数值积分与微分

复化积分

胡建芳

中山大学　数据科学与计算机学院

课程回顾

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

两点前向差分公式

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \frac{f'''(c_h)}{6}h^2,$$

三点中心差分公式

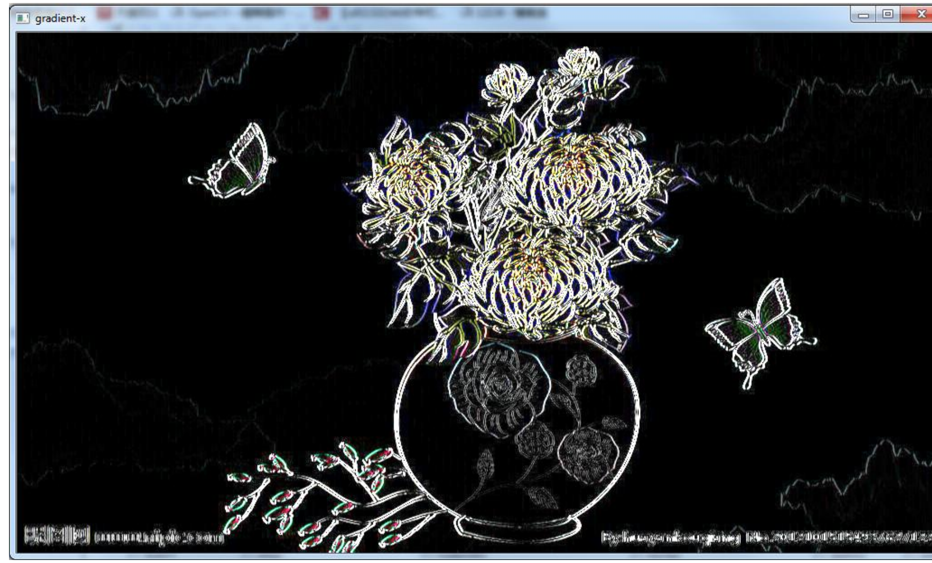
$$f''(x) = \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

