定理 10.8 (Kuratowski 定理)：一个图 G 是平面图当且仅当 G 中不包含同态于K_5或$K_{3,3}$的子图。

证明：在 10.3 节，我们已证明了K_5和$K_{3,3}$不是平面图，再由定理 10.4 可知，当一个图 G 包含同态于K_5或$K_{3,3}$的子图，则 G 不是平面图。从而定理的必要性得证。

现在我们来证明定理的充分性。我们对 G 的边数归纳证明。当 G 只有$m = 1$条边时，显然 G 是平面图。现在我们假设当 G 的边数$m < N (N \geq 2)$时，G 是平面图。现在设 G 有$m = N$条边。我们证明：如果 G 不包含同态于K_5和$K_{3,3}$的子图，但 G 不是平面图，则导出矛盾。

设 G 不是平面图，则有以下几个结论：

(a) G 必须是连通的；

(b) G 不包含割点；

(c) 如果 G 中任一边(x, y)被删除，则所得到的图G'中存在包含 x 和 y 的圈。

我们来证明结论(c)。注意到G'是连通的，这因为 G 不包含割点。如果G'中不存在包含 x 和 y 的圈，那么从 x 到 y 的每条路径都经过一个公共点 z。换句话说，z 是G'的一个割点。那么G'可以在 z 处分解成两

如果不都经过z，则就会有圈出现

个连通分支G_1'(包含 x 和 z)和G_2'(包含 y 和 z)。我们在G_1'中加入边 xz，得G_1''，在G_2'中加入边 yz 的G_2''。这时G_1''和G_2''都不包含同态于K_5和$K_{3,3}$的子图。这是因为G_1'是 G 的子图不可能包含同态于K_5或$K_{3,3}$的子

G1''加了一条边，单独讨论

图，假如G_1''中包含这样的子图，则该子图必然经过边 xz，而在 G 中可找到一条从 z 到 y 的路径 P 再加上边 yx 代替 xz，从而 G 中存在同态于K_5或$K_{3,3}$的子图，这与假设矛盾。同理可证对G_2''结论成立。

由归纳假设，G_1''和G_2''是平面图。根据定理 10.5，我们可以找到G_1''的平面嵌入，使得 xz 在外部面上，也可以找到G_2''的平面嵌入，使得 yz 在外部面上，令G_1''和G_2''在 z 处相交，并用 xy 边取代 xz 和 yz 边，则可以得到 G 的一个平面嵌入，这与 G 不是平面图的假设矛盾。从而证明了G'不包含割点。即G'是一个块。再由定理 3.2，x 和 y 包含在G'的一个圈 C 中，事实上，C 可能是包含 x 和 y 的若干个圈中的一个。

因为G'不包含同态于K_5或$K_{3,3}$的子图，并且G'比 G 少一条边，由归纳假设，G'是平面图。设$\widetilde{G}'$是G'的平面嵌入。我们选择 C 为包含 x 和 y 且把$\widetilde{G}'$的尽可能多的面包围在其内部的圈。G'的在 C 的内部的桥称为内部桥，而G'在 C 外部的桥称为外部桥。我们给 C 赋予一个顺时针的方向。如果 p 和 q 是 C 上两个顶点，那么$S[p,q]$表示 C 上从 p 到 q 顺时针方向的路径的顶点集。$S]p,q[=S[p,q]-\{p,q\}$。注意到，C 的任意一个外桥在$S[x,y]$或 $S[y,\ x]$上不可能有两个接触点，否则我们可以找到一个圈C'包含 x 和 y 且比 C 包围更多的面到其内部。

