并填入表格。

- **与前一条测线的重叠率**

多波束测深条带的覆盖宽度 W 随换能器开角和水深的变化而变化。当测线相互平行且海底地形平坦时，根据相邻条带之间的重叠率定义可知，相邻条带的重叠率和对应的海水深度 d 和条带覆盖宽度 W 决定。根据上述求解出的对应点的海水深度和覆盖宽度，我们可以分别得出与前一条测线的重叠率  $\eta$ ，求出对应的值填入表格中。

### 5.1.5 小结

根据所建立的多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型，结合所给条件，得出以下表格：

**图 3 问题 1 的计算结果**

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	315.8133	297.6276	279.4418	261.256	243.0703	224.8845	206.6987	188.513	170.3272
与前一条测线的重叠率/%	——	32.8019	28.4287	23.4467	17.7193	11.0655	3.241	-6.094	-17.4211

从给出的测线距中心点处的距离的值，我们发现船从离中心点-800m 处，最终到达离中心点 800m，距离以 200m 为步长递增，是一个均匀间隔的数列，即测线间隔都相等。海水深度从 90.9487m 开始递减到 49.0513m，深度在相邻测线之间逐渐减小。对应每个测线的覆盖宽度，从 315.8133m 递减到 170.3272m，连续减小。从第二条测线开始，重

叠率递减。不难发现一开始的重叠率大于 20%，说明此时的测线间隔需要调整，随着向前移动逐渐减小，然后变为负数。负数表示新测线覆盖部分重叠了前一条测线。这表明新测线的起点向前移动，导致覆盖的区域部分重叠。

综上所述，根据建立的多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型，并给定对应的换能器开角和坡度，以及某一点的海水深度值，我们可以推算出其他点的指标值。模型可以看成是用若干个已知的自变量（开角，坡度，海域中心点处的海水深度的值）表示出对应的因变量（相应测线处的海水深度，覆盖宽度，以及与前一条测线的重叠率）。由于海底坡面是一个具有平滑坡面的锥形，且我们假设船只在行驶过程中与坡面的距离是等差变化的，当船从距离中心点 800m 处的位置向中心点处（即水平坐标轴正方向）移动时，海水深度逐渐减少，覆盖宽度也随之减少，重叠率也在减少。

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 立体图分析

在矩形待测海域中，与问题一不同，此时测线方向的变化会引起对应测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的变化，根据几何关系也会引起  $\alpha'$  的变化，进而影响最终的覆盖宽度大小。立体图如图所示：

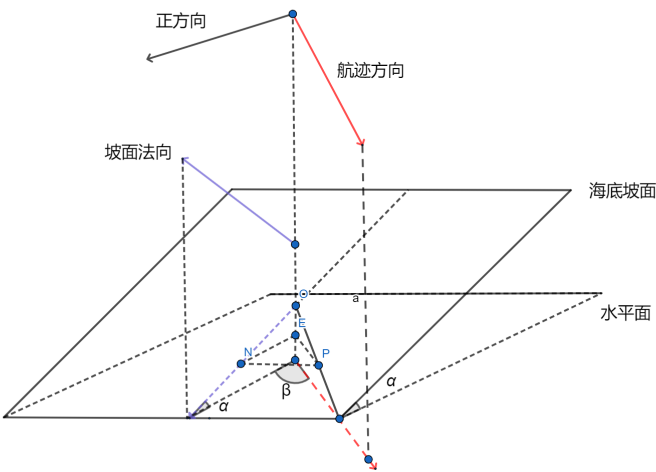


图 4 模拟测量船测深的立体图

当改变测线方向时，此时与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线随之改变，该交线与水平面的夹角  $\alpha'$  也会改变，结合问题一所建立模型可知，在多波束换能器的开角和坡度不变的情况下，此时对应的点处的覆盖宽度会随之改变。

### 5.2.2 角度分析

当船的测线方向在水平面上的投影与坡面方向在水平面上的投影方向相同或相反，即  $\beta$  的值为  $0^\circ$  或  $180^\circ$  或  $360^\circ$ ，此时与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角  $\alpha^\circ$  的值等于  $\alpha$  的值。在其他情况下， $\alpha^\circ$  小于  $\alpha$ 。涉及最小角定理，下面是证明过程：如图，若 AB，AO 分别是平面 a 的垂线和斜线，OB 是 AO 在平面 a 内的

