信息安全数学基础
第八章 群

中山大学 计算机学院

抽象代数的基本概念

- 抽象代数（近世代数）的研究对象是代数系统，即集合以及定义在其上的一个或若干个代数运算构成的系统.
- 挪威数学家阿贝尔(Abell)，法国数学家伽罗瓦(Galois)，英国数学家摩根(Mogrgan)和布尔(Boole)等人都为抽象代数的开创做出了杰出贡献.
- 荷兰数学家范德瓦尔登(V • Derwaerden)，根据德国数学家诺特(Noether)和奥地利数学家阿廷(Artin)的讲稿，于1930年和1931年分别出版了《近世代数学》一卷和二卷，标志着抽象代数的成熟.
- 当今，抽象代数已成为信息科学的最重要数学基础之一，在信息论与编码，以及密码学方面有广泛而深刻的应用.
- 基于抽象代数发展出来的其他数学分支，例如，代数数论和代数几何，也在信息科学有深刻的应用.
- 另外，抽象代数在近代物理和近代化学等许多自然科学领域都有重要应用，因而它也是现代科学技术的数学基础之一，许多非数学专业的科技研究人员也都需要用到它.

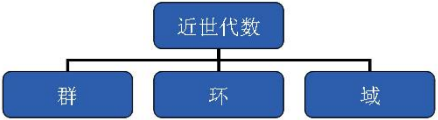
代数系统

整数集合$\mathbb{Z}$以及定义在这个集合上的整数加法$+$一起构成了一个代数系统$(\mathbb{Z},+)$, 被称为一个群.

整数集合$\mathbb{Z}$以及定义在这个集合上的整数加法$+$和整数乘法$\times$一起构成了一个代数系统$(\mathbb{Z},+,\times)$, 被称为一个环.

有理数集合$\mathbb{Q}$以及定义在这个集合上的整数加法$+$和整数乘法$\times$一起构成了一个代数系统$(\mathbb{Z},+,\times)$, 被称为一个域.

抽象代数的最核心的内容包括: 群(group), 环(ring), 域(field)等代数系统.



2.1 集合的概念

- 若干固定事物的全体叫做集合, 用A, B, C, X等表示
- 固定事物称为元素, 用a, b, c, x, y等表示
- 有限集, 无限集
- 集合中元素个数用$|A|$表示
- 子集: 若集和A中的元素都为集合B中的元素, 则称集合A是集合B的一个子集. 记作: $A \subseteq B$
- 集合的运算: 相等, 交集, 并集, 差集

2.2 映射

- 映射
  设X与Y是两个集合，如果有一个法则f，它对于X中每一个元素x，在Y中都有一个唯一确定的元素y与它对应，则称f为X到Y的一个映射．表示为

$$f : x \to y,$$

  或着$y = f(x)$，并且y叫做x在映射f下的像，而x叫做y在映射f下的原像.

- 单射
  $f : A \to B$，若任给$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$则：$f(x_1) \neq f(x_2)$

- 满射$f : A \to B$，若任给$y \in B$，都有$x \in A$使$y = f(x)$

- 双射(一一映射)
  即为单射又为满射

2.3 笛卡尔乘积

- 序偶(ordered pair)
  由两个有固定次序的个体x, y组成的序列称为序偶，记为$< x, y >$，x是序偶的第一个分量，y是序偶的第二个分量.
- 笛卡尔乘积
  给定两个集合A, B，若序偶的第一个分量是A的一个元素,序偶的第二个分量是B的一个元素，则所有这样的序偶的集合称为A与B的笛卡尔(乘)积，简称卡氏积，记为$A \times B$，即$A \times B = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in B\}$
- 卡氏阵
  若A, B为有限集，比如$A = \{a_1, \cdots, a_m\}$，$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$则$A \times B$的元素可排成一个矩阵(称为卡氏阵):

$$\begin{bmatrix} < a_1, b_1 > & < a_1, b_2 > & \cdots & < a_1, b_n > \\ < a_2, b_1 > & < a_2, b_2 > & \cdots & < a_2, b_n > \\ < a_3, b_1 > & < a_3, b_2 > & \cdots & < a_3, b_n > \\ & \cdots & & \\ < a_m, b_1 > & < a_m, b_2 > & \cdots & < a_m, b_n > \end{bmatrix}_{m \times n}$$

2.4 代数系统

- 运算
  A是集合,f是从A^2到A的一个函数: $f : A^2 \to A$, 则称f是集合A上的一个二元运算, 即自变量有2个.
- 代数系统
  A是集合, $f_1, f_2, \cdots, f_k$是若干定义在A上的运算, 则由A和$\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$组成的系统称为代数系统, 记为$< A, f_1, \cdots, f_k >$.

