§6.3 完美对集

°奇分支和偶分支：奇数个顶点的分支称为奇分支；偶数个顶点的分支称为偶分支。用 o(G)表示 G 的奇分支的个数。

定理 6.4(Tutte 定理)：图 G 有完美对集当且仅当

$$o(G-S)\le|S|,\text{对所有 } S\subset V \text{ 成立。} \qquad (6.6)$$

证：显然只要对简单图证明这个定理就行了。

首先假设 G 有完美对集 M。设 S 是 V 的一个真子集，并设$G_1,G_2,\cdots,G_n$是 $G-S$ 的奇分支，因为G_i是奇分支，所以G_i的某一顶点u_i一定在 M 下和 S 的一个顶点v_i配对(见图 6.6)。所以，由于$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\subseteq S$，因而有

$$o(G-S)=n=|\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}|\le|S|。$$

一个v只能和一个u对应，如果和多个u对应就不是完美对集了

反之，假设 G 满足(6.6)式，但没有完美对集，则 G 是没有完美对集的极大图G^*的生成子图。由于 $G-S$ 是G^*-S 的生成子图，所以

一直加边加到最大的情况，6.6式不会改变

$o(G^*-S)\le o(G-S)$。因而由(6.6)式有

因为G满足6.6式

$$o(G^*-S)\le|S|,\text{对所有 } S\subset V(G^*)\text{成立。} \qquad (6.7)$$

特别地，置 $S=\emptyset, o(G^*)=0$，因而$\upsilon(G^*)$是偶数。当S=空集，G*是偶分支，则G*有偶数个顶点

用 U 表示G^*中度为$\upsilon-1$ 的顶点集。由于当 $U=V$ 时，G^*显然有完美对集，因此可以假定 $U\ne V$。我们将证明：G^*-U 是完全图的不相交的并图。假若不然，G^*-U 的某一分支不是完全图，则在此分支里存在顶点 x,y 和 z，使得 $xy\in E(G^*), yz\in E(G^*)$和 $xz\notin E(G^*)$。此外，由于 $y\notin U$，在 G^*-U 中存在顶点 w，使得 $yw\notin E(G^*)$

因为G*-U不是完全图

。这种情形直观地

表示在图 6.7 中。

由于G^*是不包含完美对集的极大图，所以对于所有 $e \notin E(G^*)$，$G^* + e$ 都有完美对集。设M_1和M_2分别是$G^* + xz$ 和$G^* + yw$ 的完美对集，并且用 H 表示由$M_1 \Delta M_2$导出的$G^* \cup \{xz, yw\}$的子图。由于 H 的每个顶点的度均为 2，所以 H 是圈的不相交的并图。进而，由于沿着这些圈的M_1的边和M_2的边是交错的，所以所有这些圈都是偶圈。我们分两种情形讨论：（见图 6.8）

情形 1：xz 和 yw 在 H 的不同分支中(图 6.8 (a))。于是，若 yw 在 H 的圈 C 中，则M_1在 C 中的边连同M_2不在 C 中的边一起组成G^*的一个完美对集，这和G^*的定义矛盾。

情形 2：xz 和 yw 在 H 的同一分支 C 中。根据 x 和 z 的对称性，可以假定顶点 x, y, w, z 依次出现在 C 中(图 6.8 (b))。于是M_1在 C 的 $yw\cdots z$ 节中的边连同 yz 以及M_2不在 C 的 $yw\cdots z$ 节中的边一起组成G^*的一个完美对集，再次与G^*的定义矛盾。

因此不论情形 1 或情形 2 都导致矛盾，由此可知$G^* - U$ 确是完全图的不相交的并图。

偶数个顶点的完全图一定有完美对集

现在，根据(6.7)式有 $o(G^* - U) \leq |U|$。因此$G^* - U$ 的奇分支个数最多是$|U|$，但这样一来，G^*显然就有一个完美对集：$G^* - U$ 的各奇分支中的一个顶点和 U 的一个顶点配对，U 的余下的顶点以及$G^* - U$

假如奇分支小于|U| ,则这些奇分支可以连接U来产生完美对集，而U的顶点都是度数为V-1的，所以他们内部的没有和奇分支连线的点也一定有边相连产生完美对集。

的各分支中余下的顶点，则也相互配对，正如图 6.9 所表示的那样。

由于假定G^*是没有完美对集的，因而得到了希望出现的矛盾。于是 G 确实有完美对集。 ■

推论 6.4：每个没有割边的 3 正则图都有完美对集。

证明：设 G 是没有割边的 3 正则图，S 是 V 的真子集，用$G_1, G_2, \cdots, G_n$表示 $G-S$ 的奇分支，并设m_i是一个端点在G_i中，另一个端点在 S 中的那些边的条数。由于 G 是 3 正则的，所以

