°Cayley 公式

定理 2.9：$\tau(K_n)=n^{n-2}$。

证：设K_n的顶点集是$N=\{1,2,\cdots,n\}$。注意，取自 N 可能组成的长为$n-2$的序列的个数是n^{n-2}。于是为了证明本定理，只须在K_n的生成树集和这种序列的集之间建立一一对应就行了。

对于K_n的每棵生成树 T，使它与唯一的序列$\{t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}\}$相联系：把 N 看作是一个有序集，设$s_1$是 T 中第一个 1 度顶点；把与$s_1$相邻的那个顶点取作$t_1$。现在从 T 中删去$s_1$，用$s_2$记$T-s_1$中第一个 1 度顶点，并把与$s_2$相邻的那个顶点作为$t_2$。重复这个手续，直至$t_{n-2}$被确定，留下来的恰好是有两个顶点的一棵树。（见图 2.8）

可以定义为序号最小的

图 2.8 ↔ (4, 3, 5, 3, 4, 5)

逆过程同样易懂。首先注意 T 的任一顶点 v 在$(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$中出现$d_T(v)-1$次。于是 T 中 1 度顶点恰好是在该序列中未出现的那些顶点。为了从$(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$中重新构作 T，可按下法进行。设s_1是不在$(t_1,t_2,\cdots,t_{n-2})$中的 N 的第一个顶点；连接s_1与t_1。其次，设s_2是不在$(t_2,\cdots,t_{n-2})$中的$N\backslash\{s_1\}$的第一个顶点，并且连接s_2与t_2。如此继续下去，直到确定了$n-2$条边$s_1t_1,s_2t_2,\cdots,s_{n-2}t_{n-2}$。现在添加这样的一条边，它连接$N\backslash\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-2}\}$中剩下的两个顶点，即可得到 T。容易验证，不同的序列产生K_n的不同生成树。这样就建立了所要的一一对应。 ■

°注意：n^{n-2}不是K_n的非同构生成树的棵数，而是K_n的所有不同生成树的棵数。K_6恰有六棵非同构的生成树(见图 2.1)，而K_6的不同生成树

却有$6^4 = 1296$棵。

§2.5　　　　连线问题

°问题：假设要建造一个连接若干城镇的铁路网络。已知城镇v_i和v_j之间直通线路的造价为c_{ij}，试设计一个总造价最小的铁路网络。这个问题名为连线问题。

把每个城镇看作是具有权$w(v_i v_j) = c_{ij}$的赋权图 G 的顶点，问题转化为：在赋权图 G 中，找出具有最小权的连通生成子图。由于权是造价，当然是非负的，所以最小权生成子图是 G 的一棵生成树 T。赋权图的最小权生成树称为最优树。

°例子：最小生成树的例子（见图 2.9）

°Kruskal 算法：

1. 选择连杆e_1，使得$w(e_1)$尽可能小。
2. 若已选定边$e_1, e_2, \cdots, e_i$，则从$E \backslash \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选择$e_{i+1}$，使

(i)$G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$为无圈图；

(ii)$w(e_{i+1})$是满足(i)的尽可能小的权。

3. 当第 2 步不能继续执行时则停止。

°例子：以图 2.9 为例。

°算法的正确性证明：

定理 2.10：由 Kruskal 算法构作的任何生成树$T^* = G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{\upsilon-1}\}]$都是最优树。

证：用反证法。对 G 的任何异于T^*的生成树 T，用$f(T)$记使e_i不在 T 中的最小 i 值。现在假设T^*不是最优树，T 是一棵使$f(T)$尽可能大的最优树。

假设$f(T)=k$; 也就是说，$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$同时在T 和$T^*$中，但$e_k$不在 T 中。由定理 2.5，$T+e_k$包含唯一的圈 C。设$e_k'$是 C 的一条边，它在 T 中而不在$T^*$中，由定理 2.3，$e_k'$不是$T+e_k$的割边，因此，$T'=(T+e_k)-e_k'$是具有$\upsilon-1$条边的连通图，所以它是 G 的另一棵生成树。显然

$$w(T')=w(T)+w(e_k)-w(e_k') \qquad (2.1)$$

在 Kruskal 算法中选出的边e_k，是使$G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}]$为无圈图的权最小的边。由于$G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, e_k'\}]$是 T 的子图，它也是无圈的，于是得到：

$$w(e_k') \geq w(e_k) \qquad (2.2)$$

结合(2.1)式和(2.2)式，有

$$w(T') \leq w(T)$$

所以T'也是一棵最优树。然而

$$f(T') > k = f(T)$$

与 T 的选择矛盾。因此$T=T^*$，从而T^*确实是一棵最优树。 ■

°Prim 算法：

算法：

1. 对所有$v \in V(G)$, 设 $p(v) := \emptyset, c(v) := \infty$, 并且 $w(T) := 0$;
2. 选择任一顶点 r（作为根）;
3. 把 c(r)设为 0;

```
WHILE 存在未着色的顶点 DO
    选一个权 c(u)最小的顶点 u；
    将 u 着为黑色；
    FOR 每一个w(uv) < c(v)且未着色的顶点 v DO
        将 p(v)替换为 u 且 c(v)替换为 w(uv);
        将 w(T)替换为w(T) + c(u);
    ENDFOR;
ENDWHILE;
```

