信息安全数学基础

中山大学　计算机学院

《信息安全数学基础》与《现代密码学》

- 《信息安全数学基础》可以分为“初等数论”和“抽象代数”两个部分，是《现代密码学》的最重要的先修课程，应按照教学要求理解之掌握之，否则难以开展《现代密码学》的学习。
- “初等数论”部分包括整除、同余、同余方程、原根与指标和素性检验等，是理解和实现各种密码算法的基础，要求熟练掌握相关计算问题的求解方法，理解相关数学概念、定理及其证明过程。
- “抽象代数”部分包括群、环和域的基本概念和一些最基本的性质，是深入理解和研究密码学原理的必备知识，要求了解以“群环域”为核心的抽象代数的基本知识体系，理解其中一些重要的数学概念、定理及其证明过程，熟悉群同态的基本概念，以及循环群和有限域的基本性质。

教材和参考资料

- 教材：
  - 陈恭亮：《信息安全数学基础》（第二版），清华大学出版社
- 参考书：
  - 覃中平，张焕国：《信息安全数学基础》，清华大学出版社
  - 柯召，孙琦：《数论讲义》(上册)，等教育出版社，2001
  - 潘承洞，潘承彪：《初等数论》(第2版)，北京大学出版社

初等数论
第一章 整数的可除性

中山大学 计算机学院

1. 整除

- 整除：
  设a, b是任意两个整数，若存在一个$q \in \mathbb{Z}$使得：$a = bq$成立，
  则称b整除a，或者说a被b整除，记作：$b|a$

1. 整除

- 整除：
  设a, b是任意两个整数，若存在一个$q \in \mathbb{Z}$使得：$a = bq$成立，
  则称b整除a，或者说a被b整除，记作：$b|a$
- 这样b就叫做a的因子(因数)，a叫做b的倍数
- 对应的，q也是a的因子，当我们讨论的对象主要是a, b时，我们可以将q写成$\frac{a}{b}$
  (在讨论整除的性质时，一般都默认因子b不为0，因此不会显式写出$q \neq 0$)

1. 整除

- 整除：
  设a, b是任意两个整数，若存在一个$q \in \mathbb{Z}$使得：$a = bq$成立，
  则称b整除a，或者说a被b整除，记作：$b|a$
- 这样b就叫做a的因子(因数)，a叫做b的倍数
- 对应的，q也是a的因子，当我们讨论的对象主要是a, b时，我们可以将q写成$\frac{a}{b}$
  (在讨论整除的性质时，一般都默认因子b不为0，因此不会显式写出$q \neq 0$)
- 另外，0是任意非0整数b的倍数($0 = b \cdot 0$，即取$q = 0$)
- 1是任意整数的因数($a = 1 \cdot a$，即取$q = a$)

1. 整除

- 整除：
  设a, b是任意两个整数，若存在一个$q \in \mathbb{Z}$使得：$a = bq$成立，
  则称b整除a，或者说a被b整除，记作：$b|a$
- 这样b就叫做a的因子(因数)，a叫做b的倍数
- 对应的，q也是a的因子，当我们讨论的对象主要是a, b时，我们可以将q写成$\frac{a}{b}$
  (在讨论整除的性质时，一般都默认因子b不为0，因此不会显式写出$q \neq 0$)
- 另外，0是任意非0整数b的倍数($0 = b \cdot 0$，即取$q = 0$)
- 1是任意整数的因数($a = 1 \cdot a$，即取$q = a$)
- 任意非0整数a是他自身的因数($a = a \cdot 1$，即取$q = 1$)，这也就意味着a是他自身的因数

1. 整除

- 整除：
  设a, b是任意两个整数，若存在一个$q \in \mathbb{Z}$使得：$a = bq$成立，
  则称b整除a，或者说a被b整除，记作：$b|a$
- 这样b就叫做a的因子(因数)，a叫做b的倍数
- 对应的，q也是a的因子，当我们讨论的对象主要是a, b时，我们可以将q写成$\frac{a}{b}$
  (在讨论整除的性质时，一般都默认因子b不为0，因此不会显式写出$q \neq 0$)
- 另外，0是任意非0整数b的倍数($0 = b \cdot 0$，即取$q = 0$)
- 1是任意整数的因数($a = 1 \cdot a$，即取$q = a$)
- 任意非0整数a是他自身的因数($a = a \cdot 1$，即取$q = 1$)，这也就意味着a是他自身的因数
- 如果不存在整数q使得$a = bq$成立，则称b不能整除a，a不能被b整除，记作$b \nmid a$

