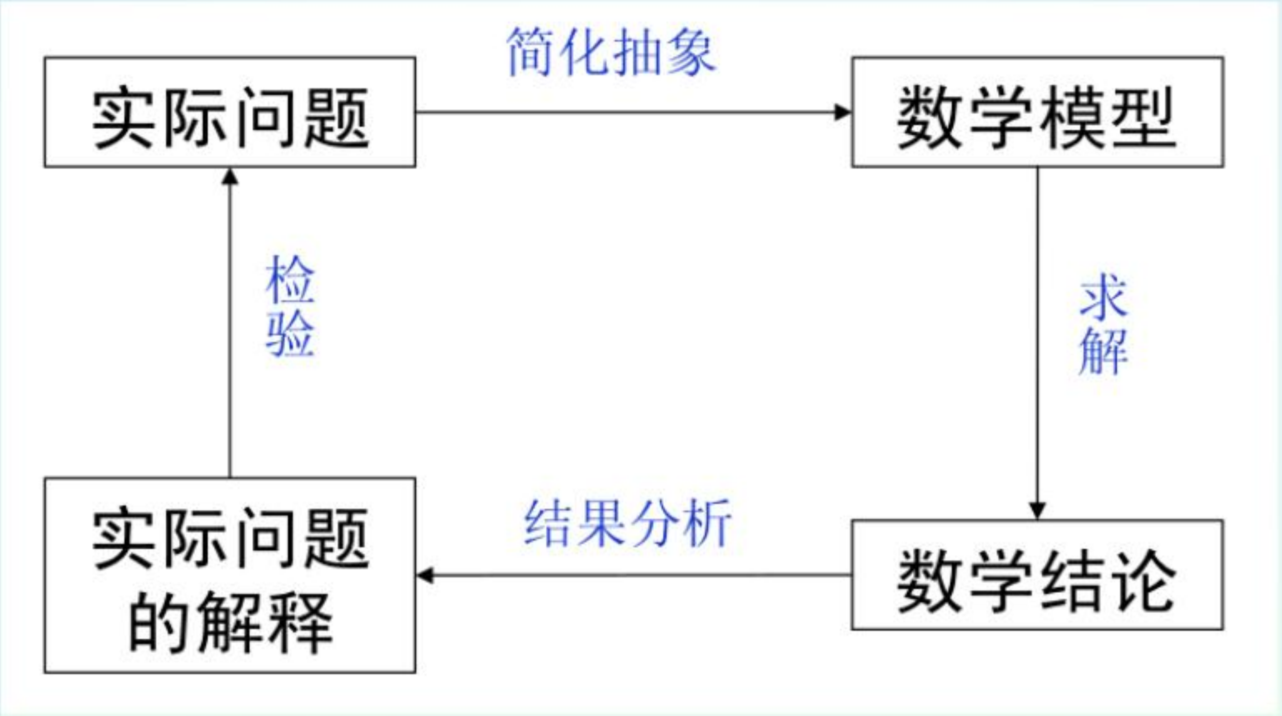
数值计算方法（数值分析）

胡建芳

hujf5@mail.sysu.edu.cn

计算机学院

课程简介



如何求解数学模型问题?

数值计算方法，数值分析

课程简介

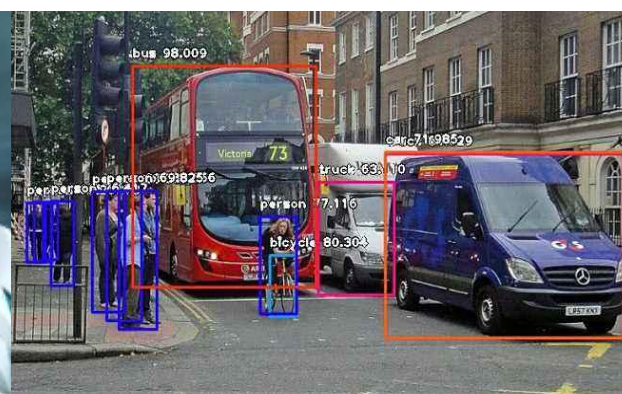
- 最理想的结果，可以找到数学模型问题的解析解
- 在大部分情形下，求解数学模型的解析解很困难，或者解析解很复杂，不利于计算、分析
- 随着计算机的发展，可以用计算机来求解