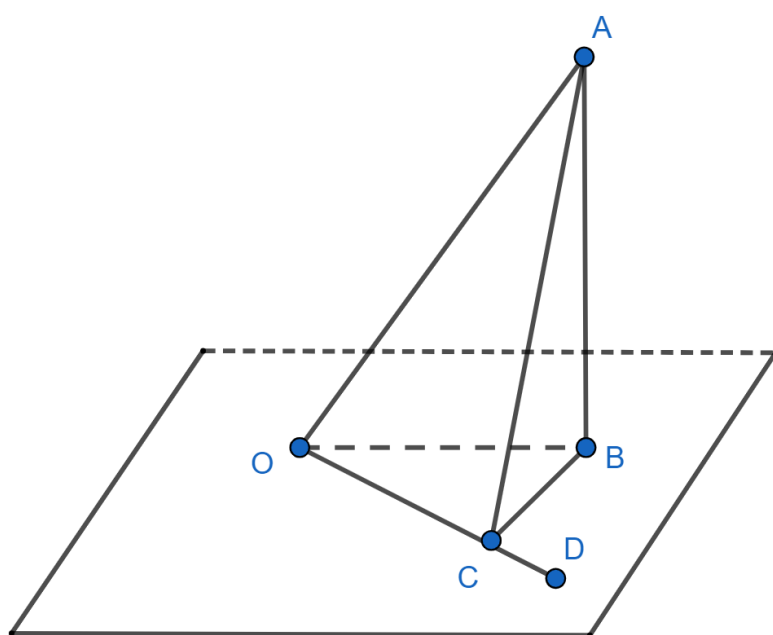


图 5 最小角定理示意图

射影， $\angle AOB$  为锐角，OC 是平面内和 OB 不重合的任一直线，在 OC 上截取  $OD=OB$ ，连结 AD，则  $AB < AD$ 。在  $\triangle AOB$  与  $\triangle AOD$  中，因为  $OA=OA$ ， $OB=OD$ ， $AB < AD$ ，所以  $\angle AOB < \angle AOD$ 。因此定理得证。

### 5.2.3 四面体分析

由图可知，在同一海底坡面下，夹角  $\beta$  的值会随着测线方向的改变而变化。在模型中，我们选取上图中与坡面法向在水平面上的投影平行的方向为船行驶测线方向的正方向。例如： $\beta$  表示沿正方向所在方向逆时针转动  $\beta$  角度的测线方向行驶。

测线方向由于不同的测线方向会形成不同的夹角  $\alpha'$ ，根据几何关系可知， $\alpha'$  可以用对应的已知量表示。测线方向在海底坡面的投影、与测线方向垂直的平面和海底坡面

的交线构成一条与水平面夹角  $\alpha'$ 、测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$ ，以及船每次沿测线方向移动时船所处海水深度的增量  $\Delta$  向量形成了一个四面体（以锐角为例），如图 6 所示。根据几何关系我们可以得出以下关系：

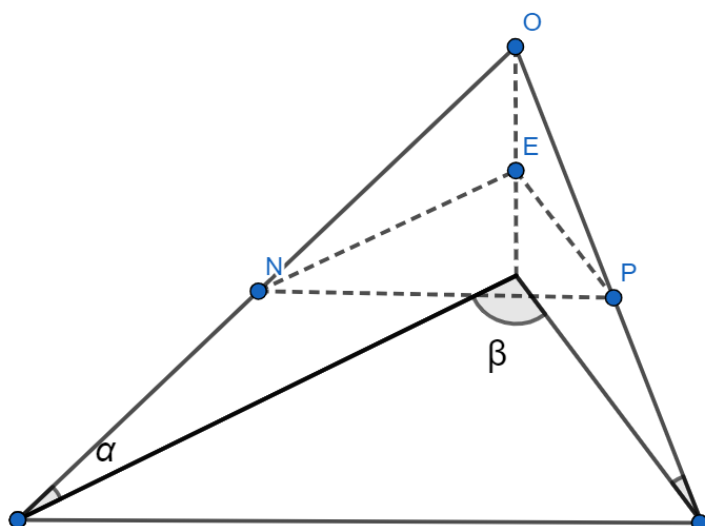


图 6 船测深立体图中的四面体

$$\Delta_h = d' \cdot \cos(\beta) \cdot \tan(\alpha)$$

$$\tan \alpha' = \frac{\Delta_h}{d'}$$

其中变量分别表示，

- $\alpha'$ ：与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角。
- $\alpha$ ：海底坡面与水平面形成的坡度。
- $\beta$ ：测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角。

- $\Delta_h$ : 船沿测线方向移动时, 船所处海水深度的增量 (单位: m)。
- $d'$ : 船沿测线方向移动的距离 (单位: m)。

#### 5.2.4 模型建立

根据上述分析, 我们可以将立体模型简化到平面模型, 如图 7 所示, 在一定的海底

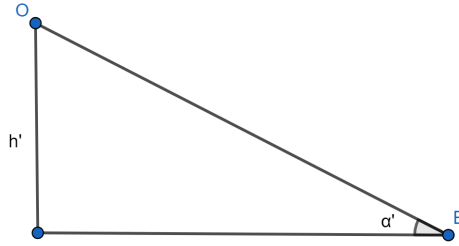


图 7 四面体截面示意图

坡面, 同时多波束换能器的开角以及测线方向的夹角  $\beta$  情况下, 我们可以将上述立体模型转换成问题一中构建的平面模型, 用已知的条件进行求解。由问题一中所建的多波束测深的覆盖宽度模型可知:

$$W_k = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

又因为,

$$D_k = D_{k-1} + \Delta_h$$

因此我们可以得出问题二情况下的覆盖宽度模型:

$$W_k = \frac{(D_{k-1} + d' \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha')} + \frac{(D_{k-1} + d' \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha')}$$

#### 5.2.5 计算结果展示

根据题意我们已知多波束换能器的开角为  $120^\circ$ , 坡度为  $1.5^\circ$ , 海域中心点处的海水深度为 120 m, 通过上述建立的多波束测深覆盖宽度的数学模型, 可以计算出对应测线方向夹角  $\beta$  和测量船距海域中心点处的距离 (单位: 海里) 的值:

- 当  $\beta = 45^\circ$  时,  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且由题意可知此时海坡面与水平面夹角固定为  $\alpha=1.5^\circ$ , 且  $d'=0.3$  海里, 即  $0.3 \times 1852=555.6\text{m}$ 。由此可以得出

$$\Delta_h = d' \cdot \cos(\beta) \cdot \tan(\alpha) = 555.6 \times \cos 45^\circ \times \tan 1.5^\circ$$