  例: 代数系统$< \mathbb{Z}, + >$, $< \mathbb{Z}, +, \times >$和$< \mathbb{Q}, +, \times >$.

3. 半群与群

- 半群
  设$\mathbb{G}$是一个非空集合, '$\cdot$'是$\mathbb{G}$上的一个二元运算, 即$\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$). 如果'$\cdot$'满足:
  结合律: 若对任意$x, y, z \in \mathbb{G}$, 均有$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
  则称'$\bullet$'在$\mathbb{G}$上是可结合的, 则称$(\mathbb{G}, \cdot)$是一个半群, 简称$\mathbb{G}$是一个半群.

- 含幺半群
  设$(\mathbb{G}, \cdot)$是一个半群, 如果对于'$\cdot$', 存在一个元素$e \in \mathbb{G}$, 使得对任意$x \in \mathbb{G}$, 均有

$$e \cdot x = x, x \cdot e = x,$$

  则称$(\mathbb{G}, \cdot)$是一个含幺半群, 简称$\mathbb{G}$是一个含幺半群.
  这个特殊的元素e称为单位元, 或幺元.

- 群(Group)
  设$(\mathbb{G},\cdot)$是一个含幺半群, 对于'$\cdot$', 如果对于所有$a\in\mathbb{G}$, 都存在元素$b\in\mathbb{G}$, 使得
  $$a\cdot b=b\cdot a=e,$$
  则称$(\mathbb{G},\cdot)$是一个群, 简称$\mathbb{G}$是一个群. b称为a的逆元, 记作a^{-1}.

  可以看到如果b是a的逆元, 则a也是b的逆元, 即$b=a^{-1},a=b^{-1}$; a与b互逆.

  可以看到, 群的定义包含4点: 封闭性,结合律,单位元,逆元.

  可以证明, 群具有消去率: $ax=ay\Rightarrow x=y$; $xa=ya\Rightarrow x=y$

- 群的两个性质:
  设$(\mathbb{G},\cdot)$是一个群, 则其单位元e是唯一的.
  设$(\mathbb{G},\cdot)$是一个群, 则对任意可逆元a，其逆元是唯一的.

- 交换群
  设$(\mathbb{G},\cdot)$是一个群, 对于'$\cdot$', 如果对于所有$a,b\in\mathbb{G}$, 都有$a\cdot b=b\cdot a$, 则称$(\mathbb{G},\cdot)$是一个交换群,简称$\mathbb{G}$是一个交换群(abel群).

$$\mathbb{Z}_n = \{C_0, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}\},$$

即模n的剩余类构成的集合,在该集合上定义加法(模n加法):

$$C_a + C_b = C_{a+b}.$$

模n剩余类的加法满足

- 封闭性
- 结合律
- 有单位元C_0
- 所以每个元素都有逆元, $C_a + C_{n-a} = C_0$,
- 可交换

于是, $(\mathbb{Z}_n, +)$是交换群.

一般直接写$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, 对应的加法则写为$a + b \triangleq (a + b \bmod n)$.
这样的$(\mathbb{Z}_n, +)$与上意义相同, 且$(\mathbb{Z}_n, +)$一般直接写为$\mathbb{Z}_n$.

剩余类群

考虑模n的简化剩余系

$$\mathbb{Z}_n^* = \{C_k \ : \ C_k \in \mathbb{Z}_n, (k,n) = 1\},$$

以及在其上定义的乘法$C_a \times C_b \triangleq C_{ab}$.