计算方法是一种研究并求解数学问题的**数值近似解**的方法。

课程简介

具体来说:

1. 简单或复杂的数学问题。如$\sqrt{x}$, $\ln x$, $Ax=b$, $\int_a^b f(x)dx$,
   微分方程(组) ... 等等问题
2. 构造数值计算算法，将问题变为$+, -, \times, \div$的操作
3. 编程让计算机计算，并得到结果



课程简介

课程特点

计算方法是连接**数学模型问题**和**计算机**的桥梁，它具有

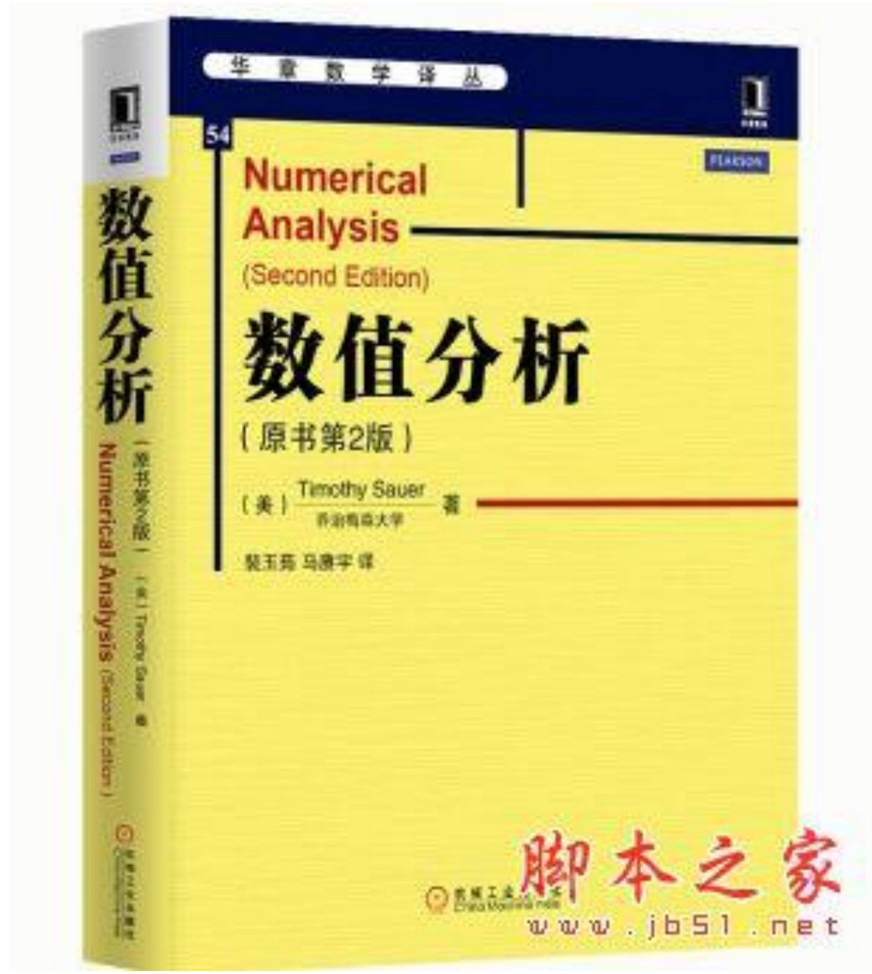
- **理论性**: 需要对模型问题有些简单的认知（如：解的存在唯一性）； 需要对算法的一些特性进行分析
- **实践性**: 需要编程实现算法,

随着计算机技术的发展，计算方法已经广泛应用到包括物理、化学、生物学、经济学等各行各业。

课程简介

- **课程内容:**

1，绪论+基础知识;
2，求解方程
3，求解方程组
4，插值
5，最小二乘法
6，数值微分与积分
7，特征值与奇异值
8，最优化
9，课程实践



课程简介

- **课程考核:**

平时成绩（20%）+课程实践（30%）+期末考试（50%）

平时成绩： 签到、作业完成情况、

课程实践： 实践内容与上课内容相关，有一定的拓展，根据课程实践完成情况（2-3人一组）打分，编程语言不限（MATLAB,Pytorch,C++等），需要演示结果

期末考试： 考试成绩

平时作业交给助教，助教联系方式待定

基础知识

■ 误差：

误差的来源

从实际问题到最后的计算结果产生的误差，主要有如下3类：

- *原始误差*，或称为模型误差，是在建模的过程中产生的误差
- *截断误差*，或称为方法误差，是数值方法产生的误差
- *舍入误差*，或称为计算误差，是由于计算机表达数据产生的误差

