第十章　　　　　　　平面图

§10.1　　　　　　平图和平面图

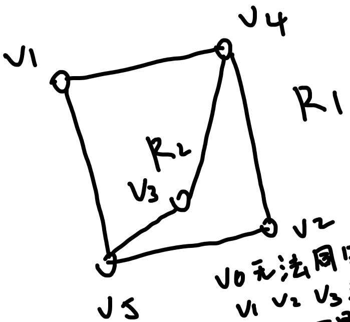
°平面图：如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点相交，则称这个图为可嵌入平面的，或称为平面图。平面图 G 的这样一种画法称为 G 的一个平面嵌入。有时把平面图的平面嵌入称为平图。

°例子：(见图 10.1)

°Jordan 曲线：是指一条连续的自身不相交的，起点和终点相重合的曲线。

设 J 是平面上的一条 Jordan 曲线，平面的剩下部分被分成两个不相交的开集，称为 J 的内部和外部，分别记为 int J 和 ext J，并且用 Int J 和 Ext J 表示它们的闭包。显然，Int J ∩ Ext J = J。

Jordan 曲线定理：连接 int J 的点和 ext J 的点的任何连线，必在某点和 J 相交。　(见图 10.2)



v0无法同时和 v1 v2 v3都连边 故$K_{3,3}$不是平面图

定理 10.1：K_5和$K_{3,3}$是非平面图。

证：利用 Jordan 曲线定理可证。　■

°球极平面射影：(见图 10.3)

定理 10.2：图 G 可嵌入平面当且仅当它可嵌入球面。

证：假设 G 有一个球面嵌入$\tilde{G}$。在球面上选择一个不在$\tilde{G}$中的点 z。则在从 z 出发的球极平面射影下，$\tilde{G}$的象就是 G 的一个平面嵌入。其逆

能够画在平面上的图，必然也能画在球面上，使得不同的边互不交叠，反之亦然。

投影就是这个点和每一个点每一个边连线延伸到平面上的投影，相当于相对于z点把球面展开了

可类似证明。　　■

定理 10.3：若图 G 是平面图，则 G 的任何子图都是平面图。

定理 10.4：若图 G 是非平面图，则 G 的任何母图也都是非平面图。

§ 10.2　　对偶图

°面：一个平图 G 把平面划分成若干连通的区域：这些区域的闭包称为 G 的面。

°例子：(见图 10.4)

用$F(G)$和 $\phi(G)$表示平图 G 中面的集合和面的个数。

*每个平图恰有一个无界的面，称为外部面。例如：图 10.4 中的f_1。

定理 10.5：设 v 是平面图 G 的顶点，则存在 G 的一个平面嵌入，使得 v 在这个嵌入的外部面上。

证：考察 G 的一个球面嵌入$\tilde{G}$；由定理 10.2 知，这样的嵌入是存在的。设 z 是包含 v 的某个面内部的点，并设$\pi(\tilde{G})$是$\tilde{G}$在从 z 出发的球极平面射影下的象。显然$\pi(\tilde{G})$就是所要的 G 的平面嵌入。　■

相对z把球面展开，这样原来z所在的球面就是平面上的无穷大面

°用$b(f)$表示平图 G 中面 f 的周界。

°面 f 的度：$d_G(f)$是指和 f 关联的边的条数(即$b(f)$中边的条数，其中割边被计算两次)。

每条不是割边都会被两个不同的面各算一次

°例子：(见图 10.4) $d(f_2) = 4$, $d(f_5) = 6$, $d(f_1) = 8$。

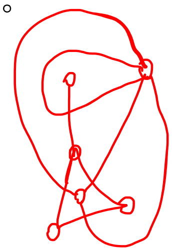
°对偶图：给出平图 G，可以定义另一个图G^*如下：对于 G 的每个面 f，都有G^*的顶点f^*与之对应，对于 G 的每条边 e，都有G^*的边e^*与之

对应；G^*中顶点f^*和g^*由边e^*连接，当且仅当 G中与顶点f^*和g^*对应的面 f 和 g 被边 e 分隔。图G^*称为 G 的对偶图。

°例子：(见图 10.5)

