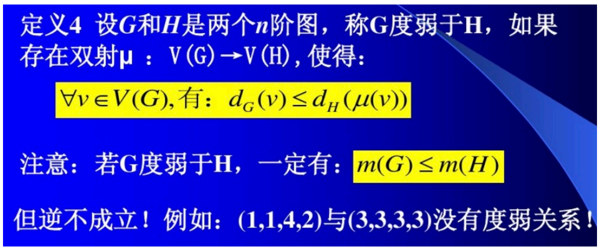
度弱于定义：



§8.3 Turan 定理

*本节我们证明 Turan(1941)提出的一个著名的定理。它确定了有ν个顶点而不包含大小为 m+1 的团的简单图所能具有的最大边数。Turan 定理成为极图理论的基础。

定理 8.8：若简单图 G 不包含K_{m+1}，则 G 度弱于某个完全 m 部图 H。并且，若 G 具有与 H 相同的度序列，则$G \cong H$。

*解释：G 度弱于 H，和完全 m 部图。

证：对 m 用归纳法。当 m=1 时，定理当然成立。假定定理对所有$m < n$成立，并且设 G 是不包含K_{n+1}的简单图。选择 G 中度为Δ的一个顶点 u，并且置$G_1 = G[N(u)]$。由于 G 不包含K_{n+1}，所以G_1不包含K_n，因而由归纳假设，G_1度弱于某个完全$(n-1)$部图H_1。

其次，置$V_1 = N(u)$以及$V_2 = V \backslash V_1$，并且用G_2表示其顶点集是V_2而边集是空集的图。考察G_1和G_2的联图$G_1 \vee G_2$(*解释联图)。由于

$$N_G(v) \subseteq N_{G_1 \vee G_2}(v), \qquad 对于\ v \in V_1成立 \qquad (8.15)$$

而且V_2的每个顶点在$G_1 \vee G_2$中有度Δ，所以 G 度弱于$G_1 \vee G_2$。因而 G 也就度弱于完全 n 部图$H = H_1 \vee G_2$(见图 8.3 的直观表示)。

现在假设 G 和 H 有相同的度序列，则 G 与$G_1 \vee G_2$有相同的度序列，同时在(8.15)式中等式必然成立。于是在 G 中，V_1的每个顶点必然和V_2的每个顶点相连。由此推知$G = G_1 \vee G_2$。由于$G = G_1 \vee G_2$和$H = H_1 \vee G_2$有相同的度序列，因而图G_1和H_1必然有相同的度序列，于是由归纳法假设，它们是同构的。我们得到$G \cong H$。 ■

设$T_{m,n}$表示有 n 个顶点的完全 m 部图，它的各个部分在大小上尽可能地相等。图 8.3 中的图是$T_{3,8}$。

定理 8.9: 若 G 是简单图，并且不包含K_{m+1}，则$\varepsilon(G) \le \varepsilon(T_{m,\nu})$。此外，仅当$G \cong T_{m,\nu}$时，有$\varepsilon(G) = \varepsilon(T_{m,\nu})$。

证明：设 G 是不包含K_{m+1}的简单图。由定理 8.8，G 度弱于某个完全 m 部图 H。由定理 1.1 即得

$$\varepsilon(G) \le \varepsilon(H) \qquad (8.16)$$

但是(由作业) $\varepsilon(H) \le \varepsilon(T_{m,\nu})$ (8.17)

因而从(8.16)式和(8.17)式即得

$$\varepsilon(G) \le \varepsilon\left(T_{m,\nu}\right) \qquad (8.18)$$

这就证明了定理的第一个结论。

现在假设(8.18)式中等式成立。则在(8.16)式和(8.17)式中等式也必然成立。由于$\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$以及 G 度弱于 H，所以 G 和 H 必然有相同的度序列，因而由定理 8.8，$G \cong H$。又由于$\varepsilon(H) = \varepsilon(T_{m,\nu})$，所以可推知(由作业)$H \cong T_{m,\nu}$。我们得到$G \cong T_{m,\nu}$。 ■

第九章 顶点着色

§9.1 色数

°k 顶点着色：G 的一个 k 顶点着色是指 k 种颜色$1, 2, \cdots, k$对于 G 的各顶点的一个分配；称着色是正常的，是说任意两个相邻顶点都分配到不同的颜色。

于是无环图 G 的一个正常 k 顶点着色是把 V 分成 k 个(可能有空的)独立集的一个分类$(V_1, V_2, \cdots, V_k)$。当 G 有一个正常的 k 顶点着色时，就称 G 是 k 顶点可着色的。

*把正常 k 顶点着色简称为 k 着色，把 k 顶点可着色简称为 k 可着色。

°色数：G 的色数$\chi(G)$是指 G 为 k 可着色的数 k 的最小值。若$\chi(G) = k$，则称 G 是 k 色的。(见图 9.1)

°临界图：一个图 G 称为临界的，是说：对 G 的每个真子图 H 有$\chi(H) < \chi(G)$。k 临界图是指 k 色的临界图。每个 k 色图有 k 临界子图。

