插值

样条插值与贝塞尔曲线

胡建芳

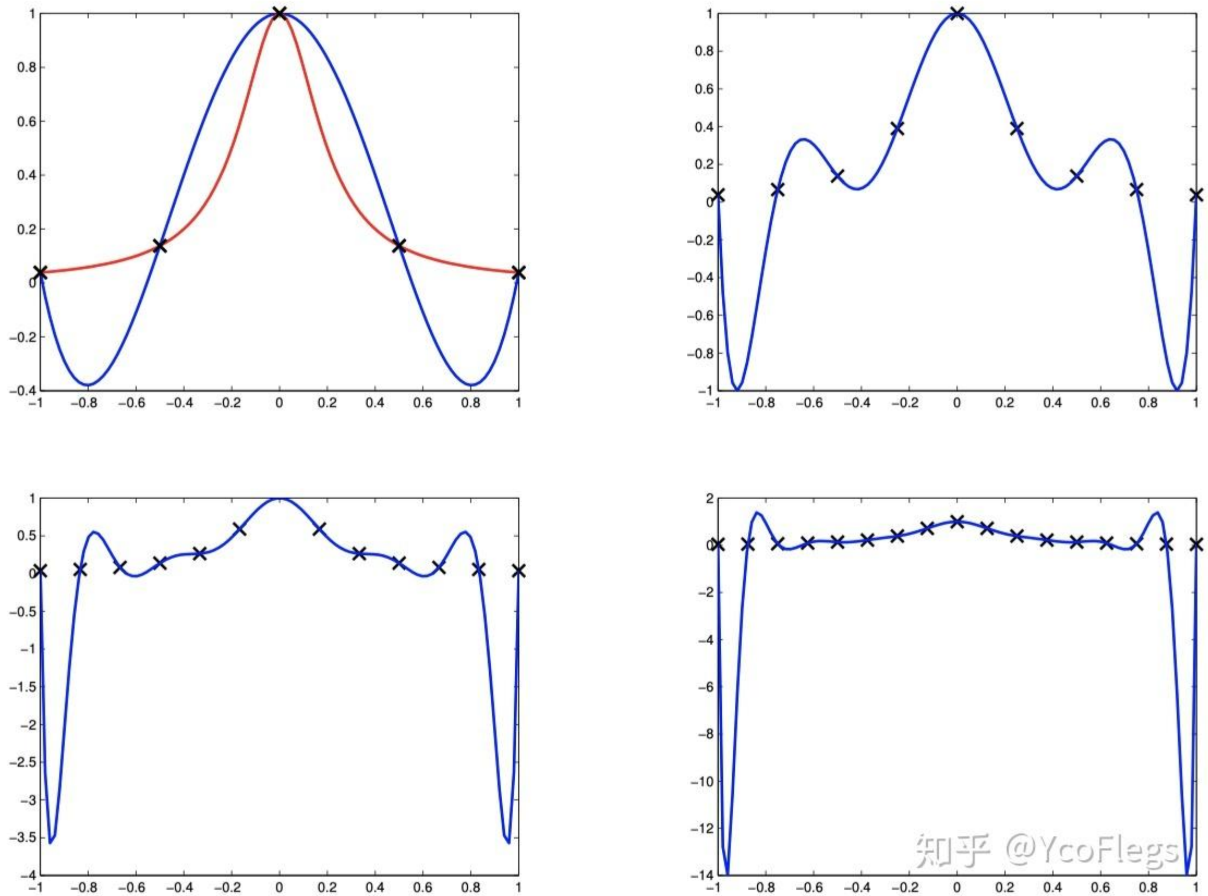
中山大学　计算机学院

多项式插值的缺点

- **Runge现象**

例 把函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ 在$[-1,1]$中等距的点上插值