G 是由平面图G'加上一条边(x,y)构造起来。考虑到对 C 的外桥和内桥的要求以及 G 不是平面图的假设，C 一定有一个外桥 E 和一个内桥 I。对于外桥 E，E 只能有两个接触点 i 和 j，使得

$$i\in S]x,y[\text{ 并且 } j\in S]y,x[$$

I 在 C 上可以有任意多个接触点，但 I 至少有两个接触点满足：

$$a \in S]x, y[\text{ 并且 } b \in S]y, x[$$

否则(x,y)就可以加入到 C 的内部，从而得到 G 的平面嵌入，矛盾。

我们同时要求内桥还有接触点

$$c \in S]i, j[\text{ 和 } d \in S]j, i[$$

以使内桥 I 和外桥 E 不相容，这样，内桥就不能嵌入到 C 的外部面上去。

这样，我们就有以下几种情形(见图 10.10)

在所有这些情形中，G 中都有同态于K_5或$K_{3,3}$的子图，从而得到矛盾。

定理 10.9: 图 G 是平面图当且仅当 G 中既没有可以收缩成K_5的子图，也没有可以收缩成$K_{3,3}$的子图。

§10.5 平面图判定算法

*首先根据平面图的一些明显的充分条件和必要条件，我们可以对算法做一些简化。

(a) 如果 G 是不连通的，只要测试每个分支是否平面图；

(b) 如果 G 有割点，那么 G 是平面图当且仅当 G 的每个块是平面图；

(c) 删去环不影响图 G 的平面性；

(d) 把 2 度点压缩成一条边不影响平面性；

(e) 删去多重边不影响平面性；

(f) 如果$|E| < 9$或$|V| < 5$，则该图肯定是平面图；

(g) 如果$|E| > 3|V| - 6$，那么由推论 10.7.2，该图肯定不是平面图。

°G 允许的：设$\tilde{H}$是 G 的子图 H 的平面嵌入。如果存在 G 的一个平面嵌入$\tilde{G}$，使得$\tilde{H} \subseteq \tilde{G}$，那么$\tilde{H}$就称为是 G 允许的。

°例子：(见图 10.11) (a)是原图 G；(b)中实线图是 G 允许的。(c)中实线图是 G 不允许的。

°平面图判定算法：

1. 找出 G 中一个圈 C；
2. $i \leftarrow 1$；
3. $G_1 \leftarrow C$; $\tilde{G}_1 \leftarrow C$；
4. $f \leftarrow 2$；
5. EMBEDDABLE$\leftarrow$ true；

6. while $f \neq |E| - n + 2$ and EMBEDDABLE do

begin

7. 找 G 中和G_i相关的一个桥 B；

8. 对每个 B 找$F(B, \widetilde{G}_i)$；

9. if 对某个 B, $F\left(B, \widetilde{G}_i\right) = \emptyset$ then

B桥可能有很多种嵌入方式，如果不存在任何一种嵌入方式（即没有一个空的面可以嵌入一定要跨过一条边）那么输出不是平面图

begin

10. $\mathrm{EMBEDDABLE} \leftarrow \mathrm{false}$；

11. 输出信息："G 是非平面图"；

end；

12. if EMBEDDABLE then

begin

如果只有一种嵌入新的桥的方式直接选择它

13. if 对某个 B, $\left|F\left(B, \widetilde{G}_i\right)\right| = 1$ then $F \leftarrow F(B, \widetilde{G}_i)$

else 设 B 是任意一个桥，F 是$F \in F\left(B, \widetilde{G}_i\right)$的面；

14. 找 B 中连接 B 在G_i上两个接触点的一条路P_i；

任意选择一个桥加入

15. $G_{i+1} \leftarrow G_i + P_i$；

16. 通过在$\widetilde{G}_i$的面 F 中画路P_i得到G_{i+1}的一个平面嵌入$\widetilde{G}_{i+1}$；

17. $i \leftarrow i + 1$；

18. $f \leftarrow f + 1$；

19.　　if $f = |E| - n + 2$ then 输出信息："G 是平面图"

end；

end；

*其中：$F\left(B, \widetilde{G}_i\right)$是桥 B 可嵌入$\widetilde{G}_i$中的面的集合。

°例子：(见图 10.12)

§10.6　　平面图的着色

°地图：连通无割边平面图的平面嵌入及其所有面称为平面地图或地图。地图的面称为"国家"。若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家是相邻的。

