§ 1.5 关联矩阵与邻接矩阵

*图可以用集合表示，更多地是用图形来表示。此外，还可以用矩阵来表示。

◦关联矩阵：设无向图$G=(V,E)$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\},E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$关联矩阵

$M(G)=(m_{ij})_{\upsilon\times\varepsilon}$，$m_{ij}$为顶点$v_i$与$e_j$关联的次数。

例子：(见图 1.6)

$$M(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

每列和为2

◦关联矩阵的性质：

1. $\sum_{i=1}^{\upsilon}m_{ij}=2\ (j=1,2,\cdots,\varepsilon)$，即每条边关联两个顶点。

2. $\sum_{j=1}^{\varepsilon}m_{ij}=d(v_i)\ (i=1,2,\cdots,\upsilon)$，即 $M(G)$的第 i 行元素之和为v_i的度数。

3. $\sum_{i=1}^{\upsilon}d(v_i)=\sum_{i=1}^{\upsilon}\sum_{j=1}^{\varepsilon}m_{ij}=\sum_{j=1}^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{\upsilon}m_{ij}=\sum_{j=1}^{\varepsilon}2=2\varepsilon$，这个结果正是握手定理的内容，即各顶点的度数之和等于边数的两倍。

◦有向图的关联矩阵：设有向图$D=(V,E)$中无环，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\-1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则$M(D)=(m_{ij})_{\upsilon\times\varepsilon}$为 D 的关联矩阵。

例子：（见图 1.7）

$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

°邻接矩阵：设有向图$D=(V,E),V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$，令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，则 $A(D)=(a_{ij}^{(1)})_{\upsilon\times\upsilon}$为 D 的邻接矩阵。

例子：（见图 1.8）

$$A(D)=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

°无向图的邻接矩阵：设$G=(V,E)$为无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}$，令

$$a_{ij}=\begin{cases}k, & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{有 k 条边}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则 $A(G)=(a_{ij})_{\upsilon\times\upsilon}$称为 G 的邻接矩阵。

例子：(见图 1.9)

$$A(G)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

*注意无向图的邻接矩阵是对称的。

§1.6　　通路与回路及图的连通性

一．通路与回路

°途径：G 的一条途径是指一个有限非空序列$W = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_kv_k$，对$1 \le i \le k, e_i$的端点是$v_{i-1}$和$v_i$。称 W 是从$v_0$到$v_k$的一条途径，或一条$(v_0, v_k)$途径。顶点$v_0$和$v_k$分别称为 W 的起点和终点，而$v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$称为 W 的内部顶点，W 中的边数 k 称为 W 的长度。

°回路(闭途径)：若$v_0 = v_k$，则 W 称为闭途径。

°迹：若途径 W 中，$e_1, e_2, \cdots, e_k$互不相同，则 W 称为迹。

°闭迹：$v_0 = v_k$的迹 W 称为闭迹。

°路(径)：若迹 W 中，$v_0, v_1, \cdots, v_k$互不相同，则 W 称为一条路(径)。

°圈：$v_0 = v_k$的路 W 称为一个圈。

例子：(见图 1.10)

途径：uavfyfvgyhwbv

迹　：wcxdyhwbvgy

路　：xcwhyeuav

°奇圈和偶圈：长度为奇数的圈为奇圈，长度为偶数的圈为偶圈。

若$W = v_0e_1v_1 \cdots e_kv_k$和$W' = v_ke_{k+1}v_{k+1} \cdots e_lv_l$都是途径，则 W 逆转后所得到的途径$v_ke_kv_{k-1} \cdots e_1v_0$记作$W^{-1}$，将W 和$W'$在$v_k$处衔接在一起所得的途径$v_0e_1v_1 \cdots v_ke_{k+1}v_{k+1} \cdots e_lv_l$记为$WW'$。

途径$W = v_0e_1v_1 \cdots e_kv_k$的节是指 W 中由相继项构成的子序列，$v_ie_{i+1}v_{i+1} \cdots e_jv_j$，它也是一条途径；这一子序列称为 W 的$(v_i, v_j)$节。

顶点间的路径是唯一的

在简单图中，途径$v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$表示成顶点序列$v_0v_1\cdots v_k$。

°有向图的路径和圈举例。

二．图的连通性

°设$G=(V,E),u,v\in V(G)$,若 u,v之间存在通路，则称u,v是连通的，记作$u\sim v$。对任意$v\in V(G)$，规定$v\sim v$。

无向图中顶点之间的连通关系~是自反的，对称的和传递的，因而是 V 上的等价关系。

$u\sim v \Rightarrow v\sim u$

$u\sim v \quad v\sim w \Rightarrow u\sim w$

°连通图：若无向图 G 是平凡图或 G 中任意两个顶点都是连通的，则称 G 是连通图，否则称 G 为不连通图。

°连通分支：连通关系把 G 的顶点集 V 划分成等价类$V_1,V_2,\cdots,V_k$, 子图$G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_k]$称为 G 的连通分支。两个顶点$u$ 和 v在 G 中是连通的，当且仅当它们在 G 的同一连通分支中。