整除的性质

易见以下整除的性质：

(1) 如果$a = bq$, 则有$a = (-b)(-q)$成立, 也就是说, 如果b是a的因子, 则$-b$也是a的因子：

$$b|a \Longrightarrow (-b)|a;$$

例如：3是12的因子，那么-3也是12的因子。

(2) 如果$a = bq$，则有$(-a) = b(-q)$成立，也就是说，如果b是a的因子，则b也是$-a$的因子：

$$b|a \Longrightarrow b|(-a);$$

例如：3是12的因子，那么3也是-12的因子。

(3) 如果$a = bq$，则有$(-a) = (-b)q$成立，也就是说，如果b是a的因子，则$-b$也是$-a$的因子：

$$b|a \Longrightarrow (-b)|(-a);$$

例如：3是12的因子，那么-3也是-12的因子。

整除的性质

(4) 整除的传递性：
如果c整除b，b整除a，那么c也能够整除a：

$$c|b, b|a \Longrightarrow c|a$$

使用整除的定义，可以看出这个结论是显然的：

$$\because b = cp, a = bq$$

$$\therefore a = (cp)q = c(pq)$$

$$\diamond$$

例如：3整除6，6整除12，那么3也能够整除12

整除的性质

(5) 如果c整除a，c整除b，那么c也能够整除$a \pm b$，即：

$$c|a, c|b \Longrightarrow c|(a \pm b)$$

使用整除的定义，可以看出这个结论是显然的：

$$\because a = cp, b = cq$$

$$\therefore a \pm b = cp \pm cq = c(p \pm q)$$

$$\diamond$$

例如：3整除9，3整除6，那么3也能够整除$(9+6)$，3也能够整除$(9-6)$

整除的性质

更进一步，如果c整除a，c整除b，那么c也能够整除$sa \pm tb(s,t$为任意整数$)$：

$$c|a, c|b \Longrightarrow c|(sa \pm tb)$$

使用整除的定义，可以看出这个结论是显然的：

$$\because a = cp, b = cq$$

$$\therefore sa = scp, tb = tcq$$

$$\therefore sa \pm tb = scp \pm tcq = c(sp \pm tq)$$

$$\diamond$$

例如：3整除9，3整除6，那么3也能够整除$(4 \cdot 9 + 2 \cdot 6)$，3也能够整除$(4 \cdot 9 - 2 \cdot 6)$
类似可证：

$$c|a_1, c|a_2, \cdots, c|a_n \Longrightarrow c|(s_1a_1 \pm s_2a_2 \pm \cdots \pm s_na_n).$$

整除的性质

再进一步，已知c整除a，c整除b，而且存在整数x, y，使得$xa + yb = 1$，那么$c = \pm 1$：

$$c|a, c|b, xa + yb = 1 \Longrightarrow c = \pm 1$$

使用整除的定义，可以看出这个结论是显然的：

$$\because c|a, c|b$$

$$\therefore c|(sa + tb)(\forall s, t \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore c|(xa + yb)(\because x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore c|1$$

$$\therefore c = \pm 1$$

$$\diamond$$

事实上，我们也知道条件：$\exists x, y \in \mathbb{Z}, s.t.(such\ that) : xa + yb = 1$，
也就是说a与b互素(互素的概念下面就会学到)。所以，a与b的公因子也就是± 1了。

整除的性质

(6) $a|b, b|a \Longrightarrow a = \pm b$

用整除的定义，可以看出这个结论是显然的：

$$\because a = bp, b = aq$$

$$\therefore a = (aq)p = a(pq)$$

$$\therefore pq = 1$$

$$\therefore p = \pm 1, q = \pm 1$$

$$\therefore a = \pm b$$

$$\diamond$$

2. 素数

给定非零整数p，且$p \neq \pm 1$，如果p除了平凡因子(即$\pm 1, \pm p$)外，没有其他因子，那么这种整数称为素数(也叫质数，或不可约数)