°面着色：对地图 G 的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对 G 的一种正常面着色，若能用 k 种颜色给 G 进行正常面着色，就称 G 是 k 面可着色的。若 G 是 k 面可着色的，但不是$(k-1)$面可着色的，就称 G 的面色数为 k，记作$\chi^*(G) = k$。

定理 10.10：地图 G 是 k 面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是 k 可着色的。

证明：必要性。给 G 一种 k 面着色。由于 G 连通，由(10.1)式可知

$\upsilon(G^*) = \phi(G)$，即 G 的每个面中含G^*的一个顶点。设v_i^*位于 G 的面

R_i内，将G^*的顶点v_i^*着R_i的颜色，易知，若v_i^*与v_j^*相邻，则由于R_i与R_j的颜色不同，所以v_i^*与v_j^*的颜色也不同，因而G^*是 k 可着色的。类似地可证充分性。 ■

°四色猜想 (1852 年)：

任何一个地图可用四种颜色分别对每一个国家着一种颜色，使得有公共边界的任意两个国家着不同的颜色。

定理 10.11：每个平面图都是 5 顶点可着色的。

证明：用反证法。假设定理不成立。则存在一个 6 临界平面图 G。由于临界图是简单图，由推论 10.7.3，推得$\delta \leq 5$。另一方面由定理 9.1 知，$\delta \geq 5$。所以$\delta = 5$。设 v 是 G 中一个 5 度顶点，并且设$(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$是$G - v$的一个正常 5 顶点着色；因为 G 是 6 临界的，这样的着色一定存在。由于 G 本身不是 5 顶点可着色的，v 必须和染有这五种颜色中每一种颜色的顶点相邻。所以我们可以假定 v 的邻点沿着 v 顺时针方向是v_1, v_2, v_3, v_4, v_5，这里$v_i \in V_i, 1 \leq i \leq 5$。

用G_{ij}表示由$V_i \cup V_j$导出的子图$G[V_i \cup V_j]$，于是v_i和v_j必属于G_{ij}的同一个分支。因为不然的话，考察G_{ij}的一个包含v_i的分支。在这个分支中交换颜色 i 和 j，得$G - v$的一个新的正常 5 顶点着色，其中只有四种颜色(除 i 外)分配给 v 的邻点，然而已经证明，这种情形不能发生，所以v_i和v_j必属于G_{ij}的同一个分支。设P_{ij}是G_{ij}中的(v_i, v_j)路，并将圈$vv_1P_{13}v_3v$记为 C(见图 10.13)。由于 C 分隔v_2和v_4(在图 10.13 中，v_2

$\in \mathrm{int}\, C$, 而$v_4 \in \mathrm{ext}\, C$)，从 Jordan 曲线定理推得，路P_{24}必然和 C 相遇于某一点。因为 G 是平面嵌入，这个点必然是顶点，但这是不可能的。因为P_{24}的顶点有颜色 2 和 4，而 C 的顶点不具有这两种颜色。矛盾。■

定理 10.12：下面 3 个断言是等价的：

(i) 每个平面图都是 4 顶点可着色的；

(ii) 每个平面嵌入都是 4 面可着色的；

(iii) 每个简单 2 边连通 3 正则平面图都是 3 边可着色的。

证明：我们按照$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$的顺序来证明。

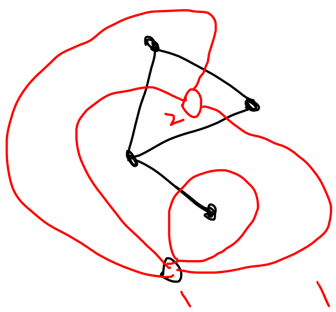
$(i) \Rightarrow (ii)$这是由定理 10.10 充分性推出的。

