一、 (8分) 判断公式$(p \to q \vee r) \wedge (r \leftrightarrow \neg p)$是永真式、矛盾式还是偶然式（非永真的可满足式）。

解答：构造公式$A = (p \to q \vee r) \wedge (r \leftrightarrow \neg p)$的真值表，可看到它是非永真的可满足式。

p	q	r	$q \vee r$	$p \to q \vee r$	$\neg p$	$r \leftrightarrow \neg p$	$(p \to q \vee r) \wedge (r \leftrightarrow \neg p)$
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

二、 (10分) 使用命题逻辑等值演算证明逻辑等值式$(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r) \equiv r \to (p \leftrightarrow q)$。

证明 我们有

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r) \\
\equiv\ & (p \wedge r \to q \wedge r) \wedge (q \wedge r \to p \wedge r) && \text{// 双蕴涵等值式} \\
\equiv\ & (\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee (p \wedge r)) && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg r \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee (p \wedge r)) && \text{// 德摩尔根律} \\
\equiv\ & ((\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee r)) \wedge ((\neg q \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee r)) && \text{// 分配律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p) && \text{// 排中律、同一律} \\
\equiv\ & \neg r \vee (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) && \text{// 交换律、分配律} \\
\equiv\ & \neg r \vee (p \to q) \wedge (q \to p) && \text{// 蕴涵等值式} \\
\equiv\ & \neg r \vee (p \leftrightarrow q) && \text{// 双蕴涵等值式} \\
\equiv\ & r \to (p \leftrightarrow q) && \text{// 蕴涵等值式}
\end{aligned}
$$

□

三、 (10分) 从甲、乙、丙三人中选派若干人参加程序设计竞赛，已知：(1) 若甲去，则丙也必须去；而且(2) 甲和乙要么都去，要么都不去，请利用命题逻辑公式主范式的知识给出所有可能的选派方案。

解答：设原子命题p, q, r分别甲乙丙去，则上述条件可符号化为：

(1) 若甲去，则丙也必须去：$p \to r \equiv \neg p \vee r$；

(2) 甲和乙或者都去，或者都不去：$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

所有选派方案可由公式$(\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$的成真赋值得到。

由$\neg p \vee r$可以扩展得到极大项$\neg p \vee q \vee r$和$\neg p \vee \neg q \vee r$，即$M_4$和$M_6$，由$p \vee \neg q$可扩展得到极大项$p \vee \neg q \vee r$和$p \vee \neg q \vee \neg r$，即$M_2$和$M_3$，由$\neg p \vee q$可扩展得到极大项$\neg p \vee q \vee r$和$\neg p \vee q \vee \neg r$，即$M_4$和$M_5$，因此上述条件对应公式的主合取范式是$M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$，从而主析取范式是$m_0 \vee m_1 \vee m_7$，

根据题意，至少应该选派一人去，因此所有可能的选派方案有m_1，即丙一个人去，以及m_7，即甲乙丙三人都去两种方案。

四、 (12分) 在命题逻辑或一阶逻辑的自然推理系统中构造论证验证下面推理的有效性。

(1) 如果我认真学习，那么我的离散数学课程考试不会不及格。如果我不是曾经沉迷于网络游戏，那么我会认真学习。我的离散数学课程考试不及格。因此，我曾经沉迷于网络游戏。

(2) 所有有理数都是代数数，所有代数数都是有理数或无理数。所有无理数都不是有理数。存在不是有理数的代数数。因此，有的代数数是无理数。

解答：对于(1)，在命题逻辑自然推理系统构造论证验证其有效性。令p表示“我认真学习”，q表示“我的离散数学课程考试不及格”，r表示“我曾经沉迷于网络游戏”。该推理的前提可符号化为$p \to \neg q$，$\neg r \to p$和q，结论可符号化为r，下面的论证可验证推理$p \to \neg q, \neg r \to p, q \implies r$，也即(1)给出的推理的有效性：

(1)	q	// 前提
(2)	$p \to \neg q$	// 前提
(3)	$\neg p$	// (1),(2)假言易位
(4)	$\neg r \to p$	// 前提
(5)	r	// (3),(4)假言易位

