《数值计算方法》课程

数值积分与微分

数值微分

胡建芳

（研究方向：计算机视觉）

http://sdcs.sysu.edu.cn/content/5143

计算机学院

课程回顾

即 $$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=I_n$$

$$(A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x \quad k=0,1,\cdots,n)$$

由上式确定系数的公式称为插值型求积公式。

则 $A_k=(b-a)C_k^{(n)}$，于是得求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$$

节点等距的时候

称为n 阶牛顿-柯特斯 (Newton-Cotes)公式, $C_k^{(n)}$ 称为柯特斯系数。

课程回顾

常用的柯特斯系数表

n	$C_k^{(n)}$						
1	1/2	1/2					
2	1/6	4/6	1/6				
3	1/8	3/8	3/8	1/8			
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

数值微分

- **微分（导数）定义：**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(c)$$

两点前向差分公式

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

一阶近似，正比于h

数值微分

例 5.1 取 $h=0.1$, 用两点前向差分公式近似 $f(x)=1/x$ 在 $x=2$ 处的导数. 对两点前向差分公式 (5.4) 求值得到

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2.1}-\frac{1}{2}}{0.1} \approx -0.238\ 1.$$

这个近似值与导数 $f'(x)=-x^{-2}$ 在 $x=2$ 处的正确值的差就是误差

$$-0.238\ 1-(-0.250\ 0)=0.011\ 9.$$

把这个结果与由公式 $hf''(c)/2$(c 在 2 和 2.1 之间) 预测的误差进行比较. 由于 $f''(x)=2x^{-3}$, 误差一定在下面两个数之间:

$$(0.1)2^{-3} \approx 0.012\ 5 \quad 和 \quad (0.1)(2.1)^{-3} \approx 0.010\ 8.$$

数值微分

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(c_1),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(c_2).$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}f'''(c_1) - \frac{h^2}{12}f'''(c_2).$$

高于一阶近似

$\Downarrow$ 定理 5.1

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f'''(c_h)}{6}h^2,$$

三点中心差分公式

数值微分

定理 5.1 (一般中值定理) 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 中的点, 而且 $a_1,\cdots,a_n>0$, 那么在 a,b 之间存在数 c 使得

$$(a_1+\cdots+a_n)f(c)=a_1f(x_1)+\cdots+a_nf(x_n). \tag{5.6}$$

证 设这 n 个函数值中最小的一个是 $f(x_i)$, 最大值的一个是 $f(x_j)$, 那么

$$a_1f(x_i)+\cdots+a_nf(x_i)\leqslant a_1f(x_1)+\cdots+a_nf(x_n)\leqslant a_1f(x_j)+\cdots+a_nf(x_j).$$

即

$$f(x_i)\leqslant\frac{a_1f(x_1)+\cdots+a_nf(x_n)}{a_1+\cdots+a_n}\leqslant f(x_j).$$

根据中值定理, 在 x_i 和 x_j 之间存在常数 c, 使得

$$f(c)=\frac{a_1f(x_1)+\cdots+a_nf(x_n)}{a_1+\cdots+a_n}.$$

因此,(5.6) 式成立.

数值微分

例 5.2　取 $h=0.1$, 用三点中心差分公式近似 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的导数. 用三点中心差分公式求值得到

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{\frac{1}{2.1}-\frac{1}{1.9}}{0.2} \approx -0.250\,6.$$

误差是 0.000 6, 比例 5.1 中的两点前向差分公式的误差有了改进.

数值微分

还可以更高阶导数吗？比如二阶导。

数值微分

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1),$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2).$$

这里 $x-h<c_2<x<c_1<x+h$, 把它们相加消去一阶导数项得到

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=h^2f''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2).$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

数值微分

- **舍入误差：**

例 5.3 求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 处的导数的近似.