定义 1.
$\tilde{x}$为x的近似值，则称

$$E(x) = x - \tilde{x}$$

为*误差*，或*绝对误差*

$$R(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x}$$

为*相对误差*

基础知识

误差的计算：

Example 1.14. Find the error and relative error in the following three cases. Let $x = 3.141592$ and $\widehat{x} = 3.14$; then the error is

$$E_x = |x - \widehat{x}| = |3.141592 - 3.14| = 0.001592, \tag{1a}$$

and the relative error is

$$R_x = \frac{|x - \widehat{x}|}{|x|} = \frac{0.001592}{3.141592} = 0.00507.$$

Let $y = 1{,}000{,}000$ and $\widehat{y} = 999{,}996$; then the error is

$$E_y = |y - \widehat{y}| = |1{,}000{,}000 - 999{,}996| = 4, \tag{1b}$$

and the relative error is

$$R_y = \frac{|y - \widehat{y}|}{|y|} = \frac{4}{1{,}000{,}000} = 0.000004.$$

Let $z = 0.000012$ and $\widehat{z} = 0.000009$; then the error is

$$E_z = |z - \widehat{z}| = |0.000012 - 0.000009| = 0.000003, \tag{1c}$$

and the relative error is

$$R_z = \frac{|z - \widehat{z}|}{|z|} = \frac{0.000003}{0.000012} = 0.25.$$

基础知识

减小误差的方法：

1，避免相近的数相减

2，避免除以绝对值很小的数

3，避免计算溢出

Example 1.17. Compare the results of calculating $f(500)$ and $g(500)$ using six digits and rounding. The functions are $f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ and $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$. For the first function,

$$
\begin{aligned}
f(500) &= 500\left(\sqrt{501} - \sqrt{500}\right) \\
&= 500(22.3830 - 22.3607) = 500(0.0223) = 11.1500.
\end{aligned}
$$

For $g(x)$,

$$
\begin{aligned}
g(500) &= \frac{500}{\sqrt{501} + \sqrt{500}} \\
&= \frac{500}{22.3830 + 22.3607} = \frac{500}{44.7437} = 11.1748.
\end{aligned}
$$

求$g(x) = 10^7(1 - \cos x)$在2°处的近似值

基础知识

- **减小误差的方法：**

1，避免相近的数相减

2，避免除以绝对值很小的数

3，避免计算溢出

在16位二进制系统的计算机上计算 $\omega = \dfrac{2^{-7} \times 2^{-9}}{2^{-10}}$

利用算法 $\omega = \dfrac{(2^{-7} \times 2^{-9})}{2^{-10}} = \dfrac{0}{2^{-10}} = 0$ 产生下溢出，

而利用算法 $\omega = \left(\dfrac{2^{-7}}{2^{-5}}\right) \times \left(\dfrac{2^{-9}}{2^{-5}}\right) = 2^{-2} \times 2^{-4} = 2^{-6}$

基础知识

- **误差传播（扩散）：**

两个近似数 x_1^* 与 x_2^*，其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$ 及 $\varepsilon(x_2^*)$，它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*);$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*);$$ 避免乘以大的数

$$\varepsilon(x_1^* / x_2^*) \approx \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0).$$ 避免除以小的数

基础知识

误差传播（扩散）：

一般情况下，当自变量有误差时函数值也产生误差，其误差限可利用函数的泰勒展开式进行估计.