对于(2)，我们在一阶逻辑自然推理系统构造论证验证其有效性。设论域为全总域（或者实数），谓词$F(x)$表示“x是有理数”，$G(x)$表示“x是代数数”，$H(x)$表示“x是无理数”。该推理的前提可符号化为：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$\forall x(G(x) \to F(x) \vee H(x))$，$\forall x(H(x) \to \neg F(x))$和$\exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$，结论可符号化为$\exists x(G(x) \wedge H(x)$，下面的论证可验证推理$\forall x(F(x) \to G(x)), \forall x(G(x) \to F(x) \vee$

$H(x)), \forall x(H(x) \to \neg F(x)), \exists x(G(x) \wedge \neg F(x) \implies \exists x(G(x) \wedge H(x)$，也即(2)给出的推理的有效性：

(1)	$\exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$	// 前提
(2)	$G(a) \wedge \neg F(a)$	// (1)存在例化
(3)	$G(a)$	// (2)化简规则
(4)	$\forall x(G(x) \to F(x) \vee H(x))$	// 前提
(5)	$G(a) \to F(a) \vee H(a)$	// (4)全称例化
(6)	$F(a) \vee H(a)$	// (3),(5)假言推理
(7)	$\neg F(a)$	// (2)化简规则
(8)	$H(a)$	// (6),(7)析取三段论
(9)	$G(a) \wedge H(a)$	// (3),(8)合取规则
(10)	$\exists x(G(x) \wedge H(x))$	// (9)存在泛化

五、 (8分)确定合适的论域，提取合适的谓词，然后使用一阶逻辑乘公式符号化下面的句子：

(1) 不是所有实数都能表示成分数。

(2) 不是所有人都一样高。

(3) 所有老师和有些同学能准时到达课室。

(4) 任何金属都可溶解在某种溶液中。

解答：

(1) 可以令论域是实数集合，提取谓词$F(x)$表示“x能表示成分数”，句子符号化为$\neg\forall x F(x)$。也可以令论域是任意比实数集更大的集合（例如全总域），再提取谓词$R(x)$表示“x是实数”，句子符号化为$\neg\forall x(R(x) \to F(x))$。

(2) 可以令论域是所有人的集合，提取谓词$G(x,y)$表示“x和y一样高”，句子符号化为$\neg\forall x\forall y G(x,y)$。也可令论域是任意比所有人构成的集合更大的集合（例如全总域），再提取谓词$R(x)$表示“x是人”，句子符号化为$\neg\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \to G(x,y))$。

(3) 令论域是全总域，$T(x)$表示“x是老师”，$S(x)$表示“x是学生”，$D(x)$表示“x能准时到达课室”，句子符号化为$\forall x(T(x) \to D(x)) \wedge \exists x(S(x) \wedge D(x))$。

(4) 令论域是全总域，$M(x)$表示“x是金属”，$R(x)$表示“x是溶液”，$G(x,y)$表示“x可溶解在y中”，句子符号化为$\forall x(M(x) \to \exists y(R(y) \wedge G(x,y)))$。

六、 (6分) 判断公式$\forall x(P(x) \to Q(x))$是否与$\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$逻辑等值，并说明理由。

解答：公式$\forall x(P(x) \to Q(x))$与$\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$不逻辑等值。设论域$D = \{a,b\}$，$P(a)$为假，$P(b)$为真，$Q(a)$为假，$Q(b)$为真，则公式$\forall x(P(x) \to Q(x))$的真值为真，但$\exists x P(x)$的真值为真，而$\forall x Q(x)$的真值为假，因此$\exists x P(x) \to \forall x Q(x)$的真值为假，两个公式的真值不相同。

七、 (6分) 给定论域$D = a, b$，使用类似等值演算的方式展开$\exists x(F(x) \to \forall y G(x,y))$中的量词。

解答：使用下面的形式进行展开：

$$
\begin{aligned}
& \exists x(F(x) \to \forall y G(x,y)) \\
\equiv\ & F(a) \to \forall y G(a,y)\ \vee\ F(b) \to \forall y G(b,y) \\
\equiv\ & (F(a) \to (G(a,a) \wedge G(a,b)))\ \vee\ (F(b) \to G(b,a) \wedge G(b,b))
\end{aligned}
$$

八、(10分) 求与公式$\neg\forall x(F(x)\to\exists yG(x,y))\to\forall xH(x,y)$逻辑等值的一个前束范式。