比如11，其因子只有$\pm 1, \pm 11$，所以11是素数.
11是素数，-11也是素数了。

一般的，p是素数，那么$-p$也是素数.
p不是素数，那么$-p$也不是素数，不是素数的数称为合数.
比如12和-12

由于这种对称性，我们一般考虑的素数是非负整数.
比如考虑$2, 3, 5, 7$，而不考虑$-2, -3, -5, -7$

2. 素数

给定非零整数p，且$p \neq \pm 1$，如果p除了平凡因子(即$\pm 1, \pm p$)外，没有其他因子，那么这种整数称为素数(也叫质数，或不可约数)

比如11，其因子只有$\pm 1, \pm 11$，所以11是素数.
11是素数，-11也是素数了。

一般的，p是素数，那么$-p$也是素数.
p不是素数，那么$-p$也不是素数，不是素数的数称为合数.
比如12和-12

由于这种对称性，我们一般考虑的素数是非负整数.
比如考虑$2, 3, 5, 7$，而不考虑$-2, -3, -5, -7$

0是不是素数？为什么？

定理

如果$p > 1$是合数n的所有正因子中最小的那一个，那么p一定是素数，并且$p \leq \sqrt{n}$.

证明： 如果p不是素数的话，那么p就是合数，根据合数的定义，那么p一定会有一个非平凡的正因子q，且$q < p$. 根据整除的传递性，q也是n的因子，这与p是n的最小正因子矛盾，从而p一定是素数.

进一步，还可以将p与n的关系写成：$n = p \cdot n_1$. 这样p与n_1都是n的非平凡因子，而p是最小的那个非平凡因子，所以有：

$$p \leq n_1$$

这样就有：

$$n = p \cdot n_1 \geq p \cdot p = p^2.$$

这个结论给出了最小素因子的一个上界，即$p \leq \sqrt{n}$. $\diamond$

推论

对于小于等于$\sqrt{n}$的任意素数p，如果p都不能整除n，那么n必定是素数.

定理

素数一定有无穷多个.

证明： 因为如果有有限多个的话，比如为：$p_1, p_2, \cdots, p_n$
令

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

则N一定是个合数(因为素数只有n个)，从而它的大于1的最小正因子p是个素数，所以p是$p_1, p_2, \cdots, p_n$中的一个，比如说：$p = p_j$
这样：

$$p \mid N, p \mid (p_1 p_2 \cdots p_n)$$

所以应该有：

$$p \mid (N - p_1 p_2 \cdots p_n)$$

即：$p \mid 1$. 矛盾. $\diamond$

类似地，还可以证明形如$4k+3$或$6k+5$的素数有无穷多个，这里k为非负整数.

如果对所有小于等于$\sqrt{n}$的素数p来说，p都不能整除n，那么n必定是素数.
这个结论给出了查找素数的方法:

- 计算$\sqrt{n}$;
- 小于等于$\sqrt{n}$的素数，比如就是：p_1, p_2, p_3, p_4;
- 在小于等于n的数字中，删去所有p_1的倍数，这样剩下的任意数字都不是p_1的倍数;
- 在小于等于n的数字中，删去所有p_2的倍数，这样剩下的任意数字都不是p_2的倍数;
- 在小于等于n的数字中，删去所有p_3的倍数，这样剩下的任意数字都不是p_3的倍数;
- 在小于等于n的数字中，删去所有p_4的倍数，这样剩下的任意数字都不是p_4的倍数;
- 对剩下的任意数字m来说，满足$2 \leq m \leq n$，所有小于等于$\sqrt{m}(\leq \sqrt{n})$的素数都不能整除m，所以m一定是素数.

示例：找出所有不超过$n = 100$的素数

$\sqrt{n} = 10$;

不超过10的素数是2,3,5,7

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

在不超过100的数字中删去2的倍数：

		3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

再删去3的倍数：

				5		7					
11		13				17		19			
		23		25				29			
31				35		37					
41		43				47		49			
51		53		55				59			
61				65		67					
71		73				77		79			
		83		85				89			
91				95		97					

注意，这里漏删了一个3的倍数！

再删去5的倍数：

					7				
11		13			17		19		
		23					29		
31					37				
41		43			47		49		
		53					59		
61					67				
71		73			77		79		
		83					89		
91					97				

再删去7的倍数：

					7				
11		13			17		19		
		23					29		
31					37				
41		43			47				
		53					59		
61					67				
71		73					79		
		83					89		
					97				

现在所剩的数就是小于100的素数了.这个找素数的方法叫做Eratosthenes(爱拉托色尼)筛法

我们得到小于100的素数个数为26个.