设 $f(x)$是一元函数，x的近似值为 x^*，以 $f(x^*)$近似 $f(x)$，其误差界记作 $\varepsilon(f(x^*))$，利用泰勒展开

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,$$

ξ介于x, x^*之间，

取绝对值得

$$|f(x)-f(x^*)|\le|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}\varepsilon^2(x^*).$$

假定 $f'(x^*)$与 $f''(x^*)$的比值不太大，可忽略 $\varepsilon(x^*)$的高阶项，于是可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$ **导数很大时，误差放大**

基础知识

有效位数：

有效位数

定义 2.
近似数的误差不超过某位的半个单位，则从这一位开始到第一个非0位的位数，称为*有效位数*

例 1. $\pi = 3.1415926535\cdots$ 的近似值3.14， 3.141, 3.14159分别具有几位有效数字?

例 2. 若有数x，经过**四舍五入**后得到其近似值$\tilde{x}$，

$$\tilde{x} = \pm x_1.x_2\cdots x_n \times 10^m$$

其中$x_1 \neq 0$，$x_1, \cdots, x_n$分别为$0, 1, \cdots, 9$中的一个数字，m为整数。则$\tilde{x}$的有效位数就是从最后一位到第一个非0位的位数，即n位有效数字。

基础知识

误差与有效位数的关系

例 3. 若$\tilde{x}$具有n位有效数字，估计其相对误差

解. 设

$$\tilde{x} = \pm x_1.x_2\cdots x_n \times 10^m \tag{1}$$

则$|x| > (x_1.x_2 - 0.1) \times 10^m$，因而

$$|R(x)| = |\frac{E(x)}{x}| \leq \frac{0.5 \times 10^{-(n-1)} \times 10^m}{(x_1.x_2 - 0.1) \times 10^m}$$

简单点，可以用

$$|R(x)| = \leq \frac{0.5 \times 10^{-(n-1)} \times 10^m}{x_1 \times 10^m}$$

来估计相对误差

基础知识

■ **算法的稳定性：控制误差扩散**

计 算 积 分 ：

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

解 ： 用 分 部 积 分 法

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

$$= x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx$$

$$= 1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx$$

或 $E_n = 1 - nE_{n-1}$ （n=2，3，. . . ）

这里 $E_1 = \frac{1}{e} = 0.3678794412$

$$\begin{pmatrix} E_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx \\ = \int_0^1 x d e^{x-1} \\ = x e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx \\ = 1 - e^{x-1} \Big|_0^1 = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \end{pmatrix}$$

基础知识

算法的稳定性：控制误差扩散

取6位有效数字，计算E_n的前9个值

$$E_1 = 0.367879$$
$$E_2 = 1 - 2E_1 = 0.264242$$
$$E_3 = 1 - 3E_2 = 0.207174$$
$$E_4 = 1 - 4E_3 = 0.170904$$
$$E_5 = 1 - 5E_4 = 0.145480$$
$$E_6 = 1 - 6E_5 = 0.127120$$
$$E_7 = 1 - 7E_6 = 0.110160$$
$$E_8 = 1 - 8E_7 = 0.118720$$
$$\boxed{E_9 = 1 - 9E_8 = -0.068480}$$

虽然被积函数x^9e^{x-1}在整个积分区间（0，1）是正的，可是计算的结果却是负的。

什么原因引起这么大的误差呢？计算机中唯一的舍入误差是在E_1

E_1的舍入误差是4.412×10^{-7}，在计算E_2时它乘了+2，在计算E_3时E_2中的误差又乘了+3，以此类推，E_9的误差为：

$$9!\times4.412\times10^{-7}\approx0.1601$$

所以$E_9^*=E_9+e=-0.068480+0.1601=0.0916$（取三位有效数字）

基础知识

算法的稳定性：控制误差扩散

怎样避免这种不稳定的算法呢？改写递归关系式如下：

$$E_{n-1}=\frac{1-E_n}{n}$$

$$E_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx \le \int_0^1 x^n dx \le \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \le \frac{1}{n+1}$$

当 $n\to\infty, E_n\to 0$。如取 E_{20} 的近似值为零，以它为起始值，则起始误差最大为 $\frac{1}{21}$。此误差在求 E_{19} 时乘了 $\frac{1}{20}$，因此 E_{19} 的误差最大为 $\frac{1}{20}\times\frac{1}{21}$。$E_9$ 的误差最大，为 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}\times\cdots\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{21}$。$E_9$ 时，起始误差已减小至 2.5×10^{-8}。

$$E_{20}=0 \qquad E_{19}=\frac{1-E_{20}}{20}=0.05$$

$$E_{18}=\frac{1-E_{19}}{19}=0.05 \qquad E_{17}=\frac{1-E_{18}}{18}=0.0527778$$

$$E_{16}=\frac{1-E_{17}}{17}=0.0557190 \qquad E_{15}=\frac{1-E_{16}}{16}=0.0590176$$

$$E_{14}=\frac{1-E_{15}}{15}=0.0627322 \qquad E_{13}=\frac{1-E_{14}}{14}=0.0669477$$