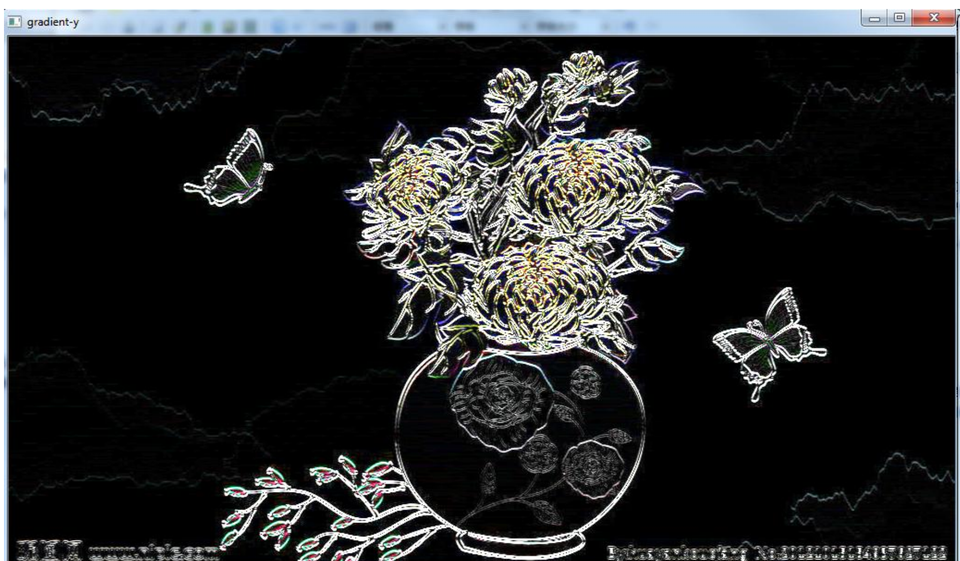
二阶导三点差分公式

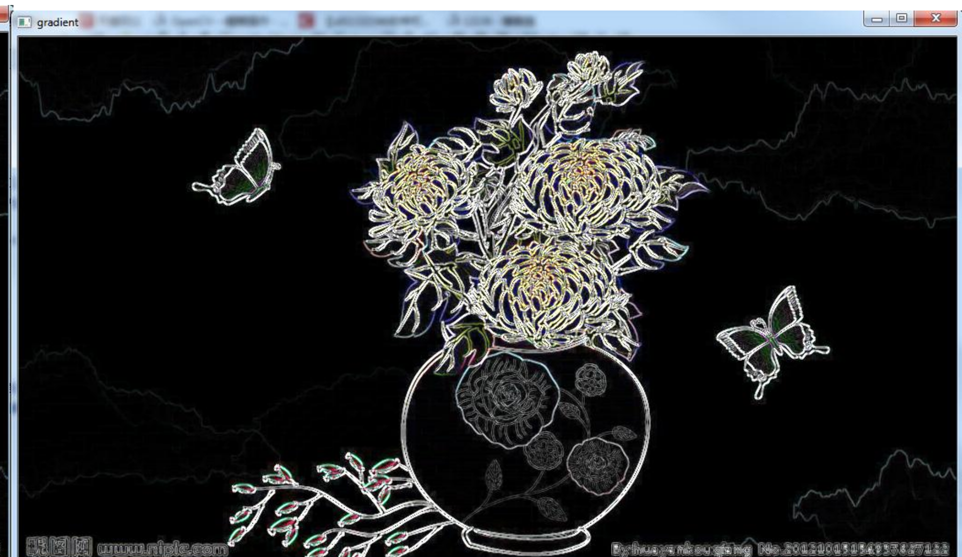
$$Q \approx \frac{2^n F(h/2)-F(h)}{2^n-1}.$$