一般情形：不超过x的素数个数记为$\pi(x)$,这个数字与$\frac{x}{\ln x}$差不多大，即有契比雪夫不等式(chebyshev inequality):

$$\frac{\ln 2}{3}\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 6\ln 2\frac{x}{\ln x}$$

(证明略...)

比如：$\ln(100) = 4.60517019$，$\frac{100}{\ln(100)} = 21.7147$

进一步还可以证明，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

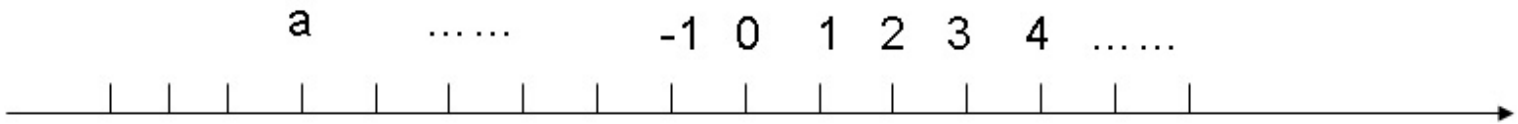
该等式被称为素数定理.

3. 欧几里德除法

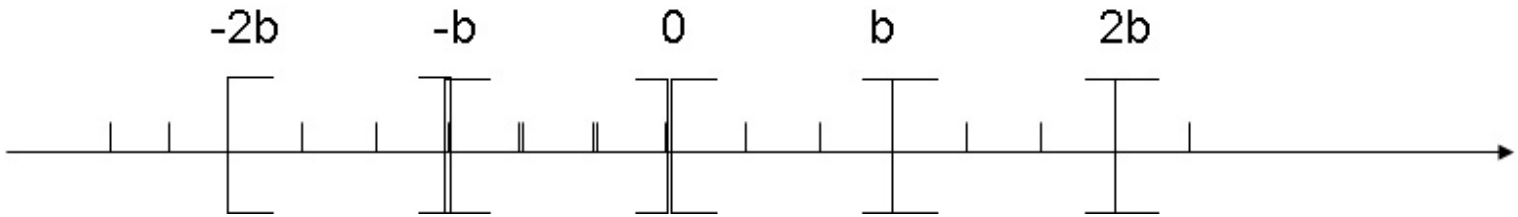
定理

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+, \exists (q, r), s.t.\ a = bq + r, \quad 0 \le r < b$

这是很显然的：
对于整数a



常数为b的区间将所有整数分成一段一段：



这样a必定落在一个区间内，比如：

$$qb \le a < (q+1)b$$

令$r = a - bq$，则有：

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b \qquad \diamond$$

进一步我们可以说明上述的使得$a = bq + r(0 \leq r < b)$成立的(q, r)是唯一的:
事实上, 如果有(q, r)和(q_1, r_1)使得:

$$a = bq + r \qquad a = bq_1 + r_1$$

两者相减, 有

$$0 = b(q - q_1) + (r - r_1)$$

此时, q必定等于q_1, 因为, 如果不等的话, 则必定$|b(q - q_1)| \geq b$
但是

$$0 \leq r, r_1 < b$$

所以

$$|r - r_1| < b$$

两个绝对值不相等的数加在一起不可能得到0, 所以$q = q_1$,从而$r = r_1$. $\diamond$

对于$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, 存在唯一的$(q, r)$使得$a = bq + r, 0 \leq r < b$成立, 我们将这种关系称为欧几里德除法, 也叫带余除法.