$(ii) \Rightarrow (iii)$假设(ii)成立。设 G 是简单 2 边连通 3 正则平面图，$\tilde{G}$是 G 的平面嵌入，根据(ii)，$\tilde{G}$有一个正常的 4 面着色，由于用怎样的符号来表达颜色是无关紧要的，所以这里我们可以在整数模 2 的域中用向量$c_0 = (0,0), c_1 = (1,0), c_2 = (0,1), c_3 = (1,1)$表示这四种颜色。把某边所分割的面的颜色之和作为颜色分配给该边，可以得到$\tilde{G}$的一个 3 边着色(见图 10.14)。若c_i, c_j和c_k是分配给顶点 v 关联的三个面的三种颜色，则$c_i + c_j, c_j + c_k$以及$c_k + c_i$是分配给与 v 关联的三条边的颜色。由于$\tilde{G}$是 2 边连通的，所以每条边分隔两个不同的面，并且在这个方案中，没有边分配到颜色c_0。同样明显的是，与一个给定的顶点关联

的三条边分配到不同的颜色。于是，我们获得一个$\widetilde{G}$的，因而也是 G 的正常 3 边着色。

(iii) $\Rightarrow$ (i)假设(iii)成立，而(i)不成立。则存在一个 5 临界的平面图 G。设$\widetilde{G}$是 G 的一个平面嵌入。则(由习题)$\widetilde{G}$是一个简单极大平面图 H 的生成子图。H 的对偶图H^*是一个 2 边连通 3 正则的简单平面图(由习题)。根据(iii)，H^*有一个正常 3 边着色(E_1, E_2, E_3)。对于$i \neq j$，设H_{ij}^*表示由$E_i \cup E_j$导出的H^*的子图。由于H^*的每个顶点和E_i的一条边以及E_j的一条边关联，H_{ij}^*是不相交的圈的并图。因而(由习题)是 2 面可着色的，于是H^*的每个面是H_{12}^*的一个面与H_{23}^*的一个面的交集。给定H_{12}^*和H_{23}^*的一个正常 2 面着色后，把分配给交集为 f 的那两个面的一对颜色分配给面 f，得到H^*的一个 4 面着色。由于$H^* = H_{12}^* \cup H_{23}^*$，容易验证$H^*$的这个 4 面着色是正常的。由于 H 是 G 的母图，所以有

$5 = \chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$，这个矛盾说明了(i)确实是成立的。 ■



1上有环，无法着色

作业 14：

1. 证明：平图 G 是 2 面可着色的当且仅当 G 是 Euler 图。

G没有割边

2. 利用 Kuratowski 定理证明：Petersen 图是非平面图。

3. 利用平面图判定算法找出下图(图 10.14)的一个平面嵌入。

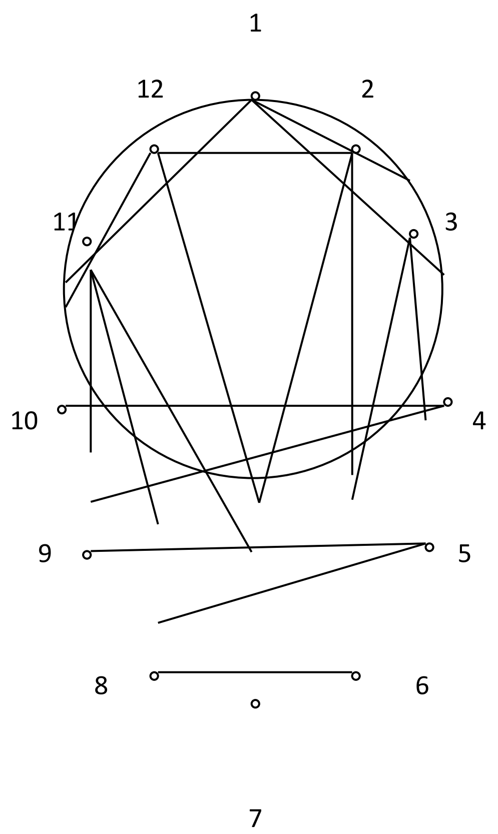


图 10.14