解方程

牛顿法与割线法

胡建芳

hujf5@mail.sysu.edu.cn

数据科学与计算机学院

助教

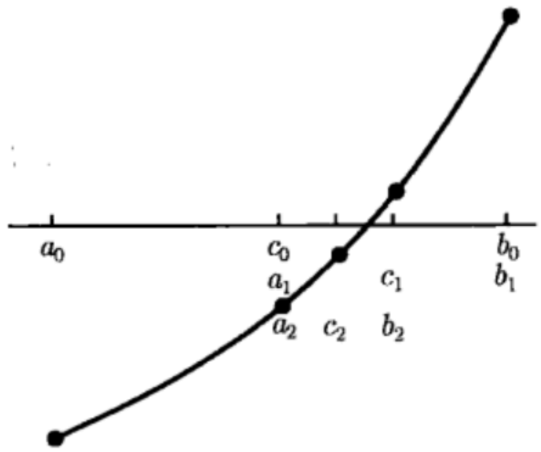
- **韦平:计算数学方向，博士**
  weip7@mail2.sysu.edu.cn

- **杨吾意：人工智能方向，硕士**
  yangwy33@mail2.sysu.edu.cn

- **作业提交邮箱**
  nahomework@163.com

群名称：数值计算方法-讨论群
群　号：634748851

课程回顾



对分法：第一步，检查 $f(c_0)$ 的符号，因为 $f(c_0)f(b_0) < 0$，所以取 $a_1 = c_0, b_1 = b_0$，并且用右半区间 $[a_1, b_1]$ 代替原区间 $[a_0, b_0]$；第二步，用左半区间 $[a_2, b_2]$ 代替 $[a_1, b_1]$

二分法

误差线性递减

$$x_1 = g(x_0),$$
$$x_2 = g(x_1),$$
$$x_3 = g(x_2),$$
$$\vdots$$

当步数趋于无穷时，数列 x_i 可能收敛，也可能不收敛．然而，如果 g 连续而且 x_i 收敛 (譬如收敛到数 r)，那么 r 就是一个不动点．事实上，定理 0.5 意味着

$$g(r) = g\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = r. \tag{1.3}$$

不动点迭代法

精度

前向误差和后向误差:

定义 1.8 假设 f 是一个函数, r 是一个根, 即它满足 $f(r)=0$. 假设 x_c 是 r 的近似值. 对于求根问题, 近似值 x_c 的**后向误差**(backward error) 是 $|f(x_c)|$, 而**前向误差**(forward error) 是 $|r-x_c|$.

定义 1.9 假设 r 是可微函数 f 的一个根, 即假设 $f(r)=0$. 那么, 如果 $0=f(r)=f'(r)=f''(r)=\cdots=f^{(m-1)}(r)$, 但是 $f^{(m)}(r)\neq 0$, 我们就说 f 在 r 处**有 m 重根**. 如果重数大于 1, 我们就说 f 在 r 处**有重根**. 如果重数是 1, 则称这个根是**单根**.

例 1.8 函数 $f(x)=\sin x-x$ 在 $r=0$ 处有一个三重根, 求近似根 $x_c=0.001$ 的后向误差和前向误差.

因为

$$f(0)=\sin 0-0=0, \qquad f'(0)=\cos\theta-1=0,$$

$$f''(0)=-\sin\theta-0=0, \qquad f'''(0)=\cos\theta=-1,$$

所以 0 处的根的重数是 3.

