解方程组

高斯消元法与LU分解

胡建芳

hujf5@mail.sysu.edu.cn

计算机学院

课程回顾

二分法、不动点迭代法、割线法：

二分法

优点：只要找好初始区间，一定会收敛，可以对目标函数一无所知

缺点：收敛较慢，线性收敛

不动点法

优点：满足一定条件，能保证收敛，可以对目标函数一无所知

缺点：收敛较慢，线性收敛

牛顿法 ⟹ **梯度下降法**

优点：收敛快（有重根情况下，收敛慢）

缺点：需要求一阶导数，一阶导数不为0，且要初始值在根附近

割线法

优点：收敛较快，不需要求导数

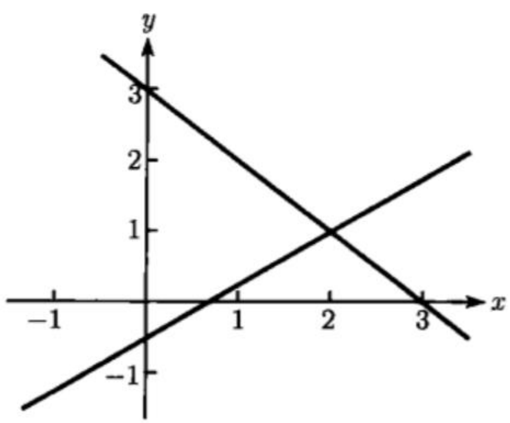
缺点：两个初始值，初始值在根附近

多元一次方程组

- **考虑方程组：**

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 3x-4y=2. \end{cases}$$

二元一次方程，几何上看是两条直线的交点。



人工计算，怎么解?

计算机怎么办?

多元一次方程组

- **人工计算（初中学生计算方法）：**

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$$

消元法，可以用第二个方程减去第一个方程乘以3，消去x变量。

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ -7y = -7. \end{cases}$$

从底下的方程开始，回代

$$-7y = -7 \rightarrow y = 1,$$

$$x + y = 3 \rightarrow x + (1) = 3 \rightarrow x = 2.$$

多元一次方程组

- **人工计算（大学生计算方法）：**

消元法，矩阵运算

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c}\text{从第 2 行减} \\ \text{去}3\times\text{第}1\text{行}\end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right]$$

当左边的方阵变成“三角形”时，可以回代求解

计算机怎么办?

多元一次方程组

- **高斯消元法：**

高斯消元法的计算量有多大?

引理 2.1 对任意正整数 n, (a) $1+2+3+4+\cdots+n=n(n+1)/2$, (b) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

消为0

从第 2 行减去 $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ 乘上第 1 行,

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1. \end{array}$$

n次乘法，一次除法，n次加减法

多元一次方程组

高斯消元法：

高斯消元法的计算量有多大?

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right].
$$

消为0

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{i2}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{in}-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n} & & b_i-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}b_1
\end{array}
$$

消去第一列某个元素，需要n次乘法，1次除法，n次加减法

第一列消去后，同样的方式消去第二列和其它列

多元一次方程组

- **高斯消元法：**

高斯消元法的计算量有多大?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

消为0

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & a_{jj} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,j+1} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{j,j+1} & \cdots & a_{in} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jn} & b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j . \end{array}$$

消去第j列某个元素，需要n-j+2次乘除法

消除第j列的下三角元素，总共需$\sum$（n-j+2）(n-j)次乘除法。

所以，高斯消元法的计算量是：　　（n-j+2）(n-j)

多元一次方程组

- **高斯消元法：**

高斯消元法的计算量有多大?

高斯消去法消元步骤的运算计数　对含有 n 个变量的 n 个方程的方程组，完成消元步骤需 $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ 次乘法/除法.

试试推导!

多元一次方程组

- **高斯消元法：**

高斯消元法的计算量有多大?

消元之后，变成上三角形矩阵。

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}, \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}}, \\ \quad \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases}$$

乘除法次数=1+2+3+...+n=n(n+1)/2

多元一次方程组

- **高斯消元法：**

现在可以回答高斯消元法的计算量有多大。

高斯消去法消元步骤的运算计数　对含有 n 个变量的 n 个方程的方程组，完成消元步骤需 $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ 次乘法/除法.

回代的乘除法次数 n^2/2

O(n^3/3)+O(n^2/2)

多元一次方程组

高斯消元法：

例 2.3 在一台特定的计算机上，执行一个 500×500 的三角形矩阵的回代过程需要 0.1 秒. 用高斯消去法求解一个含 300 个未知量的 300 个方程的一般方程组，估计所需花费的时间.