G 的连通分支数记为$\omega(G)$。

°连通分支的例子。

°两点间的距离：设u,v为无向图 G 中任意两点，并且u 和 v之间连通，那么从 u 到 v 的最短路径的长度称为 u 到 v 的距离，记作$d(u,v)$。若 u 和 v 不连通，则记$d(u,v)=\infty$。

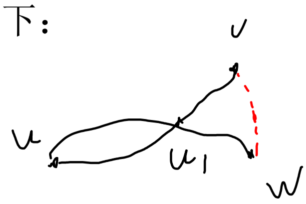
定理 1.3：一个无向图$G=(V,E)$是偶图当且仅当 G 中无长度为奇数的圈(奇圈)。

证明：必要性。设 G 是有二分类(X, Y)的偶图。若 G 中无回路，结论显然成立。若 G 中有回路，只需证明 G 中无奇圈。设 C 为 G 中任意一圈，令$C=v_0v_1\cdots v_kv_0$。不失一般性，可假定$v_0\in X$，因为$v_0v_1\in$

E且 G 是偶图，故$v_1 \in Y$，同理$v_2 \in X$。一般说来，$v_{2i} \in X$ 且$v_{2i+1} \in Y$，又因为$v_0 \in X$，所以$v_k \in Y$。于是对某个 i，有$k = 2i + 1$，因此，C 是偶圈。

假设G中的圈都是偶数，求证G一定是偶图

充分性。显然对连通图证明充分性就够了。设 G 是不包含奇圈的连通图。任选一个顶点 u 且定义 V 的一个分类(X, Y)如下：



$$X = \{x \in V |\ d(u, x)\text{是偶数}\}$$

$$Y = \{y \in V |\ d(u, y)\text{是奇数}\}$$

现在证明(X, Y)是 G 的一个二分类。假设 v 和 w 是 X 的两个顶点，P 是最短的(u, v)路，Q 是最短的(u, w)路，以u_1记 P 和 Q 的最后一个公共顶点。因 P 和 Q 是最短路，P 和 Q 的(u, u_1)节也是最短的(u, u_1)路，故长度相同。现因 P 和 Q 的长都是偶数，所以 P 的(u_1, v)节P_1和 Q 的(u_1, w)节Q_1必有相同的奇偶性。由此推出(v, w)路$P_1^{-1}Q_1$长为偶数。若 v 和 w 相连，则$P_1^{-1}Q_1wv$就是一个奇圈，与假设矛盾。故 X 中任意两个顶点均不相邻；类似地，Y 中任意两个顶点也不相邻。■

§1.7 最短路径问题

°问题：在赋权无向图中，两点之间边上的权表示这两点的直接相连的路径的长度。路径 P 上各边权之和表示该路径的长度。求赋权图 G 中从某一给定点u_0到其余各点的最短路径。记为$d(u_0, v)$。(假设各边上的权为正数)。

°算法的基本思想：

假设 S 是 V 的真子集且$u_0 \in S$，并记$\bar{S} = V - S$。若$P = u_0 \cdots xy$是从

u_0到$\bar{S}$的最短路，则显然$x \in S$且 P 的(u_0, x)节必然是最短(u_0, x)路，所以

$$d(u_0, y) = d(u_0, x) + w(xy)$$

并且从u_0到$\bar{S}$的距离由公式

$$d(u_0, \bar{S}) = \min_{u \in S, v \in \bar{S}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \qquad (1)$$

给出。这个公式是 Dijkstra 算法的基础。

°算法的基本步骤：

构造集合$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_k$，其中$S_i$中的每个顶点$u_j$均已算出$u_0$到$u_j$的最短路径和距离，且该最短路径只经过$S_i$中的顶点，然后利用公式(1)求$u_0$经过$S_i$中的顶点到$\bar{S}_i = V - S_i$中各点的距离，再求出其中距离$u_0$最小的顶点$u_{i+1}$。令$S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$，再重复上述过程，直到$S_k = V$。

°Dijkstra 算法：

1. 置$l(u_0) = 0$, 对 $v \neq u_0, l(v) = \infty, S_0 = \{u_0\}$且 $i = 0$;
2. 对每个$v \in \bar{S}_i$, 用 $\min\{ l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$代替 $l(v)$,

   计算 $\min_{v \in \bar{S}_i}\{ l(v) \}$，并把达到这个最小值的顶点记为$u_{i+1}$;

   置 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$;
3. 若$i = n - 1$, 则停止。若 $i < n - 1$, 则用 $i + 1$ 代替 i, 并转入第 2 步。

°Dijkstra 算法是有效算法，只需要$O(n^2)$时间。

例子：（见图 1.11）