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3\upsilon(G_i)\text{，对 } 1 \le i \le n \text{ 成立} \qquad (6.8)$$

并且

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3|S| \qquad (6.9)$$

由(6.8)式，$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i)$是奇数，又由于 G 没有割边，所以$m_i \neq 1$。因此，

因为mi是奇数，不是1就大于等于3了

$$m_i \ge 3 \quad \text{对 } 1 \le i \le n \text{ 成立} \qquad (6.10)$$

从(6.10)式和(6.9)式即可推出

$$o(G-S) = n \le \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} m_i \le \frac{1}{3}\sum_{v \in S} d(v) = |S|$$

所以，根据定理 6.4，G 有完美对集。

*具有割边的 3 正则图不一定有完美对集。（见图 6.10）

§6.4 人员分派问题

°问题：某公司准备分派 n 个工人$X_1, X_2, \cdots, X_n$做 n 件工作$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$,

已知这些工人中每个人都胜任一件或几件工作。试问能不能给所有工人都分派做一件他所胜任的工作？这就是人员分派问题。

°转化为图论问题：构作一个具有二分类(X, Y)的偶图 G，这里 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 并且$x_i$与$y_j$相连当且仅当工人$x_i$胜任工作$y_j$。于是问题转化为确定 G 是否有完美对集的问题。

°算法的基本思想：从任一对集 M 开始，若 M 饱和 X 中每个顶点，则 M 就是所需要的对集。如果不是这样，则在 X 中选择一个 M 非饱和顶点 u，并且系统地寻找一条以 u 为起点的 M-可扩路，寻找方法下面再详述。找出这样一条路 P，如果它存在的话；这时，$\widehat{M} = M\Delta E(P)$就是比 M 更大的对集，因而饱和 X 中更多的顶点。然后以$\widehat{M}$代替 M，并重复这个程序。如果这样的路不存在，则通过 M 交错路与 u 相连接的那些顶点的集合 Z 就可找到。于是(如同定理 6.2 的证明那样)，$S = Z \cap X$ 满足$|N(S)| < |S|$。无完美对集

°扎根于顶点 u 的 M-交错树：(见图 6.11)

°匈牙利算法：

从任意一个对集 M 开始。

1. 若 M 饱和 X 的每个顶点，则停止。否则，设 u 是 X 中的 M 非饱和顶点。置 $S = \{u\}$及 $T = \emptyset$。
2. 若 $N(S) = T$, 由于$|T| = |S| - 1$, 所以$|N(S)| < |S|$，因而停止，因为根据 Hall 定理，不存在饱和 X 的每个顶点的对集。否则，设 $y \in N(S)\backslash T$。

3. 若 y 是 M 饱和的。设 $yz \in M$, 用 $S \cup \{z\}$代替 S，$T \cup \{y\}$代替 T，并转到第 2 步(注意这样替换后，$|T| = |S| - 1$ 依然成立)。否则，设 P 是 M-可扩(u, y)路，用$\widehat{M} = M\Delta E(P)$代替 M，并转到第 1 步。

°例子：(见图 6.11)

§ 6.5 最优分派问题

°问题：在人员分派问题中，考虑每个工人做每一项工作的效率，找一个工作安排使得总效率最大。寻找这种分派的问题称为最优分派问题。

°图论问题：考察一个具有二分类(X, Y)的赋权完全偶图，这里 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，边$x_iy_j$有权$w_{ij} = w(x_i, y_j)$，表示工人$x_i$做工作$y_j$时的效率。最优分派问题显然等价于在这个赋权图中寻找一个有最大权的完美对集。这种对集称为最优对集。

°可行顶点标号：在 $X \cup Y$ 上定义实值函数 l，适合下述条件：对任意 x

$\in X$ 和 $y \in Y$，均有

$$l(x) + l(y) \geq w(xy) \qquad (6.11)$$

则把函数 l 称为该偶图的一个可行顶点标号。l(v)称为 v 的标号。

可行顶点标号总是存在的，例如：

$$\begin{cases} l(x) = \max\limits_{y \in Y} w(xy), & 若\ x \in X \\ l(y) = 0, & 若\ y \in Y \end{cases} \qquad (6.12)$$