解答：使用下面的等值演算求与该公式等值的前束范式：

$$
\begin{aligned}
& \neg\forall x(F(x)\to\exists yG(x,y))\to\forall xH(x,y) & \\
\equiv\ & \neg\forall x(F(x)\to\exists uG(x,u))\to\forall xH(x,y) & //\ \text{约束变量改名}\\
\equiv\ & \neg\forall x(F(x)\to\exists uG(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{约束变量改名}\\
\equiv\ & \exists x\neg(F(x)\to\exists uG(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{量词否定等值式}\\
\equiv\ & \exists x\neg(\neg F(x)\vee\exists uG(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{蕴涵等值式}\\
\equiv\ & \exists x(F(x)\wedge\neg\exists uG(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{德摩尔根律、双重否定律}\\
\equiv\ & \exists x(F(x)\wedge\forall u\neg G(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{量词否定等值式}\\
\equiv\ & \exists x\forall u(F(x)\wedge\neg G(x,u))\to\forall vH(v,y) & //\ \text{量词辖域扩张}\\
\equiv\ & \forall x(\forall u(F(x)\wedge\neg G(x,u))\to\forall vH(v,y)) & //\ \text{量词辖域扩张}\\
\equiv\ & \forall x\exists u(F(x)\wedge\neg G(x,u)\to\forall vH(v,y)) & //\ \text{量词辖域扩张}\\
\equiv\ & \forall x\exists u\forall v(F(x)\wedge\neg G(x,u)\to H(v,y)) & //\ \text{量词辖域扩张}
\end{aligned}
$$

因此与原公式逻辑等值的一个前束范式是$\forall x\exists u\forall v(F(x)\wedge\neg G(x,u)\to H(v,y))$。

九、(12分) 分别使用第一数学归纳法和第二数学归纳法证明：任意大于17分的邮资都可使用若干4分和7分的邮票支付。

证明 令命题$P(n)$是“n分邮资可由若干4分和7分的邮票支付”。要证明$\forall(n>17)P(n)$为真。

(1) 首先使用第一数学归纳法证明：

(i) 归纳基：$P(18)$显然成立，因为$18=4+2\cdot 7$；

(ii) 归纳步：设$k\geq 18$，归纳假设是$P(k)$成立，要证明$P(k+1)$成立。由于$P(k)$成立，也即k分邮资可由若干4分和7 分的邮票支付，分两种情况：(a) 若支付k分邮资的邮票中至少包含一张7分邮票，这将这张7分邮票替换为两张8分邮票就可以支付$k+1$分邮资，即这时由$P(k)$成立可得到$P(k+1)$成立；(b) 若支付k分邮资的邮票中没有任何7分邮票，那么由于$k\geq 18$，因此其中至少有5张4分邮票，从而将这5张4分邮票替换为3张7分邮票，则可支付$k+1$分邮资，因此这时由$P(k)$成立也可得到$P(k+1)$成立。

综上，根据第一数学归纳法有$\forall(n>17)P(n)$为真。

(2) 然后使用第二数学归纳法证明：

(i) 归纳基：$P(18),P(19),P(20),P(21)$都成立，因为

$$18=4+2\cdot 7\qquad 19=3\cdot 4+7\qquad 20=5\cdot 4\qquad 21=3\cdot 7$$

(ii) 归纳步：设$k\geq 21$，归纳假设是$P(12),\cdots,P(k)$成立，要证明$P(k+1)$成立。由于$k\geq 21$，因此$k-3\geq 18$，因此根据归纳假设有$P(k-3)$成立，即$k-3$分邮资可由若干4分和7分邮票支付，从而对于$k+1$分邮资，只要在支付$k-3$分邮资的基础上增加一张4分邮资就可支付，因此$P(k+1)$成立。

综上，根据第二数学归纳法有$\forall(n>17)P(n)$为真。 □

十、(8分) 归纳定义正整数对集合S：(1) **归纳基**：$\langle 1,1\rangle\in S$；(2) **归纳步**：对任意正整数a,b，若$\langle a,b\rangle\in S$，则$\langle a+2,b\rangle\in S$且$\langle a,b+2\rangle\in S$。证明：对任意正整数$a,b$，若$\langle a,b\rangle\in S$，则$a$和$b$都是奇数。

证明 使用结构归纳法证明：对于任意的正整数a, b，若$(a, b) \in S$，则：

归纳基：若$(a, b) = (1, 1)$，则显然$a = 1, b = 1$都是奇数；

归纳步：根据S的归纳定义中的归纳步有两种情况：

(i) 存在正整数c和d，$(c, d) \in S$，且$a = c + 2, b = d$，这时的归纳假设是c和d都是奇数，显然也有$a = c + 2$和$b = d$也都是数；