进而可得出,

$$\alpha' = \arctan \frac{\Delta h}{d'}$$

又因为测线间相互平行, 当沿着特定测线方向移动时, 此时  $\alpha'$  不变。根据所建的多波束测深覆盖宽度的数学模型可得  $\beta=45^\circ$  下的覆盖宽度  $W$  随  $d'$  变化而变化, 因此,

$$W_k = \frac{(D_{k-1} + d' \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} - \alpha' \right)} + \frac{(D_{k-1} + d' \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} + \alpha' \right)}$$

当移动 0.3 海里时, 此时我们设  $k=1$ , 根据所建模型代入, 可得,

$$W_1 = \frac{(D_0 + d' \cos 45^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} - \alpha' \right)} + \frac{(D_0 + d' \cos 45^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} + \alpha' \right)} = 451.8717^\circ$$

当移动 0.6 海里时, 此时我们设  $k=2$ , 可得,

$$W_2 = \frac{(D_1 + d' \cos 45^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} - \alpha' \right)} + \frac{(D_1 + d' \cos 45^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} + \alpha' \right)}$$

以此类推, 可得出  $W_3, \dots, W_7$

因为待测海域是一矩形海域, 此时海底坡面与水平面的夹角为  $\alpha = 45^\circ$ , 且海底坡面平坦, 该矩形海底坡面投影至水平面上呈矩形, 因此, 海平面的海域中心点投影到水平面上的点也是该投影矩形的中心点。根据测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的定义, 我们可以得出覆盖宽度呈对称性增长, 测线方向夹角呈  $45^\circ$  和  $315^\circ$  时覆盖宽度的变化一致。

- 同理, 当  $\beta = 135^\circ$  时,  $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且由题意可知此时海坡面与水平面夹角固定为  $\alpha=1.5^\circ$ , 且  $d'=0.3$  海里, 即  $0.3 \times 1852=555.6\text{m}$ 。由此, 当移动 0.3 海里时, 此时我们设  $k=1$ , 根据所建模型代入, 可得,

$$W_1 = \frac{(D_0 + d' \cos 135^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} - \alpha' \right)} + \frac{(D_0 + d' \cos 135^\circ \tan 1.5^\circ) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi-\theta}{2} + \alpha' \right)} = 451.8717^\circ$$

- 以此类推, 可得出当  $\beta = 135^\circ$  时的  $W_2, \dots, W_7$ 。
- 同理可得, 表格中测线方向夹角呈  $315^\circ$  和  $225^\circ$  时, 当测量船距海域中心的距离变远, 覆盖宽度变小, 最小覆盖宽度为  $166.6303\text{m}$ 。且由于海底坡面平坦, 覆盖宽度呈对称性下降, 测线方向夹角呈  $315^\circ$  和  $225^\circ$  时覆盖宽度的变化一致。
- 同理可得, 当测线方向夹角呈  $90^\circ$  和  $270^\circ$  时覆盖宽度的变化一致。且此时船沿测线方向移动, 此时船该方向上的任何位置处的海底深度保持不不变, 且船在海域中心正上方水平移动, 所以覆盖宽度始终为  $415.6919\text{m}$ , 保持不变。
- 同理可得, 当  $\beta = 180^\circ$  时的结果, 结果如表格所示。



值得注意的是，当船在海域中心点时，位置的覆盖宽度与测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的改变无关。

5.2.6 小结

根据所建立的多波束测深的覆盖宽度模型，结合所给条件，得出以下表格：  
通过 Python 代码实现第二问所建立的多波束测深覆盖宽度的数学模型。由表格可以看

图 8 问题 2 的计算结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向 夹角 $/\text{ }^\circ$	0	416.6919	467.2119	517.732	568.2521	618.7721	669.2922	719.8122	770.3323
	45	416.6919	451.8717	487.5519	523.2321	558.9123	594.5924	630.2726	665.9528
	90	416.6919	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922
	135	416.6919	380.5113	344.8312	309.151	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
	180	416.6919	366.1718	315.6517	265.1317	214.6116	164.0916	113.5715	63.0514
	225	416.6919	380.5113	344.8312	309.151	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
	270	416.6919	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922	415.6922
	315	416.6919	451.8717	487.5519	523.2321	558.9123	594.5924	630.2726	665.9528

出，当船在海域中心点时，位置的覆盖宽度与测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的改变无关。在海底坡面平坦的情况下，最大覆盖宽度为 770.3323m，最小覆盖宽度为 63.0514m。测量船航迹沿规定正方向进行测线测深，即表格中测线方向夹角呈 45° 和 315° 时，当测量船距海域中心的距离变远，覆盖宽度变大，最大覆盖面度为 666.7534m。且由于海底坡面平坦，覆盖宽度呈对称性增长，测线方向夹角呈 45° 和 315° 时覆盖宽度的变化一致；同理可得，测量船航迹沿规定负方向进行测线测深，即表格中测线方向夹角呈 315° 和 225° 时，当测量船距海域中心的距离变远，覆盖宽度变小，最小覆盖宽度为 166.6303m。

且由于海底坡面平坦，覆盖宽度呈对称性下降，测线方向夹角呈 315° 和 225° 时覆盖宽度的变化一致；当测线方向夹角呈 90° 和 270° 时，在海域中心正上方水平移动，所以覆盖宽度始终为 415.6919m，保持不变。

5.3 问题三模型的建立与求解

由于本题的坡面为理想坡面，我们可以根据题目所给出的条件求解出每一个条件对应的  $W, \eta$ , 深度等数值，而题目需要优化最优的路径，我们尝试构建并证明一个贪心模型，通过猜想并证明符合题目条件的贪心法则，求得最短的路径长度。