前向误差是 $FE=|r-x_c|=10^{-3}$. 后向误差是常数, 它要被加到 $f(x)$ 使 x_c 成为一个根, 即

$$BE=|f(x_c)|=|\sin(0.001)-0.001|\approx 1.6667\times 10^{-10}.$$ ◀

精度

- **迭代停止准则**：

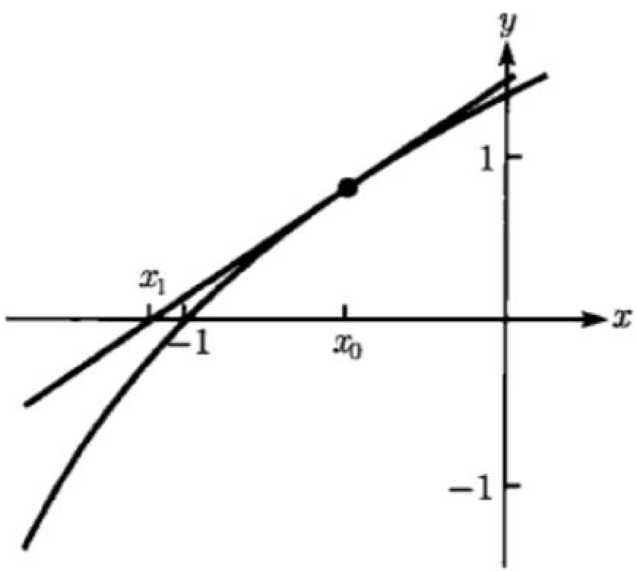
  两种可能：（1）使得后向误差$|f(x_c)|$小

  （2）使得前向误差$|x_c - r|$小

  实际应用中，真实根不知，所以用后向误差

牛顿法

- **牛顿法：**



$$f'(x_0)(x - x_0) = 0 - f(x_0),$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Newton 法的一步. 从 x_0 出发, 画出曲线 $y = f(x)$ 的切线. 它与 x 轴的交点是 x_1, 是根的下一个近似

Newton 法

$$x_0 = 初始估计,$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots .$$

牛顿法

- **牛顿法应用：**

对方程 $x^3+x-1=0$, 求 Newton 法的公式.

因为 $f'(x)=3x^2+1$, 公式由下面给出

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i^3+x_i-1}{3x_i^2+1}=\frac{2x_i^3+1}{3x_i^2+1}.$$

从初始点 $x_0=-0.7$ 开始迭代这个公式得到

$$x_1=\frac{2x_0^3+1}{3x_0^2+1}=\frac{2\times(-0.7)^3+1}{3\times(-0.7)^2+1}\approx 0.127\,1,$$

$$x_2=\frac{2x_1^3+1}{3x_1^2+1}\approx 0.957\,7.$$

牛顿法

- **牛顿法应用：**

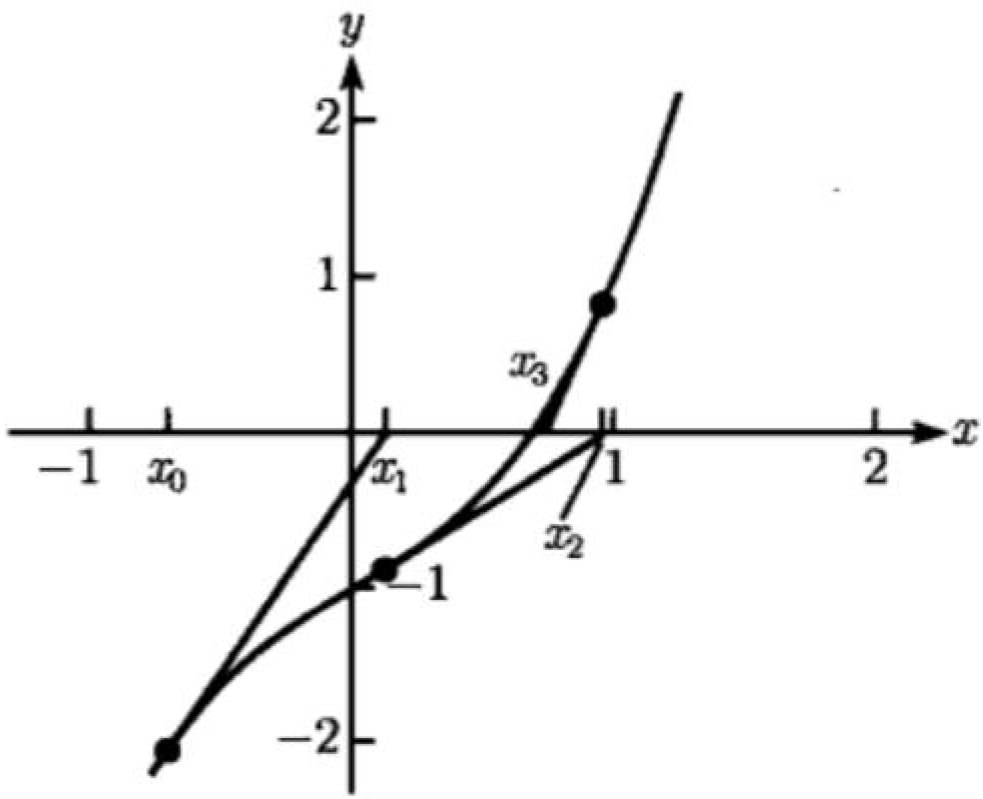
对方程 $x^3 + x - 1 = 0$, 求 Newton 法的公式.