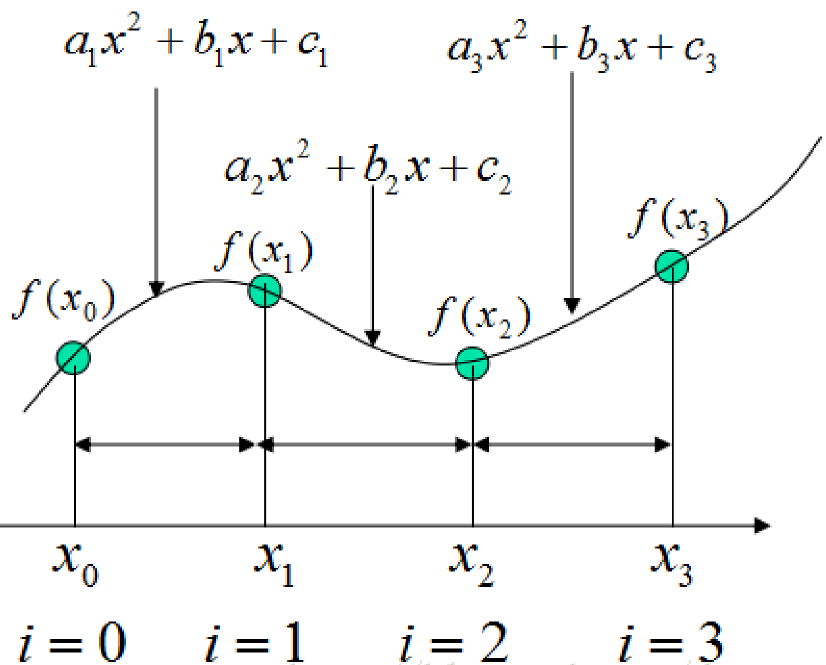
随着n增大，
在末端的两个
子区间内的误
差会越来越大。



样条插值

- ## 基本概念

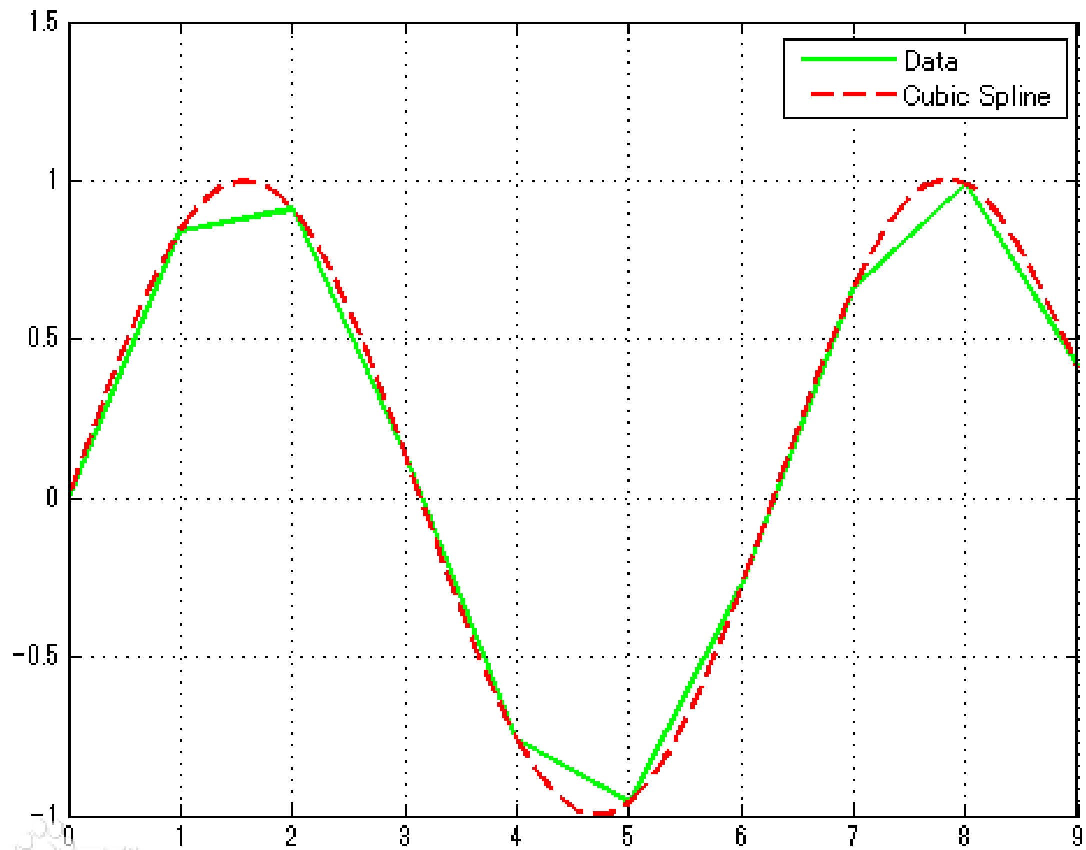
样条相当于数据插值的另一种方法。在多项式插值中，由多项式给出的单个公式通过所有的数据点。样条的想法是采用几个公式，每一个是经过数据点的低次多项式。



