随堂测解答

Test 1. 一个 $[7,3]$ 线性分组码的生成矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)构造一个等价的系统码生成矩阵；
(2)求该码的校验矩阵；
(3-专选)求码的重量谱。
(3-专必)求码的最小距离和可纠错数。

随堂测解答

解：(1) 对生成矩阵进行行变换，得到系统码生成矩阵

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)码的校验矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

随堂测解答

(3-专选) 令$c_i(i=1,\cdots,8)$ 表示该线性码的码字，可以求得码字集合为{0000000, 1001110, 0100111, 0011101, 1101001, 1010011, 0111010, 1110100}。计算重量谱为

$$A(X)=1+7X^4$$

(3-专必) 校验矩阵列中，存在

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

且$\mathbf{H}$ 矩阵任意三列线性无关。所以，码的最小距离为4，纠错数为1 。

Test 2. 给定概率转移矩阵，计算相应的信道容量。

专选： $(\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\})$

$$p(y|x) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

专必： $(\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\})$

$$p(y \mid x) = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

随堂测解答

解（专选）：$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$

$$p(y \mid x) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

可看出该信道为对称信道,因此在输入等概时达到信道容量

$$C = \log|\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r}) = \log 3 - 1 = 0.58 \text{ 比特}$$

随堂测解答

解（专必）：$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$

$$p(y \mid x) = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

可以看出，该信道为两个二元对称信道的和信道。两个二元信道的信道容量为：

$$C_1 = 1 - H(p),\ C_2 = 1 - H(q)$$

和信道的信道容量 C 满足关系 $2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$，因此可以表示为

$$C = \log(2^{1-H(p)} + 2^{1-H(q)})$$

随堂测解答

Test 3.证明汉明距离的三角不等式成立。

证：设3 个码字$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的第i 位码符号分别为: u_i, v_i, w_i, 那么$u_i \neq w_i$ 就意味着$u \neq v_i$ 或$v_i \neq w_i$, 所以

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= |\{i \mid u_i \neq w_i\}| \\ &\leqslant |\{i \mid u_i \neq v_i \vee v_i \neq w_i\}| \\ &\leqslant |\{i \mid u_i \neq v_i\}| + |\{i \mid v_i \neq w_i\}| \\ &= d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

值得注意的是，若码符号为二元，则第二行取等号。