$E_9=0.0916123$

基础知识

- **2进制 vs. 10进制：**

In general, let N denote a positive integer; the digits $b_0, b_1, \ldots, b_J$ exist so that N has the base 2 expansion

$$(4)\qquad N = (b_J \times 2^J) + (b_{J-1} \times 2^{J-1}) + \cdots + (b_1 \times 2^1) + (b_0 \times 2^0),$$

where each digit b_j is either a 0 or 1. Thus N is expressed in binary notation as

$$(5)\qquad N = b_J b_{J-1} \cdots b_2 b_1 b_{0\,\text{two}} \qquad \text{(binary)}.$$

$$\boxed{1563 = (1 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (3 \times 10^0).}$$ ⟹ **10进制**

$$\boxed{\begin{aligned} 1563 &= (1 \times 2^{10}) + (1 \times 2^9) + (0 \times 2^8) + (0 \times 2^7) + (0 \times 2^6) \\ &\quad + (0 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) \\ &\quad + (1 \times 2^0) \boxed{= 11000011011_{\text{two}}} \end{aligned}}$$ ⟹ **2进制**

基础知识

2进制快速计算:

(6) $$\frac{N}{2} = (b_J \times 2^{J-1}) + (b_{J-1} \times 2^{J-2}) + \cdots + (b_1 \times 2^0) + \frac{b_0}{2}.$$

Hence the remainder, upon dividing N by 2, is the digit b_0. Now determine b_1. If (6) is written as $N/2 = Q_0 + b_0/2$, then

(7) $$Q_0 = (b_J \times 2^{J-1}) + (b_{J-1} \times 2^{J-2}) + \cdots + (b_2 \times 2^1) + (b_1 \times 2^0).$$

Now divide both sides of (7) by 2 to get

$$\frac{Q_0}{2} = (b_J \times 2^{J-2}) + (b_{J-1} \times 2^{J-3}) + \cdots + (b_2 \times 2^0) + \frac{b_1}{2}.$$

Hence the remainder, upon dividing Q_0 by 2, is the digit b_1. This process is continued and generates sequences $\{Q_k\}$ and $\{b_k\}$ of quotients and remainders, respectively. The process is terminated when an integer J is found such that $Q_J = 0$. The sequences obey the following formulas:

(8) $$\begin{aligned} N &= 2Q_0 + b_0 \\ Q_0 &= 2Q_1 + b_1 \\ &\vdots \\ Q_{J-2} &= 2Q_{J-1} + b_{J-1} \\ Q_{J-1} &= 2Q_J + b_J \qquad (Q_J = 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1563 &= 2 \times 781 + 1, & b_0 &= 1 \\
781 &= 2 \times 390 + 1, & b_1 &= 1 \\
390 &= 2 \times 195 + 0, & b_2 &= 0 \\
195 &= 2 \times 97 + 1, & b_3 &= 1 \\
97 &= 2 \times 48 + 1, & b_4 &= 1 \\
48 &= 2 \times 24 + 0, & b_5 &= 0 \\
24 &= 2 \times 12 + 0, & b_6 &= 0 \\
12 &= 2 \times 6 + 0, & b_7 &= 0 \\
6 &= 2 \times 3 + 0, & b_8 &= 0 \\
3 &= 2 \times 1 + 1, & b_9 &= 1 \\
1 &= 2 \times 0 + 1, & b_{10} &= 1.
\end{aligned}$$

基础知识

- **2进制与10进制数关系：**

所有的10进制数都可以用2进制表示，反之亦然。

试一试怎么证明。

基础知识

多项式计算:

计算在 $x = \frac{1}{2}$ 处的多项式 $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

10 次乘法和 4 次加法

方法 1 首先最直接的方法是

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} + 3*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} - 3*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} + 5*\frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}. \quad (0.1)$$

方法 2 首先求出输入数 $x = \frac{1}{2}$ 的各次幂, 并把它们存储起来备用:

$$\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2*\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3*\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

现在我们就可以把这些项加起来:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2*\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3*\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3*\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5*\frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}.$$

7 次乘法以及 4 次加法

还可以更快吗?