样条插值

基本概念

样条相当于数据插值的另一种方法。在多项式插值中，由多项式给出的单个公式通过所有的数据点。样条的想法是采用几个公式，每一个是经过数据点的低次多项式。

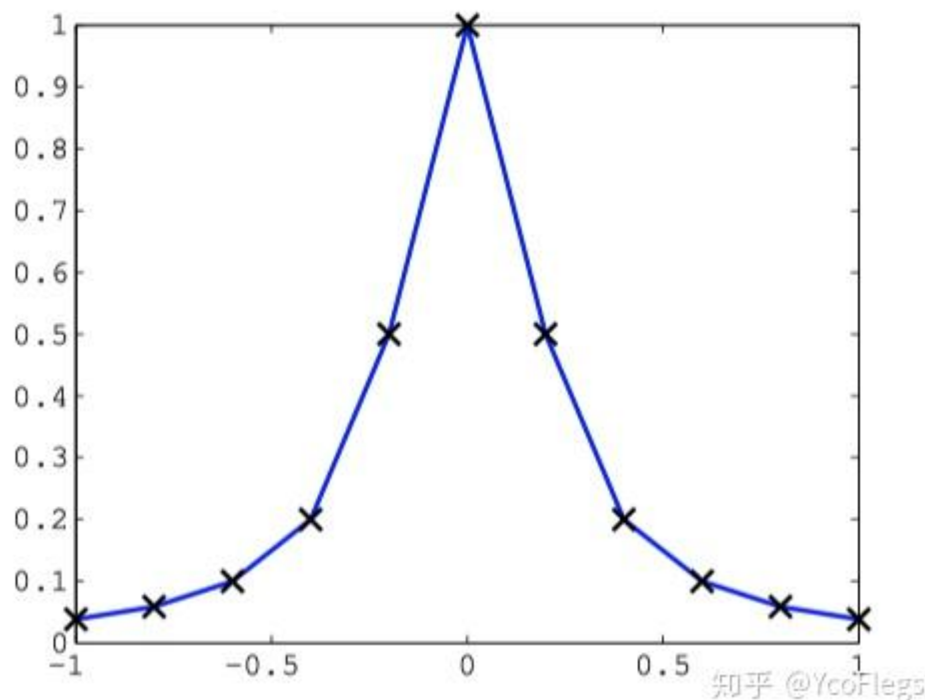


样条插值

线性样条

给定一组数据点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，线性样条以n-1条直线连接相邻的每一对点，其中$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$



样条插值

三次样条

线性样条得到的结果缺少光滑性，三次样条可以克服线性样条的这种缺点。三次样条用三次多项式代替线性样条中的线性函数。

定义

设$\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{N}$有 $N+1$ 个点，其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$。如果存在 N 个三次多项式$S_k(x)$，系数为 $s_{k,0}, s_{k,1}, s_{k,2}$和 $s_{k,3}$，满足如下性质：