i	x_i	$e_i = \|x_i - r\|$	e_i/e_{i-1}^2
0	−0.700 000 00	1.382 327 80	
1	0.127 125 51	0.555 203 00	0.290 6
2	0.957 678 12	0.275 350 32	0.893 3
3	0.734 827 79	0.052 499 99	0.692 4
4	0.684 591 77	0.002 263 97	0.821 4
5	0.682 332 17	0.000 004 37	0.852 7
6	0.682 327 80	0.000 000 00	0.854 1
7	0.682 327 80	0.000 000 00	

牛顿法

- **牛顿法应用：**

对方程 $x^3+x-1=0$, 求 Newton 法的公式.



牛顿法

- 牛顿法的收敛性：

定义 1.10 设 e_i 表示一种迭代方法在第 i 步后的误差. 如果

$$M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty,$$

那么这种迭代是二次收敛的.

与线性收敛对比

定理 1.11 设 f 是二次连续可微函数, 并且 $f(r)=0$. 如果 $f'(r)\neq 0$, 那么 Newton 法局部而且二次收敛于 r. 第 i 步的误差满足

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M,$$

其中

$$M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

牛顿法误差是二次递减，比线性快

牛顿法

- 牛顿法的收敛性：

证 要证明局部收敛性，只要注意 Newton 法是不动点迭代的特殊形式，这里

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

其导数为

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

收敛

因为 $g'(r) = 0$，根据定理 1.6，Newton 法是局部收敛的.

牛顿法

- 牛顿法的收敛性：

$$f(r) = f(x_i) + (r - x_i)f'(x_i) + \frac{(r - x_i)^2}{2} f''(c_i).$$

这里 c_i 在 x_i 和 r 之间. 因为 r 是根, 我们有

$$0 = f(x_i) + (r - x_i)f'(x_i) + \frac{(r - x_i)^2}{2} f''(c_i)$$

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = r - x_i + \frac{(r - x_i)^2}{2} \frac{f''(c_i)}{f'(x_i)},$$

这里假设 $f'(x_i) \neq 0$. 重新整理后, 我们就能把下一步的 Newton 迭代解与根进行比较:

$$x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - r = \frac{(r - x_i)^2}{2} \frac{f''(c_i)}{f'(x_i)},$$

$$x_{i+1} - r = e_i^2 \frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)},$$

$$e_{i+1} = e_i^2 \left| \frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)} \right|. \tag{1.24}$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$$

M, 二次收敛

牛顿法

- **上述牛顿法的局限性：**

  1， 函数可导

  2， 一阶导数不为0

如果不满足上述某一个条件, 例如2，会怎么样

牛顿法

- **例子**：

一阶导数不为0

用 Newton 法求 $f(x)=x^2$ 的根.

Newton 法的公式是 $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=x_i-\frac{x_i^2}{2x_i}=\frac{x_i}{2}$

i	x_i	$e_i=\lvert x_i-r\rvert$	e_i/e_{i-1}
0	1.000	0.000	
1	0.500	0.500	0.500
2	0.250	0.250	0.500
3	0.125	0.125	0.500
⋮	⋮	⋮	⋮

不是二次收敛，是线性收敛！

牛顿法

- **牛顿法的收敛**：

重根的收敛为线性收敛！

定理 1.12 假设在 $[a,b]$ 上 $(m+1)$ 次连续可微函数 f 在 r 处有 m 重根，那么 Newton 法局部收敛到 r，而且第 i 步的误差 e_i 满足

$$\lim_{i\to\infty}\frac{e_{i+1}}{e_i}=S, \tag{1.29}$$

这里 $S=\frac{m-1}{m}$.

