《数值计算方法》课程

插值

(牛顿插值)

胡建芳

（研究方向：计算机视觉）

http://sdcs.sysu.edu.cn/content/5143

计算机学院

牛顿插值

- **插值**

Lagrange插值不需要解线性方程组，而且，节点不变时，插值基函数也不会变化。

增加一个节点，Lagrange插值基函数需要重新计算。 **缺点**

可以做到增加一个节点，就在原来的插值函数的基础上，增加一个新的函数吗？

Newton插值

牛顿插值

差商

定义 1.
节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$互不相同，定义函数$f(x)$的*一阶差商*为

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

定义$f(x)$的*n阶差商*为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, \cdots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

牛顿插值

差商

定理 1. (*差商的展开式*)
n阶差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 可以展开为

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

证明. 用数学归纳法

定理 2. (*差商的对称性*)
函数$f(x)$的差商与节点的次序无关，即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[x_{p_0}, x_{p_1}, \cdots, x_{p_n}]$$

其中$p_0, p_1, \cdots, p_n$是$0, 1, \cdots, n$的任一排列

证明. 由展开式可得。

牛顿插值

差商

例 1. 设$f(x)=\alpha u(x)+\beta v(x)$，其中$\alpha,\beta$是常数，试证明

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\alpha u[x_0,x_1,\cdots,x_n]+\beta v[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

证明. 利用差商的展开式

例 2. 若

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_0,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_3]}{x_a-x_b}$$

求a,b的值。

解. 找**不同**的点。$a=2,b=1$

牛顿插值

牛顿插值

由差商公式

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

得到

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \tag{1}$$

类似，

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

有

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1] \tag{2}$$

牛顿插值

牛顿插值

将(2)代入(1)则有

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \tag{3}$$

进一步，有

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2]$$

代入(3)

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

牛顿插值

牛顿插值

这样，有

$$
\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
& + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + \cdots \\
& + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\
& + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)
\end{aligned}
$$

牛顿插值

牛顿插值

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\
=& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \\
=& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
=& \cdots \\
=& \boxed{\begin{aligned} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}} \\
& + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_n)
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
N_n(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

牛顿插值

牛顿插值

则有

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) (*)$$

$$N_{n-1}(x_k) = N_n(x_k), k = 0, 1, \cdots, n - 1$$

和

$$\begin{aligned} f(x) &= N_n(x) + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n) \\ &= N_{n-1}(x) + f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) (**) \end{aligned}$$

在(*)和(**)式中，取$x = x_n$，则有

$$\begin{aligned} f(x_n) &= N_{n-1}(x_n) + f[x_n, x_0, \cdots, x_{n-1}](x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) \\ &= N_n(x_n) \end{aligned}$$

所以，有$f(x_i) = N_i(x_i) = N_n(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$。

牛顿插值

牛顿插值

这样，$N_n(x)$是$f(x)$关于节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$的插值多项式，称为*Newton型插值多项式*。