I. $S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3$
$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$

II. $S(x_k) = y_k \qquad k = 0, 1, \cdots, N$

III. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \qquad k = 0, 1, \cdots, N-2$

IV. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \qquad k = 0, 1, \cdots, N-2$

V. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \qquad k = 0, 1, \cdots, N-2$

第k个函数与第k+1个函数在x_{k+1}连续

则称函数 $S(x)$为**三次样条函数**(cubic spline)。

样条插值

三次样条存在性

对于定义中的n+1个点，在n个分段中共有4n个未知参数，由于每段分段两端端点的值已知，n个分段则有2n个已知等式，由于三次样条限制分段边界上的一阶和二阶导数连续，故还可构成2*(n-1)个等式，因此求解三次样条剩下两个自由度，对这两个自由度的约束称为端点约束。

样条插值

三次样条的构造

由于 $S(x)$是分段三次多项式,它的二阶导数 $S''(x)$在区间$[x_0,x_N]$内是分段线性的。根据线性拉格朗日插值,$S''(x)=S''_k(x)$可表示为:

$$S''_k(x)=S''(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+S''(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \tag{4}$$

用 $m_k=S''(x_k)$, $m_{k+1}=S''(x_{k+1})$和 $h_k=x_{k+1}-x_k$ 代入上式,可得

$$S''_k(x)=\frac{m_k}{h_k}(x_{k+1}-x)+\frac{m_{k+1}}{h_k}(x-x_k) \tag{5}$$

其中 $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$, $k=0,1,\cdots,N-1$。将式(5)积分两次,会引入两个积分常数,并得到如下形式:

$$S_k(x)=\frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1}-x)^3+\frac{m_{k+1}}{6h_k}(x-x_k)^3+p_k(x_{k+1}-x)+q_k(x-x_k) \tag{6}$$

样条插值

三次样条的构造

将 x_k 和 x_{k+1} 代入方程(6)中，并使用值 $y_k = S_k(x_k)$ 和 $y_{k+1} = S_k(x_{k+1})$，可分别得到包含 p_k 和 q_k 的方程：

$$y_k = \frac{m_k}{6}h_k^2 + p_k h_k, \qquad y_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{6}h_k^2 + q_k h_k \tag{7}$$

求解这两个方程很容易得出 p_k 和 q_k，而且将这些值代入方程(6)中，可得到如下三次多项式方程：

$$\begin{aligned} S_k(x) = &-\frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 \\ &+ \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}\right)(x_{k+1} - x) + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6}\right)(x - x_k) \end{aligned} \tag{8}$$

样条插值

三次样条的构造

需要注意,表达式(8)可简化为只包含未知系数$\{m_k\}$的形式。为求解这些值,必须使用式(8)的导数,即

$$S_k'(x) = -\frac{m_k}{2h_k}(x_{k+1}-x)^2 + \frac{m_{k+1}}{2h_k}(x-x_k)^2 - \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}\right) + \frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}h_k}{h_k} \tag{9}$$

在 x_k 处计算式(9),并简化结果可得到

$$S_k'(x_k) = -\frac{m_k}{3}h_k - \frac{m_{k+1}}{6}h_k + d_k, \qquad \text{其中 } d_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} \tag{10}$$

同理,在式(9)中用 $k-1$ 代替 k 可得到$S'_{k-1}(x)$,并计算在 x_k 处的解可得

$$S_{k-1}'(x_k) = \frac{m_k}{3}h_{k-1} + \frac{m_{k-1}}{6}h_{k-1} + d_{k-1} \tag{11}$$

利用性质 IV 以及方程(10)和方程(11),可得到包含 m_{k-1},m_k 和 m_{k+1}的重要关系式

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1}+h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k \tag{12}$$

其中 $u_k=6(d_k-d_{k-1})$,$k=1,2,\cdots,N-1$。

样条插值

三次样条的构造

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k \tag{12}$$

如果给定 m_0，则可计算出 $h_0 m_0$，而且方程组(12)的第一个方程(当 $k=1$ 时)为

$$2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - h_0 m_0 \tag{13}$$

同理，如果给定 m_N，则可计算出 $h_{N-1} m_N$，而且方程组(12)的最后一个方程(当 $k=N-1$ 时)为

$$h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1}m_N \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$$

