第二章 树

§2.1 树

°树：连通的无圈图称为树。

°例子：6 个顶点的不同构的树（见图 2.1）

°森林：无圈的图(不一定连通)称为森林。例子：

定理 2.1：在一棵树中，任意两个顶点均由唯一的路连接。

证：用反证法。设 G 是树，假设在 G 中存在两条不同的(u,v)路P_1和P_2。因为$P_1 \neq P_2$，所以存在P_1的一条边$e = xy$，它不是P_2的边。显然，图$(P_1 \cup P_2) - e$是连通的。所以它包含一条(x, y)路 P。于是$P + e$就是无圈图 G 中的圈，导致矛盾。■

定理 2.2：若 G 是树，则$\varepsilon = \upsilon - 1$。

证：对υ用归纳法。当$\upsilon = 1$时，$G \cong K_1$且 $\varepsilon = 0 = \upsilon - 1$。

假设定理对少于υ个顶点的所有树均成立，并设 G 是$\upsilon \geq 2$个顶点的树。设$uv \in E$。因为uv是 G 中唯一的(u,v)路，所以$G - uv$不包含(u,v)路。从而$G - uv$不连通且$\omega(G - uv) = 2$。$G - uv$的分支G_1和G_2是无圈且连通的，因此是树。并且G_1和G_2的顶点数均小于υ。所以由归纳假设

$$\varepsilon(G_i) = \upsilon(G_i) - 1, \text{对 } i = 1, 2 \text{ 成立。}$$

删掉一条边使满足归纳

从而

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1$$
$$= \upsilon(G_1) + \upsilon(G_2) - 1 = \upsilon(G) - 1。 \quad ■$$

推论 2.2：每棵非平凡树至少有两个 1 度顶点。

证：设 G 是非平凡树，则

平凡树：仅有一个节点的树

$$d(v) \geq 1, \text{对所有 } v \in V \text{ 成立，}$$

再由定理 1.1 和 2.2，有

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon = 2\upsilon - 2$$

由此推出至少对于两个顶点 v，有$d(v) = 1$。 ■

§ 2.2 割边和键

°割边：图 G 的割边是指使得$\omega(G - e) > \omega(G)$的边 e。

连通分量增加

°割边的例子：

如果e不是割边，则e包含在圈中

定理 2.3：e 是 G 的割边当且仅当 e 不包含在 G 的一个圈中。

证：设 e 是 G 的割边。由于$\omega(G - e) > \omega(G)$，所以存在 G 的顶点 u 和 v，它们在 G 中连通，但在$G - e$中不连通。因此在 G 中必有某条(u, v)路 P 经过 e。设 x 和 y 是 e 的端点，并且在 P 上 x 前于 y。在$G - e$中，u 被 P 的一节连到 x，y 被 P 的一节连到 v。若 e 在某圈 C 中，则在$G - e$中 x 和 y 将被路$C - e$所连。于是，u 和 v 在$G - e$中就连通了，导致矛盾。

则一定存在另一条x到y的路，这样就形成了圈

反之，假设$e = xy$不是 G 的割边，则$\omega(G - e) = \omega(G)$。由于在 G 中存在一条$(x, y)$路(即 xy)，所以 x 和 y 在 G 的同一个分支中。由此推知：x 和 y 在$G - e$的同一个分支中，从而在$G - e$中存在一条(x, y)路 P。于是 e 就位于 G 的圈$P + e$中了。 ■

定理 2.4：一个连通图是树当且仅当它的每条边都是割边。

证：设 G 是树且 e 是 G 的边，由于 G 是无圈图，所以 e 不包含在 G 的圈中，由定理 2.3，e 是 G 的割边。

反之，假设 G 连通但不是树，则 G 包含一个圈 C。由定理 2.3，C 的边不会是 G 的割边。 ■

°生成树：G 的生成树是指 G 的生成子图，它同时又是树。

推论 2.4.1：每个连通图都包含生成树。

证：设 G 连通并设 T 是 G 的最小连通生成子图。由定义知$\omega(T) = 1$，且对 T 的每条边 e 有$\omega(T - e) > 1$。由此推知：T 的每条边均为割边。而 T 是连通的，故根据定理 2.4，T 是树。 ■

°生成树的例子：（见图 2.2）

推论 2.4.2：若 G 连通，则$\varepsilon \geq \upsilon - 1$。

证：设 G 连通。由推论 2.4.1，G 包含一个生成树 T,所以

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(T) = \upsilon(T) - 1 = \upsilon(G) - 1。 ■$$

定理 2.5：设 T 是连通图 G 的生成树，并且 e 是 G 的不在 T 中的一条边。则$T + e$包含唯一的圈。

证：由于 T 是无圈图，因此$T + e$的每个圈都包含 e。此外，C 是$T + e$的圈当且仅当$C - e$是 T 中连接 e 的两个端点的路。由定理 2.1，T 中只有一条这样的路，所以$T + e$包含唯一的圈。 ■

对 V 的子集 S 和S'，用$[S, S']$表示一个端点在 S 中，另一个端点在S'中的所有边的集合。

°边割：G 的边割是指形为$[S, \bar{S}]$的 E 的子集，其中$\emptyset \neq S \subset V$，且$\bar{S} = V \backslash S$。G 的极小边割称为键 B。即 B 是边割，但 B 的任何真子集不是边割。