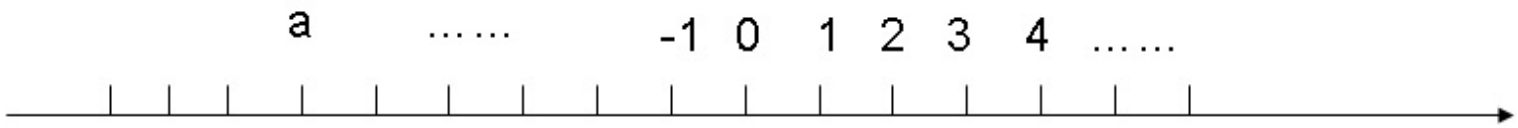
这里的q叫做(a被b除所得的)不完全商, r叫做(a被b除所得的)余数

可以看到, 如果这里$r = 0$的话, 那么a就被b整除; 反之, 如果a被b整除的话, 那么$r = 0$.

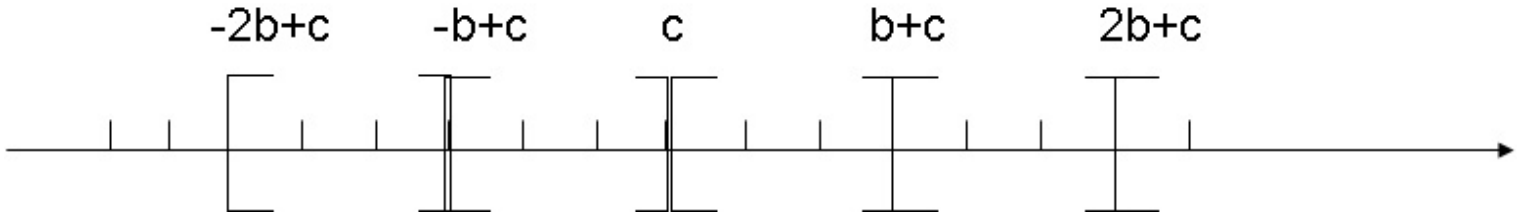
欧几里德除法的变形:

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, 对任意的整数$c$, 存在唯一的$(q, r)$使得$a = bq + r, c \leq r < b + c$成立.

这也是显然的:



长度为b的区间将所有整数分成一段一段:



这样a必定落在其中一个区间内, 比如

$$qb + c \leq a < (q + 1)b + c$$

令$r = a - bq$, 则有

$$a = bq + r, \quad (c \leq r < b + c).$$

绝对值最小余数

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$, 对任意的整数$c$，存在唯一的$(q, r)$使得$a = bq + r, c \leq r < b + c$成立.

在欧几里得除法的变形形式中，c取特定的值，就得到特定的“余数类型”.

例如，当$c = 0$，就是我们最常用的最小非负余数.

又例如，

1. 当b为偶数时，令$c = -\frac{b}{2}$，得到$b + c = \frac{b}{2}$以及$-\frac{b}{2} \leq r \leq \frac{b-2}{2} < \frac{b}{2}$;
2. 当b为偶数时，令$c = -\frac{b-2}{2}$，得到$b + c = \frac{b+2}{2}$以及$-\frac{b}{2} < -\frac{b-2}{2} \leq r \leq \frac{b}{2}$;
3. 当b为奇数时，令$c = -\frac{b-1}{2}$，得到$b + c = \frac{b+1}{2}$以及$-\frac{b}{2} < -\frac{b-1}{2} \leq r \leq \frac{b-1}{2} < \frac{b}{2}$.

总之有，

$$-\frac{b}{2} \leq r < \frac{b}{2} \quad \text{或} \quad -\frac{b}{2} < r \leq \frac{b}{2}.$$

这时的余数r叫做绝对值最小余数.

符号: $[x]$

给定实数x, 符号$[x]$表示小于等于x的最大整数,

比如$[3.14] = 3, [-3.14] = -4$

这样, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+, \exists (q, r), s.t., a = bq + r, 0 \leq r < b$ 中的不完全商q和余数r可以写成:

$$q = [\frac{a}{b}] \qquad r = a - b[\frac{a}{b}]$$

欧几里德除法的应用: 正整数的b进制表示

对$1 < b \in \mathbb{Z}^+$, 任意正整数n可以表示成

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

的形式, 这里$0 \leq a_i < b (i = 1, 2, \ldots, k)$.
事实上,使用欧几里德除法可以很容易得到验证.
首先, 用b去除$n \Longrightarrow n = bq_0 + a_0, (0 \leq a_0 < b)$,
再用b去除$q_0 \Longrightarrow q_0 = bq_1 + a_1, (0 \leq a_1 < b)$,
再用b去除$q_1 \Longrightarrow q_1 = bq_2 + a_2, (0 \leq a_2 < b)$,
一直下去,.....
因为不完全商q_i越来越小, 一定会达到一种情况, 那就是$0 \leq q_{k-1} < b$, 这时:

$$q_{k-2} = bq_{k-1} + a_{k-1}, (0 \leq a_{k-1} < b)$$

$$q_{k-1} = b \cdot 0 + a_k, (i.e., 0 \leq q_{k-1} = a_k < b)$$

将这些式子一次次代换就会得到:

$$
\begin{aligned}
n &= bq_0 + a_0 \\
&= b(bq_1 + a_1) + a_0 \\
&= b^2 q_1 + ba_1 + a_0 \\
&= b^2(bq_2 + a_2) + ba_1 + a_0 \\
&= b^3 q_2 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 \\
&= \ldots\ldots \\
&= b^k q_{k-1} + b^{k-1} a_{k-1} + b^{k-2} a_{k-2} + \ldots + ba_1 + a_0 \\
&= b^k a_k + b^{k-1} a_{k-1} + b^{k-2} a_{k-2} + \ldots + ba_1 + a_0
\end{aligned}
$$

$$
(0 \leq a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 < b)
$$

对$1 < b \in \mathbb{Z}^+$, 任意正整数n可以表示成

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

的形式, 这里$0 \leq a_i < b (i = 1, \ldots, k)$. 这种表示形式是唯一的:
如果有两组系数$\{a_i\}, \{c_i\}$(如果两组个数不等长的话, 短的那组补0使得一样长)使得

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \quad (0 \leq a_i < b (i = 0, 1, 2, \ldots, k))$$

$$n = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \ldots + c_1 b + c_0 \quad (0 \leq c_i < b (i = 0, 1, 2, \ldots, k))$$

从而

$$0 = (a_k - c_k) b^k + (a_{k-1} - c_{k-1}) b^{k-1} + \ldots + (a_1 - c_1) b + (a_0 - c_0)$$

这时(如果$a_0 = c_0$的话考虑$a_1 - c_1$, 依次类推)

$$a_0 - c_0 = -[(a_k - c_k) b^k + (a_{k-1} - c_{k-1}) b^{k-1} + \ldots + (a_1 - c_1) b]$$

从而

$$b | a_0 - c_0 \quad \therefore |a_0 - c_0| \geq b$$

而

$$0 \leq a_0 < b, 0 \leq c_0 < b \Longrightarrow |a_0 - c_0| < b$$

矛盾!

对$1 < b \in \mathbb{Z}^+$, 任意正整数n可以表示成

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

的形式, 这里$0 \leq a_i < b (i = 1, \ldots, k)$. 这种表示形式是唯一的, 可以将$n$写成

$$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0)_b$$

的形式$(0 \leq a_0 < b (i = 1, 2, \ldots, k))$, 称为$n$的$b$进制表示.
比如二进制$(n = 642)$:

$$\begin{aligned}
642 &= 2 \cdot 321 + 0 \quad (i.e., a_0 = 0) \\
321 &= 2 \cdot 160 + 1 \quad (i.e., a_1 = 1) \\
160 &= 2 \cdot 80 + 0 \quad (i.e., a_2 = 0) \\
80 &= 2 \cdot 40 + 0 \quad (i.e., a_3 = 0) \\
40 &= 2 \cdot 20 + 0 \quad (i.e., a_4 = 0) \\
20 &= 2 \cdot 10 + 0 \quad (i.e., a_5 = 0) \\
10 &= 2 \cdot 5 + 0 \quad (i.e., a_6 = 0) \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \quad (i.e., a_7 = 1) \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0 \quad (i.e., a_8 = 0) \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1 \quad (i.e., a_9 = 1)
\end{aligned}$$

所以642的二进制表示就是$(1010000010)_2$
类似可以求出642的8进制, 16进制表示.

