第一章　　　　　图和子图

§1.1　　　　图和简单图

°图的概念：

一个图 G 是指一个有序三元组$G=(V(G),E(G),\psi_G)$。其中：V(G)是非空顶点集，E(G)是不与 V(G)相交的边集，$\psi_G\colon E(G)\to V(G)\times V(G)$的函数，称为关联函数。

若$e\in E(G)$是一条边，而$\psi_G(e)=(u,v)$,则称 e 连接 u 和 v; 顶点 u 和 v 称为 e 的端点。

例 1：$G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中：

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$

而ψ_G定义为：

$\psi_G(e_1)=(v_1,v_2)$　　$\psi_G(e_2)=(v_2,v_3)$

$\psi_G(e_3)=(v_3,v_3)$　　$\psi_G(e_4)=(v_3,v_4)$

$\psi_G(e_5)=(v_2,v_4)$　　$\psi_G(e_6)=(v_4,v_5)$

$\psi_G(e_7)=(v_2,v_5)$　　$\psi_G(e_8)=(v_2,v_5)$

(见图 1.1)

*我们现在讨论的是无向图，即边没有方向，顶点对$(u,v)=(v,u)$。我们还可以定义有向图。

例 2：定义有向图$D=(V(D),E(D),\psi_D)$，其中：

$V(D)=\{a,b,c,d\}$

$E(D) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$\psi_D(e_1) =< a, a >$ $\psi_D(e_2) =< a, b >$

$\psi_D(e_3) =< a, b >$ $\psi_D(e_4) =< a, d >$

$\psi_D(e_5) =< c, b >$ $\psi_D(e_6) =< d, c >$

$\psi_D(e_7) =< c, d >$

*这里$\psi_D(e) =< u, v >$，表示 e是一条从 u 到 v 的弧。$< u, v > \neq < v, u >$。

° $\upsilon = |V(G)|, \varepsilon = |E(G)|$分别表示图 G 的顶点数和边数，$|V(G)| = n$称为 n 阶图。

° 若$|V(G)|$和$|E(G)|$均为有限数，则称 G 为有限图。

° $E(G) = \emptyset$时，则称 G 为零图，$\upsilon = 1$的零图称为平凡图。

° $V(G) = \emptyset$时，则称 G 为空图。

° 邻接(相邻)：若$e_k = (u, v) \in E(G)$，称 u 和 v 邻接。

° 关联：若$e_k = (u, v) \in E(G)$，则称e_k与 u 和 v 关联。

° 环：若$e_k = (u, u) \in E(G)$，则称e_k为环。有向图的环$e_k =< u, u >$。

° 连杆：不是环的边称为连杆。

° 边相邻：若边e_i和e_k有公共端点，则称e_i与e_k相邻。

° 有向图中顶点的相邻：若$e_k =< u, v > \in E(D)$，则称 u 与 v 相邻，u 称为e_k的始点，v 称为e_k的终点。

° 多重边(平行边)：若$\psi_G(e_i) = (u, v) = \psi_G(e_k)$且$e_i \neq e_k$，则$e_i$和$e_k$称为平行边(多重边)。关联同一对顶点的多重边的条数称为多重边的重数。

相同方向

(有向图的多重边)：若$\psi_D(e_i) =< u,v >= \psi_D(e_k)$且$e_i \neq e_k$，则$e_i$与$e_k$称为多重边。如果$\psi_D(e_i) =< u,v >$而$\psi_D(e_k) =< v,u >$，则$e_i$与$e_k$不称为多重边。

° 简单图：既不含平行边又不含环的图称为简单图。

在简单图里，我们不需要ψ_G函数，对任一条边$e_i \in E$，若$\psi_G(e_i) = (u,v)$，则我们直接用(u,v) (或 uv)表示e_i。

§ 1.2 图同构

1. 图的同构：设$G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$为两个无向图，若存在双射函数$f: V_1 \to V_2$，对任意$v_i, v_j \in V_1$，$(v_i, v_j) \in E_1$当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$，并且(v_i, v_j)与$(f(v_i), f(v_j))$的重数相同。则称G_1与G_2是同构的。记作$G_1 \cong G_2$。