### 5.3.1 对问题三所建模型的特征分析

通过分析第二问关于测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为  $\beta$  与覆盖宽度  $W$  的数学模型与对第二问表格的特征分析，我们发现如下规律：

当  $\beta$  大小不变时， $W$  只与深度  $D$  存在关系，如 result2 表格中的 90 度和 270 度，当船沿等深线前进时， $W$  的数据不发生变化。

因此我们提出如下猜想：是否存在一个角度  $\beta$ ，使得  $W$  在通过相同测线长度  $L$  时，一直保持最大。

我们查阅文献发现，根据国土资源部发布的《海洋多波束水深测量规程》DZ292-2016 规范要求，“主测深线一般应采用平行等深线走向布设。”所以我们将采用  $\beta=90$  度，即平行等深线布设测线。同时我们还证明了平行等深线布设测线可以得到最短总路径长度，证明如下：

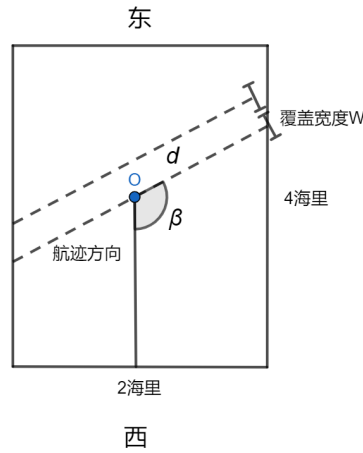


图9 俯视平面图

该图模拟第三问矩形海域俯视图，特点为西深东浅。当航迹方向  $\beta$  大于 90 度小于 180 度时，当  $\beta$  被固定时，在满足重叠率大于 10% 小于 20% 的限制条件下，增大测线间距  $d$ ，总覆盖宽度将变大，所需的测线数量将呈现减少趋势，即总路径长度变短。当  $\beta$  增大，即测量船离开海域的位置越靠东，由于西深东浅的特点，测量船越靠东，覆盖宽度越窄，则测线间距越窄，总路径长度变长。所以为了保证测线间距增大使得总路径最短，在  $\beta$  大于 90 度小于 180 度时， $\beta$  应该减小。同理可知，由于矩形海域对称性的缘故，在  $\beta$  大于 0 度小于 90 度时， $\beta$  增大，覆盖宽度变宽，测线间距变宽，总路径长度变短。综上所述，只有当  $\beta = 90^\circ$ ，即平行等深线走向布设测线，可以得到最短的总路径长度。

#### • $\beta$ 存在最值

$$W_k(D_k; \beta) = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha')} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha')}$$

对函数  $W_k$  进行求导，发现当  $\beta = 90^\circ$  或者  $\beta = 270^\circ$  是， $W_k$  取得最大值。

- 一直保持重叠率最小为 10%，而且沿着  $W$  最大的方向行驶，可以找到最短的测线  $L$ 。

$$S = \sum l \cdot W_k \cdot \eta_k, k \in (1, 2, 3 \dots n)$$

$$L = l \cdot k$$

容易证明，当  $S$  一定时， $W$  最大， $\eta$  最小时，总长度  $L$  最小。

- **因此**，所有测线与长方体的某一个面平行，可以确保整个海域都被测量。经查阅相关文献资料，在实际应用中，为了提高测深效率，节省资源，主测深线布设方向原则上应平行于等深线方向，因此我们采用该方向。

### 5.3.2 贪心模型的建立

根据贪心法则，将寻找最短的测线分割为子问题：

1. 如何判断是否还需要添加测线数量  $k$

当  $S_p > S = \sum l \cdot W_k \cdot \eta_k, k \in (1, 2, 3 \dots n)$  时，未完全探测全部海域，还需要制定下一条测线。限制重叠率  $\eta$ ，利用  $\eta = 1 - \frac{d_k}{w_{k-1}}$  推导得：

$$d_k = w_k \cdot (1 - \eta)$$

$$p_{k+1} = p_k + d$$

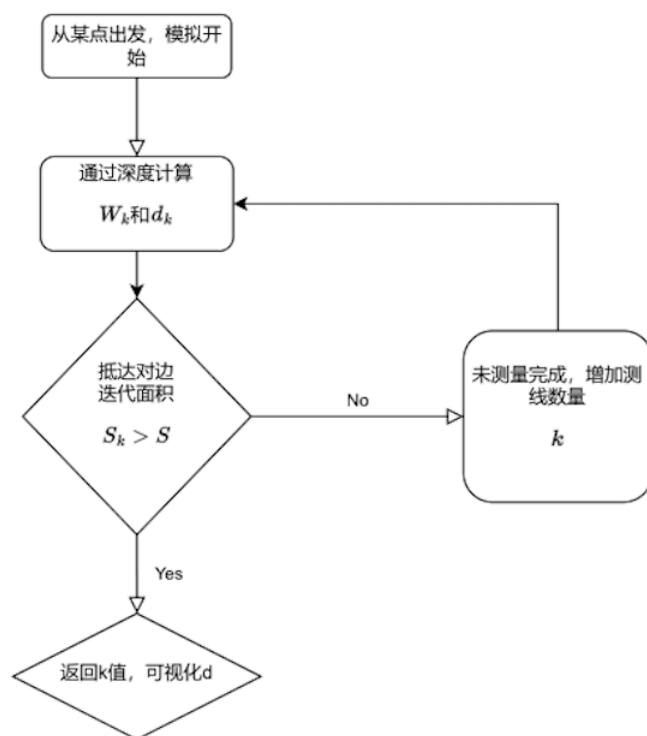
2. 如何选择方向和移动距离  $d$ : 方向选择  $\beta = 90^\circ$ ，与等高线平行
3. 侧线的初始化条件

$$W_k = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

对于初始化情况，无效的测量面积为  $\frac{w_k}{2}$  因此因选择深度  $D_k$  最小的起始点，浪费面的面积最少。

- $S_p$ : 坡面的总面积（单位:  $m^2$ ）
- $S$ : 探测过的面积和（单位:  $m^2$ ）
- $l$ : 测线长度（单位:  $m$ ）
- $d_k$ : 测线间距（单位:  $m$ ）
- $p_k$ : 点的横坐标