样条插值

三次样条的构造

当得到系数$\{m_k\}$后，可利用如下公式计算 $S_k(x)$的样条系数$\{s_{k,j}\}$。

$$s_{k,0} = y_k, \qquad s_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6}$$

$$s_{k,2} = \frac{m_k}{2}, \qquad s_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k}$$

j=0,1,2,3

为了更有效地计算，每个三次多项式 $S_k(x)$可表示成嵌套乘的形式：

$$S_k(x) = ((s_{k,3}w + s_{k,2})w + s_{k,1})w + y_k, \qquad \text{其中} \quad w = x - x_k$$

其中 $S_k(x)$在区间 $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$内使用。

样条插值

三次样条的构造

表 5.8　针对三次样条的端点约束

策略描述	包含 m_0 和 m_N 的方程
(i) 三次紧压样条，确定 $S'(x_0)$，$S'(x_n)$（如果导数已知，这是"最佳选择"）	$m_0 = \frac{3}{h_0}(d_0 - S'(x_0)) - \frac{m_1}{2}$ $m_N = \frac{3}{h_{N-1}}(S'(x_N) - d_{N-1}) - \frac{m_{N-1}}{2}$
(ii) natural 三次样条（一条"松弛曲线"）	$m_0 = 0,\ m_N = 0$
(iii) 外推 $S''(x)$ 到端点	$m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}$ $m_N = m_{N-1} + \frac{h_{N-1}(m_{N-1} - m_{N-2})}{h_{N-2}}$
(iv) $S''(x)$ 是靠近端点的常量	$m_0 = m_1,\ m_N = m_{N-1}$
(v) 在每个端点处指定 $S''(x)$	$m_0 = S''(x_0),\ m_N = S''(x_N)$

样条插值

端点约束

[紧压(clamped)样条]　存在惟一的三次样条曲线，其一阶导数的边界条件是 $S'(a) = d_0$ 和 $S'(b) = d_N$。

证明：求解下列线性方程组

$$\left(\frac{3}{2}h_0 + 2h_1\right)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - 3(d_0 - S'(x_0))$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k, \quad \text{其中 } k = 2, 3, \cdots, N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2} + \left(2h_{N-2} + \frac{3}{2}h_{N-1}\right)m_{N-1} = u_{N-1} - 3(S'(x_N) - d_{N-1})$$

(natural 样条)　存在惟一的三次样条曲线，它的自由边界条件是 $S''(a) = 0$ 和 $S''(b) = 0$。

证明：求解下列线性方程组

$$2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k, \quad \text{其中 } k = 2, 3, \cdots, N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1}$$

样条插值

端点约束

[外推(extrapolated)样条] 存在惟一的三次样条曲线，其中通过对点 x_1 和 x_2 进行外推得到 $S''(a)$，同时通过对点 x_{N-1} 和 x_{N-2} 进行外推得到 $S''(b)$。

证明：求解下列线性方程组：

$$\left(3h_0 + 2h_1 + \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_1 + \left(h_1 - \frac{h_0^2}{h_1}\right)m_2 = u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k, \quad \text{其中 } k = 2,\ 3,\ \cdots,\ N-2$$

$$\left(h_{N-2} - \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right)m_{N-2} + \left(2h_{N-2} + 3h_{N-1} + \frac{h_{N-1}^2}{h_{N-2}}\right)m_{N-1} = u_{N-1}$$

[抛物线终结(parabolically terminated)样条] 存在惟一的三次样条曲线，其中在区间 $[x_0, x_1]$ 内 $S'''(x) \equiv 0$，而在 $[x_{N-1}, x_N]$ 内 $S'''(x) \equiv 0$。