否则就一直删掉k色图的边或者点直到临界

(见图 9.2)

定理 9.1：若 G 是 k 临界图，则$\delta \geq k-1$。

证：用反证法。若有可能，设 G 是$\delta < k-1$的 k 临界图，而 v 是 G 中度为δ的顶点。由于 G 是 k 临界的，所以$G - v$是$(k-1)$可着色的。因为是临界图

设$(V_1, V_2, \cdots, V_{k-1})$是$G - v$的一个$(k-1)$着色。由定义，v 在 G 中与$\delta$个顶点相邻$(\delta < k-1)$，从而 v 必然在 G 中与某个$V_j$的所有顶点都不相邻。因此，$(V_1, V_2, \cdots, V_j \cup \{v\}, \cdots, V_{k-1})$就是 G 的一个$(k-1)$着色，导

而G是k色图

致矛盾。于是$\delta \geq k-1$。 ■

推论 9.1.1：每个 k 色图至少有 k 个度不小于$k-1$的顶点。

证：设 G 是 k 色图，H 是 G 的一个 k 临界子图。由定理 9.1，H 的每个顶点在 H 中的度不小于$k-1$，因而在 G 中的度也不小于$k-1$。由于 H 是 k 色的，显然它至少有 k 个顶点，推论得证。 ■

H中至少要用k个顶点，因为它是K着色图，如果它只有K-1个顶点，那每个顶点着不同色就是一种满足的情况

最大度<=边色数<=最大度+1

色数<=最大度+1 ，点色数没有下界，反例：一个偶图

推论 9.1.2：对任意图 G，有$\chi \leq \Delta + 1$。

证：这是推论 9.1.1 的直接结果。 ■

设 S 是连通图 G 的一个顶点割，并设$G - S$的各个分支有顶点集$V_1, V_2, \cdots, V_n$。则子图$G_i = G[V_i \cup S]$称为 G 的 S 分支(见图 9.3)。现在分别对$G_1, G_2, \cdots, G_n$着色。若对于每个$v \in S$，顶点 v 在每个G_i的着色中都分配同样的颜色，则称$G_1, G_2, \cdots, G_n$的这组着色在 S 上是一致的。

割点分配相同的颜色

定理 9.2：临界图的顶点割不是团。

证：用反证法。设 G 是 k 临界图。假设 G 有一个顶点割 S 是团。记 G 的 S 分支为$G_1, G_2, \cdots, G_n$。由于 G 是 k 临界的，所以每个G_i是$(k-1)$可着色的。并且因为 S 是团，所以 S 中的各个顶点在G_i的任何$(k-1)$着色中必接受相异的颜色。由此可知，存在$G_1, G_2, \cdots, G_n$的一组$(k-1)$着色，它们在 S 上一致。这些着色合在一起形成 G 的一个$(k-1)$着色，导致矛盾。 ■

因为它们都是不同颜色，则可以调整存在这样一组着色

推论 9.2：每个临界图都是块。

证：若 v 是割点，则$\{v\}$是一个顶点割，它也是一个平凡的团。由定理 9.2 推知，临界图没有割点；换言之，每个临界图都是块。 ■

*定理 9.2 的另一个推论是：若 k 临界图 G 有 2 顶点割$\{u, v\}$，则 u 和 v 不能相邻。对于 G 的$\{u, v\}$分支G_i，若G_i的每个$(k-1)$着色都分配给 u 和 v 以相同的颜色，则G_i称为 1 型的。若G_i的每个$(k-1)$着色都分配给 u 和 v 以不同的颜色，则称G_i是 2 型的。(见图 9.4

定理 9.3：设 G 是 k 临界图且有 2 顶点割$\{u,v\}$。则

(i) $G=G_1\cup G_2$，这里G_i是 i 型$(i=1,2)$的$\{u,v\}$分支，并且

(ii) G_1+uv和$G_2\cdot uv$都是 k 临界图(这里$G_2\cdot uv$ 表示G_2的 u 和 v 重合而得到的图)。

证：(i)由于 G 是临界图，所以 G 的每个$\{u,v\}$分支是$(k-1)$可着色的。但是不可能存在这些$\{u,v\}$分支的$(k-1)$着色，使之在$\{u,v\}$上一致。否则，这样的着色合起来将是 G 的一个$(k-1)$着色。所以，存在两个$\{u,v\}$分支G_1和G_2，其中G_1的任何$(k-1)$着色都不与G_2的任何$(k-1)$着色一致。显然其中一个分支，例如设G_1，必然是 1 型的，而另一个，即G_2必然是 2 型的。由于G_1和G_2属于不同的类型，所以 G 的子图$G_1\cup G_2$不是$(k-1)$可着色的。又因为 G 是临界图，所以必然有$G=G_1\cup G_2$。

