中 山 大 学 本 科 生 考 试 答 题 纸

学院(系)　　　　　　专业　　　　级

考试科目　　　　　　　　成绩评定

考生姓名　　　　　　　　教师签名

学　　号　　　　　　　　　　年　　月　　日

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

作业12：

1. 在九个人的人群中，有一个人认识另外两个人，有两个人每人认识另外四个人，有四个人每人认识另外五个人，余下的两个人每人认识另外六个人。证明：有三个人他们全都互相认识。

证：将团体内的每个人看成图G的顶点，两点相邻的充要条件是对应的两人相互认识。若G存在，则它的度序列为：$(6,6,5,5,5,5,4,4,2)$。现多次利用练习1.5.7(a)的结果，我们有$(6,6,5,5,5,5,4,4,2)\rightarrow(5,4,4,4,4,4,3,2)\rightarrow(3,3,3,3,3,3,2)\rightarrow(3,3,2,2,2,2)\rightarrow(2,2,2,1,1)\rightarrow(1,1,1,1)$。由于$(1,1,1,1)$是$K_2+K_2$的度序列，故G确实存在。计算$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}(1\times2+2\times4+4\times5+2\times6)=21$，而$\varepsilon(T_{2,9})=20$。故由定理8.9知，G中含有$K_3$，所以结论成立。证毕.

*练习1.5.7(a)：设$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是非负整数的不增序列，并用d'记序列$(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$

证明：d是图序列当且仅当d'是图序列。

证明：$\Rightarrow$) 设G是简单图，其图序列为d，且$d(v_i)=d_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，分两种情况证明：

(1) 若v_1关联的d_1条边恰为$v_1v_2, v_1v_3, \cdots, v_1v_{d_1+1}$，则$G-v_1$的

图序列是 d'。

(2) 若 v_1 关联的 d_1 条边中，有 v_1v_j，且 $j>d_1+1$。令

$j_0=\max\{j\mid v_1v_j\in E(G)\}>d_1+1$，

$i_0=\min\{i\mid v_1v_i\notin E(G)\}\le d_1+1$，则

$v_1v_{j_0}\in E(G)$，且 $j>j_0$ 时，$v_1v_j\notin E(G)$；

$v_1v_{i_0}\notin E(G)$，且 $i<i_0$ 时，$v_1v_i\in E(G)$。因为 $d_{i_0}\ge d_{j_0}$，考察与 v_{i_0} 相邻的 d_{i_0} 个点，其中必有一点 v_k 与 v_{j_0} 不相邻，否则，$d_{j_0}\ge d_{i_0}+1>d_{i_0}$，矛盾。作 $G'=G-\{v_1v_{j_0},v_{i_0}v_k\}+\{v_1v_{i_0},v_kv_{j_0}\}$

这时，G' 与 G 有相同的图序列 d，只是 G' 的 j_0 小了，i_0 大了。如此继续下去，必可化为情况(1)。

($\Leftarrow$) 设 G' 的图序列为 d'。在 G' 上加入异于 G' 的顶点 $v_2,v_3,\cdots,v_n$ 的新顶点 v_1，并在 v_1 和 $v_2,v_3,\cdots,v_{d_1+1}$ 之间连边，所得之新图记为 G，则 G 的图序列为 d。证毕.

2. 证明：唯一的1临界图是 K_1，唯一的2临界图是 K_2，仅有的3临界图是 $k\ge3$ 的奇 k 圈。

证明：由于1色图是空图，从而1临界图只能是 K_1；2色图是2部图，从而2临界图只能是 K_2；3色图必含奇圈且奇圈至少是3色才能正常着色，从而3临界图只能是 k-奇圈 $(k\ge3)$. 证毕.

3. 证明：若 G 的任意两个奇圈都有一个公共顶点，则 $\chi\le5$。

证明：若 $\chi\ge6$，且假定在 G 上已用 χ 种颜色着色。令 G_1 是 G 中着1，2，3色的顶点在 G 中的导出子图，G_2 是 G 中着4，5，…，χ 色的顶点在 G 中的导出子图。显然 $\chi(G_1)=3$，$\chi(G_2)=\chi-3\ge3$。由于2部图的色数为2，故 G_1 和 G_2 均不是2部图。所以在 G_1，G_2 中均含有奇圈，且它们互不相交，这和假设矛盾。故 $\chi\le5$。证毕.