8考

引理 4.5：设 G 是简单图，u 和 v 是 G 中不相邻的顶点，且适合 $d(u)+d(v)\geq \upsilon$，则 G 是 Hamilton 图当且仅当 $G+(u,v)$是 Hamilton 图。

证明：若 G 是 Hamilton 图，则显然 $G+(u,v)$也是 Hamilton 图。

反之，假设 $G+(u,v)$是 Hamilton 图，而 G 不是，那么和定理 4.4 的证明一样，可得(4.4)式，这与本引理的条件矛盾。 ■

则所有Hamilton都经过（u，v）

°闭包：图 G 的闭包是指用下述方法从 G 得到的一个图：反复连接 G 中度之和不小于υ的不相邻的顶点对，直到没有这样的顶点对为止。

v是图的顶点数量

G 的闭包用 $c(G)$表示。

引理 4.6：$c(G)$是唯一确定的。

证明：设G_1和G_2是用下述方法从 G 中得到的两个图：反复连接 G 中度之和不小于υ的顶点对，直到没有这样的顶点对存在为止。用$e_1,e_2,\cdots,e_r$和$f_1,f_2,\cdots,f_s$分别表示构作G_1和G_2过程中的那些添加给 G 的边的序列，我们将证明每条e_i是G_2的边，而每条f_j是G_1的边。

如有可能，设$e_{k+1}=(u,v)$是序列$e_1,e_2,\cdots,e_r$中第一条不属于G_2的边。置 $H=G+\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$。从$G_1$的定义推知：$d_H(u)+d_H(v)\geq \upsilon$，根据$e_{k+1}$的选择，H 是$G_2$的子图，因此$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geq \upsilon$，这就导至矛盾，因为在$G_2$中 u 和 v 是不相邻的。所以，每条$e_i$都是$G_2$的边。类似地，每条$f_j$也是$G_1$的边。因此，$G_1=G_2$，即 $c(G)$是唯一确定的。

■

因为要形成闭包只连接度数大于v的不相邻节点

定理 4.7：一个简单图是 Hamilton 图当且仅当它的闭包是 Hamilton 图。

证明：在构作闭包的过程中，每添加一条边就应用引理 4.5 一次，即可证明本定理。 ■

推论 4.7：设 G 是$\upsilon \geq 3$的简单图。若 c(G)是完全图，则 G 是 Hamilton 图。

°例子：构作闭包的例子(见图 4.7). c(G)是K_6。并非所有的图的闭包都是完全图，例如：Petersen 图。

°带权图与旅行售货员问题(Traveling Salesman Problem)。

给定图 $G=(V,E)$(G 为有向图或无向图)，设 $w{:}E \rightarrow R^{+}$(R^{+}为正实数集)，对 G 中任意边 $e=(v_i,v_j)$(G 为有向图时，$e=<v_i,v_j>$)，设 $w(e)=w_{ij}$，称实数w_{ij}为边 e 上的权，并且将w_{ij}标注在边 e 上，称 G 为带权图，记作 $G=(V,E,w)$。设$G' \subseteq G$, 称$\sum_{e \in E(G')} w(e)$为 G'的权，记作 $w(G')$。

°问题：设有υ个城市，城市之间均有道路，道路的长度大于 0，可能是∞(对应两城市之间无交通线)。一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发点。问他如何走，才能使他走的路线最短？

°图论问题：设 $G=(V,E,w)$为一个υ阶带权完全图K_υ，各边的权大于 0（可能为∞），求 G 中一条最短的 Hamilton 圈。

这就是旅行售货员问题(TSP)或称货郎担问题。

°这个问题目前尚未找到多项式时间的算法。

°例子：（见图 4.8）

$$C_1=abcda, \quad C_4=acdba$$

$$C_2 = abdca,\quad C_5 = adbca$$

$$C_3 = acbda,\quad C_6 = adcba$$

其中C_1为最短 Hamilton 圈。

°υ阶完全图，有$\frac{1}{2}(\upsilon-1)!$个不同的 Hamilton 圈。

只有第一个和最后一个点确定，其他全排列。
而且如果是无向图，正向和反向有重复，重复了2次，则要除以2

第五章　　有向图

§ 5.1　　强连通有向图

°有向路：设 G 是有向图。G 中的顶点与边的交替序列 $P = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \cdots e_k u_k$称为从$u_0$到$u_k$的有向途径，其中$e_i =< u_{i-1}, u_i >$, $i = 1, 2, \cdots$, k。在有向途径 P 中，若边不重复出现，则 P 称为有向迹；在有向迹 P 中，若顶点不重复出现，则 P 称为有向路。其中 k 称为 P 的长度。