(ii) 存在正整数c和d，$(c, d) \in S$，且$a = c, b = d + 2$，这时的归纳假设是c和d都是奇数，显然也有$a = c$和$b = d + 2$也都是奇数。

综上，根据结构归纳法，对任意的正整数a, b，若$(a, b) \in S$，则a和b都是奇数。 □

十一、(10分) 利用命题逻辑知识将下面具有三个分支语句**if**$\cdots$**then**$\cdots$**else**$\cdots$的程序片段变换成功能相同的只有一个分支语句的程序片段（假定其中的程序变量都是整数类型变量，关系运算符$\geq$的优先级高于逻辑运算$\wedge$和$\vee$）：

$$
\begin{array}{l}
\textbf{if } (a \geq 0 \ \wedge \ b \geq 0) \textbf{ then} \\
\quad\quad \textbf{if } (b \geq 0 \ \vee \ c \geq 0) \textbf{ then } \text{print } x \textbf{ else } \text{print } y \\
\textbf{else} \\
\quad\quad \textbf{if } (a \geq 0 \ \wedge \ c \geq 0) \textbf{ then } \text{print } y \textbf{ else } \text{print } x \\
\textbf{end}
\end{array}
$$

解答：可以看到，上述程序片段的功能在某个条件下执行语句 print x，和在某个条件下执行语句 print y。为简单起见，令p表示$a \geq 0$，q表示$b \geq 0$，r表示$c \geq 0$，根据分支语句的含义，执行语句 print x的条件是：

$$((p \wedge q) \ \wedge \ (q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge q) \ \wedge \ \neg(p \wedge r))$$

使用命题逻辑等值演算有：

$$
\begin{array}{lll}
 & ((p \wedge q) \ \wedge \ (q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge q) \ \wedge \ \neg(p \wedge r)) & \\
\equiv & (p \wedge q) \vee (\neg(p \wedge q) \ \wedge \ \neg(p \wedge r)) & // \text{吸收律} \\
\equiv & (p \wedge q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \ \wedge \ (\neg p \vee \neg r)) & // \text{德摩尔根律} \\
\equiv & (p \wedge q) \vee \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) & // \text{分配律} \\
\equiv & ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)) \vee (\neg q \wedge \neg r) & // \text{分配律、交换律} \\
\equiv & \neg p \vee q \vee (\neg q \wedge \neg r) & // \text{排中律、同一律、结合律} \\
\equiv & \neg p \vee ((q \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)) & // \text{分配律} \\
\equiv & \neg p \vee q \vee \neg r & // \text{排中律、同一律、结合律}
\end{array}
$$

而执行语句 print y条件是：

$$((p \wedge q) \ \wedge \ \neg(q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge q) \ \wedge \ (p \wedge r))$$

使用命题逻辑等值演算有：

$$
\begin{aligned}
& ((p \wedge q)\ \wedge\ \neg(q \vee r)) \vee (\neg(p \wedge q)\ \wedge\ (p \wedge r)) & \\
\equiv\ & (p \wedge q\ \wedge\ \neg q \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee \neg q)\ \wedge\ (p \wedge r)) & // \text{德摩尔根律、结合律} \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q)\ \wedge\ (p \wedge r) & // \text{矛盾律、同一律} \\
\equiv\ & ((\neg p \wedge p) \vee (\neg q \wedge p))\ \wedge\ (p \wedge r) & // \text{结合律、分配律} \\
\equiv\ & (\neg q \wedge p)\ \wedge\ p \wedge r & // \text{矛盾律、同一律} \\
\equiv\ & p \wedge \neg q \wedge r & // \text{幂等律、交换律}
\end{aligned}
$$

而$(p \wedge \neg q \wedge r) \equiv \neg(\neg p \vee q \vee \neg r)$，因此根据分支语句的含义，上述程序片段可变换为下面功能相同的程序片段：

$$\textbf{if}\ (a \geq 0\ \wedge\ \neg(b \geq 0) \wedge\ c \geq 0)\ \textbf{then}\ \text{print}\ y\ \textbf{else}\ \text{print}\ x$$

也即：

$$\textbf{if}\ (a \geq 0\ \wedge\ b < 0\ \wedge\ c \geq 0)\ \textbf{then}\ \text{print}\ y\ \textbf{else}\ \text{print}\ x$$

这里同样假定关系运算符$\geq$和$<$的优先级高于逻辑运算符$\wedge$和$\vee$。