上周作业解答

Exercise 1.[王育民(2013)]

考虑二元矩阵 $G_{2\times 4}$ 。若矩阵的每个元素都是均匀随机且独立产生的，计算 $\mathrm{Rank}(G)=0, \mathrm{Rank}(G)=1, \mathrm{Rank}(G)=2$ 三个事件各自的概率，并检验

$$\Pr\{\mathrm{Rank}(G)<2\}<\frac{1}{4}.$$

上周作业解答

解：由于矩阵中的每个元素均匀随机独立产生，且为二元变量，取值为 $\{0, 1\}$。这样的矩阵 $G_{2\times4}$ 一共可能有 $2^{2\times4} = 256$ 种，每种情况等概。

- Rank(G)=0 当且仅当 G 中元素全零，概率为 $\frac{1}{256}$。
- Rank(G)=1 有两种情况：
  ① 第一种是矩阵中的两行非零，且与另一行互为线性组合。第一行可能的取值有 $2^4 - 1 = 15$ 种，固定第一行，满足条件的第二行取值有 1 种。所以情况①有 $15 \times 1 = 15$ 种；
  ② 第二种是矩阵中只有一行非零，可能的情况有 $2 \times (2^4 - 1) = 30$ 种。
  因此，Rank(G)=1 的概率为 $\frac{15+30}{256}$。
- Rank(G)=2 当且仅当矩阵中的行非零，且与另一行不互为线性组合。第一行可能的取值有 $2^4 - 1 = 15$ 种，固定第一行，满足条件的第二行取值有 $2^4 - 1 - 1 = 14$ 种。概率为 $\frac{15\times14}{256} = \frac{105}{128}$.

自然，$\Pr\{\text{Rank}(G) < 2\} = \Pr\{\text{Rank}(G) = 0\text{或}1\} = \frac{23}{128} < \frac{1}{4}$.

上周作业解答

Exercise 2.

(X^n, Y^n) 联合典型可以推出 X^n 是典型的，Y^n 也是典型的，但反之未必成立。从典型序列的个数加以说明。

上周作业解答

证：根据定义，典型 X^n集为：

$$A_{X,\epsilon}^{(n)} = \left\{(x^n) \in \mathcal{X}^n : \left|\frac{1}{n}\log P(x^n) - H(X)\right| \le \epsilon\right\},$$

典型 Y^n集为：

$$A_{Y,\epsilon}^{(n)} = \left\{(y^n) \in \mathcal{Y}^n : \left|\frac{1}{n}\log P(y^n) - H(Y)\right| \le \epsilon\right\},$$

X^n, Y^n 典型集的联合集为

$$\begin{aligned} A_{X,\epsilon}^{(n)} \cup A_{Y,\epsilon}^{(n)} \quad = \quad & \Big\{(x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\ & \left|\frac{1}{n}\log P(x^n) - H(X)\right| \le \epsilon, \\ & \left|\frac{1}{n}\log P(y^n) - H(Y)\right| \le \epsilon\Big\}, \end{aligned}$$

上周作业解答

X^n, Y^n 联合典型集为

$$
\begin{aligned}
A_{(X,Y),\epsilon}^{(n)} &= \Big\{(x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \\
& \left|\frac{1}{n}\log P(x^n) - H(X)\right| \le \epsilon, \\
& \left|\frac{1}{n}\log P(y^n) - H(Y)\right| \le \epsilon, \\
& \left|\frac{1}{n}\log P(x^n, y^n) - H(X, Y)\right| \le \epsilon\Big\},
\end{aligned}
$$

根据各典型集的定义，可以知道，X^n, Y^n 的联合典型集为X^n, Y^n 典型集的联合集的子集，所以得证：(X^n, Y^n) 联合典型可以推出 X^n 是典型的， Y^n 也是典型的。

上周作业解答

同时，我们可以根据定义计算各典型集的大小：

$$|A_{X,\epsilon}^{(n)} \cup A_{Y,\epsilon}^{(n)}| = 2^{n(H(X)+H(Y))},$$

$$|A_{(X,Y),\epsilon}^{(n)}| = 2^{nH(X,Y)}.$$

因为 $2^{n(H(X)+H(Y))} \geq 2^{nH(X,Y)}$，所以，已知 X^n 与 Y^n 典型集，不能推断出它们的联合集为联合典型集。

Exercise 3.[田宝玉(2008)]

一离散无记忆信道的转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(1) 求该信道的信道容量。

(2) 求达到容量时的输入概率分布和输出概率分布。

上周作业解答

解：设输入输出概率分别为 p_0, p_1, p_2 和 q_0, q_1, q_2。假设达到容量时， $p_1 = 0$， $p_0 = p_2 = 1/2$ 都不为零。解得 $q_0 = q_1 = q_3 = 1/3$，列出方程组

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}\log\frac{\frac{2}{3}}{q_0} + \frac{1}{3}\log\frac{\frac{1}{3}}{q_1} & & = C \qquad (1)\\
\frac{1}{3}\log\frac{\frac{1}{3}}{q_0} + \frac{1}{3}\log\frac{\frac{1}{3}}{q_1} & + \tfrac{1}{3}\log\frac{\frac{1}{3}}{q_2} & \le C \qquad (2)\\
\frac{1}{3}\log\frac{\frac{1}{3}}{q_1} + \frac{2}{3}\log\frac{\frac{2}{3}}{q_2} & & = C \qquad (3)
\end{aligned}
$$

根据式(1)或(3)两式可以求得$C = 2/3$ 比特/符号，同时将结果代入式(2)，得 $0 < C$。

因此，信道容量 $C = \frac{2}{3}$ 比特/符号，达到容量时的输入概率为 $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$， $p_1 = 0$。

Exercise 4.[田宝玉(2008)]

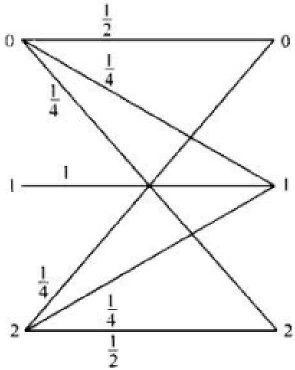
一离散无记忆信道如图所示

(1) 写出该信道的转移概率矩阵。

(2) 该信道是否为对称信道？

(3) 求该信道的信道容量。

(4) 求达到信道容量时的输出概率分布。



上周作业解答

(1) 信道的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) 该信道不是对称信道。

上周作业解答

(3)&(4) 设输入和输出的概率分布分别为 (p_0, p_1, p_2)，(q_0, q_1, q_2)。假设输入分布全不为零，列出方程组：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}}{q_0}+\frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{q_1}+\frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{q_2} &= C \qquad (4)\\
\log\frac{1}{q_1} &= C \qquad (5)\\
\frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{q_0}+\frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{q_1}+\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}}{q_2} &= C \qquad (6)
\end{aligned}
$$

解得：

$$
\begin{aligned}
q_0 &= q_2 = \tfrac{1}{6}, \quad & q_1 &= \tfrac{2}{3}\\
p_0 &= p_2 = \tfrac{2}{9}, \quad & p_1 &= \tfrac{5}{9}
\end{aligned}
$$

此时信道容量 $C = \max_p I(X;Y) = 0.585$ 比特/符号