证明：求解下列线性方程组：

$$(3h_0 + 2h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k, \quad \text{其中 } k = 2,\ 3,\ \cdots,\ N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2} + (2h_{N-2} + 3h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1}$$

样条插值

端点约束

［端点曲率调整(end-point curvature-adjusted)样条］ 存在惟一的三次样条曲线，其中二阶导数的边界条件 $S''(a)$和 $S''(b)$是确定的。

证明：求解下列线性方程组

$$2(h_0+h_1)m_1+h_1m_2=u_1-h_0S''(x_0)$$

$$h_{k-1}m_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)m_k+h_km_{k+1}=u_k,\quad \text{其中 } k=2,\ 3,\ \cdots,\ N-2$$

$$h_{N-2}m_{N-2}+2(h_{N-2}+h_{N-1})m_{N-1}=u_{N-1}-h_{N-1}S''(x_N)$$

三次样条的适宜性

(三次样条曲线的极小性质) 设 $f\in C^2[a,b]$，且 $S(x)$是惟一经过点$\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0}^{N}$的函数 $f(x)$的三次样条插值曲线，并且满足紧压端点条件 $S'(a)=f'(a)$和 $S'(b)=f'(b)$，则

$$\int_a^b (S''(x))^2\,dx\leqslant\int_a^b (f''(x))^2\,dx$$

样条插值

例题

求三次紧压样条曲线，经过点(0,0)，(1,0.5)，(2,2.0)和(3,1.5)，且一阶导数的边界条件为 $S'(0)=0.2$ 和 $S'(3)=-1$。

$$h_0 = h_1 = h_2 = 1$$

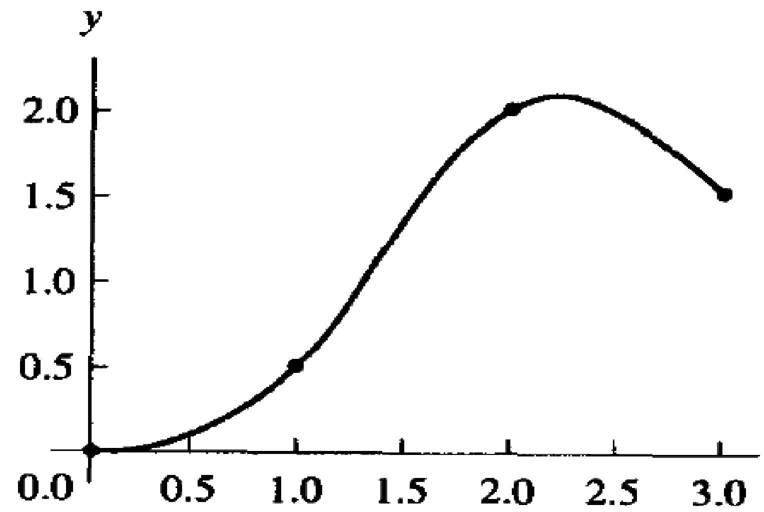
$$d_0 = (y_1 - y_0)/h_0 = (0.5 - 0.0)/1 = 0.5$$

$$d_1 = (y_2 - y_1)/h_1 = (2.0 - 0.5)/1 = 1.5$$

$$d_2 = (y_3 - y_2)/h_2 = (1.5 - 2.0)/1 = -0.5$$

$$u_1 = 6(d_1 - d_0) = 6(1.5 - 0.5) = 6.0$$

$$u_2 = 6(d_2 - d_1) = 6(-0.5 - 1.5) = -12.0$$



三次紧压样条，边界条件为 $S'(0)=0.2$和 $S'(3)=-1$

由紧压样条条件

$$\left(\frac{3}{2}+2\right)m_1 + m_2 = 6.0 - 3(0.5 - 0.2) = 5.1$$

$$m_1 + \left(2+\frac{3}{2}\right)m_2 = -12.0 - 3(-1.0 - (-0.5)) = -10.5$$

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 1.0 \\ 1.0 & 3.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 \\ -10.5 \end{bmatrix} \quad m_1 = 2.25 \quad m_2 = -3.72$$