两点公式 (5.4) 给出

$$f'(x)\approx\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h},\tag{5.9}$$

三点公式 (5.7) 给出

$$f'(x)\approx\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^{x-h}}{2h}.\tag{5.10}$$

h	公式 (5.9)	误　差	公式 (5.10)	误　差
10^{-1}	1.051 709 180 756 48	−0.051 709 180 756 48	1.001 667 500 198 44	−0.001 667 500 198 44
10^{-2}	1.005 016 708 416 79	−0.005 016 708 416 79	1.000 016 666 749 99	−0.000 016 666 749 99
10^{-3}	1.000 500 166 708 38	−0.000 500 166 708 38	1.000 000 166 666 68	−0.000 000 166 666 68
10^{-4}	1.000 050 001 667 14	−0.000 050 001 667 14	1.000 000 001 666 89	−0.000 000 001 666 89
10^{-5}	1.000 005 000 006 96	−0.000 005 000 006 96	1.000 000 000 012 10	−0.000 000 000 012 10
10^{-6}	1.000 000 499 962 18	−0.000 000 499 962 18	0.999 999 999 973 24	0.000 000 000 026 76
10^{-7}	1.000 000 049 433 68	−0.000 000 049 433 68	0.999 999 999 473 64	0.000 000 000 526 36
10^{-8}	0.999 999 993 922 53	0.000 000 006 077 47	0.999 999 993 922 53	0.000 000 006 077 47
10^{-9}	1.000 000 082 740 37	−0.000 000 082 740 37	1.000 000 027 229 22	−0.000 000 027 229 22

误差减小

误差增大

数值微分

- 已有的n阶，能否升为n+1阶：

$$Q \approx F(h) + Kh^n$$

$$Q - F\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{2^n}(Q - F(h)).$$

$$Q \approx \frac{2^n F(h/2) - F(h)}{2^n - 1}.$$

外推公式，n+1阶

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

一阶近似

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f'''(c_h)}{6}h^2,$$

二阶近似

数值微分

$F_n(h)$ 写成

$$Q = F_n(h) + Kh^n + O(h^{n+1}).$$

然后把 h 减半得到

$$Q = F_n\left(\frac{h}{2}\right) + K\frac{h^n}{2^n} + O(h^{n+1}),$$

而且, 外推形式 $F_{n+1}(h)$ 将满足

$$\begin{aligned} F_{n+1}(h) &= \frac{2^n F_n(\frac{h}{2}) - F_n(h)}{2^n - 1} \\ &= \frac{2^n(Q - K\frac{h^n}{2^n} - O(h^{n+1})) - (Q - Kh^n - O(h^{n+1}))}{2^n - 1} \\ &= Q + \frac{-Kh^n + Kh^n + O(h^{n+1})}{2^n - 1} = Q + O(h^{n+1}). \end{aligned}$$

因此, $F_{n+1}(h)$ 至少是近似量 Q 的 $n+1$ 阶公式.

数值微分

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f'''(c_h)}{6}h^2, \tag{5.13}$$

例 5.4 对公式 (5.13) 用外推.

我们从对导数 $f'(x)$ 的二阶中心差分公式 $F_2(h)$ 开始. 外推公式 (5.15) 给出 $f'(x)$ 的一个新的公式:

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \frac{2^2 F_2(\frac{h}{2}) - F_2(h)}{2^2 - 1} \\ &= \left[4\frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right]/3 \qquad (5.16) \\ &= \frac{f(x-h) - 8f(x-\frac{h}{2}) + 8f(x+\frac{h}{2}) - f(x+h)}{6h}. \end{aligned}$$

