第六章　　　　　　　对集（匹配）

§6.1　　　　　　　对集

°对集：设$M \subseteq E$, 它的元素是 G 中的连杆，并且这些连杆中任意两个在 G 中均不相邻，则 M 称为 G 的对集(或匹配)；M 中一条边的两个端点称为在 M 下是配对的。若对集 M 的某条边与顶点 v 关联，则称 M 饱和 v，并称 v 是 M 饱和的，否则称 v 是 M 非饱和的。

°完美对集：若 M 是对集，且 G 的每个顶点都是 M 饱和的，则称 M 为 G 的完美对集。

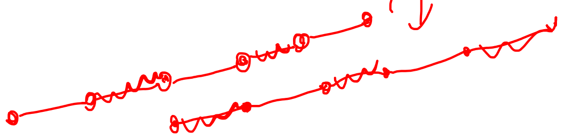
°最大对集：若 M 是对集，且 G 没有另外的对集M'，使得$|M'| > |M|$，则称 M 是 G 的最大对集。

*显然，每个完美对集都是最大对集，反之则不一定。

°例子：（见图 6.1）

°M-交错路：设 M 是 G 的对集，G 的 M-交错路是指其边在$E\backslash M$ 和 M中交错出现的路。

交换



°例子：图 6.1 中$v_5v_8v_1v_7v_6$是一条 M-交错路。

令路径上的非对集边和对集边交换，可以得到一个比M更大的对集

°M-可扩路：是指其起点和终点都是 M 非饱和顶点的 M-交错路。

定理 6.1(Berge)：G 的对集 M 是最大对集当且仅当 G 不包含 M-可扩路。

证：设 M 是 G 的对集，并假设 G 包含 M-可扩路$v_0v_1\cdots v_{2m+1}$，定义$M' \subseteq E$为:

$$M' = (M\backslash\{v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{2m-1}v_{2m}\}) \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \cdots, v_{2m}v_{2m+1}\},$$

则M'是 G 的对集，且$|M'| = |M| + 1$。因而 M 就不是最大对集。

反之，假设 M 不是最大对集，且令M'是 G 的最大对集。则

M不是最大对集则包含可扩路

$$|M'| > |M| \qquad (6.1)$$

置$H = G[M\Delta M']$，这里$M\Delta M'$表示M 和 M'的对称差(见图 6.2)。

M并M‘ - M交M’

H 的每个顶点在 H 中具有的度不是 1 就是 2。因为它最多只能和 M 的一条边以及M'的一条边关联，因此 H 的每一个分支或者是其边在 M 和M'中交错的偶圈，或者是其边在 M 和M'中交错的路。由(6.1)式，H 包含的M'的边多于 M 的边，因而必定有 H 的一条路组成的分支 P 开始于M'的边且终止于M'的边，因此 P 的起点和终点在 H 中被M'所饱和，在图 G 中就是 M 非饱和的。于是 P 是 G 的一条 M-可扩路。■

§6.2 偶图的对集和覆盖

S是顶点集的子集，和S中顶点相连的顶点集合叫做邻集

°定义：对于$S \subseteq V(G), N_G(S) = \{u\ |u \in V(G), v \in S, uv \in E(G)\}$。

定理 6.2：设 G 为具有二分类(X, Y)的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的对集当且仅当

$$|N(S)| \geq |S|, \text{对所有 } S \subseteq X \text{ 成立}。 \qquad (6.2)$$

证：假设 G 包含对集 M，它饱和 X 的每个顶点，并设 S 是 X 的子集。由于 S 的顶点在 M 下和 N(S)中的相异顶点配对，显然有$|N(S)| \geq |S|$.