贪心算法的流程示意图如下：



### 5.3.3 贪心模型的求解

使用 python 进行模拟，每次进行决策时严格遵守贪心法则的处理方案，得到的结果为一组测线，数量为 7 条。

分析得出，测线的总长度为 14 海里，25,928 米。

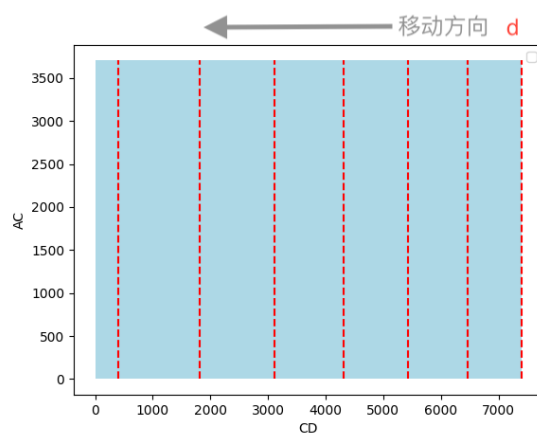


图 10 测线间距 d 的示意图

5.3.4 敏感性分析

综合敏感性分析的结果来看，模型对我们的参数  $\alpha$  和  $\eta$  的变化都非常敏感，即分别调整  $\alpha$  和  $\eta$ ，测量船测深所覆盖的海底面积  $S$  都有着显著变化。因此，在决策过程中，我们将特别关注这两个参数，并考虑采取降低他们的不确定性。在之后的问题研究方向上也会重点考虑这两个参数对模型的影响。

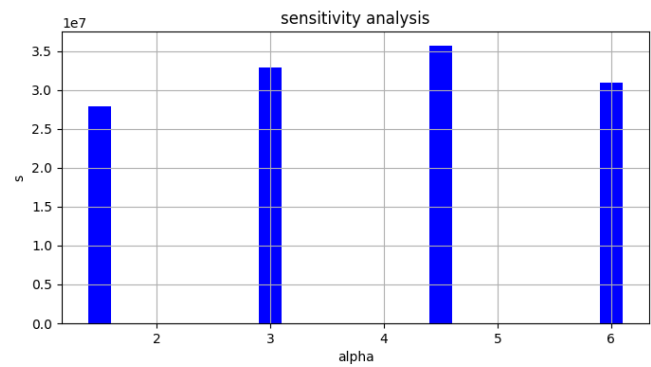


图 11 敏感性分析 1

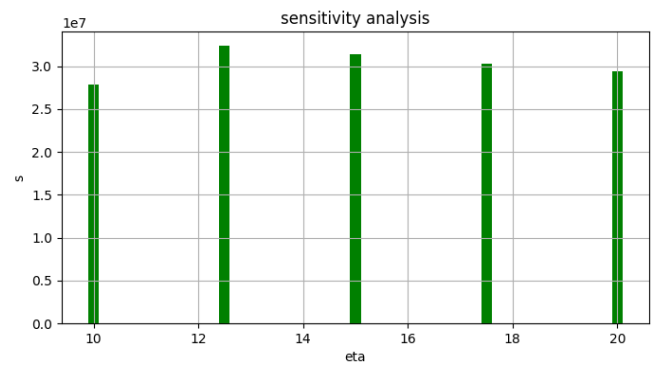


图 12 敏感性分析 2

六、 问题四模型的建立和求解

将问题微分为以 0.2 海里为底边长度的小正方体，再将小正方体沿对角线切分，转化为三个点构成的三角形坡面的问题。之后进行分类讨论，坡面最后分为三种情况：平地、可以求得坡度的正坡面和无法求得坡度的倾斜坡面。前两种情况可以通过前三问的模型求解，第三种情况我们建立了两种模型：一种是使用最高的点向第二高点的垂直方向做平行线，构造一个高于真实坡面的正坡面，或者构造一个低于真实坡面的正坡面。第一种模型会求得测得最较完整的海域，第二张会求得最短的路径，之后通过路线的规划和模型的选择找到最符合真实情况需求的测线规划。