外推公式，n+1阶

数值积分的应用：图像分析







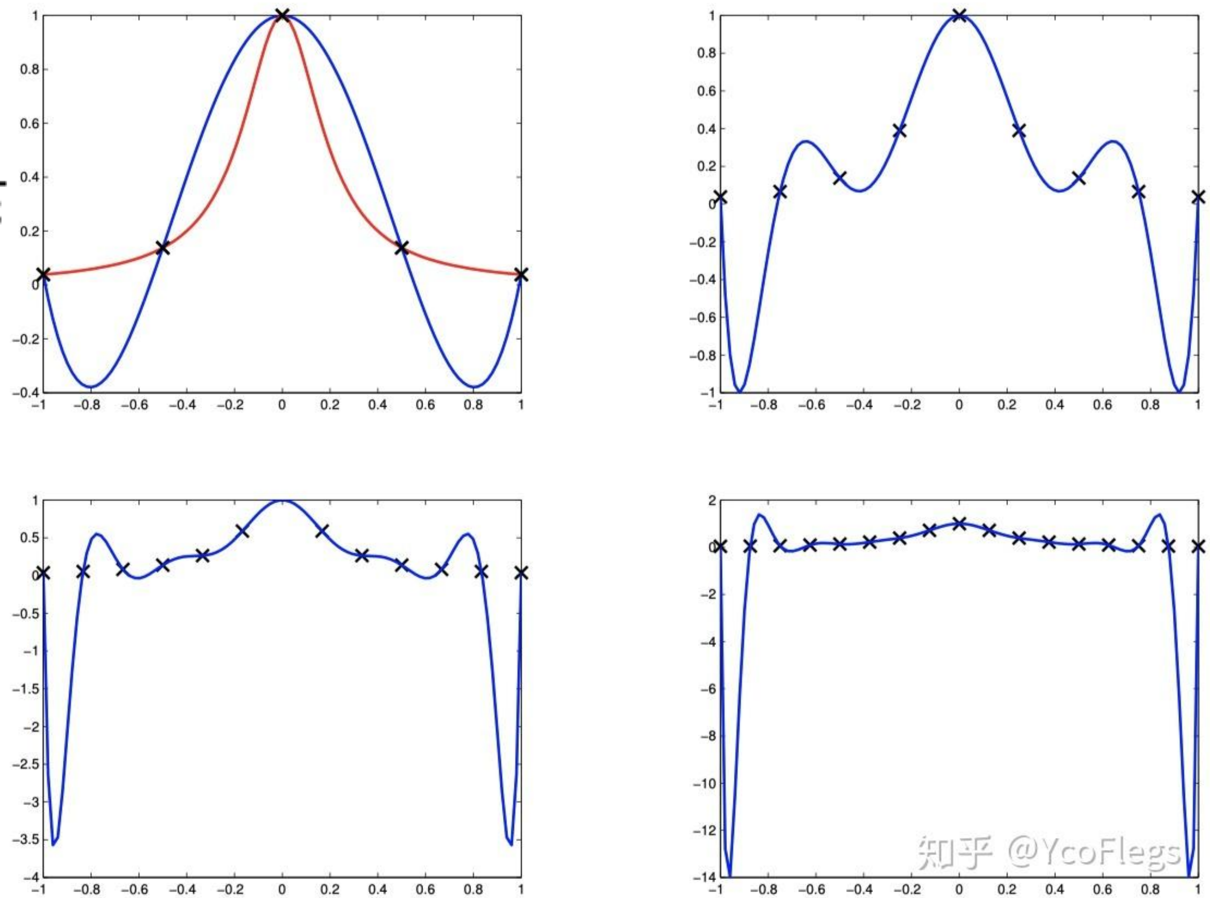
复化积分

为什么要复化：

由于Runge现象，在节点很多的时候，我们也只能使用分段的方法来处理积分。称为*复化积分*（Composite Quadrature Formulas）。

函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$

随着n增大，在末端的两个子区间内的误差会越来越大。



复化积分

复化梯形公式：

把积分区间分为多个小区间，在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上使用梯形公式，再将所有小区间上的数值积分值累加起来。 这样得到的公式称为*复化梯形公式*。

在**等距节点**条件下，取$h=\frac{b-a}{n}$,

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

则在小区间$[x_i, x_{i+1}]$上，有梯形积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$$

将所有区间的积分叠加

复化积分

- **复化梯形公式：**

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1}))-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

$$=h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(b)\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$$

这样，可以得到**等距节点**下的**复化梯形公式**

$$T_n(f)=h\left(\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}f(b)\right)$$

几何意义

复化积分

复化梯形公式：

当$f \in C^2[a,b]$，公式的误差为

$$R = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = -n\frac{h^3}{12} f''(\xi) = -h^2 \frac{(b-a)}{12} f''(\xi)$$

注. 可以看到，复化梯形公式是**收敛**的。即$\lim\limits_{h \to 0} R = 0$

注. 节点不等距时，同样可以做复化积分。

复化积分

复化梯形公式：

例 1. 函数$f(x)=\frac{4}{1+x^2}$在一些节点处的函数值如表

x_i	**0**	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**
$f(x_i)$	4	3.96	3.846	3.448	2.94	2.439	2

解. 注意到数据中，节点的距离是不同的。 在每个区间上使用梯形积分公式， 并且相加。

$$\begin{aligned} I =& \frac{0.1}{2}(f(0)+f(0.1))+\frac{0.1}{2}(f(0.1)+f(0.2)) \\ &+\frac{0.2}{2}(f(0.2)+f(0.4))+\frac{0.2}{2}(f(0.4)+f(0.6)) \\ &+\frac{0.2}{2}(f(0.6)+f(0.8))+\frac{0.2}{2}(f(0.8)+f(1)) \end{aligned}$$

```
3.1386580254636933
```

复化积分

■ **复化Simpson积分：**

类似地，每2个区间使用Simpson积分，可以得到*复化Simpson积分*公式。

令$h=\frac{b-a}{n}$，其中$n=2m$为偶数，取等距节点。 在区间$[x_{2i},x_{2i+2}]$中使用Simpson积分公式

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{2h}{6}(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})) - \frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\xi_i)$$

将所有区间的积分叠加

复化积分

复化Simpson积分：

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{2h}{6}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right)$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i)$$

可以得到**等距节点**下的**复化Simpson公式**

$$S_m(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$$

复化积分

复化Simpson积分：

当$f \in C^4[a,b]$时，误差为

$$R = -\sum_{i=0}^{m} \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i) = -m\frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

$$= -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)$$

定义 1.
若一个积分公式的误差满足

$$\lim_{h \to 0} \frac{R}{h^p} = C, C \neq 0$$

则称该公式是*p阶收敛*的。

复化积分

复化Simpson积分：

例 2. 函数$f(x)=\frac{4}{1+x^2}$在一些节点处的函数值如表

x_i	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x_i)$	4	3.96	3.846	3.448	2.94	2.439	2