原图每一个面f都是对偶图一个顶点 原图每一条边都是对偶图一条边

*注意：若 e 是平图 G 的环，则e^*是G^*的割边，反之亦然。



*当 G 是连通图，则$G^{**} \cong G$。

*同构的图的不同平面嵌入的对偶图可能不同构。

°例子：(见图 10.6)

平面嵌入是图在平面上的一种表示。若图G同构与平面图P，则称P为图G的一个平面嵌入

*G^*是平面图，而且是平面嵌入。

*G^*是连通图。

*下列关系式可直接从G^*的定义得到：

$$\upsilon(G^*) = \phi(G)$$ 对偶图的顶点数=平图的面数

$$\varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)$$ 对偶图的边数=平图的边数

$$d_{G^*}(f^*) = d_G(f) \quad 对所有\ f \in F(G)成立 \qquad (10.1)$$

对偶图顶点f*的度数=原图面对应面f的度数

定理 10.6：若 G 是平图，则

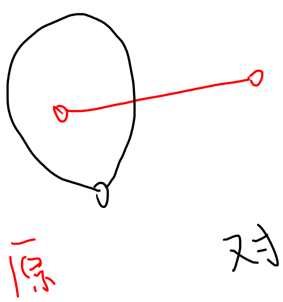
$$\sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon$$

证：设G^*是 G 的对偶图，则

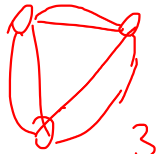
$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) \qquad (根据 (10.1)式)$$

$$= 2\varepsilon(G^*) \qquad (根据定理 1.1)$$

$$= 2\varepsilon(G) \qquad (根据(10.1)式) \qquad \blacksquare$$



§ 10.3 Euler 公式



3 - 6 + 5 = 2

定理 10.7：若 G 是连通平图，则

$$\upsilon-\varepsilon+\phi=2。$$

只有一个空间，无环

证：对 G 的面数ϕ用归纳法。当$\phi=1$时，G 的每条边都是割边，又由于 G 是连通的，所以 G 是树。由定理 2.2 知$\varepsilon=\upsilon-1$，本定理显然成立。假设对于面数小于 n 的所有连通平图，本定理是正确的，且设 G 是有$n\geq 2$个面的连通平图。任选 G 的一条不是割边的边 e，则$G-e$是连通平图且有$n-1$个面，因为 G 被 e 分隔的两个面结合成$G-e$的一个面。根据归纳假设，有

$$\upsilon(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2$$

再利用关系式：

$$\upsilon(G-e)=\upsilon(G),\ \varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1,\ \phi(G-e)=\phi(G)-1,$$

即得 $\upsilon(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2$。

根据归纳法原理，定理得证。 ■

推论 10.7.1：给定的连通平面图的所有平面嵌入有相同的面数。

证：设 G 和 H 是给定的连通平面图的两个平面嵌入。由于$G\cong H$。故$\upsilon(G)=\upsilon(H)$及$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$，应用定理 10.7，就有

$$\phi(G)=\varepsilon(G)-\upsilon(G)+2=\varepsilon(H)-\upsilon(H)+2=\phi(H)。 \quad ■$$

推论 10.7.2：若 G 是$\upsilon\geq 3$的简单平面图，则$\varepsilon\leq 3\upsilon-6$。

证：显然只要对连通的图证明这一点就够了。设 G 是$\upsilon\geq 3$的简单连通平面图，则对所有$f\in F$，$d(f)\geq 3$成立，并且

因为是简单图，如果有环至少也要三条边

记住这个方法！后面证明k33也可以用这个方法

$$\sum_{f \in F} d(f) \geq 3\phi$$

根据定理 10.6，有 $2\varepsilon \geq 3\phi$

于是，从定理 10.7 得

$$\upsilon - \varepsilon + 2\varepsilon/3 \geq 2$$

即 $\varepsilon \leq 3\upsilon - 6$。 ■

推论 10.7.3：若 G 是简单平面图，则$\delta \leq 5$。

证：对于$\upsilon = 1, 2$，结论是显然的。若$\upsilon \geq 3$，则由定理 1.1 和推论 10.7.2 有

$$\delta\upsilon \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon \leq 6\upsilon - 12$$