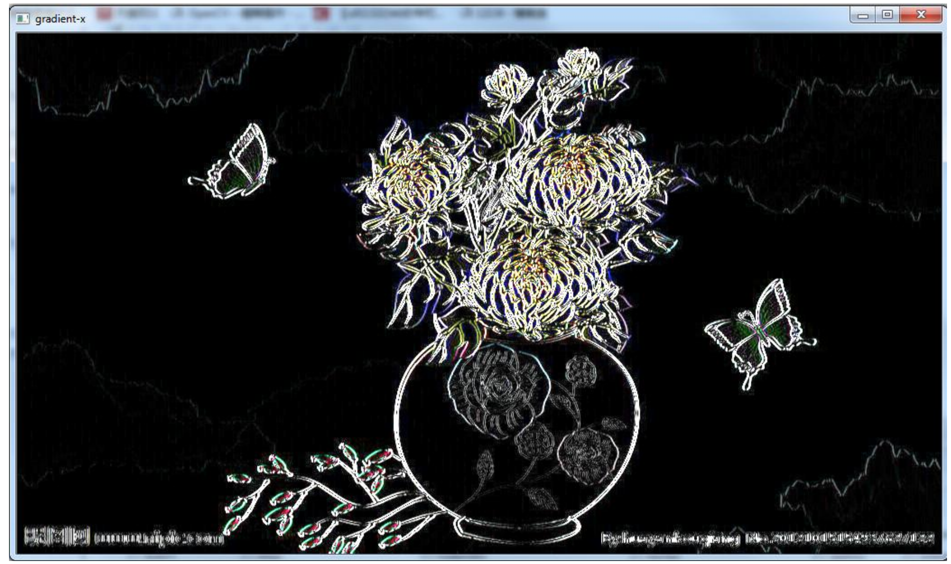
数值微分

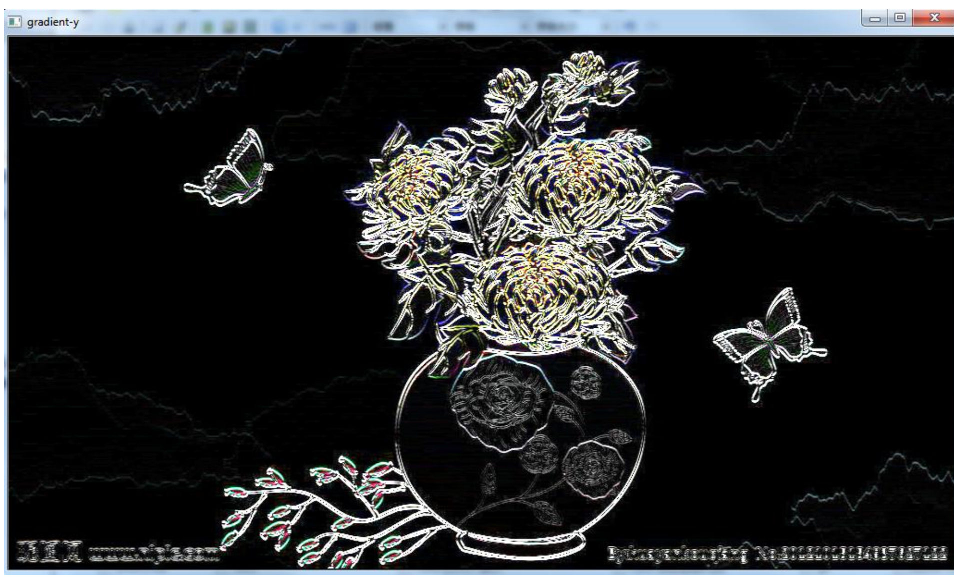
二元函数数值微分怎么定义?