解. 注意到数据中，节点的距离是不同的。 在每2个区间上使用Simpson积分公式， 并且相加。

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{0.2}{6}(f(0)+4f(0.1)+f(0.2)) \\
&+\frac{0.4}{6}(f(0.2)+4f(0.4)+f(0.6)) \\
&+\frac{0.4}{6}(f(0.6)+4f(0.8)+f(1))
\end{aligned}
$$

```
3.1414384532577757
```

复化积分

复化Simpson积分：

例 3. 计算$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$

解. 区间$[0,1]$等分为8个，有节点$x_k = \frac{k}{8}$。

复化梯形公式

$$T_8(f) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{7} f(x_k) + \frac{1}{2}f(1)\right) = 3.138988494$$

复化Simpson公式

$$S_4(f) = \frac{1}{8}\frac{1}{3}\left(f(0) + 4\sum_{odd} f(x_k) + 2\sum_{even} f(x_k) + f(1)\right)$$

$$= 3.141592502$$

复化积分

- **Romberg积分：**

定理 1. (*Euler-MacLaurin定理*)
若积分公式$I^{(m)}$是$2m$阶公式$I(f)=I^{(m)}(h)+O(h^{2m})$，则公式

$$I^{(m+1)}(\frac{h}{2})=I^{m}(\frac{h}{2})+\frac{I^{(m)}(\frac{h}{2})-I^{(m)}(h)}{2^{2m}-1}$$

为$2m+2$阶公式，即有$I(f)=I^{(m+1)}(h)+O(h^{2m+2})$

注. 复化公式，经过Richardson外推操作，精度每次递增2阶

复化积分

Romberg积分：

- 用$R^{(k)}$来表示数值积分公式。$k=1,2,3,\cdots$分别表示得化梯形公式，复化Simpson公式，复化Cotes公式等。
- 下标$R_j^{(k)}$表示积分点的密度。如$R_0^{(1)}$表示在最初积分点上的复化梯形公式的计算结果，$R_1^{(0)}$表示加密一倍积分点后，复化梯形公式得到的结果，$R_2^{(0)}$表示再加密一倍积分点得到的结果。

定义 2.
不断地组合低阶公式为高阶公式的*Romberg积分公式*为

$$R_j^{(k)} = R_j^{(k-1)} + \frac{R_j^{(k-1)} - R_{j-1}^{(k-1)}}{2^{2k-2} - 1}$$

复化积分

Romberg积分：

例 4. 用Romberg积分计算$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$

解. 解:

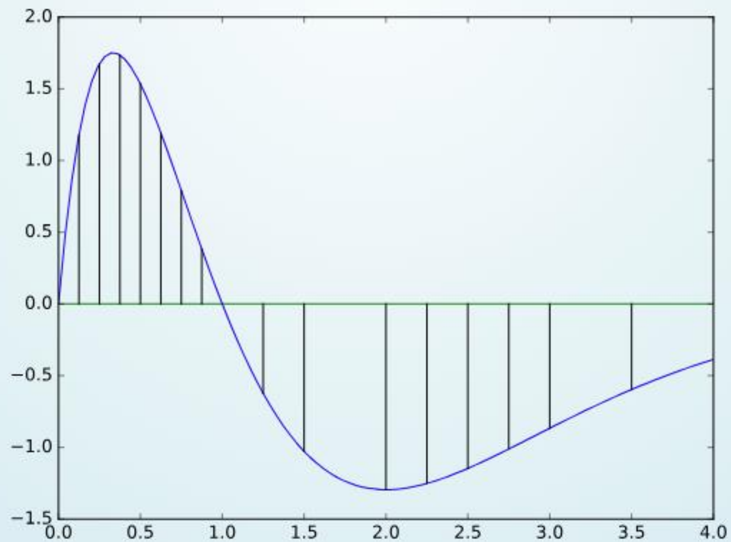
1. $T_1 = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 3$
2. $T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = 3.1$, $S_1 = \frac{4T_2 - T_1}{2^2-1} = 3.133333$
3. $T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})) = 3.131176,$
   $S_2 = \frac{4T_4 - T_2}{2^2-1} = 3.14156863, C_1 = \frac{16S_2 - S_1}{2^4-1} = 3.14211765$
4. $T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}(f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})) = 3.138988,$
   $S_4 = \frac{4T_8 - T_4}{2^2-1} = 3.1415925, C_2 = \frac{16S_4 - S_2}{2^4-1} = 3.141594,$
   $R_1 = \frac{64C_2 - C_2}{2^6-1} = 3.141586$
5. $T_{16} = 3.140942, S_8 = 3.14159265, C_4 = 3.14159266,$
   $R_2 = 3.14159264, 3.14159267$
6. $T_{32} = 3.141430, S_{16} = 3.14159265, C_8 = 3.141593,$
   $R_4 = 3.141593, 3.14159265, 3.14159265$