$$m_0 = 3(0.5 - 0.2) - \frac{2.52}{2} = -0.36$$

$$m_3 = 3(-1.0 + 0.5) - \frac{-3.72}{2} = 0.36$$

$$S_0(x) = 0.48x^3 - 0.18x^2 + 0.2x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$S_1(x) = -1.04(x-1)^3 + 1.26(x-1)^2 + 1.28(x-1) + 0.5 \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

$$S_2(x) = 0.68(x-2)^3 - 1.86(x-2)^2 + 0.68(x-2) + 2.0 \qquad 2 \leqslant x \leqslant 3$$

样条插值

例题

求 natural 三次样条曲线，经过点(0,0.0),(1,0.5),(2,2.0)和(3,1.5)，且自由边界条件为 $S''(x)=0$ 和 $S''(3)=0$。

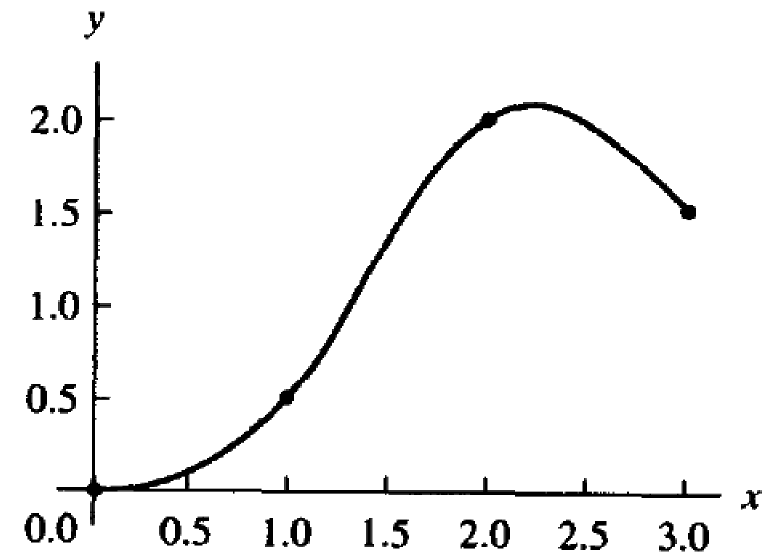
由natural样条以及上题中的$\{h_k\},\{d_k\},\{u_k\}$

$$2(1+1)m_1+m_2=6.0$$
$$m_1+2(1+1)m_2=-12.0$$

$$\begin{bmatrix}4.0 & 1.0\\ 1.0 & 4.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.0\\ -12.0\end{bmatrix}\quad m_1=2.4\quad m_2=-3.6$$

由于 $m_0=S''(0)=0$ 和 $m_3=S''(3)=0$，

$$S_0(x)=0.4x^3+0.1x \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$
$$S_1(x)=-(x-1)^3+1.2(x-1)^2+1.3(x-1)+0.5 \qquad 1\leqslant x\leqslant 2$$
$$S_2(x)=0.6(x-2)^3-1.8(x-2)^2+0.7(x-2)+2.0 \qquad 2\leqslant x\leqslant 3$$