## 6.1 分析

为了描绘相对精确的海底地形图，利用 python 代码，我们将题目原有的采样点数据进行插值，形成相对平滑的海底地形图，数据可视化如下：

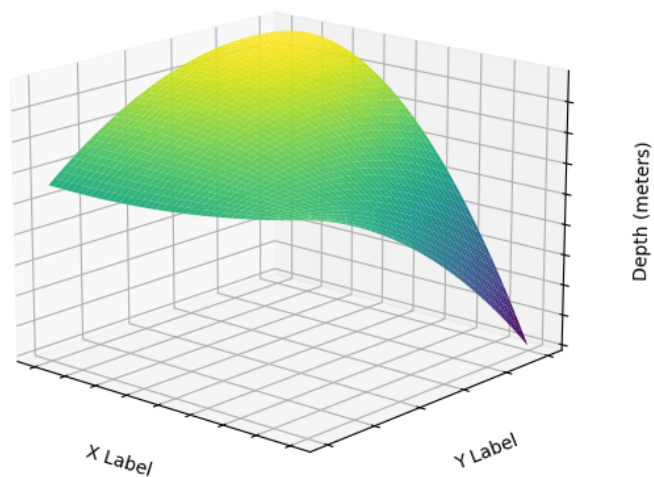


图 13 数据可视化

通过归纳海底地形图的特点，我们分别将两个最高点连接，再将两个最低点分别与两个最高点连接，我们得到一个以两个最高点连接形成的公共边、两块坡面拼接形成的几何面。如图所示：我们将用这个几何面去模拟近似海底坡面。

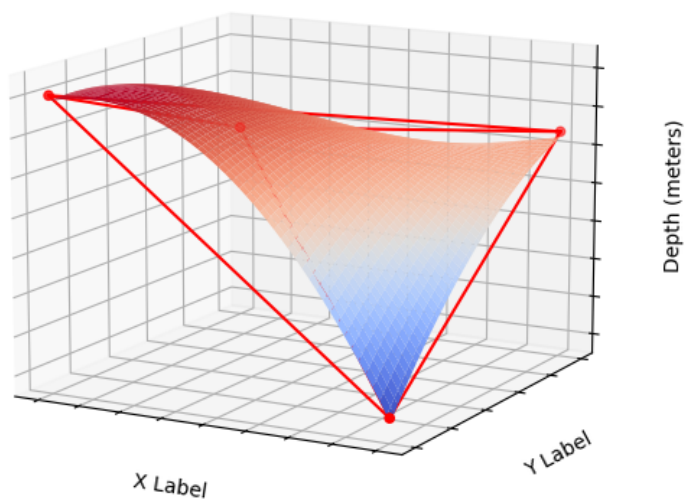


图 14 坡面切割示意图

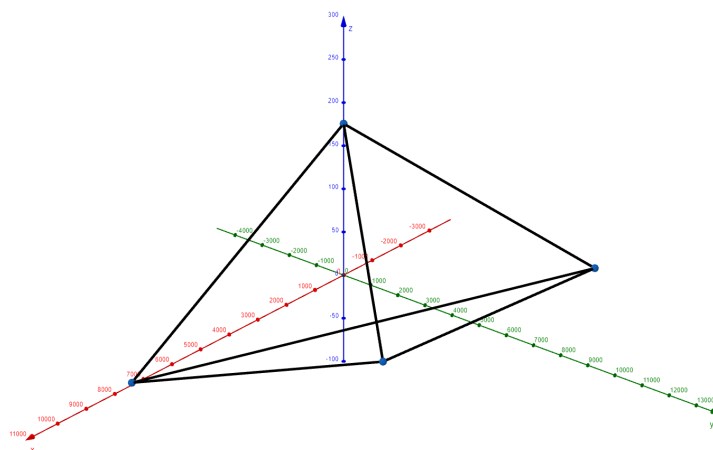


图 15 四面体

为了便于观察和解析几何面带来的一系列立体几何模型，我们将几何面放入长方体当中，如图所示：

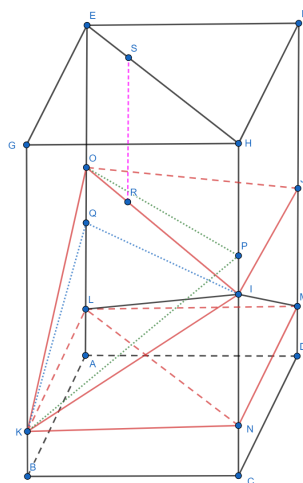


图 16 构造坡面示意图

### 6.1.1 如何计算没有坡度的倾斜坡面

如  $\triangle OIK$  与底面围成的坡面，由于点 O、I 高度不同，这个坡面是一个倾斜的坡面，与定义中的坡面意义不用，无法使用前三问的模型求解。为了解决这个问题，我们提供了如下两种模型：

- 向上构造正坡面在 CH 边上找到与点 O 等高的点，构造正坡面  $\triangle OPK$
- 向下构造正坡面在 AEH 边上找到与点 I 等高的点，构造正坡面  $\triangle KQI$

### 6.1.2 如何计算覆盖宽度 $W_k$

通过几何关系求得：

$$W_k = \frac{W_{up} \cdot d}{\frac{\Delta h}{l} + d}$$
$$W_k = \frac{\frac{\Delta h}{l} + d}{W_{down} \cdot d}$$
$$W_{down} = W_{up} = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

- $\Delta h$ ：变化的高度（单位：m）
- $W_{up}$ 、 $W_{down}$ ：向上与向下构建坡度的覆盖面积（单位：m）

### 6.1.3 如何计算覆盖率

$$W_{down} = W_{up} = \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} + \frac{D_k \cdot \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

$W_k$  的值与深度  $D_k$  有关，因此会导致  $W_k$  的值会随着测线变大或者变小（具体取决于选择那种构造模型），所以覆盖率是一个实时变化的量选择模型：

### 6.1.4 模型的求解方法

首先要根据题目的具体要求选择向上或者向下构造坡面的模型

- 向上构造正坡面能够保证全部被海面都被测量，但是测线长度无法选择最短
- 向下构造正坡面能够测线长度是最短的，可能会出现漏测海域

求解模型：

- 微分模型的最优解由于已经将模型简化为与第三问类似的理想模型，可以使用贪心模型进行求解，求解得到局部的对于单个长方提的最有路径
- 真实海域的最优解需要对路线进行最优化的求解，找到最优路径与对应的，(1) 测线的总长度；(2) 漏测海区占总待测海域面积的百分比；(3) 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度。

