# 上周作业解答

**Exercise 1. [田宝玉(2008)]**
设二元码为 $C_b = \{11100, 01001, 10010, 00111\}$。
(1)计算此码的最小距离 $d_{min}$。
(2)计算此码的码率，假定码字等概分布。
(3)采用最大似然译码准则，当通过二元对称信道传输，接收序列分别为 10000, 01100 和 00100 时，应分别译成什么码字?

# 上周作业解答

解：
(1) 该码的最小距离：$d_{min} = 3$。
(2) 码率：$R = \frac{\log_2 4}{5} = 2/5 = 0.4$(比特/符号)。
(3) 对于二元对称信道，最大似然译码准则等价于最小汉明距离准则，所以接收序列 $10000, 01100$ 和 $00100$ 应分别译成：$10010, 11100$ 和 $11100$ 或 $00111$；

# 上周作业解答

**Exercise 2. [田宝玉(2008)]**

一个二元对称信道的转移概率矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}, (p < 1/2)$，信道输入符号 0，1 的概率分别为 $\omega$，$1-\omega$。

(1)求利用MAP准则的判决函数和平均错误率。

(2)求利用ML准则的判决函数和平均错误率。

(3)什么情况下,上述两准则的判决结果相同?

# 上周作业解答 I

解：(1) MAP 准则

计算先验概率：

$$P(Y="1")=\omega p+(1-\omega)(1-p)=2\omega p-\omega-p+1$$

$$P(Y="0")=\omega(1-p)+(1-\omega)p=\omega+p-2\omega p$$

① 在 $Y="1"$ 条件下

$$\begin{aligned}P(X="1"|Y="1")&=\frac{P(X="1")P(Y="1"|X="1")}{P(Y="1")}\\&=\frac{1-\omega-p+\omega p}{2\omega p-\omega-p+1}\\P(X="0"|Y="1")&=\frac{P(X="0")P(Y="1"|X="0")}{P(Y="1")}\\&=\frac{\omega p}{2\omega p-\omega-p+1}\end{aligned}$$

# 上周作业解答 II

若 $1-\omega p-p+\omega p>\omega p$，即 $\omega+p<1$ 时，判决 $X=''1''$；反之判决 $X=''0''$。

② 在 $Y=''0''$ 条件下

$$P(X=''1''|Y=''0'')=\frac{P(X=''1'')P(Y=''1''|X=''1'')}{P(Y=''1'')}$$

$$=\frac{p-\omega p}{\omega+p-2\omega p}$$

$$P(X=''0''|Y=''0'')=\frac{P(X=''0'')P(Y=''1''|X=''0'')}{P(Y=''1'')}$$

$$=\frac{\omega-\omega p}{\omega+p-2\omega p}$$

若 $p-\omega p>\omega-\omega p$，即 $p>\omega$ 时，判决 $X=''1''$；若 $p<\omega$，判决 $X=''0''$。

# 上周作业解答 III

译码判决可总结如下：

- MAP 判决函数

$$
\begin{aligned}
&G(y) = 0(\omega \geq 1-p) \\
&G(y) = 1(\omega < p) \\
&G(y=0) = 0, G(y=1) = 1(p \leq \omega < 1-p)
\end{aligned}
$$

- 平均错误率

$$
p_E = \begin{cases} 1-\omega(\omega \geq 1-p) \\ \omega(\omega < p) \\ p(p \leq \omega < 1-p) \end{cases}
$$

# 上周作业解答

(2)利用ML准则

$$P(X|Y) = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

根据题意有 $1-p>p$，因此，收到 $Y=''0''$ 时，$X$ 判为“0”；收到 $Y=''1''$ 时，则判为“1”。所以，ML 判决函数

$$G(y=0)=0, G(y=1)=1$$

平均错误率

$$p_E = p$$

(3) 当 $p<\omega\leq 1-p$ 时，上述两准则的判决结果相同。

# 上周作业解答

**Exercise 3. [王育民(2013)]**
给出 $\mathbb{F}_7$ 的加法和乘法运算表，并找出每个非零元素的逆元素。
解：求加法运算表。

| sum | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **6** | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

因为在该域下，加法单位元为0，所以红色数字所在列的元素为对应行元素的逆元素。

# 上周作业解答

（续）乘法运算表。

| times | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| **4** | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| **5** | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| **6** | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

在该域下，乘法单位元为1，所以红色数字所在列的元素为对应行元素的逆元素。

## 上周作业解答

**Exercise 4. [田宝玉(2008)]**
一个线性分组码的校验矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求该码的生成矩阵和码的最小距离。

# 上周作业解答

解：对校验矩阵进行行变换，使其成为标准形式为

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

系统码生成矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 上周作业解答

利用最小距离的判定方法: 如果校验矩阵至少有 $d$ 列线性相关，则码的最小距离为 $d$ 。从 $\mathbf{H}$ 中观察，有

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

而任何两列都不相同，所以码的最小距离为 3。