上周作业解答

Exercise 1.

一张百元人民币（第五套）约重 1.15 克。由于流通过程中多种因素影响，我们可以假定一张百元人民币重量在 $1.10 \sim 1.20$ 克之间。办案人员从某贪官（后已处死刑）住处查出大量百元现金，称其重量在 $3 \sim 3.05$ 吨之间。问这些贪污的钱数额在什么范围？

上周作业解答

Answer:
设共有 N 张人民币，重量分别是 $X_1, X_2, \cdots, X_N$，则总重量是：

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

由于 $3 \times 10^6 \le \sum_{i=1}^{N} X_i \le 3.05 \times 10^6$，而 $1.10 \le X_i \le 1.20$，我们得到

$3 \times 10^6 \le 1.20N$，所以 $N \ge \frac{3 \times 10^6}{1.20}$

$1.10N \le 3.05 \times 10^6$，所以 $N \le \frac{3.05 \times 10^6}{1.10}$

上周作业解答

Exercise 2. [Cover(2006)]

Entropy of functions of a random variable. Let X be a discrete random variable. Show that the entropy of a function of X is less than or equal to the entropy of X by justifying the following steps:

$$
\begin{aligned}
H(X, g(X)) &\overset{\textbf{(a)}}{=} H(X) + H(g(X) \mid X) \\
&\overset{\textbf{(b)}}{=} H(X), \\
H(X, g(X)) &\overset{\textbf{(c)}}{=} H(g(X)) + H(X \mid g(X)) \\
&\overset{\textbf{(d)}}{\geq} H(g(X))
\end{aligned} \tag{1}
$$

Thus, $H(g(X)) \leq H(X)$.

上周作业解答

Answer:
(a) 设 $Y=g(X)$，则根据链式法则 $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$，有：

$$H(X,g(X))=H(X)+H(g(X)|X)$$

(b) 由定义得 $H(Y|X)=\sum_{x\in\mathcal{X}}p(x)H(Y|X=x)$，其中

$$H(Y|X=x)=-\sum_{y\in\mathcal{Y}}p(y|x)\log p(y|x)$$

由于 $p(y|x)=\begin{cases}1, & y=g(x)\\ 0, & y\neq g(x)\end{cases}$，所以 $H(Y|X=x)=0$，进而$H(X,g(X))=H(X)$。

(c) 理同(a)，利用链式法则易证。

(d) 因为 $H(X|g(X))\geq 0$，所以成立。

Exercise 3. [Cover(2006)]

Zero conditional entropy. Show that if $H(Y|X) = 0$, then Y is a function of X [i.e., for all x with $p(x) > 0$, there is only one possible value of y with $p(x, y) > 0$].

上周作业解答

Answer:
$H(Y|X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)H(Y|X=x) = 0$

由于 $p(x)H(Y|X=x) \geq 0$(对于所有 $x \in \mathcal{X}$)，所以，必有 $p(x)H(Y|X=x) = 0$，对于所有 $x \in \mathcal{X}$ 成立。

因此，若 $p(x) > 0$，则必有 $H(Y|X=x) = 0$，说明 $p(y|x), y \in \mathcal{Y}$有且仅有一个分量为 1，记为 y_x，这就建立了一个函数关系，$x \to y_x$。

上周作业解答

Exercise 4.

证明：1) $H(Y|X) \geq 0$；2) $H(X,Y) \geq H(X)$，等号成立当且仅当 Y 可以写作 X 的函数，即存在函数 g 使得 $Y = g(X)$。

上周作业解答

Answer:

1) 根据定义，$H(Y|X) = -\sum_{x,y} p(x,y) \log p(y|x)$，由于求和中各项 $p(x,y) \log p(y|x) \leq 0$，得证 $H(Y|X) \geq 0$。

2) $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \geq H(X)$，这是因为 $H(Y|X) \geq 0$。

若等号成立，则 $H(Y|X) = 0$。由**Exercise 3**可知有函数关系。

若有函数关系，则由**Exercise 2**可知，$H(Y|X) = 0$。