复化积分

■ 积分的自适应计算：

函数变化有急有缓，为了照顾变化剧烈部分的误差，我们需要加密格点。对于变化缓慢的部分，加密格点会造成计算的浪费。

问题. 可不可以自动在变化剧烈的地方加密格点计算，而变化缓慢的地方，则取稀疏的格点计算?



复化积分

自适应积分计算：

基本思路： 对于需要计算的误差阈值eps

- 计算当前网格上的Simpson积分，得到结果v1。
- 加密一倍网格后，计算得到结果v2。
- 利用事后误差估计公式，由v1和v2得到误差的估计e。
  - 如果e<eps，则返回结果。
  - 否则，将区间对分为2部分，要求每一部分的误差不超过eps/2

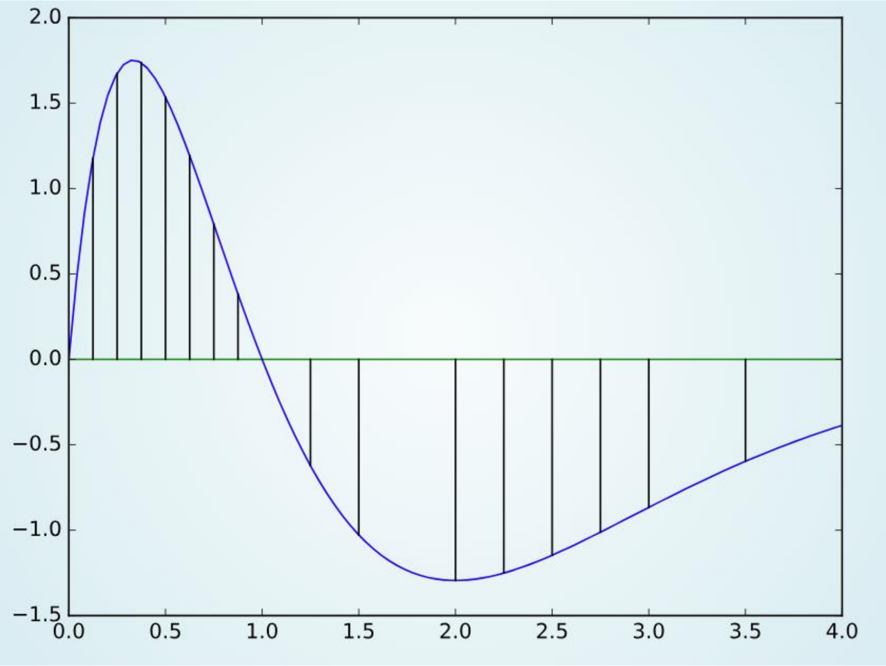
```
def recursive_asr(f,a,b,eps,simpson_quad):
    "Recursive implementation of adaptive Simpson's rule."
    c = (a+b) / 2.0
    left = simpsons_rule(f,a,c)
    right = simpsons_rule(f,c,b)
    if abs(left + right - simpson_quad) <= 15*eps:
        return left + right + (left + right - simpson_quad)/15.0
    return recursive_asr(f,a,c,eps/2.0,left) + recursive_asr(f,c,b,eps/2.0,right)
```

复化积分

- **自适应积分计算：**

例 5. 用自适应Simpson积分，求

$$\int_0^4 13x(1-x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$



数值微分

- **作业：**

实现例5

群名称：数值计算方法
群　号：1132838842

THE END