°相等子图：若 l 是可行顶点标号，则用E_l表示使(6.11)式中等式成立

的那些边的集合，即

$$E_l = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

具有边子集E_l的 G 的生成子图不妨称为对应于可行顶点标号 l 的相等子图，并用G_l表示。

G的顶点都包含，满足上面式子的就加边，最后得到的不一定是连通的图

定理 6.5：设 l 是 G 的可行顶点标号。若G_l包含完美对集M^*，则M^*是 G 的最优对集。

证：假设G_l包含完美对集M^*。由于G_l是 G 的生成子图，所以M^*也就是 G 的完美对集。于是

因为是完美对集，没有边重复顶点。所以由相等子图的定义得，所有边的权值和等于顶点标号和

$$w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V} l(v) \qquad (6.13)$$

这是因为每个 $e \in M^*$都属于这个相等子图，并且M^*的边的端点覆盖 V 的每个顶点恰好一次。另一方面，若 M 是 G 的任一完美对集，则有

因为不是Gl的话，就不满足标号和等于权值，权值必定小于等于标号和，则这条式子成立

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \le \sum_{v \in V} l(v) \qquad (6.14)$$

从(6.13)式和(6.14)式推出 $w(M^*) \ge w(M)$。于是M^*是最优对集。 ■

°算法思想：

首先给出一个可行顶点标号 l（(6.12)式给出的函数 l 就是一例），然后决定G_l，在G_l中选取一个对集 M，并且应用匈牙利算法。若在G_l中已经找到一个完美对集，则由定理 6.5，该对集就是最优的。否则匈牙利方法将终止于一个非完美的对集 M'和一棵既不包含 M'可扩路，又不能在G_l中进一步生长的 M'交错树 H。随后，把 l 修改为具有下述性质的另一个可行顶点标号$\hat{l}$：M'和 H 都包含在$G_{\hat{l}}$中，并且 H 能够在$G_{\hat{l}}$

中伸展。每当必要时，连续不断地进行这种可行顶点标号的修改，直到一个完美对集在某个相等子图中找到为止。

°Kuhn-Munkres 算法：

从任一可行顶点标号 l 开始，然后决定G_l，并且在G_l中选取任一对集 M。

1. 若 X 是 M 饱和的，则 M 是完美对集(因为$|X| = |Y|$)，并且因而由定理 6.5 可知，M 是最优对集；在这种情形下，算法终止。否则，令 u 是一个 M 非饱和顶点，置 $S = \{u\}$, $T = \emptyset$。
2. 若$N_{G_l}(S) \supset T$，则转到第 3 步。否则$N_{G_l}(S) = T$。计算

$$\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{ l(x) + l(y) - w(xy) \}$$

且由

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, & 若\ v \in S \\ l(v) + \alpha_l, & 若\ v \in T \\ l(v) \quad\quad , & 其它 \end{cases}$$

给出可行标号$\hat{l}$。(注意$\alpha_l > 0$ 且$N_{G_{\hat{l}}}(S) \supset T$)。以$\hat{l}$代替 l，以$G_{\hat{l}}$代替$G_l$。
3. 在$N_{G_l}(S) \backslash T$ 中选择一个顶点 y。和 6.4 节中树的生长程序一样，考察 y 是否 M 饱和。若 y 是 M 饱和的，并且 yz ∈ M，则用 $S \cup \{z\}$代替 S，用 $T \cup \{y\}$代替 T，再转到第 2 步。否则，设 P 是G_l中的 M 可扩(u, y)路，用$\widehat{M} = M \Delta E(P)$代替 M，并转到第 1 步。

°例子：(见图 6.12)

作业 9：

1. 证明推论 6.4 的下述推广：若 G 是$(k-1)$边连通的 k 正则图，并且υ是偶数，则 G 有完美对集。

2. 证明一棵树 G 有完美对集当且仅当 $o(G-v)=1$ 对于所有 $v\in V$ 成立。

3. 利用匈牙利算法，求出下图的一个最大对集，该对集是否完美对集？(见图 6.13，画出 M 交错树)

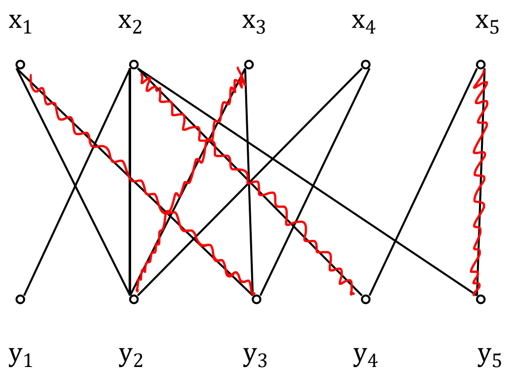

图 6.13