## 七、模型评价与推广

### 7.1 模型优点

(1) 本文清楚分析所给情景与条件，通过几何关系以及变换建立相应多波束数学模型，考虑问题严谨且全面，具有高通用性。



(2) 基于贪心算法所建立的迭代模型，空间及时间复杂度低，运算效率极高，在参数已知并可调整的情况下具有较高准确性。

## 7.2 模型缺点

(1) 前两问所建立的数学模型基于几何关系，较理想化，在复杂的现实情况下适用性差。

(2) 贪心算法敏感性高，泛化能力差，具有一定主观性，通用性差。

### 7.2.1 模型推广

模型能较处理好现实问题，而且复杂度低，可以用于其他测绘，如地图，地壳。

## 参考文献

- [1] 余启义.(2022). 基于多波束测深技术的海底地形测量. 测绘与空间地理信息 (09),262-264.
- [2] 张楚琦.(2022). 基于多波束测深系统的海南港北港水深测量应用. 鄂州大学学报 (05),103-105. doi:10.16732/j.cnki.jeu.2022.05.036.
- [3] 徐红健.(2022). 基于多波束测深异常值探测的海底三维建模研究. 集成电路应用 (03),186-187. doi:10.19339/j.issn.1674-2583.2022.03.080.
- [4] 刘经南, 赵建虎.(2002). 多波束测深系统的现状和发展趋势. 海洋测绘 (05),3-6.
- [5] 罗君.(2018). 多波束与单波束测深数据融合处理方法. 海洋测绘 (06),21-24.
- [6] 高慎明 & 王晓云.(2018). 广西某海底管道项目的测线布设方法与优化..(eds.) 中国石油石化工程建设创新发展大会—石油天然气勘察技术第二十六次技术交流研讨会论文集 (pp.210-213).


## 附录


### 支撑材料


#### 1. 表格文件


#### 2. 代码

 result1.xlsx


 result2.xlsx

 附录二 贪心算法代码.py

 附录三 贪心...分析代码.py

 附录四 问题 3 可视化代码.py

 附录五 问题 4 代码.py

 附录一 问题 ...题 2 代码.py

## 附录一 问题 1 及问题 2 代码

```
import math

# 问题一
def overlapping(theta, alpha, Dis):
    Depthes = []
    W = []
    Etas = [-1]
    for d in Dis:
        print(d)

        tan_alpha = math.tan(math.radians(alpha))
        depth = 70 - d * tan_alpha
        Depthes.append(depth)
        # print("深度: " + str(depth))

        sin2_theta = math.sin(math.radians(theta / 2))
        w = (depth * sin2_theta) / math.sin(math.radians((180 - theta) / 2 - alpha)) + (depth * sin2_theta) / math.sin(
            math.radians((180 - theta) / 2 + alpha))
        # print("覆盖宽度: "+str(w))
        W.append(w)

    if d == -800:
        print("初始情况, 没有覆盖率")
    else:
        eta = 1 - (200 / W[-1])
        print(W[-1])
        Etas.append(eta)

print(Depthes)
print(W)
print(Etas)
```

```

# 问题二
def CoverW(beta, alpha, theta, Dis):
    for beta in beta:
        print("beta:" + str(beta))
        W = []
        Depthes = [120]
        for idx, dk in enumerate(Dis, start=1):
            if idx == 1:
                depth = int(Depthes[-1])
                sin2_theta = math.sin(math.radians(theta / 2))
                w = ((depth) * sin2_theta) / math.sin(math.radians((180 - theta) / 2 - alpha)) + (
                    depth * sin2_theta) / math.sin(
                        math.radians((180 - theta) / 2 + alpha))
                # print(w)
                W.append(w)
            else:
                det_d = Dis[idx-1] - Dis[idx - 2]
                # print(det_d)
                det_h = det_d * math.cos(math.radians(beta)) * math.tan(math.radians(alpha))
                A = math.degrees(math.atan(det_h / det_d))
                depth = Depthes[-1] + det_h
                Depthes.append(depth)
                sin2_theta = math.sin(math.radians(theta / 2))
                w = ((depth) * sin2_theta) / math.sin(math.radians((180 - theta) / 2 - A)) + (
                    depth * sin2_theta) / math.sin(
                        math.radians((180 - theta) / 2 + A))
                W.append(w)
        # print(Depthes)
        print(W)

def main():
    # Dis_q1 = [-800, -600, -400, -200, 0, 200, 400, 600, 800] # -800, -600, -400, -200, 0, 200, 400, 600, 800
    alpha = 1.5
    theta = 120
    # overlapping(theta, alpha, Dis_q1)

    beta = [0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315]
    Dis_q2 = [0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1]
    Dis_q2_haili = [x * 1852 for x in Dis_q2]
    CoverW(beta, alpha, theta, Dis_q2_haili)

if __name__ == '__main__':
    main()