G1任何一种着色都要u和v是相同颜色

(ii)置$H_1=G_1+uv$。由于G_1属于 1 型，所以H_1是 k 色的。要证H_1是临界的只要证明：对于H_1的每条边 e，H_1-e 是$(k-1)$可着色的。若$e=uv$，则由于$H_1-e=G_1$，显然H_1-e是$(k-1)$可着色的。设 e 是H_1的非 uv 的某条边。由于G_2是$G-e$的子图，所以在$G-e$的任何$(k-1)$着色中，顶点 u 和 v 必然接受不同的颜色。这样的一个着色限制在G_1的各个顶点上，就是H_1-e的一个$(k-1)$着色。于是G_1+uv

e是非uv的一条边

是 k 临界图。类似可证$G_2\cdot uv$是 k 临界图。 ■

推论 9.3：设 G 是具有 2 顶点割$\{u,v\}$的 k 临界图，则

$$d(u)+d(v)\geq 3k-5 \qquad (9.1)$$

证：设G_1是 1 型的$\{u,v\}$分支，G_2是 2 型的$\{u,v\}$分支。置$H_1 = G_1 + uv$,

和$H_2 = G_2 \cdot uv$。由定理 9.3 和定理 9.1，有 H1是k临界图，任意一点度数大于等于最小度而最小度大于k-1

$$d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k-2$$

以及 $d_{H_2}(w) \geq k-1$，

这里，w 是将 u 和 v 重合起来得到的新顶点。由此推得

$$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k-4$$

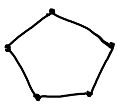
$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k-1$$

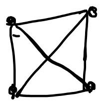
综合这两个不等式得到(9.1)式。 ■

§9.2 Brooks 定理

*推论 9.1.2 证明了$\chi \leq \Delta + 1$，下述 Brooks 定理指出，适合$\chi = \Delta + 1$的图只有两种类型。

定理 9.4：若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则$\chi \leq \Delta$。





否则加更多的点和边最大度会变大

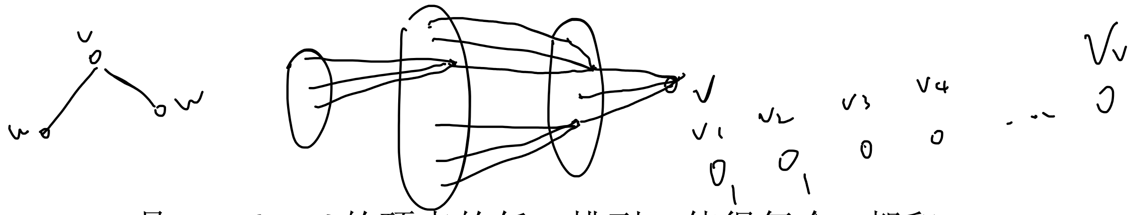
证：设 G 是满足定理假设的 k 色图。不失一般性，可以假定 G 是 k 临界的。根据推论 9.2，G 是一个块。又由于 1 临界图和 2 临界图是完全图，而 3 临界图则是奇圈(习题)，所以$k \geq 4$。

若 G 有 2 顶点割$\{u,v\}$，则由推论 9.3，得出

$$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k-5 \geq 2k-1。$$

由于2Δ是偶数，这就推出$\chi = k \leq \Delta$。

再假定 G 是 3 连通的。由于 G 不是完全图，所以在 G 中存在三个顶点u,v 和 w，使得$uv, vw \in E$ 而 $uw \notin E$。置 $u = v_1$及 $w = v_2$，并且



设$v_3, v_4, \cdots, v_\upsilon = v$ 是 $G - \{u, w\}$的顶点的任一排列，使得每个v_i都和某个适合$j > i$的v_j相邻(把$G - \{u, w\}$的各顶点按其与 v 的距离非增次序排列，就能做到这一点)。现在可以描述 G 的一个Δ着色：把颜色 1 分配给$v_1 = u$ 和$v_2 = w$; 然后按颜色表$1, 2, \cdots, \Delta$中最先可用的颜色依次给$v_3, v_4, \cdots, v_\upsilon$着色。根据序列$v_1, v_2, \cdots, v_\upsilon$的构造，每个顶点$v_i(1 \le i \le \upsilon - 1)$都和适合$j > i$的某个顶点$v_j$相邻，因而和适合$j < i$的最多$\Delta - 1$个顶点相邻。由此推知，当轮到$v_i$着色时，$v_i$最多和$\Delta - 1$种颜色的顶点相邻。于是颜色$1, 2, \cdots, \Delta$中必有一种颜色可以分配给$v_i$。最后，由于$v_\upsilon$和颜色 1 的两个顶点($v_1$和$v_2$)相邻，因而它最多再和另外的$\Delta - 2$种颜色的顶点相邻，于是颜色$2, 3, \cdots, \Delta$中必有一种颜色可以分配给$v_\upsilon$。 ■

作业 12：

1. 在九个人的人群中，有一个人认识另外两个人，有两个人每人认识另外四个人，有四个人每人认识另外五个人，余下的两个人每人认识另外六个人。证明：有三个人他们全都互相认识。
2. 证明：唯一的 1 临界图是K_1，唯一的 2 临界图是K_2，仅有的 3 临界图是$k \ge 3$的奇 k 圈。
3. 证明：若 G 的任意两个奇圈都有一个公共顶点，则$\chi \le 5$。