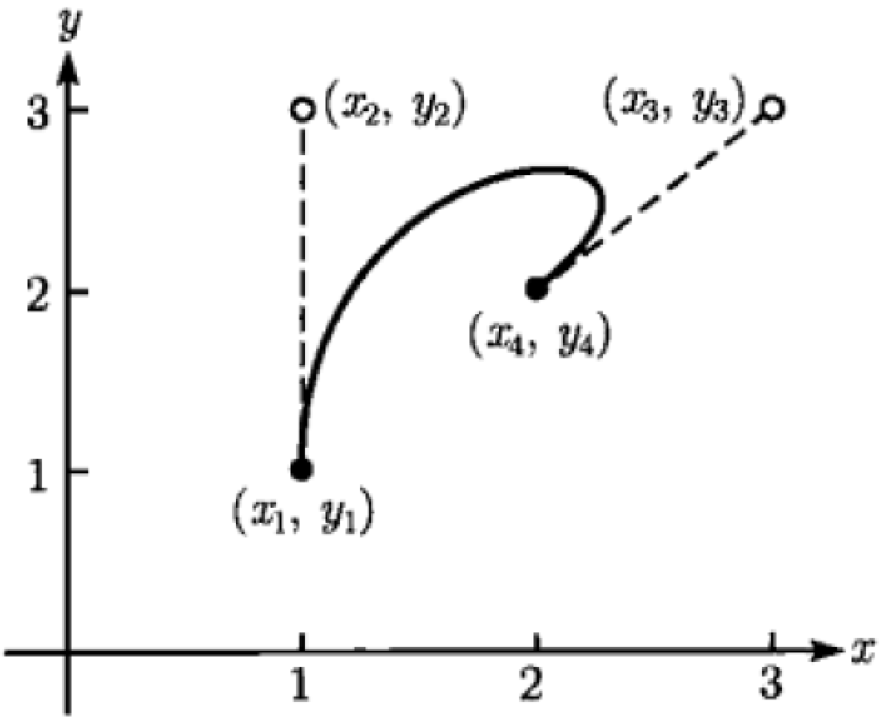
natural 三次样条，边界条件为 $S''(0)=0$ 和 $S''(3)=0$

贝塞尔曲线

场景

有角（一阶导数不连续）以及曲率急剧变化（二阶导数不连续），贝塞尔曲线允许用户控制在节点处的斜率，但代价是不能保证三次样条中拥有的连续性质。

https://haokan.baidu.com/v?vid=17038331101143291663&pd=bjh&fr=bjhauthor&type=video



贝塞尔曲线

- **定义**

给定端点 (x_1, y_1), (x_4, y_4)

控制点 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$

令

$$
\begin{aligned}
b_x &= 3(x_2 - x_1) \\
c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x \\
d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x \\
b_y &= 3(y_2 - y_1) \\
c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y \\
d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y.
\end{aligned}
$$

对 $0 \leqslant t \leqslant 1$, Bézier 曲线定义为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\
y(t) &= y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t.^3
\end{aligned}
$$

贝塞尔曲线

例题

例 3.15 求经过点 (1, 1), (2, 2) 且其控制点为 (1, 3) 和 (3, 3) 的 Bézier 曲线 $(x(t), y(t))$.

4 个点分别是 $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, $(x_4, y_4) = (2, 2)$. 由 Bézier 公式得到 $b_x = 0$, $c_x = 6$, $d_x = -5$, $b_y = 6$, $c_y = -6$, $d_y = 1$. Bézier 样条

$$x(t) = 1 + 6t^2 - 5t^3,$$
$$y(t) = 1 + 6t - 6t^2 + t^3$$

贝塞尔曲线

例题

例 3.16 在 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 以及 $(x_3,y_3)=(x_4,y_4)$ 时，证明 Bézier 样条是直线段. Bézier 公式表明，方程是

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_1+3(x_4-x_1)t^2-2(x_4-x_1)t^3 = x_1+(x_4-x_1)t^2(3-2t),\\
y(t) &= y_1+3(y_4-y_1)t^2-2(y_4-y_1)t^3 = y_1+(y_4-x_1)t^2(3-2t).
\end{aligned}
$$

其中 $0\leqslant t\leqslant 1$. 在样条上的每一点具有形式

$$
\begin{aligned}
(x(t),y(t)) &= (x_1+r(x_4-x_1),y_1+r(y_4-y_1))\\
&= ((1-r)x_1+rx_4,(1-r)y_1+ry_4),
\end{aligned}
$$

这里 $r=t^2(3-2t)$. 因为 $0\leqslant r\leqslant 1$, 所以每一点落在连接 (x_1,y_1) 和 (x_4,y_4) 的直线段上. ◀

THE END