我们都知道, 16进制用$0-9, A(10), B(11), C(12), D(13), E(14), F(15)$表示.
比如$(ABC9)_{16}$即为10进制的$43796 (= A \cdot 16^6 + B \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0)$

16进制与2进制相互之间可以比较容易的转换:

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

比如$(ABC8)_{16} = (1010\ 1011\ 1100\ 1000)_2$
$(101\ 1101\ 1111\ 1110\ 1001)_2 = (5DFE9)_{16}$

4. 最大公因数与互素

给定整数$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 如果:

$$d|a_1, d|a_2, \ldots, d|a_n$$

则称d为$a_1, a_2, \ldots, a_n$的公因数.
如果$a_1, a_2, \ldots, a_n$不全为0, 那么它们的公因数中存在最大的一个, 这个公因数称为$a_1, a_2, \ldots, a_n$的最大公因数(greatest common divisor, gcd), 记做$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

按照这个定义, 可以看到, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$
这里，$i_1, i_2, \ldots, i_n$从1到n取值各不相同)。
如果$a_1, a_2, \ldots, a_n$的最大公因数为1的话, 称$a_1, a_2, \ldots, a_n$互素, 互质.

比如, 14的因数为$\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$,21的因数为$\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$,
它们的公因数为$\pm 1, \pm 7$, 最大公因数为7
-15和21的公因数为$\pm 1, \pm 3$, 最大公因数为3.
$14, -15, 21$的最大公因数为1, 即$14, -15, 21$互素.
7和14的最大公因数就是7本身.

一般地, 如果$a, b \in \mathbb{Z}^+, b|a$, 那么$(a, b) = b$.

小结论

(1) 给定一个整数a和一个素数p, 如果a不是p的倍数的话, 它一定和p互素.
事实上, 假设$(a,p)=d$, 则有$d|p$.
所以$d=1$或p.
如果$d=p$的话, 就会有$p|a$, 这与条件矛盾. $\diamond$

使用公因数和最大公因数的定义马上就可得到下面几个显然的结论:
(2) $a_1,a_2,\ldots,a_n$的公因数与$|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|$的公因数相同
(3) $(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|)$
(4) $(a,b)=(a,-b)=(-a,b)=(-a,-b)$
(5) $(0,b)=|b|$
(6) $a=bq+c\Longrightarrow(a,b)=(b,c)$
证明: 设$d=(a,b),d'=(b,c)$
要说明$d=d'$, 只需要说明$d\le d'$, $d'\le d$即可:
事实上,

$$d|a,d|b\Longrightarrow d|(a-bq)\Longrightarrow d|c\Longrightarrow d\le d'$$

$$d'|b,d'|c\Longrightarrow d'|(bq+c)\Longrightarrow d'|a\Longrightarrow d'\le d$$

(当然这里也有$a=bq+c\Longrightarrow(a,q)=(q,c)$成立.)
利用这个结论可以很方便的帮助我们求任意两个整数的最大公因数.

辗转相除法

比如给定任意两个正整数a, b, 使用欧几里德除法存在如下式子成立:

$$a = bq_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < b)$$

这时我们知道$(a, b) = (b, r_2)$
所以要求(a, b), 只需要求(b, r_2).
而要求(b, r_2), 可以类似求(a, b)的做法:

$$b = r_2q_2 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2)$$

这时我们知道$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3)$
所以要求(a, b), 只需要求(r_2, r_3).
而要求(r_2, r_3), 可以类似求(b, r_2)的做法:

$$r_2 = r_3q_3 + r_4 \quad (0 \leq r_4 < r_3)$$

这时我们知道$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = (r_3, r_4)$
所以要求(a, b), 只需要求(r_3, r_4).

可以看到余数越来越小, 所以继续这个过程一定会有下面的情况出现:

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \quad (0 \leq r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = r_n q_n \quad (i.e., r_{n+1} = 0)$$

这时我们知道

$$(a, b) = (b, r_2) = (r_2, r_3) = (r_3, r_4) = \ldots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

可见, 使用这种方法, 无论给定多么大的整数a和b, 都可以经过有限步求出他们的最大公因数, 而按照最大公因数的定义求任意两个数的最大公因数的话, 必须将给定的数进行分解, 但对大数进行分解是件困难的事.
上面这种求最大公因数的方法叫做辗转相除法, 也叫广义欧几里德除法.