反之，假设 G 是满足(6.2)式的偶图，但 G 不包含饱和 X 的所有顶点的对集，则将有如下矛盾。设M^*是 G 的最大对集，根据假设，M^*不饱和 X 的所有顶点。设 u 是 X 的一个M^*非饱和顶点，并设 Z 表示通

过M^*交错路与 u 连接的所有顶点的集。由于M^*是最大对集，从定理 6.1 可知：u 为 Z 中唯一的M^*非饱和顶点。置$S = Z \cap X$ 和 $T = Z \cap Y$(见图 6.3)。

显然，$S\backslash\{u\}$中的顶点，在M^*下与 T 中的顶点配对。因此

$$|T| = |S| - 1 \qquad (6.3)$$

而且$N(S) \supseteq T$。事实上有

$$N(S) = T \qquad (6.4)$$

因为$N(S)$中每个顶点均由一个M^*交错路连接于 u，但是由(6.3)和(6.4)式推出

$$|N(S)| = |S| - 1 < |S|$$

这与假定(6.2)式矛盾。 ■

*以上证明提供了寻找偶图的最大对集的一个好算法的基础。

推论 6.2：若 G 是 k 正则偶图($k > 0$)，则 G 有完美对集。

证明：设 G 是具有二分类(X, Y)的 k 正则偶图($k > 0$)。由于 G 是 k 正则图，所以$k|X| = |E| = k|Y|$，又由于$k > 0$，所以$|X| = |Y|$。现在设 S 是 X 的一个子集，并且用E_1和E_2分别表示与 S 和 N(S)中的顶点关联的边集，根据 N(S)的定义，有$E_1 \subseteq E_2$。因此

因为E1中的每一条边都是S的邻集的一条边

$$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$$

由此可知$|N(S)| \geq |S|$，再根据定理 6.2，可知 G 有一个饱和 X 的每个顶点的对集 M。由于$|X| = |Y|$，所以 M 是完美对集。 ■

°覆盖：图 G 的一个覆盖是指 V 的一个子集 K，使得 G 的每条边都至

少有一个端点在 K 中。一个覆盖 K 称为 G 的最小覆盖，是说：G 没有覆盖K'，使得$|K'| < |K|$。(见图 6.4)

若 K 是 G 的覆盖，并且 M 是 G 的对集，则 K 至少包含 M 中每条边的一个端点。于是对任何对集 M 和任何覆盖 K，均有$|M| \le |K|$。实际上，若M^*是最大对集且$\tilde{K}$是最小覆盖，则

$$|M^*| \le |\tilde{K}| \qquad (6.5)$$

一般说来，(6.5)式中的等式不成立(例如：参见图 6.4)。虽然如此，若 G 是偶图，则有$|M^*| = |\tilde{K}|$。

满足

引理 6.3：设 M 是对集，K 是覆盖，~~适合~~$|M| = |K|$。则 M 是最大对集，且 K 是最小覆盖。

证：若M^*是最大对集，且$\tilde{K}$是最小覆盖，由(6.5)式，

$$|M| \le |M^*| \le |\tilde{K}| \le |K|$$

由于$|M| = |K|$, 所以$|M| = |M^*|$，$|\tilde{K}| = |K|$。 ■

定理 6.3：在偶图中，最大对集的边数等于最小覆盖的顶点数。

证：设 G 是具有二分类(X, Y)的偶图，而M^*是 G 的最大对集，用 U 表示 X 中的M^*非饱和顶点的集，用 Z 表示由 M*-交错路连接到 U 中顶点的所有顶点的集。置$S = Z \cap X$ 且 $T = Z \cap Y$。与定理 6.2 的证明一样，可知 T 中的每个顶点都是M^*饱和的，并且$N(S) = T$。定义$\tilde{K} = (X \backslash S) \cup T$(见图 6.5)。则 G 每条边必然至少有一个端点在$\tilde{K}$中，因

为否则就存在一条边，其一端点在 S 中，而另一端点在$Y \backslash T$中，这与

$N(S) = T$相矛盾。于是$\widetilde{K}$是 G 的覆盖，并且显然有

$$|M^*| = |\widetilde{K}|$$

由引理 6.3，$\widetilde{K}$是最小覆盖，定理得证。 ■

作业 8：

1. 证明：一棵树最多只有一个完美对集。二者边数相同，则必定存在分别属于他们的边交错的圈，但树没有圈
2. 对每个$k > 1$，找出一个没有完美对集的 k 正则简单图的例子。
3. 图 G 的 k 正则生成子图称为 G 的 k 因子，并且若 G 存在边不重的 k 因子$H_1, H_2, \cdots, H_n$，使得$G = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$，则称 G 是 k 可因子分解的。

   证明：(a) $K_{n,n}$和K_{2n}是 1 可因子分解的。

   (b) 每个 k 正则偶图是 1 可因子分解的。