模n简化剩余系的乘法满足

- 封闭性: $C_a, C_b \in \mathbb{Z}_n^* \Rightarrow C_{ab} \in \mathbb{Z}_n^+$
- 结合律:
  $C_a \times (C_b \times C_c) = C_a \times C_{bc} = C_{a(bc)} = C_{(ab)c} = C_{ab} \times C_c = (C_a \times C_b) \times C_c$
- 有单位元C_1
- 有逆元, $\forall C_a \in \mathbb{Z}_n^* \Rightarrow (a,n) = 1 \Rightarrow \exists (b,n) = 1 : ab \equiv 1 \bmod n \Rightarrow C_{ab} = C_1 \Rightarrow$ $C_a \times C_b = C_1$
- 可交换: $C_a \times C_b = C_{ab} = C_{ba} = C_b \times C_a$

类似地, $\mathbb{Z}_n^*$一般直接写成$\{k \ : \ k \in \mathbb{Z}, (k,n) = 1\}$, 而$C_a \times C_b$写成$a \times b \triangleq (ab \bmod n)$. 这个群中元素个数显然为$\varphi(n)$.

线性群

设$M_n(F)$是数域F上的全体n阶矩阵的集合，则$M_n(F)$对矩阵的加法构成群．但对矩阵的乘法是半群而不是群．

设$GL_n(F)$是数域F上全体可逆矩阵的集合，则$GL_n(F)$对矩阵的乘法构成群，这个群称为F上的n次全线性群，因为每个n阶可逆矩阵对应域n维线性空间中的一个可逆变换，所以$GL_n(F)$可以看作是F上n维线性空间上全体可逆线性变换的集合

对称群

定义

设S是一个非空集合. $\mathbb{G}$是S到自身的所有双射f组成的集合. 对于$f, g \in \mathbb{G}$和任意的$x \in S$, 定义f和g的复合映射$g \circ f$ 为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

则$\mathbb{G}$对于映射的复合运算构成一个群, 叫做对称群. 恒等映射是单位元. $\mathbb{G}$中的元素叫做S的一个置换.

定义

当S是n元有限集合时, $\mathbb{G}$叫做n元对称群, 或者称为置换群, 记作S_n.

置换群

设有限集合$A=\{1,2,\cdots,n\}$, 则A上的置换可以表示为:

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix},$$

其中$i_1,i_2,\cdots,i_n$是一个n级全排列, 这样的所有置换构成一个n次对称群, 记作S_n. 由n级全排列的个数知$|S_n|=n!$

例如, S_3共有$3!=6$个元素, 它们是:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\sigma_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\sigma_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

二面体群

设X为正$n(n \geq 3)$边形的顶点集合，且按照逆时针方向排列. 将正多边形绕中心o逆时针方向旋转

$$2\pi/n$$

角度，则顶点i变为顶点$(i+1) \bmod n$的位置，这个旋转是X上的一个置换，记作ρ_1，可以表示为:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

逆时针方向旋转$2k\pi/n$角度，记作ρ_k，可以表示为:

$$\rho_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ k & k+1 & k+2 & \cdots & k+n-1 \end{pmatrix}$$

其中$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

此外，逆时针方向旋转0角度ρ_0为单位变换，ρ_k还可以表示为:

$$\rho_k(i) = (k+i) \bmod n, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

在X为正$n(n \geq 3)$边形的顶点集合中，一个重要的变换(映射)是绕对称轴翻转π角度，这类变换为反射变换.

这样的对称轴一共有n个. 记过顶点0的轴为l_0，过边$(0,1)$中点的轴为l_1，过顶点1的轴为l_2，过边$(1,2)$中点的轴为l_3,$\cdots$，直到l_{n-1}. 相应的反射变换记作$\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{n-1}$. 例如:

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 0 & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

不难证明:

$$\pi_k(i) = (k+n-i) \bmod n.$$

由此还可以证明如下的运算关系:

$$\rho_k = \rho_1^k, \pi_k^2 = \rho_0, \rho_k^{-1} = \rho_{n-k}$$

$$\pi_k^{-1} = \pi_k, \rho_k\rho_l = \rho_{k+l}, \rho_k\pi_l = \pi_{k+l}$$

$$\pi_k\rho_l = \pi_{k-l}, \pi_k\pi_l = \rho_{k-l}$$

令$D_n = \{\rho_k, \pi_k : k = 0,1,2,\cdots,n-1\}$，则$D_n$对变换的复合是封闭的,有单位元$\rho_0$，每个元素都有逆元. 所以$D_n$是群，称为二面体群.