基础知识

多项式计算：

方法 3(嵌套乘法) 把多项式改写为下面的形式以便能依括号从内到外进行计算：

$$\begin{aligned}P(x) &= -1+x(5-3x+3x^2+2x^3) = -1+x(5+x(-3+3x+2x^2)) \\ &= -1+x(5+x(-3+x(3+2x))) = -1+x*(5+x*(-3+x*(3+x*2))),\end{aligned}$$

$$\text{乘}\quad \frac{1}{2}*2,\quad \text{加}\quad +3\to 4;\qquad \text{乘}\quad \frac{1}{2}*4,\quad \text{加}\quad -3\to -1;$$

$$\text{乘}\quad \frac{1}{2}*(-1),\quad \text{加}\quad +5\to \frac{9}{2};\qquad \text{乘}\quad \frac{1}{2}*\frac{9}{2},\quad \text{加}\quad -1\to \frac{5}{4}.$$

$\boxed{4\ \text{次乘法和}\ 4\ \text{次加法}}$

```
function y=nest(d,c,x,b) if nargin<4, b=zeros(d,1); end y=c(d+1);
for i=d:-1:1
  y = y.*(x-b(i))+c(i);
end
```

基础知识

浮点表示：

IEEE 标准包含一组实数的二进制表示法. **浮点数**(floating point number) 由三部分组成, 即**符号**(sign, + 或 −)、**尾数**(mantissa, 它包含一串有效数字) 以及**阶**(即指数, exponent). 这三部分合一起就表示计算机中的浮点数.

精度	符号	阶	尾数
单	1	8	23
双	1	11	52
长双	1	15	64

$$\pm 1.bbb\cdots b \times 2^p, \quad N \text{ 个 } b \text{ 中的每一个或者是 } 0 \text{ 或者是 } 1$$

定义 0.1 **机器**ε(machine epsilon) 表示 1 与大于 1 的最小浮点数之间的差, 记为 $\varepsilon_{\text{mach}}$. 对于 IEEE 双精度浮点标准来说,

$$\varepsilon_{\text{mach}} = 2^{-52}.$$

基础知识

微积分回顾：

定理 0.4(介值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数, 那么 f 取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一个值. 更精确地说, 如果 y 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数, 那么存在一个数 $c(a \leqslant c \leqslant b)$ 使得 $f(c) = y$.

定理 0.6(中值定理) 设 f 是在区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 那么在 a 和 b 之间存在一个数 c, 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 0.7(Rolle 定理) 设 f 是在区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 并假定 $f(a) = f(b)$, 那么在 a 和 b 之间存在一个数 c, 使得 $f'(c) = 0$.

定理 0.8(带余项的 Taylor 定理) 设 x 和 x_0 是实数, f 在区间 $[x_0, x]$(或 $[x, x_0]$)上 $k+1$ 次连续可微, 那么在 x 与 x_0 之间存在一个数 c, 使得