$\delta \leq 6 - \frac{12}{v} < 6$

由此推出$\delta \leq 5$。 ■

推论 10.7.4：K_5是非平面图。

证：若K_5是平面图，由推论 10.7.2 有

$C_5^2 = 10 > 3v - 6 = 9$

$$10 = \varepsilon(K_5) \leq 3\upsilon(K_5) - 6 = 9$$

于是，K_5必须是非平面图。 ■

推论 10.7.5：$K_{3,3}$是非平面图。

证：假设$K_{3,3}$是平面图，并设 G 是$K_{3,3}$的一个平面嵌入。由于$K_{3,3}$不具有长小于 4 的圈，G 的每个面的度必然至少为 4。所以，根据定理 10.6 有

$$4\phi \leq \sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon = 18$$

即 $\phi \leq 4$。

于是从定理 10.7 得到

$$2 = \upsilon - \varepsilon + \phi \leq 6 - 9 + 4 = 1,$$

得到矛盾。故$K_{3,3}$是非平面图。 ■

§10.4 平面图的判定

°片：设$G_1 = (V_1, E_1)$是图 G $= (V, E)$的子图。图 G 的相关于G_1的一个片是：或者

(a) 一条边$(u, v) \in E$，其中$(u, v) \notin E_1$但 $u, v \in V_1$；或者

(b) $G - G_1$的一个连通分支加上该连通分支与G_1相关联的边。

°例子：(见图 10.7)

°接触点：

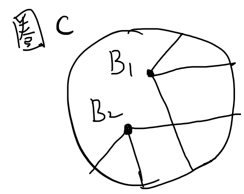
°桥：

°一个图是平面图当且仅当它的每一个块是平面图。

*因此，以后我们讨论一个图是否平面图时，我们讨论的都是块。

°设 C 是图 G 的一个圈，$\tilde{C}$是它的平面嵌入，内部面，外部面：

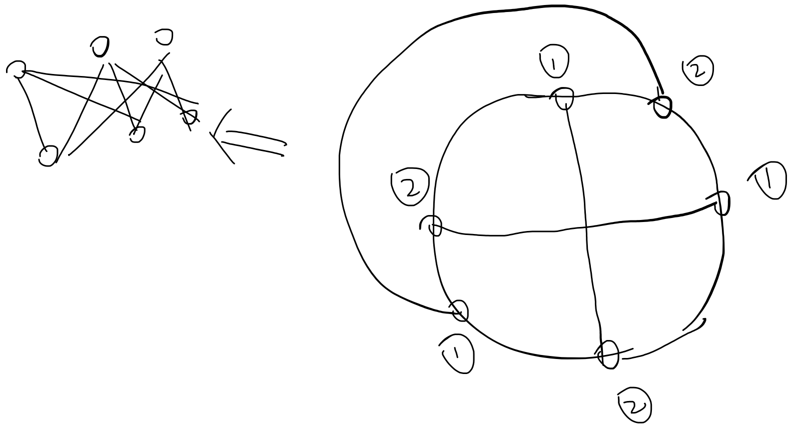
°C 上的两座桥B_1和B_2被称为不相容的($B_1 \neq B_2$)是说：当它们被放入 C 的同一个面中时，它们至少有一条边交错。(见图 10.8)



°两个图被称为是同态的是说：通过在这两个图中加入和压缩 2 度点，可以使这两个图同构。

°剖分图：

°一个图是非平面图当且仅当它的同态图也是非平面图。



°例子：(见图 10.9)

作业 13：

1. 证明：若 G 是围长(最短圈的长)$k \geq 3$的连通平面图，则

$$\varepsilon \leq k(\upsilon - 2)/(k - 2)。$$

2. 每个面的度都是 3 的平图称为平面三角剖分图(或极大平面图)。

   证明：每个简单平图($\upsilon \geq 3$)都是某个简单平面三角剖分图的生成子图。

3. 设 G 是$\upsilon \geq 4$的简单平面三角剖分图。

   证明：G^*是简单 2 边连通 3 正则平面图。