示例:

求$(-1859, 1573)$

$$(-1859, 1573) = (1859, 1573)$$

$$1859 = 1 \cdot 1573 + 286 \Longrightarrow (1859, 1573) = (1573, 286)$$

$$1573 = 5 \cdot 286 + 143 \Longrightarrow (1573, 286) = (286, 143)$$

$$286 = 2 \cdot 143 \Longrightarrow (286, 143) = 143$$

$$\therefore (-1859, 1573) = 143$$

示例: 求$(46480, 39423)$

$$
\begin{aligned}
46480 &= 1 \cdot 39423 + 7057 \\
39423 &= 5 \cdot 7057 + 4138 \\
7057 &= 1 \cdot 4138 + 2919 \\
4138 &= 1 \cdot 2919 + 1219 \\
2919 &= 2 \cdot 1219 + 481 \\
1219 &= 2 \cdot 481 + 257 \\
481 &= 1 \cdot 257 + 224 \\
257 &= 1 \cdot 224 + 33 \\
224 &= 6 \cdot 33 + 26 \\
33 &= 1 \cdot 26 + 7 \\
26 &= 3 \cdot 7 + 5 \\
7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}
$$

$$\therefore (46480,39423) = 1$$

注: 求$a_1, a_2, \ldots, a_n$的最大公因数

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

可以先求出

$$d_2 = (a_1, a_2)$$

再求出

$$d_3 = (d_2, a_3)$$

再求出

$$d_4 = (d_3, a_4)$$

再求出

$$d_5 = (d_4, a_5)$$

$$\ldots\ldots$$

最后求出

$$d_n = (d_{n-1}, a_n)$$

则有

$$d_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

注: 给定两个正整数a, b, 利用欧几里德除法我们知道:

$$\exists q \in \mathbb{Z}, r(0 \leq r < b), s.t., a = bq + r \Longrightarrow 2^a = 2^r \cdot 2^{bq}$$
$$\Longrightarrow 2^a - 1 = 2^r(2^{bq} - 1) + (2^r - 1)$$
$$\Longrightarrow 2^a - 1 = 2^r(2^b - 1)(q_1) + (2^r - 1)$$
$$\Longrightarrow 2^a - 1 = (2^b - 1)(2^r \cdot q_1) + (2^r - 1)$$
$$\Longrightarrow 2^a - 1 = (2^b - 1)q' + (2^r - 1) \quad (q' \in \mathbb{Z}, 0 \leq 2^r - 1 < 2^b - 1)$$

令$a = r_0$，$b = r_1$，下面反复利用这个事实，我们有

$$a = bq + r_2(0 \leq r_2 < b) \Longrightarrow 2^a - 1 = (2^b - 1)q_1' + (2^{r_2} - 1)(0 \leq 2^{r_2} - 1 < 2^b - 1)$$

类似地, 我们得到:

$$b = r_2q_2 + r_3(0 \leq r_3 < r_2) \Longrightarrow 2^b - 1 = (2^{r_2} - 1)q_2' + (2^{r_3} - 1)(0 \leq 2^{r_3} - 1 < 2^{r_2} - 1)$$

$$r_2 = r_3q_3 + r_4(0 \leq r_4 < r_3) \Longrightarrow 2^{r_2} - 1 = (2^{r_3} - 1)q_3' + (2^{r_4} - 1)(0 \leq 2^{r_4} - 1 < 2^{r_3} - 1)$$

这个过程一直持续下去, 如果左边的余数$r_i \neq 0$的话, 右边的余数$2^{r_i} - 1 \neq 0$.
最终在我们到达a与b的最大公因数$r_n = (a, b)$的时候, 也就得到了$2^a - 1$与$2^b - 1$的最大公因数, 也就是$2^{r_n} - 1$, 即$2^{(a,b)} - 1$.

由前, 我们有:

$$(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a,b)} - 1$$

因此, 如果a与b互素的话, 有

$$(a, b) = 1 \Longrightarrow 2^{(a,b)} - 1 = 1 \Longrightarrow (2^a - 1, 2^b - 1) = 1$$

反之, 如果$2^a - 1$与$2^b - 1$互素的话, 有

$$(2^a - 1, 2^b - 1) = 1 \Longrightarrow 2^{(a,b)} - 1 = 1 \Longrightarrow (a, b) = 1$$

即

$$(a, b) = 1 \iff (2^a - 1, 2^b - 1) = 1$$