牛顿法

- **修正牛顿法**:

定理 1.13 如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 $(m+1)$ 次连续可微, 且含有重数 $m>1$ 的根 r, 那么**修正Newton法**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{mf(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1.32}$$

局部且二次收敛于 r.

乘以系数 m，收敛加快!

牛顿法

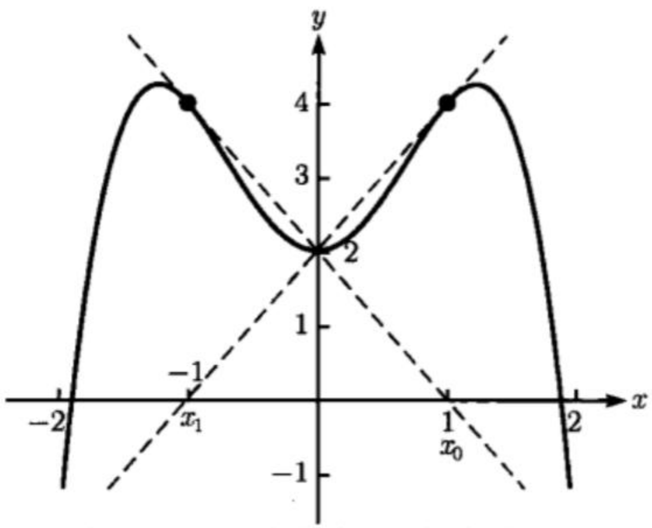
牛顿法失败的例子：

取初始估计 $x_0=1$, 对 $f(x)=-x^4+3x^2+2$ 应用 Newton 法.

因为 $f(x)$ 连续, 在 $x=0$ 处是正的, 并且对大的正数和大的负数 x, 它趋于负无穷大, 所以这个函数有根. 然而如图 1-10 所示, 对初始估计将求不出根. Newton 公式是

$$x_{i+1}=x_i-\frac{-x_i^4+3x_i^2+2}{-4x_i^3+6x_i}. \tag{1.33}$$

代入得到 $x_1=-1$, 然后又得到 $x_2=1$. 在这个例子中, Newton 法交替地在两个不是根的 1 和 -1 之间变动, 因此求根失败.



注意：初始值很重要，尽量选在根的附近，保证收敛。

牛顿法

- **上述牛顿法的局限性：**

  1， 函数可导

  2， 一阶导数不为0

如果函数不可导，怎么办

割线法

- **分析:**

  1， 牛顿法使用切线进行迭代，需要一阶导数

  2， 无法求导时，可以用两个相近点连线的斜率来代替

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}.$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{初始估计}, \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \end{aligned}$$

牛顿法

$$\begin{aligned} x_0, x_1 &= \text{初始估计}, \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)(x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}, \end{aligned}$$

