°Floyd 算法：

给定赋权图 G 的距离矩阵$W_0 = (w_{ij})_{n\times n}$，

$$w_{ij} = v_i\text{到}v_j\text{的边上的权}$$

Floyd 算法将计算 G 中任意一对顶点之间的距离。

算法：

1. 输入 G 的距离矩阵W_0;
2. FOR $k = 1$ TO n DO
3. FOR $i = 1$ TO n DO
4. FOR $j = 1$ TO n DO
5. $W_k(i,j) \leftarrow \min(W_{k-1}(i,k) + W_{k-1}(k,j), W_{k-1}(i,j))$

°Floyd 算法的时间复杂度为：$O(n^3)$

定理 1.4：$W_n(i,j)$是从v_i到v_j的最短路径的长度。

证明：我们用归纳法证明：$W_k(i,j)$是 G 中从v_i到v_j经过顶点子集$\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$的最短路径的距离，如果$k = 0$，那么$W_k(i,j) = w_{ij}$是从$v_i$到$v_j$不经过任何中间顶点的路径的距离。假设以上结论对$W_{k-1}(i,j)$成立。现在$W_k(i,j)$是$W_{k-1}(i,j)$和$W_{k-1}(i,k) + W_{k-1}(k,j)$的小者。由归纳假设$W_{k-1}(i,j)$是从$v_i$到$v_j$经过顶点子集$V' = \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\}$的最短路径的长度。如果 G 中有一条更短的路径经过v_k和V'中的顶点，由归纳假设，它的长度一定是$W_{k-1}(i,k) + W_{k-1}(k,j)$。由归纳法，结论成立。

当W_n被计算好了，V 包含 G 中所有顶点了，因此，$W_n(i,j)$就是 G 中从v_i到v_j的最短路径的长度。 ■

§1.8 几个有用的图类

一．集合系统与超图

∘集合系统：一个集合系统是一个有序对(V,F)，其中 V 是元素的集合，F 是一族 V 的子集的集合。

*注意：当 F 是 V 中元素对的集合时，(V,F)就是普通的图。因此，集合系统(V,F)可以看成是图的推广，称为超图。

∘超图的例子：

$H=(V,F), V=\{1,2,3,4,5,6,7\}, F=\{\{1,2,4\},\{1,3,7\},\{1,6,5\},$
$\{2,3,5\},\{2,6,7\},\{3,4,6\},\{4,5,7\}\}$。

画出图形：（见图 1.12）

∘超图通常表示成关联图和交图

∘关联图：一个超图$H=(V,F)$表示成一个偶图$G[V,F]$，其中$v\in V$和$f\in F$相邻当且仅当$v\in f$。这个偶图称为集合系统 H 的关联图。

例如：超图 1.12 的关联图如下：（见图 1.13）顶点和与其相关联的F元素的连线

∘交图：一个集合系统(V,F)的交图是这样一个图，它的顶点集是 F，F 中两个集合f_1和$f_2\in F$对应的顶点相邻，当且仅当$f_1\cap f_2\neq\emptyset$。

例如：V 是简单图 G 的顶点集，$F=E$是 G 的边集。(V,F)的交图 I 以 G 的边作为顶点，I 的两个顶点相邻当且仅当它们对应 G 中的两条边有公共端点。

例如：（见图 1.14）

这样得到简单图 G 的交图称为 G 的线图。

二．k 树和部分 k 树

°k 树：K_k是 k 树，一个 k 树$G \neq K_k$，是说：G 中存在一个 k 度顶点 v，v 在 G 中的邻集构成一个完全子图，并且$G - v$是一个 k 树。

例子：一个 3 树的例子。（见图 1.15）

°部分 k 树：k 树的任一连通子图称为一个部分 k 树。

三．树宽 Xi是顶点集合V的子集，有很多个Xi构成了集合I，i是集合I中下标，T是集合I中的所有Xi作为顶点，形成的树

一个图$G = (V, E)$的树分解是一个偶对$(\{X_i | i \in I\}, T)$，其中$\{X_i | i \in I\}$是一个 V 的子集族，T 是以 I 为顶点集的树，并且满足：(1) $\bigcup_{i \in I} X_i = V$；(2) 对每一条边$(x, y) \in E$，存在一个$i \in I$，使得$x, y \in X_i$；(3) 对任意 3 个元素$i, j, k \in I$，如果 j 是在 T 中 i 到 k 的路上的顶点，那么有$X_i \cap X_k \subseteq X_j$。

（1）原来的图每一个点都要属于一个树分解

（2）原来图的每一条边都要属于一个树分解

图 G 的一个给定的树分解的宽度定义为：$\max_{i \in I}\{|X_i| - 1\}$。

一个图 G 的树宽是图 G 的所有树分解中宽度最小的那个树分解的宽度。

一个图 G 称为树宽 k-图，是说：G 的树宽不大于 k。

例子：下图 G 是一个树宽为 2 的图，T 是它的一个树分解。（见图 1.16）

°一个图 G 是树宽 k-图，当且仅当它是一个部分 k 树。

°当一个图 G 的树宽小于等于某个常数时，许多 NP-完全问题在 G 上有多项式时间（甚至是线性时间）的算法。

作业 2：

1. 设 G 是无向简单图，且$\delta \geq 2$。证明：G 中存在长度大于或等于$\delta + 1$的圈。
2. 证明：若 G 是简单图且$\varepsilon > \binom{\upsilon - 1}{2}$，则 G 连通(其中 υ 和 ε 分别为 G 的顶点数和边数)。
3. 某公司在六个城市$C_1, C_2, \cdots, C_6$中都有分公司。从C_i到C_j的直接航程票价由下述矩阵的第(i, j)元素给出(∞表示无直接航路)，求C_1到其余各城市的最廉航价和路线。（用 Dijkstra 算法）

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$