

中山大学本科生考试答题纸

学院(系) _____ 专业 _____ 级 _____

考试科目 _____ 成绩评定 _____

考生姓名 _____ 教师签名 _____

学 号 _____ 年 月 日

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第七条：“考试作弊者不授予学士学位。”

作业9:

1. 证明推论6.4的下述推广: 若 G 是 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图, 并且 V 是偶数, 则 G 有完美对集.

证: 设 G 如题所设, $S \subset V$, 用 G_1, G_2, \dots, G_n 表示 $G-S$ 的奇分支, 并没 m_i 是一个端点 v_i 在 G_i 中, 另一个端点 w_i 在 S 中的那些边的条数. 由于 G 是 k 正则的, 所以

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = k |V(G_i)|, \text{ 对 } 1 \leq i \leq n \text{ 成立 (1)}$$

$$\text{并且 } \sum_{v \in S} d(v) = k |S|. \quad (2)$$

由于 G 是 $(k-1)$ 边连通的, $(k-1) \leq m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - \sum_{v \in S} d(v)$.
当 k 为奇数时, m_i 为奇数, 但 $(k-1)$ 为偶数, 故 $m_i \geq k$.
当 k 为偶数时, m_i 为偶数, 但 $(k-1)$ 为奇数, 故 $m_i \geq k$.
从而 $k o(G-S) = k n \leq \sum_{i=1}^n m_i \leq \sum_{v \in S} d(v) = k |S|$.

故 $o(G-S) \leq |S|$. 由Tutte定理, G 有完美对集.

2. 证明一棵树 T 有完美对集当且仅当 $o(G-v)=1$ 对所有 $v \in V$ 成立.

证明: 先证必要性, 由Tutte定理, 令 $S=\{v\}$, 如果 T 有完美对集, 则 $o(G-S) \leq |S|=1$. 又因为 T 的顶点数为偶数, $o(G-v)=1$.

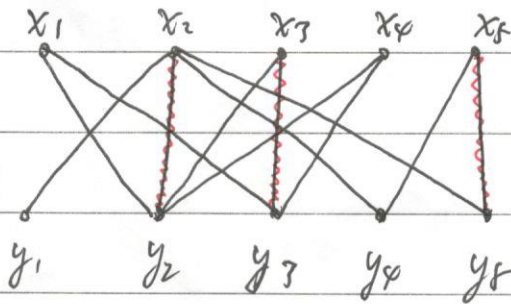
再证充分性。对 G 的顶点数 $V=2k$ 归纳证明：若 $\phi(G-v)=1$ 对所有 $v \in V$ 成立，则 G 有完美对集。

$k=1$ 时，显然 $\phi(G-v)=1$ 对所有 $v \in V$ 成立，并且显然 G 有完美对集。

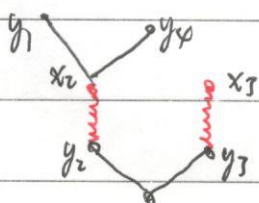
设 $k < r$ 时，若 $\phi(G-v)=1$ 对所有 $v \in V$ 成立，则 G 有完美对集。现在设 $k=r (\geq 2)$ 。由于 G 是树，故 G 有一片叶子 u ， G 中与 u 相邻的那个顶点为 v 。由条件假设知：

$G-v$ 有 n 个分支 G_1, G_2, \dots, G_n ，设 $G_1 = u$ ，则除 G_1 外， G_2, G_3, \dots, G_n 均为偶分支，并且 $\phi(G_i-w)=1$ 对所有 $w \in V(G_i)$ 成立。这因为 G_i-w 的所有分支除与 v 相邻的那个分支外，均为 $G-w$ 的分支，而 G_i-w 中与 v 相邻的那个分支是偶分支当且仅当在 $G-w$ 中那个分支是偶分支（它由那个分支和 G_2, G_3, \dots, G_n （除 G_1 外）以及 u, v 组成）。由 $\phi(G-w)=1$ 及 $\phi(G_i-w)=1$ 对所有 $w \in V(G_i)$ 成立。由于 $V(G_i) < 2r$ ，由归纳假设知 G_i 有完美对集 $M_i (i=2, 3, \dots, n)$ 。则 $M = M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_n \cup \{uv\}$ 是 G 的完美对集。

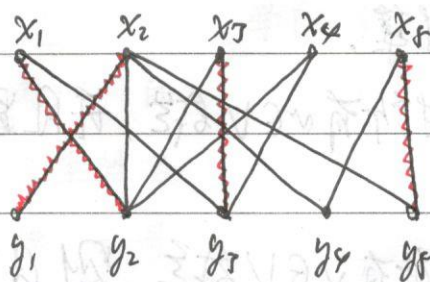
3. 利用匈牙利算法，求出下图的一个最大对集，该对集是否完美对集？



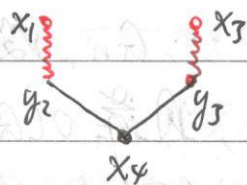
解：从任一匹配（红色的边）开始，构造 M 交错树。



得到 M 交错路 $P = x_1 y_2 x_2 y_1$, 令 $M' = M \Delta E(P)$, 得到新的完美对集



再以 x_4 为根构造 M 交错树.



由此可知, M' 是 G 的最大对集, 并且它不是完美对集.