例 3：（见图 1.2）

$f: V_1 \to V_2$，$f(v_i) = u_i, i = 1, 2, \cdots, 10$。

°不同构的例子：(见图 1.3)

*两个图度序列相同，但不同构。

2. 几类特殊图类：

°完全图：每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图称为完全图。

*在同构意义下，n 个顶点的完全图只有一个，记为K_n。

°偶图(二部图)：是指一个图它的顶点集可以分解为两个子集 X 和 Y，

使得任何一条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；这样一种分类(X, Y)称为偶图的一个二分类。

°完全偶图是一个具有二分类(X, Y)的简单偶图，其中 X 的每个顶点都与 Y 的每个顶点相连；若$|X| = m$ 而$|Y| = n$, 则该完全偶图记为$K_{m,n}$。

例如：（见图 1.4）

§1.3 子图

子图：称图 H 是图 G 的子图(记为$H \subseteq G$)，如果$V(H) \subseteq V(G)$, 和 $E(H) \subseteq E(G)$，并且ψ_H是ψ_G在 $E(H)$上的限制。当$H \subseteq G$ 但 $H \neq G$时，则记为$H \subset G$，并称 H 是 G 的真子图。

若 H 是 G 的子图，则 G 称为 H 的母图。

生成子图：G 的生成子图(或生成母图)是指满足$V(H) = V(G)$的子图(或母图)H。

基础简单图：从图 G 中删去所有的环，并使每一对相邻顶点只留下一条边，即可得到 G 的一个简单生成子图，称为 G 的基础简单图。

*举例：

°导出子图：设$G = (V, E)$为一个图。$V_1 \subset V$ 且$V_1 \neq \emptyset$，以V_1为顶点集，以 G 中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图G_1称为 G 的V_1导出的子图，记作$G_1 = G[V_1]$。

又设$E_1 \subseteq E$且$E_1 \neq \emptyset$，以E_1为边集，以E_1中边关联的顶点为顶点集V_1的图G_1称为 G 的E_1导出的子图，记作$G_1 = G[E_1]$。

例子：（见图 1.5）

设$V' \subset V$, 则$G[V\backslash V']$记为$G-V'$。若$V'=\{v\}$, 则把$G-\{v\}$简记为$G-v$.

若$E' \subseteq E$, 边集为$E\backslash E'$的 G 的生成子图简记为$G-E'$。类似地，在 G 中添加边集E'的所有边得到的图记为$G+E'$。若$E'=\{e\}$，则用$G-e$和$G+e$来代替$G-\{e\}$和 $G+\{e\}$。

设G_1和G_2是 G的子图。若$V(G_1)\cap V(G_2)=\emptyset$，则称$G_1$和$G_2$是不相交的，若$E(G_1)\cap E(G_2)=\emptyset$，则称它们是边不重的。$G_1$和$G_2$的并图$G_1\cup G_2=(V(G_1)\cup V(G_2), E(G_1)\cup E(G_2))$。如果$G_1$和$G_2$是不相交的，则$G_1\cup G_2$有时记为$G_1+G_2$。

§1.4 顶点的度

°顶点的度：设$G=(V,E)$为无向图，$\forall v\in V(G)$, 称 v 作为边的端点的次数为 v 的度数。简称为度，记作$d_G(v)$（或$d(v)$）。

设$D=(V,E)$为有向图，$\forall v\in V$, 称 v 作为边的始点的次数为 v 的出度，记作$d_D^+(v)$（或$d^+(v)$），称 v 作为边的终点的次数为 v 的入度，记作$d_D^-(v)$（或$d^-(v)$）。

$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$称为 v 的度数。

$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V(G)\}$

$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V(G)\}$

°度数为偶数(奇数)的点称为偶点(奇点)。

定理 1.1(握手定理)：设$G=(V,E)$为无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}, |E|=$

ε，则$\sum_{i=1}^{\upsilon} d(v_i) = 2\varepsilon$。

证明：因为 G 中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算 G 中各顶点度数之和时，每条边均提供 2 度，当然，ε条边，共提供2ε度。