```

## 附录二 贪心算法代码

```

import math
def get_d(p):
    return 110+(p[0]-2)*math.tan(math.radians(alpha))

def get_w(p):
    theta = 120
    sin2_theta = math.sin(math.radians(theta / 2))
    return (get_d(p) * sin2_theta) / math.sin(math.radians((180 - theta) / 2 - alpha)) + (get_d(p) *
sin2_theta) / math.sin(
    math.radians((180 - theta) / 2 + alpha))

def to_haili(p):
    p = [x * 1852 for x in p]
    return p
# main
alpha = 1.5

keep=1
S = 2 * 1852 * 4 / math.cos(math.radians(alpha)) * 1852
print(S)
path = []
p = [7408, 0, 110 + (4 - 2) * math.tan(math.radians(alpha)) * 1852]
l = 2 * 1852
w = get_w(p)
s = l*w/2
d = []
eta = 0.3
while keep:
    print("这是第: "+str(keep))
    print(p)
    print(s)
    w = get_w(p)
    print(w)
    if s<S:
        p[0] = p[0] + (1-eta)*w
        print("测检间距d: "+str((1-eta)*w))
        d.append((1-eta)*w)
        s = s + l* w*(1-eta)
        keep = keep+1
    else:
        break
print(d)

```

### 附录三 贪心算法敏感度分析代码

```

import matplotlib.pyplot as plt

# 创建一个新的图形，并设置背景颜色为浅蓝色
# fig = plt.figure(figsize=(8, 4), facecolor='lightblue')

# 定义矩形的顶点坐标
A = [0, 0]
B = [4 * 1852, 0]
C = [0, 2 * 1852]
D = [4 * 1852, 2 * 1852]

# 定义d的数据
d = [0, 949.8478730927939, 1027.5795805927232, 1111.672536585193, 1202.6473199135785,
1301.0671114878903, 1407.5411806655702]

# 绘制矩形ABCD并设置填充颜色为浅蓝色
plt.fill([A[0], B[0], D[0], C[0]], [A[1], B[1], D[1], C[1]], 'lightblue')

v = 0
# 绘制与BD平行的直线并设置颜色为浅蓝色
for value in d:
    v = v + value
    plt.plot([B[0] - v, D[0] - v], [B[1], D[1]], 'red', linestyle='--')

# 显示坐标轴和数值标签
plt.xlabel('CD')
plt.ylabel('AC')

# 显示图例
plt.legend()

# 显示图形
plt.show()

```

#### 附录四 问题3 可视化代码

```

import matplotlib.pyplot as plt

# 数据集1
X1 = [1.5, 3, 4.5, 6]
Y1 = [27883892, 32866907, 35743840, 30901891]

# 数据集2
X2 = [10, 12.5, 15, 17.5, 20]
Y2 = [27883892, 32434266, 31358134, 30295541, 29395477]

# 绘制第一个树状图
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.bar(X1, Y1, color='b', width=0.2) # 减小宽度为0.6
plt.xlabel('alpha')
plt.ylabel('s')
plt.title('sensitivity analysis')
plt.grid(True)
plt.show()

# 绘制第二个树状图
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.bar(X2, Y2, color='g', width=0.2) # 减小宽度为1.2
plt.xlabel('eta')
plt.ylabel('s')
plt.title('sensitivity analysis')
plt.grid(True)
plt.show()

```

#### 附录五 问题 4 代码

```

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.interpolate import griddata

# 设置绘图样式，去掉网格线
plt.rcParams['axes.grid'] = False

# 指定xlsx文件路径
xlsx_file_path = '附件.xlsx'

# 使用pandas读取xlsx文件，跳过前两行作为列名
df = pd.read_excel(xlsx_file_path, header=[0, 1], index_col=0)

# 获取深度数据
depth_data = df.values

# 计算深度数据的绝对值
absolute_depth_data = np.abs(depth_data)

# 计算海底深度（最大深度值）
max_depth = absolute_depth_data.max()

# 将深度数据转换为相对于海底的高度数据，并将大于200的值截断为200
depth_data = max_depth - absolute_depth_data
depth_data[depth_data < 0] = 0 # 将深度小于0的值设置为0

# 获取横坐标和纵坐标
x = df.columns.levels[0].values
y = df.index.values

# 创建一个三维图形
fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# 将x和y使用meshgrid重新塑造以匹配depth_data的维度
x, y = np.meshgrid(x, y)

```



```

# 定义新的坐标网格，用于插值
new_x = np.linspace(x.min(), x.max(), 100)
new_y = np.linspace(y.min(), y.max(), 100)
new_x, new_y = np.meshgrid(new_x, new_y)

# 进行二维插值
smooth_depth_data = griddata((x.ravel(), y.ravel()), depth_data.ravel(), (new_x, new_y),
method='cubic')

# 绘制平滑的3D地形图，使用'coolwarm'颜色映射
surf = ax.plot_surface(new_x, new_y, smooth_depth_data, cmap='coolwarm', linewidth=0)

# 设置坐标轴标签
ax.set_xlabel('X Label')
ax.set_ylabel('Y Label')
ax.set_zlabel('Depth (meters)') # 将标签修改为Depth

# 隐藏坐标轴的数值
ax.set_xticklabels([])
ax.set_yticklabels([])
ax.set_zticklabels([])

# 指定要标记的四个点的坐标和深度值
points = [
    (4, 0, 200-197.20),
    (0, 0, 200-24.4),
    (0, 5, 200-84.4),
    (4, 5, 200-65.2)
]

# 提取坐标和深度值
x_coords, y_coords, depth_values = zip(*points)

# 绘制标记点
ax.scatter(x_coords, y_coords, depth_values, color='red', s=20)

# 绘制点之间的连线
for i in range(len(points)):
    for j in range(i + 1, len(points)):
        ax.plot([points[i][0], points[j][0]], [points[i][1], points[j][1]], [points[i][2], points[j][2]], color='red')

# 显示图形
plt.show()

```