8 考

第七章 边着色

§ 7.1 边色数

°正常 k 边着色：无环图 G 的一个 k 边着色 $\mathcal{C}$ 是指 k 种颜色 1, 2, ⋯, k 对于 G 的各边的一个分配。若没有相邻的两条边有着相同的颜色，则称着色是正常的。

换句话说，一个 k 边着色可以看作是 E 的一个分类$(E_1, E_2, \cdots, E_k)$，这里E_i(可能为空)表示染有颜色 i 的 E 的子集。一个正常的 k 边着色就是每个E_i均为对集的 k 边着色$(E_1, E_2, \cdots, E_k)$。

°例子：图 7.1 中的图有正常的 4 边着色：$(\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\})$。

°k 边可着色：若 G 有正常的 k 边着色，则称 G 是 k 边可着色的。

若 G 是 k 边可着色的，则对于每个 $l > k$，G 亦是 l 边可着色的。

°边色数：无环图 G 的边色数$\chi'(G)$是指 G 为 k 边可着色的那些最小的 k 值。若$\chi'(G) = k$，则称 G 是 k 边色的。

*例如：图 7.1 没有正常 3 边着色，故该图是 4 边色的。

*很明显，在任何正常边着色中，和任一顶点关联的各边必须分配以不同的颜色。由此推知

$$\chi' \geq \Delta \quad (7.1)$$

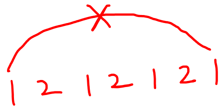
边色数大于最大度

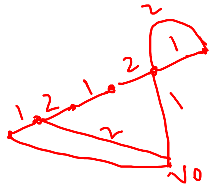
引理 7.1：设 G 为不是奇圈的连通图，则 G 有一个 2 边着色，它的两种颜色在度至少为 2 的每个顶点上都表现。

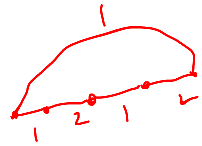
存在一个，特殊构造的着色方案

证：显然可以假定 G 是非平凡的。首先，假设 G 是 Euler 图。若 G 是偶圈，则 G 的正常 2 边着色具有所要求的性质。否则，G 必有一个度

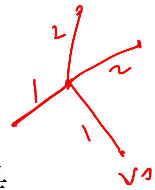
不是偶圈，回路上有重复的顶点







至少为 4 的顶点v_0。设$v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$是 G 的 Euler 环游，并且置



$$E_1=\{e_i\mid i\text{ 是奇数}\}\text{ 以及 }E_2=\{e_i\mid i\text{ 是偶数}\}\qquad(7.2)$$

则 G 的 2 边着色(E_1,E_2)具有所要求的性质，因为 G 的每个顶点都是$v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$的内部顶点。

若 G 不是 Euler 图，则添加一个新的顶点v_0，并把它和 G 的每个奇点连接起来，构成一个新图G^*。显然G^*是 Euler 图。设$v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$是$G^*$的 Euler 环游，并同(7.2)式一样地定义$E_1$和$E_2$，易证 G 的 2 边着色$(E_1\cap E,E_2\cap E)$具有所要求的性质。 ■

∘着色的改进：

给定 G 的 k 边着色 $\mathcal{C}$ 后，我们用 c(v)表示在 v 上表现的不同颜色的数目，显然恒有

$$c(v)\le d(v)\qquad(7.3)$$

并且 $\mathcal{C}$ 是正常 k 边着色当且仅当(7.3)式中的等式对 G 的所有顶点 v 都成立。假设另外存在一个 k 边着色 $\mathcal{C}'$。它在 v 上表现的不同颜色的数目记为$c'(v)$。若有

$$\sum_{v\in V}c'(v)>\sum_{v\in V}c(v)$$

则称 k 边着色 $\mathcal{C}'$是 $\mathcal{C}$ 的一个改进。一个最优 k 边着色是指不能改进的 k 边着色。

正常k边着色一定是最优k边着色
但最优k边着色不一定是正常k边着色

k种颜色的边子集

引理 7.2：设 $\mathcal{C}=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$是 G 的一个最优 k 边着色。若存在 G 中的一个顶点 u 和颜色 i 及 j，使得 i 不在 u 上表现，而 j 在 u 上至少表现两次，则 $G[E_i\cup E_j]$中包含 u 的那个分支是奇圈。