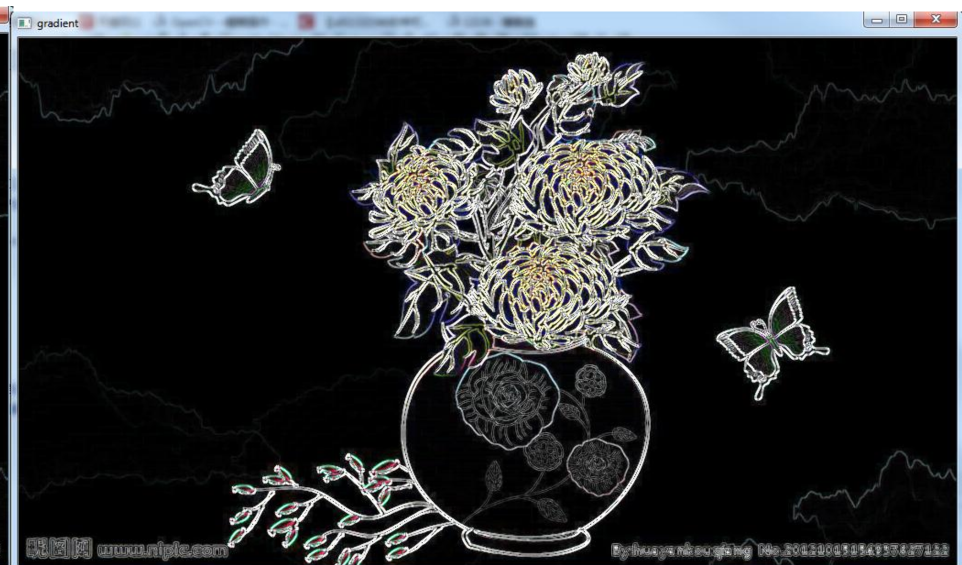
偏导数：两个方向的一元数值微分，x-偏导，y-偏导
或其它方向

应用： 图像分析，取图像方块算偏导数

数值微分的应用：图像梯度

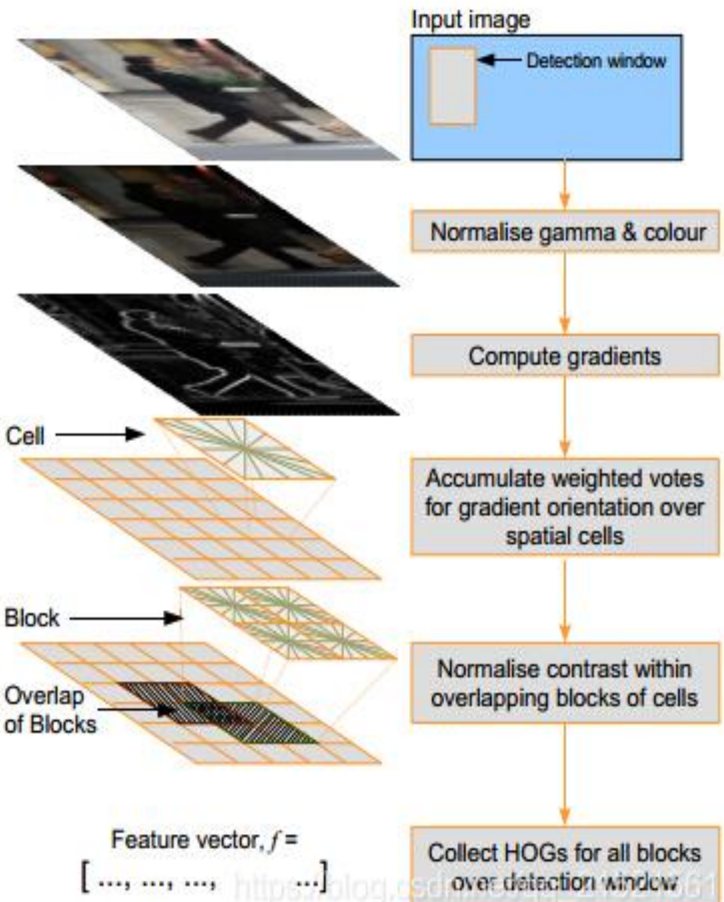


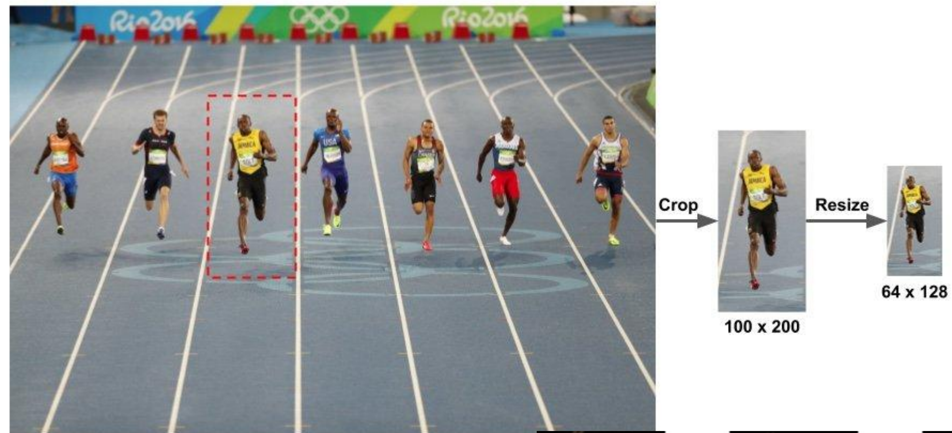




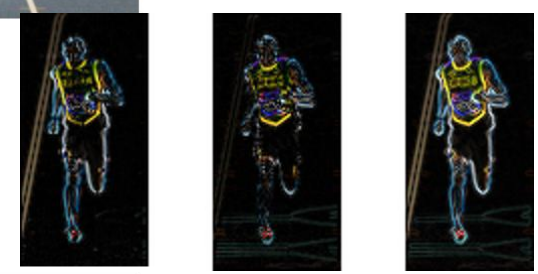
数值微分的应用：图像梯度

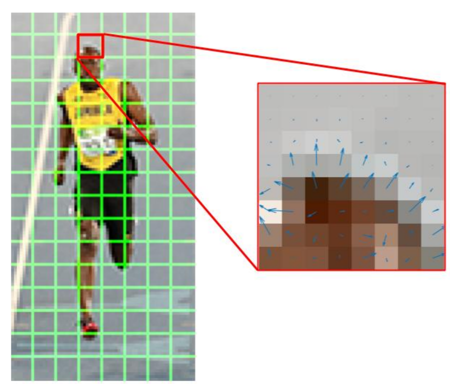
图像特征表示：方向梯度直方图HOG





Original Image : 720 x 475





2	3	4	4	3	4	2	2
5	11	17	13	7	9	3	4
11	21	23	27	22	17	4	6
23	99	165	135	85	32	26	2
91	155	133	136	144	152	57	28
98	196	76	38	26	60	170	51
165	60	60	27	77	85	43	136
71	13	34	23	108	27	48	110

Gradient Magnitude

80	36	5	10	0	64	90	73
37	9	9	179	78	27	169	166
87	136	173	39	102	163	152	176
76	13	1	168	159	22	125	143
120	70	14	150	145	144	145	143
58	86	119	98	100	101	133	113
30	65	157	75	78	165	145	124
11	170	91	4	110	17	133	110

Gradient Direction

数值微分

三元函数数值微分怎么定义?

应用： 视频分析， x, y, t 方向

HOG 3D， 感兴趣的同学去了解下

数值微分

- **作业：**

15. 建立仅用数据 $f(x-2h)$、$f(x)$ 及 $f(x+3h)$ 的二阶方法来近似 $f'(x)$，求出误差项.

18. 证明 3 阶导数的二阶公式：

$$f'''(x)=\frac{f(x-3h)-6f(x-2h)+12f(x-h)-10f(x)+3f(x+h)}{2h^3}+O(h^2).$$

19. 证明 4 阶导数的二阶公式：

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x-2h)-4f(x-h)+6f(x)-4f(x+h)+f(x+2h)}{h^4}+O(h^2).$$

THE END