群的基本概念小结

- 半群: 封闭性, 结合律.
- 含幺半群: 含单位元的半群.
- 群: 封闭性, 结合律, 单位元, 逆元.
- 交换群: 群运算具有交换律.
- 线性群: 群元素是矩阵, 群运算是矩阵乘.
- 对称群: 群元素是非空集合S中的双射, 群运算是映射的复合.

群的阶，加法群中的零元和负元，群元素的幂

- 群的阶
  设$(\mathbb{G},\cdot)$是一个群. 如果$\mathbb{G}$是一个有限集合，则称$\mathbb{G}$为有限群，否则成为无限群. $\mathbb{G}$中的元素个数$|\mathbb{G}|$称为该群的阶.
- 群中特殊元素
  经常把交换群中的运算称为加法运算，所以交换群又称为加群. 其中的单位元被称为零元，记作0，其中任意元素x的逆元x^{-1}被称为负元，记作$-x$.
- 元素的幂(对应地,倍数)
  在一个代数系统(一般讨论的是群)$(\mathbb{G},\cdot)$中，元素a的幂a^n(n为正整数)定义为

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n}$$

约定：$a^0 = e$,
特别地，如果某两个元素a,b满足$ab = ba$,则$(ab)^n = a^n b^n$

有限群举例

- 集合$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$关于模5的加法构成了一个有限群, 并且除去元素0后关于模5的乘法也构成一个有限群.

有限群举例

- 集合$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$关于模5的加法构成了一个有限群, 并且除去元素0后关于模5的乘法也构成一个有限群.
- 集合$\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$关于模26的加法构成了一个有限群, 而除去元素0后关于模26的乘法不构成一个群.

有限群举例

- 集合$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$关于模5的加法构成了一个有限群，并且除去元素0后关于模5的乘法也构成一个有限群.
- 集合$\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, 2, \cdots, 25\}$关于模26的加法构成了一个有限群，而除去元素0后关于模26的乘法不构成一个群.
- 如果p是素数，那么集合$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$关于模$p$的加法构成了一个有限群，并且除去元素0后关于模$p$的乘法也构成一个群.

有限群举例

- 集合$\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$关于模5的加法构成了一个有限群，并且除去元素0后关于模5的乘法也构成一个有限群.
- 集合$\mathbb{Z}_{26} = \{0,1,2,\cdots,25\}$关于模26的加法构成了一个有限群，而除去元素0后关于模26的乘法不构成一个群.
- 如果p是素数，那么集合$\mathbb{Z}_p = \{0,1,2,\cdots,p-1\}$关于模$p$的加法构成了一个有限群，并且除去元素0后关于模$p$的乘法也构成一个群.
- 如果$n = pq$，那么集合$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$关于模$n$的加法构成了一个有限群，而除去元素0后关于模$p$的乘法不构成一个群.

4. 逆元的简单性质

在一个群$(\mathbb{G},\cdot)$中,

- $(a^{-1})^{-1}=a$
- $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$
  因为$(a\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1})=a\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot a^{-1}=a\cdot e\cdot a^{-1}=a\cdot a^{-1}=e$
- $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$
  这是因为
  $$\begin{aligned}
  & a^n\cdot(a^{-1})^n \\
  &=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n})\cdot(\underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n}) \\
  &=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n-1})\cdot(a\cdot a^{-1})\cdot(\underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n-1}) \\
  &=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n-1})\cdot e\cdot(\underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n-1}) \\
  &=(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n-1})\cdot(\underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n-1}) \\
  &=e
  \end{aligned}$$
- $(a^{-1})^n$经常记作a^{-n}.

4. 逆元的简单性质

定理

G是一个非空集合,定义了有结合律的二元运算, a, b是G中任意两个元素. 如果G是一个群, 则方程

$$ax = b, ya = b$$

有解. 反之,如果上述方程在G中有解, 则G是一个群.

证明: 设G是一个群, 则

$$a^{-1}ax = a^{-1}b \rightarrow x = a^{-1}b.$$

设上述方程有解. 则方程$ax = a$有解, 从而有单位元. 同时, 方程$ax = e$也有解. 所以G中有单位元, 每个元素都有逆元, 所以G是一个群.