证：设 u 是满足引理假设的顶点，$G[E_i\cup E_j]$中包含 u 的分支记为 H。

假设 H 不是奇圈，那么由引理 7.1，H 有一个 2 边着色，它的两种颜色在 H 中度至少为 2 的各个顶点上同时表现。按这种方式用颜色 i 和 j 重新给 H 的边着色，得到 G 的一个新的 k 边着色$\mathcal{C}' = (E_1', E_2', \cdots, E_k')$。用$c'(v)$表示着色 $\mathcal{C}'$在 v 上表现的不同颜色的数目，则有

$$c'(u) = c(u) + 1$$

由于两种颜色 i 和 j 都在 u 上表现，并且还有

$$c'(v) \geq c(v) \text{ 对 } v \neq u \text{ 成立}$$

于是$\sum_{v\in V} c'(v) > \sum_{v\in V} c(v)$，这与 $\mathcal{C}$ 的选择矛盾。由此推得 H 是奇圈。

■

定理 7.3：若 G 是偶图，则$\chi' = \Delta$。边色数等于最大度

证：设 G 是具有$\chi' > \Delta$的图，且 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_\Delta)$是一个最优Δ边着色，并设 u 是适合 $c(u) < d(u)$的一个顶点。显然 u 满足引理 7.2 的假设。所以 G 包含一个奇圈，因而不是偶图。由此及(7.1)式推得，若 G 是偶图，则$\chi' = \Delta$。 ■

$\chi' \geqslant \Delta$

如果相等，则G的最优Δ着色一定是它的正常Δ 边着色

§ 7.2 Vizing 定理

定理 7.4：若 G 是简单图，则$\chi' = \Delta$或$\chi' = \Delta + 1$。

证：设 G 是简单图。由(7.1)式，只需要证$\chi' \leq \Delta + 1$。假设$\chi' > \Delta + 1$。设 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_{\Delta+1})$是 G 的一个最优$(\Delta + 1)$边着色，并设 u 是适合 $c(u) < d(u)$的顶点。则存在颜色i_0和i_1，i_0不在 u 上表现，而i_1至少在 u 上表现两次。设 uv_1具有颜色i_1，如图 7.2 (a)所示。

由于 $d(v_1) < \Delta + 1$，因此某一颜色i_2不在v_1上表现。这样i_2必然在 u

上表现，因为如若不然，用i_2来给 uv_1重新着色，可得 $\mathcal{C}$ 的一个改进。因此存在一条边 uv_2有颜色i_2。再一次地，由于 $d(v_2) < \Delta + 1$，某颜色i_3不在v_2上表现，i_3必然在 u 上表现，因为如若不然，用i_2给 uv_1，用i_3给 uv_2重新着色，又可以得到一个改进的$(\Delta + 1)$边着色。所以存在一条边 uv_3有颜色i_3。继续这个过程，就构作出一个顶点序列$v_1, v_2,$ $\cdots$和一个颜色序列$i_1, i_2, \cdots$，使得：

(i) uv_j有颜色i_j；且

(ii) i_{j+1}不在v_j上表现；

由于 u 的度是有限数，故存在一个最小整数 l，使得对某个 $k < l$，有

(iii) $i_{l+1} = i_k$。

这种状况在图 7.2 (a)中描绘。

现在以如下方式给 G 重新着色。对于 $1 \le j \le k - 1$, 用颜色i_{j+1}给 uv_j重新着色，产生一个新的$(\Delta + 1)$边着色$\mathcal{C}' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_{\Delta+1})$(图 7.2 (b))，显然

$$c'(v) \ge c(v) \text{ 对所有 } v \in V \text{ 成立。}$$

于是，$\mathcal{C}'$也是 G 的最优$(\Delta + 1)$边着色，由引理 7.2，$G[E'_{i_0} \cup E'_{i_k}]$ 中包含 u 的分支 H'是奇圈。

现在对于 $k \le j \le l - 1$ 用颜色i_{j+1}给 uv_j重新着色，用颜色i_k给 uv_l 重新着色，得到一个$(\Delta + 1)$边着色 $\mathcal{C}'' = (E''_1, E''_2, \cdots, E''_{\Delta+1})$ (图 7.2 (c))

如前所述，有

$$c''(v) \geq c(v) \text{ 对所有 } v \in V \text{ 成立，}$$

并且 $G[E''_{i_0} \cup E''_{i_k}]$中包含 u 的分支 H''是奇圈。但是，由于$v_k$在 H'中度数为 2，显然$v_k$在 H''中度数为 1，这与 H''是奇圈矛盾，由这个矛盾，推知定理成立。 ■

作业 10：

1. 证明：若 G 是偶图，则 G 有Δ正则偶母图。
2. 证明：若 G 是偶图，且$\delta > 0$, 则 G 有一个δ边着色，使得所有δ种颜色都在每一个顶点上表现。
3. 证明：若 G 是非空正则简单图，且υ是奇数，则$\chi' = \Delta + 1$。