$$\begin{aligned}N_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

它的误差为

$$R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

牛顿插值

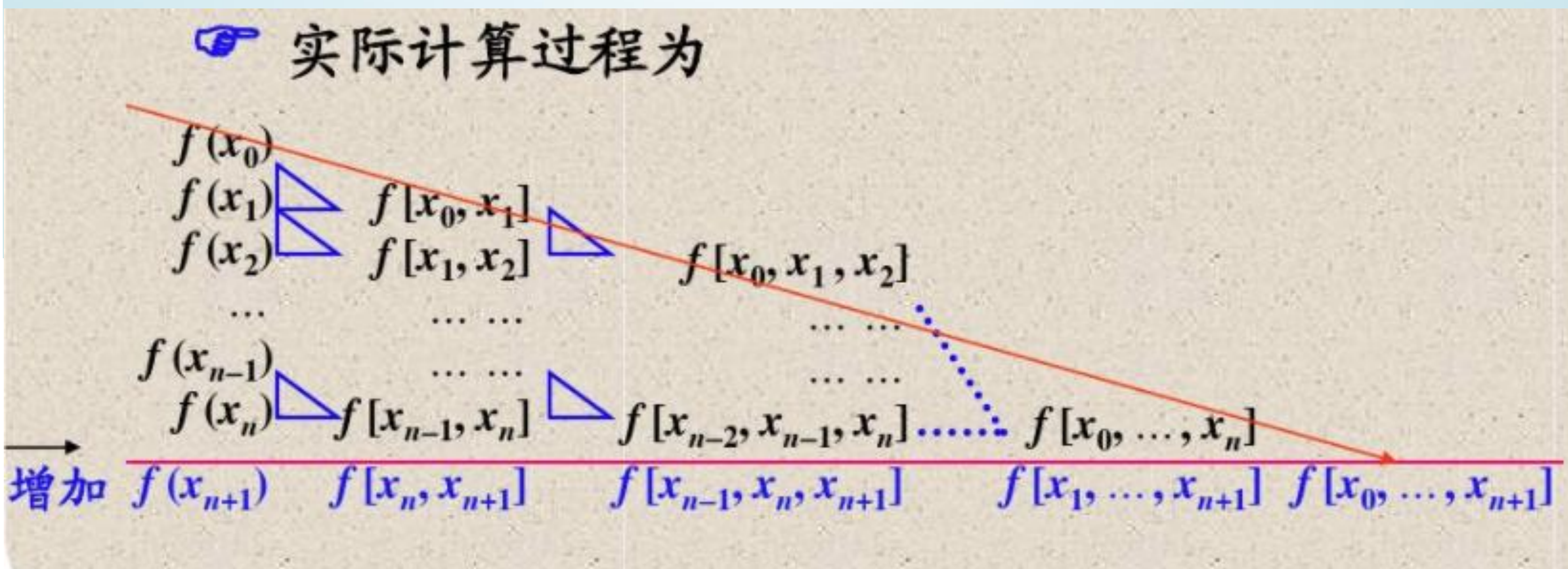
牛顿插值

问题. 如何计算 Newton 插值？

- 需要知道各阶差商

  $f[x_0], f[x_0,x_1], \cdots, f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

- 可以利用差商表，来计算各阶差商。



牛顿插值

牛顿插值

例 3. 已知函数 $y=f(x)$ 的值： $f(-1)=0$, $f(0)=4$, $f(1)=-2$, $f(2)=5$。求满足如上插值条件的Newton型多项式。

解. 构造差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	0			
0	-4	-4		
1	-2	2	3	
2	5	7	2.5	-1/6

则有

$$N_3(x)=0-4(x+1)+3(x+1)x-\frac{1}{6}(x+1)x(x-1)$$

牛顿插值

牛顿插值

思考:

已知节点组$x_0, x_1, \cdots, x_n$及各阶差商

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \cdots, f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

现在增加节点$(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$，如何以最小的代价（存贮量和计算量）得到

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}]$$

从而得到高一阶的Newton插值多项式。

牛顿插值

牛顿插值

三种插值方法的比较，

- 用待定系数法，Lagrange插值, Newton插值 都是n次多项式。 由插值多项式的存在唯一性，这三种方法得到的是同一个多项式。
- 从线性空间的角度来看，三种方法只是取了n次多项式空间的不同基函数，
  - 待定系数法的基函数是$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$
  - Lagrange插值的基函数是$\{l_0(x), \cdots, l_n(x)\}$
  - Newton插值的基函数是

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)\}$$

牛顿插值

注. $N_n(x)$是插值多项式，也可以通过下面的例子，直接证明它与Lagrange型多项式是相等的。

例 4. 记$\{x_i\}_{i=0}^n$上的Lagrange插值多项式为$L_n(x)$，若有

$$L_n(x_n) - L_{n-1}(x_n) = A(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})$$

试证明

$$A = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

证明. 用Lagrange型的表达式，及差商的展开式即证。具体过程作为*作业*完成

牛顿插值

牛顿插值

由插值多项式的存在唯一性，$N_n(x)$与Lagrange型插值多项式是相等的，因而有相同的误差。则有

$$
\begin{aligned}
&f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)
\end{aligned}
$$

因此，有

定理 3.

$n+1$个互不相同节点的n阶差商有如下关系

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

n阶导与n阶差商相关

其中$\xi \in (\min(x_0, \cdots, x_n), \max(x_0, \cdots, x_n))$

牛顿插值

■ 牛顿插值

利用前面的定理，可以把差商的概念再推广一点。

定义 2.
若$f(x)$在点x_0具有n阶导数，则定义

$$f[\underbrace{x_0, x_0 \cdots, x_0}_{n+1}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

进而，有

$$f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_0] - f[x_0, x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{\frac{f'(x_0)}{1!} - f[x_0, x_1]}{x_0 - x_1}$$

牛顿插值

例 5. 已知$f(x)=2x^4+3x-1$，求

$$f[1,2,3,4,5]=?,\qquad f[1,2,3,4,5,6]=?$$

解. 由差商与导数的关系，

$$f[1,2,3,4,5]=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}=\frac{2\times 4!}{4!}=2$$

$$f[1,2,3,4,5,6]=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}=\frac{0}{5!}=0$$

能否给出一般性的结论?

牛顿插值

牛顿插值

定理 4.

若$f(x)$是k次多项式，则有

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \begin{cases} a_k, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

其中a_k为x^k的系数。

牛顿插值

牛顿插值

定理 5.
如果$f(x)$的k阶差商$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]$是$x$的$m$次多项式，则$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]$是$x$的$m-1$次多项式

证明. 定义m次多项式

$$g(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$

则$g(x_k)=0$，即x_k是多项式$g(x)$的根。 由多项式的特性知，

$$g(x)=(x-x_k)h(x)$$

其中$h(x)$是$m-1$次多项式。
因此，

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x-x_k}$$

$$=h(x)$$

牛顿插值

牛顿插值

更进一步，有

定理 6.
若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则 $f[x, x_1, \cdots, x_m]$ 是 $n-m$ 次多项式，其中 $m \leq n$

证明. 利用定理5

拟合

- **作业：**

在做Newton插值时，已知节点组$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$和各阶差商$\{f(x_0), f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \cdots, f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]\}$；现增加了节点$(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$，试给出求差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}]$的算法。

THE END

谢谢张瑞老师的PPT