°举例：以图 2.9 为例

第三章 连通度

§ 3.1 连通度

°例子：图 3.1 中 4 个图连通的程度不同。

°顶点割：设 G 为连通图。若 V 的子集V'使得$G-V'$不连通，则V'称为 G 的顶点割。k 顶点割是指有 k 个元素的顶点割。完全图没有顶点割。

°（点）连通度：若 G 至少有一对相异的不相邻的顶点，则 G 所具有的 k 顶点割中最小的 k，称为 G 的连通度，记为$\kappa(G)$。否则定义$\kappa(G) =$ 完全图：$\upsilon - 1$。当 G 是平凡的或不连通时，$\kappa(G) = 0$。若$\kappa(G) \geq k$，则称 G 为 k 连通的。所有非平凡连通图都是 1 连通的。

若g是k连通，也必定是k-1连通的
连通度是最小的k顶点割

°边割：边割是 E 的形如$[S, \bar{S}]$的子集，其中$\emptyset \neq S \subset V$。一个 k 边割是指有 k 个元素的边割。若 G 非平凡且E'是 G 的一个边割，则$G - E'$不

连通。

°边连通度：G 的边连通度$\kappa'(G)$定义为：G 的所有 k 边割中最小的 k，若 G 是平凡的或不连通的，则$\kappa'(G)=0$。若 G 是具有割边的连通图，则$\kappa'(G)=1$。若$\kappa'(G)\geq k$，则称 G 是 k 边连通的。所有非平凡的连通图都是 1 边连通的。

k连通是指点连通

定理 3.1： $\kappa\leq\kappa'\leq\delta$。 点连通<边连通<=顶点最小度数

证：若 G 是平凡的，则$\kappa'=0\leq\delta$。否则，与δ度顶点相关联的连杆集构成了 G 的一个δ边割，由此推知：$\kappa'\leq\delta$。

对κ'用归纳法来证明$\kappa\leq\kappa'$。当$\kappa'=0$时，命题是正确的。因为此时 G 是平凡的或不连通的。现在假设命题对一切边连通度小于 k 的图均成立，并设 G 是$\kappa'(G)=k>0$的图，而 e 是 G 的一个 k 边割中的边。置$H=G-e$，则$\kappa'(H)=k-1$。因此，由归纳假设知$\kappa(H)\leq k-1$。

若 H 包含完全图作为其生成子图，则 G 也同样如此，而且

$$\kappa(G)=\kappa(H)\leq k-1。$$

否则，设 S 是 H 的具有$\kappa(H)$个元素的顶点割。由于$H-S$是不连通的，因此，或者$G-S$是不连通的，并且

$$\kappa(G)\leq\kappa(H)\leq k-1。$$

或者$G-S$是连通的，并且 e 是它的割边。在后一情形，或者$\upsilon(G-S)=2$并且

$$\kappa(G)\leq\upsilon(G)-1=\kappa(H)+1\leq k,$$

或者$G-S$有 1 顶点割$\{v\}$，从而$S\cup\{v\}$是 G 的顶点割，并且

$$\kappa(G)\leq\kappa(H)+1\leq k。$$

于是，在每种情形下，均有$\kappa(G) \le k = \kappa'(G)$。按归纳法原理，结果成立。 ■

°例子：图 3.2 中，$\kappa = 2$, $\kappa' = 3$ 且 $\delta = 4$。

作业 4：

1. 给定一个赋权图的邻接矩阵如下，求该图的最小生成树。

$$\begin{bmatrix} 0 & 54 & 32 & 7 & 50 & 60 \\ 54 & 0 & 21 & 58 & 76 & 69 \\ 32 & 21 & 0 & 35 & 67 & 66 \\ 7 & 58 & 35 & 0 & 50 & 62 \\ 50 & 76 & 67 & 50 & 0 & 14 \\ 60 & 69 & 66 & 62 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) 证明：若 G 是 k 边连通的，且$k > 0$，又E'是 G 的 k 条边的集，则$\omega(G - E') \le 2$。

   (b) 对$k > 0$, 找出一个 k 连通图 G 以及 G 的 k 个顶点的集V'，使得$\omega(G - V') > 2$。

3. (a) 证明：若 G 是简单图且$\delta \ge \frac{\upsilon}{2}$，则$\kappa' = \delta$。

   (b) 找出一个简单图 G，使得$\delta = \left\lfloor \binom{\upsilon}{2} - 1 \right\rfloor$且$\kappa' < \delta$。