割线法

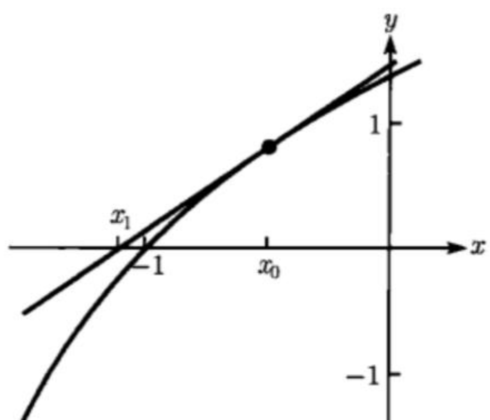
割线法

- **分析：**

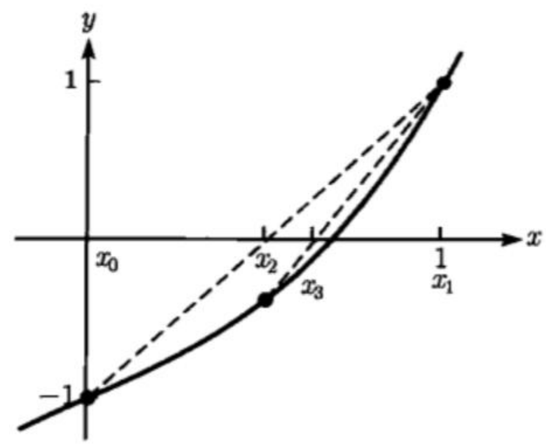
  1， 牛顿法使用切线进行迭代，需要一阶导数

  2， 无法求导时，可以用两个相近点的导数来代替

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}.$$



牛顿法



割线法

割线法

- **举例：**

取初始估计 $x_0=0, x_1=1$, 用割线法求 $f(x)=x^3+x-1$ 的根.

公式给出

$$x_{i+1}=x_i-\frac{(x_i^3+x_i-1)(x_i-x_{i-1})}{x_i^3+x_i-(x_{i-1}^3+x_{i-1})}.$$

从 $x_0=0$ 和 $x_1=1$ 开始, 我们计算

$$x_2=1-\frac{1\times(1-0)}{1+1-0}=\frac{1}{2},\qquad x_3=\frac{1}{2}-\frac{-\frac{3}{8}\times(\frac{1}{2}-1)}{-\frac{3}{8}-1}=\frac{7}{11},$$

i	x_i	i	x_i
0	0.000 000 000 000 00	5	0.682 020 419 648 19
1	1.000 000 000 000 00	6	0.682 325 781 409 89
2	0.500 000 000 000 00	7	0.682 327 804 359 03
3	0.636 363 636 363 64	8	0.682 327 803 828 02
4	0.690 052 356 020 94	9	0.682 327 803 828 02

割线法

- **割线法的收敛性：**

在割线法收敛到 r 并且 $f'(r)\neq 0$ 的假设下，近似误差关系

$$e_{i+1}\approx\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|e_ie_{i-1}$$

$$e_{i+1}\approx\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|^{\alpha-1}e_i^{\alpha}\qquad \alpha=(1+\sqrt{2})/2\approx 1.62$$

超线性收敛，介于线性收敛和二次收敛中间

割线法

- **二分法、不动点迭代法、割线法:**

二分法

优点：只要找好初始区间，一定会收敛，可以对目标函数一无所知

缺点：收敛较慢，线性收敛

不动点法

优点：满足一定条件，能保证收敛，可以对目标函数一无所知

缺点：收敛较慢，线性收敛

牛顿法

优点：收敛快（有重根情况下，收敛慢）

缺点：需要求一阶导数，一阶导数不为0，且要初始值在根附近

割线法

优点：收敛较快，不需要求导数

缺点：两个初始值，初始值在根附近

割线法

- **拓展**:

试位法：给定含有根的区间[*a, b*] (假设*f(a)f(b)*<0)，定义下一个点c

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)},$$

C在a与b中间，是a,b的加权平均值，二分法与割线法的结合

Muller法：用三个点迭代，x0,x1,x2,画出抛物线y=p(x),计算抛物线与x轴的交点。

反二次插值：计算抛物线x=p(y)，令y=0，求出抛物线与y轴的交点。

通过 3 点 $(a, A), (b, B), (c, C)$ 的二次多项式 $x = P(y)$ 是

$$P(y) = a\frac{(y-B)(y-C)}{(A-B)(A-C)} + b\frac{(y-A)(y-C)}{(B-A)(B-C)} + c\frac{(y-A)(y-B)}{(C-A)(C-B)}.$$

Muller法与反二次插值法，比割线法收敛快

作业

- **作业**：

1. 设 $f(x) = 54x^6 + 45x^5 - 102x^4 - 69x^3 + 35x^2 + 16x - 4$. 画出在区间[-2, 2]上的函数图形,并且用割线法求在区间内的所有5个根.对哪一个根是线性收敛?对哪一个根是超线性收敛?

下节课内容：求解方程组

群名称：数值计算方法-讨论群
群　号：634748851

THE END