■

推论 1.1：任何图中奇度数顶点的个数是偶数。

证：设$G = (V, E)$为任一图。令

$$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v)\text{为奇数}\}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v)\text{为偶数}\}$$

则$V_1 \cup V_2 = V$，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$，由定理 1.1 可知

$$2\varepsilon = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v)$$

由于$2\varepsilon, \sum_{v\in V_2} d(v)$均为偶数。所以$\sum_{v\in V_1} d(v)$为偶数，但因$V_1$中顶点度数为奇数，只有偶数个奇数的和才为偶数，所以$|V_1|$必为偶数。■

°度序列：设$G = (V, E)$为一个υ阶无向图，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\upsilon\}$，称$d(v_1)$, $d(v_2)$, $\cdots, d(v_\upsilon)$为 G 的度序列。

°度序列可图化：对于给定的非负整数列$d = (d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon)$，若存在以$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\upsilon\}$为顶点集的υ阶无向图 G，使得 $d(v_i) = d_i$，则称 d 是可图化的。特别地，若所得的图是简单图，则称 d 是可简单图化的。

定理 1.2：设非负整数列$d = (d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon)$，则 d 是可图化的，当且仅当$\sum_{i=1}^{\upsilon} d_i \equiv 0 \pmod 2$。

证明：由定理 1.1 可知，必要性显然。下面证充分性。由已知条件可

知，d 中有 2k($0\leq k\leq\left\lfloor\frac{\upsilon}{2}\right\rfloor$)个奇数。不妨设它们为$d_1,d_2,\cdots,d_k,d_{k+1},\cdots,d_{2k}$。可用多种方法做出$\upsilon$阶无向图$G=(V,E)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}$，比如边集如下产生：在顶点$v_r$和$v_{r+k}$之间连边，$r=1,2,\cdots,k$。若$d_i$为偶数，令$d_i'=d_i$，若$d_i$为奇数，令$d_i'=d_i-1$，得$d'=(d_1',d_2',\cdots,d_\upsilon')$，则$d_i'$均为偶数。再在$v_i$处做出$d_i'/2$条环，$i=1,2,\cdots,\upsilon$，将所得各边集合在一起组成 E, 则 G 的度数列为 d。其实，d_i为偶数时，$d(v_i)=2\cdot\frac{d_i'}{2}=2\cdot\frac{d_i}{2}=d_i$，当$d_i$为奇数时，$d(v_i)=1+2\cdot\frac{d_i'}{2}=1+d_i'=1+d_i-1=d_i$。这就证明了 d 是可图化的。 ■

例 3：判断下列各非负整数列哪些是可图化的，哪些是可简单图化的？

(1) $(5,5,4,4,2,1)$

(2) $(5,4,3,2,2)$

(3) $(3,3,3,1)$

(4) $(4,4,3,3,2,2)$

解：(1)不可图化，因为奇度点有奇数个。

(2) 可图化，但不可简单图化，因为$\Delta=5=\upsilon=|V(G)|$。

(3) 可图化。但不可简单图化。因为$d_1=d_2=d_3=3$, v_1,v_2,v_3分别与 G 中 4 个顶点中的其它 3 个点相邻，此时，$d_4=d(v_4)=3\neq 1$，矛盾。

(4) 可简单图化。见图 1.3。

作业 1：

1. 设无向图 G 有 10 条边，3 度和 4 度顶点各 2 个，其余顶点的度数

小于 3，问 G 中至少有几个顶点？在最少顶点的情况下，写出 G 的度序列，$\Delta(G)$和 $\delta(G)$。

2. 证明：若 G 是简单图，则$\varepsilon \leq \binom{\upsilon}{2}$。其中 $\upsilon = |V(G)|, \varepsilon = |E(G)|$, $\binom{\upsilon}{2}$表示υ个中取 2 个的组合数。

3. 设υ阶无向简单图为 3-正则图(即所有点的度数均为 3)，且边数ε与υ满足$2\upsilon - 3 = \varepsilon$，问这样的无向图有几种非同构的情况？

K正则图：图中每个顶点的度数都是K度