计算机在 0.1 秒内可执行 $(500)^2/2$ 次乘法/除法，即运算速度为 $(500)^2(10)/2 = 1.25\times 10^6$ 次运算/秒. 求解这个一般 (非奇异的) 方程组需要大约 $(300)^3/3$ 次运算，在大约

$$\frac{(300)^3/3}{(500)^2\times 10/2}\approx 7.2\mathrm{s}.$$

内可以完成. ◀

多元一次方程组

高斯消元法：

例 2.3 在一台特定的计算机上，执行一个 500×500 的三角形矩阵的回代过程需要 0.1 秒. 用高斯消去法求解一个含 300 个未知量的 300 个方程的一般方程组，估计所需花费的时间.

计算机在 0.1 秒内可执行 $(500)^2/2$ 次乘法/除法，即运算速度为 $(500)^2(10)/2 = 1.25 \times 10^6$ 次运算/秒. 求解这个一般 (非奇异的) 方程组需要大约 $(300)^3/3$ 次运算，在大约

$$\frac{(300)^3/3}{(500)^2 \times 10/2} \approx 7.2\text{s}.$$

内可以完成. ◀

多元一次方程组

- **LU分解：**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

方程写成求解x 使得 Ax=b

定义 2.2 一个 $m \times n$ 矩阵 L 是下三角的(lower triangular)，若其元素满足 $l_{ij} = 0$(当 $i < j$ 时)．一个 $m \times n$ 矩阵 U 是上三角的(upper triangular)，若其元素满足 $u_{ij} = 0$(当 $i > j$ 时)．

我们希望找到一个上三角矩阵L，和一个下三角矩阵U，使得A=LU

高等数学，L是对矩阵行作变换，U是对矩阵列作变换。**LU分解指的是，我们希望对矩阵A进行简单的行列变换，把它变成三角矩阵。**

多元一次方程组

- **LU分解：**

求

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的 LU 分解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{减去 } 2\times\text{第 1 行}]{\text{第 2 行}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-3)\times\text{第 1 行}]{\text{第 3 行减去}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-\frac{7}{3})\times\text{第 2 行}]{\text{第 3 行减去}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U.$$

$\downarrow$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

多元一次方程组

- **LU分解：**

事实 1 设 $L_{ij}(-c)$ 表示主对角元为 $1, (i,j)$ 位置为 $-c$, 其余元素都为 0 的下三角矩阵. 则 $A \to L_{ij}(-c)A$ 表示行运算 “从 i 行减去 c 乘 j 行”.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

多元一次方程组

- **LU分解：**

事实 2 $\quad L_{ij}(-c)^{-1} = L_{ij}(c).$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

多元一次方程组

- **LU分解：**

事实 3 下面的矩阵乘积方程成立：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ c_2 & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & c_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}$$

多元一次方程组

- **LU分解：**

假设得到A的LU分解，则Ax=LUx=b, 定义c=Ux. 回代是个两步过程：

（1）解Lc=b得到c；

（2）解Ux=c得到x；

多元一次方程组

- **LU分解举例：**

$$\boldsymbol{LU}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-\frac{7}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&-2\\-3&1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}.\qquad \boldsymbol{b}=(3,3,-6)$$

步骤 $\boldsymbol{Lc}=\boldsymbol{b}$ 是

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-\frac{7}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1=3,\\2c_1+c_2=3,\\-3c_1-\frac{7}{3}c_2+c_3=-6.\end{cases}$$

步骤 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{c}$ 是

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=3,\\-3x_2=-3,\\-2x_3=-4,\end{cases}$$

多元一次方程组

- **LU分解的复杂度：**

解
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_2, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_k, \end{aligned}$$

高斯消元法：需要 kn^3/3次乘除运算

LU分解法： 需要 n^3/3+kn^2

多元一次方程组

- **LU分解计算（4阶方阵）：**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}$$

● → ● → ● → ● → ● → ● → ●

按颜色顺序依次计算

多元一次方程组

LU分解的完备性：

是不是所有的矩阵都可以进行LU分解？

证明 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 没有 $\boldsymbol{LU}$ 分解.

多元一次方程组

- **LU分解的前提条件：**

1. 矩阵是方阵（LU分解主要是针对方阵）；

2. 矩阵是可逆的，也就是该矩阵是满秩矩阵，每一行都是独立向量；

3. 消元过程中没有0主元出现，也就是不能出现行交换的初等变换。

多元一次方程组

LU分解的充要条件：

定理 1（*LU* 分解） 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 存在唯一分解式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U} \tag{1}$$

的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $D_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n-1)$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是单位下三角阵，$\boldsymbol{U}$ 是上三角阵.

设A为 $n\times n$ 阶矩阵，子式

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}(i=1,2,\dots,n)$$

称为A的i阶顺序主子式。[1]

作业

- **作业：**

求出所给矩阵的 LU 分解，并用矩阵相乘检验：

$$(\mathbf{a})\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix};\quad (\mathbf{b})\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix};\quad (\mathbf{c})\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

THE END