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(c).$$

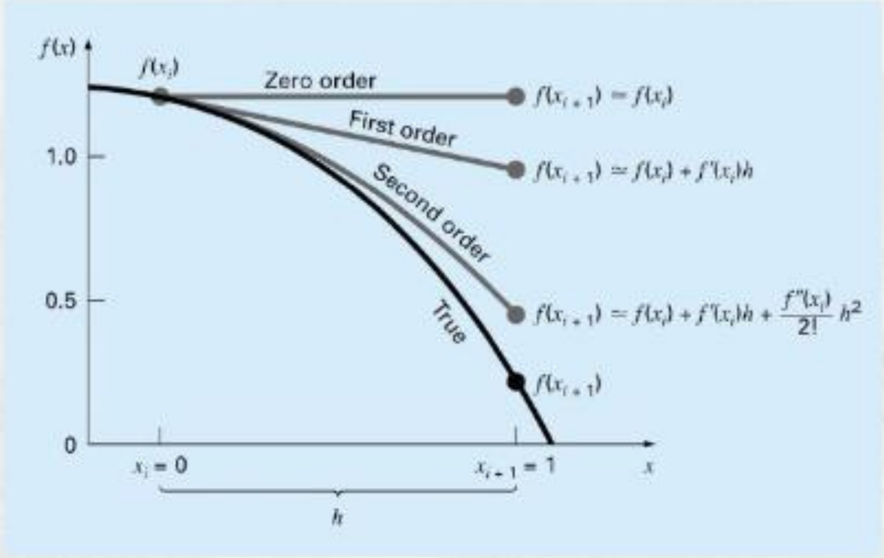
基础知识

微积分回顾：

- 例：当 $x_i=0, h=1$时，用零阶到四阶泰勒级数展开预测函数

$$f(x)=-0.1x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2$$

在 $x_{i+1}=1$处的函数值：



- 解： $f(0)=1.2$
  - $n=0$， $f(x_{i+1})\cong 1.2$

    $E_t=0.2-1.2=-1.0$
  - $n=1$， $f'(0)=-0.25$

    $f(x_{i+1})\cong 1.2-0.25h$

    $f(1)\cong 0.95$

    $E_t=0.2-0.95=-0.75$
  - $n=2$， $f''(0)=-1.0$

    $f(x_{i+1})\cong 1.2-0.25h-0.5h^2$ $\quad f(1)\cong 0.45$ $\quad E_t=0.2-0.45=-0.25$

- 四阶级数的泰勒级数展开将得到一个准确的估计结果：

$$f(x)=1.2-0.25h-0.5h^2-0.15h^3-0.1h^4$$

$$R_4=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}h^5=0$$

基础知识

微积分回顾：

定理 0.4(介值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数, 那么 f 取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一个值. 更精确地说, 如果 y 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个数, 那么存在一个数 $c(a \leqslant c \leqslant b)$ 使得 $f(c)=y$.

定理 0.6(中值定理) 设 f 是在区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 那么在 a 和 b 之间存在一个数 c, 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 0.7(Rolle 定理) 设 f 是在区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 并假定 $f(a)=f(b)$, 那么在 a 和 b 之间存在一个数 c, 使得 $f'(c)=0$.

基础知识

■ 微积分回顾：

定理 0.8(带余项的 Taylor 定理) 设 x 和 x_0 是实数，f 在区间 $[x_0, x]$(或 $[x, x_0]$)上$k+1$ 次连续可微，那么在 x 与 x_0 之间存在一个数 c，使得

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(c).$$

例 0.9 求 $f(x) = \sin x$ 在以点 $x_0 = 0$ 为中心的邻域上的 4 次 Taylor 多项式 $P_4(x)$. 使用 $P_4(x)$ 来计算 $\sin x$ 在 $|x| \leqslant 0.000\,1$ 时的值，估计最大可能误差.

容易求出多项式是 $P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$. 注意 4 次项没有出现，这是因为它的系数为 0. 余项是

$$\frac{x^5}{120}\cos c,$$

它的绝对值不可能大于 $\frac{|x|^5}{120}$. 对于 $|x| \leqslant 0.000\,1$，这个余项最多是 $\frac{10^{-20}}{120}$，

基础知识

- **微积分回顾：**

定理 0.9(积分形式的中值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，g 是可积函数，并且在 $[a,b]$ 上不变号，那么在 $[a,b]$ 内存在一个数 c，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

下节课预报：怎么去计算 c

基础知识

作业：

1. 对于 $x = 10^{-1}, \cdots, 10^{-14}$, 按照双精度四则运算, 计算下面的表达式 (譬如用 MATLAB). 然后用不会让两个几乎相等的数相减的另一种形式, 再计算一遍, 并列结果表. 说出对每一个 x, 原来表达式中准确数字的位数:
   (a) $\frac{1-\sec x}{\tan^2 x}$; (b) $\frac{1-(1-x)^3}{x}$.

3. 考虑两直角边的边长分别是 3 344 556 600 和 1.222 222 2 的直角三角形. 问斜边相比较长的直角边长多少? 给出至少有 4 位准确数字的答案.

THE END