°例子：（见图 2.3）

°补图：若 H 是 G 的子图，G 中 H 的补图是指子图$G-E(H)$，记为$\overline{H}(G)$。若 G 连通，T 是 G 的生成树，则形为$\overline{T}$的子图称为 G 的余树。

定理 2.6：设 T 是连通图 G 的生成树，e 是 T 的任一边，则

(i) 余树$\overline{T}$不包含 G 的键；

(ii) $\overline{T}+e$包含 G 的唯一的键。

证：(i) 设 B 是 G 的键。则$G-B$不连通，因而它不能包含生成树 T。所以 B 不包含在$\overline{T}$中。(ii) 设$T-e$的两个分支之一的顶点集为 S，则边割$B=[S,\overline{S}]$显然是 G 的键，并且包含在$\overline{T}+e$中。于是，对任何$b\in B$，$T-e+b$是 G 的生成树。所以 G 的每个包含在$\overline{T}+e$中的键必然包含每一个这样的元素 b。由此推知：B 是 G 的包含在$\overline{T}+e$中的唯一的键。 ■

§2.3 割点

°割点：G 的顶点 v 称为割点，如果 E 可以分为两个非空子集E_1和E_2，使得$G[E_1]$和 $G[E_2]$恰有一个公共顶点 v。若 G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点当且仅当$\omega(G-v)>\omega(G)$。

°例子：（见图 2.4）

定理 2.7：设 v 是树 G 的顶点，则 v 是 G 的割点当且仅当$d(v)>1$。

证：若$d(v)=0$, 则 $G\cong K_1$，显然 v 不是割点。

若$d(v) = 1$, 则 $G - v$ 是有 $\upsilon(G - v) - 1$条边的无圈图，因此是树(见作业)。所以$\omega(G - v) = 1 = \omega(G)$, v不是割点。

若$d(v) > 1$，则存在相邻于 v 的两个不同顶点 u 和 w。路 uvw 是 G 中的一条(u, w)路。根据定理 2.1，uvw 是 G 中唯一的(u, w)路，由此推知：在$G - v$中没有(u, w)路，所以$\omega(G - v) > 1 = \omega(G)$。于是 v 是 G 的割点。 ■

推论2.2：每一棵非平凡的树至少有两个一度的顶点

推论 2.7：每个非平凡的无环连通图，至少有两个不是割点的顶点。

证：设 G 是非平凡无环连通图。由推论 2.4.1，G 包含一个生成树 T。由推论 2.2 和定理 2.7，T 至少有两个不是割点的顶点。设 v 是任意一个这样的顶点，则$\omega(T - v) = 1$。由于 T 是 G 的生成子图，$T - v$ 是 $G - v$的生成子图，所以

$$\omega(G - v) \leq \omega(T - v)$$

由此推知：$\omega(G - v) = 1$，因而 v 不是 G 的割点。由于至少有两个这样的顶点 v，定理得证。 ■

§ 2.4 Cayley 公式

°边收缩：G 的边 e 称为被收缩，是指把它删去并使它的两个端点重合；这样得到的图记为$G \cdot e$。

°例子：（见图 2.5）

显然，若 e 是 G 的连杆，则

$$\upsilon(G \cdot e) = \upsilon(G) - 1$$

$$\varepsilon(G\cdot e)=\varepsilon(G)-1 \text{ 和 } \omega(G\cdot e)=\omega(G)$$

所以若 T 是树，则$T\cdot e$也是树。

我们用$\tau(G)$记 G 的生成树的棵数。

定理 2.8：若 e 是 G 的连杆，则$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$。

证：由于 G 的每一棵不包含 e 的生成树也是$G-e$的生成树，所以反之，$\tau(G-e)$就是 G 的不包含 e 的生成树的棵数。

对于 G 的每棵包含 e 的生成树 T，相应有一棵$G\cdot e$的生成树$T\cdot e$。这个对应显然是一一对应。（见图 2.6）所以$\tau(G\cdot e)$恰好是 G 的包含 e 的生成树的棵数。因此推知：

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)。$$

◦例子：（见图 2.6）

作业 3：

1. 设 G 是有$\upsilon-1$条边的图。证明下述三个语句是等价的：

(a) G 是连通图；

(b) G 是无圈图；

(c) G 是树。

2. 证明：

(a) 若 G 的每个顶点均为偶点，则 G 没有割边； 假设有割边并删除割边

(b) 若 G 是 k-正则偶图且$k\geq 2$，则 G 没有割边。

3. 设 G 连通且$\upsilon\geq 3$，证明：

(a) 若 G 有割边，则 G 有顶点 v 使$\omega(\mathrm{G}-\mathrm{v}) > \omega(G)$；

(b) (a)的逆命题不一定正确。

4. 证明：若$\mathrm{e} \in \mathrm{E}$, 则 $\omega(\mathrm{G}) \leq \omega(\mathrm{G}-\mathrm{e}) \leq \omega(\mathrm{G}) + 1$。