°有向圈：若 P 是有向途径，且$u_0 = u_k$，则 P 称为有向闭途径。同理，$u_0 = u_k$的有向迹和有向路称为有向闭迹和有向圈。

°可达：设 $D = (V, E)$为一个有向图，对任意 $u, v \in V$，若存在从 u 到 v 的有向路径，则称 u 可达 v，记作 $u \rightarrow v$，规定 u 总是可达自身的。若

$u \rightarrow v$ 且 $v \rightarrow u$，则称 u 与 v 互相可达，记作 $u \leftrightarrow v$。

°弱连通、单向连通、强连通：设 $D = (V, E)$为一个有向图。若 D 的基图是连通图，则称 D 是弱连通图。若对 D 中任意两个顶点 $u, v \in V$，或者 $u \rightarrow v$，或者 $v \rightarrow u$，则称 D 是单向连通图。若对任意两个顶点 u, v

$\in V$, 有 $u \leftrightarrow v$，则称 D 称为强连通图。

°例子：（见图 5.1）

定理 5.1：如果有向图 D 包含一条长为 l 的有向(u,v)途径，那么 D 包含一条长至多为 l 的有向(u,v)路。

证明：用反证法。在 D 中所有(u,v)途径中，设 W 是长度最小的。设 $W=(u=)u_0u_1u_2\cdots u_k(=v)$，那么 $k\le l$。如果顶点$u_0,u_1,\cdots,u_k$互不相同，则 W 是一条(u,v)路，证明完成。否则，存在u_i,u_j使得$u_i=u_j$且 $1\le i<j\le k$。如果我们从 W 中删去$u_{i+1},u_{i+2},\cdots,u_j$，我们可以得到$(u,v)$途径：

$$W^{'}=(u=)u_0u_1\cdots u_iu_{j+1}u_{j+2}\cdots u_k(=v)。$$

W'的长度小于 k，这与 W 是最短(u,v)途径的假设矛盾。 ■

定理 5.2：有向图 D 是强连通的当且仅当 D 包含一个闭的生成途径(经过所有顶点的闭途径)。任意两点间都有连通的路，则必存在有经过每个点的途径

证：因为每个平凡的有向图是强连通的，我们设 D 是非平凡的。

首先设 D 包含一个闭的生成途径 $W=(w=)w_0w_1w_2\cdots w_k(=w)$。设 u 和 v 是 D 中任意两个不同的顶点。那么 $u=w_i$且 $v=w_j$对某两个整数 $1\le i,j\le k$ 成立。不失一般性，设 $i<j$。那么，$W^{'}=(u=)w_i w_{i+1}\cdots w_j(=v)$是$(u,v)$途径且 $W''=(v=)w_jw_{j+1}\cdots w_k(=w_0)w_1\cdots w_i(=u)$是$(v,u)$途径。由定理 5.1，D 中包含$(u,v)$路和$(v,u)$路。

现在我们证明逆命题。设 D 是强连通的有向图，并设 $V(D)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\upsilon\}$，因为 D 是强连通的，D 中包含$(v_i,v_{i+1})$路$P_i$ $(i=1,2,\cdots,\upsilon-1)$，并且包含$(v_\upsilon,v_1)$路$P_\upsilon$，那么

$$W = P_1P_2\cdots P_\upsilon$$

是 D 中一条闭的生成途径。 ■

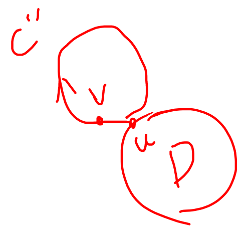
°无向简单图 G 的定向图：给 G 的每一条边加上一个方向所得到的有向图 D 称为 G 的定向图。

定理 5.3：一个非平凡的连通图 G 有强连通的定向图当且仅当 G 不含割边。

证明：必要性。首先假设 G 是非平凡连通图且包含割边 $e = uv$。设 D 是 G 的任一定向图，那么 uv 或 vu 是 D 的一条弧，设该弧是 uv。D 中肯定包含(u, v)有向路。我们证明 D 中不包含(v, u)有向路。假若 D 中含(v, u)有向路 P，它在 G 中对应的无向路为 P'，P'不包含边 uv。故在 G 中$P' + uv$构成一个圈，由定理 2.3，这与 uv 是 G 的割边的假设矛盾。

充分性。设 G 是连通图且不含割边，我们证明 G 有强连通定向图。因为 G 不含割边，G 有一个圈 C。我们给圈 C 的每条边加方向得到有向圈 C'，那么有向圈 C'上任意两个顶点 x, y，有 $x \to y$ 且 $y \to x$。通过给 G 的边加方向，总能得到有向图 D'，使得 D'有一个集合 U 满足 U 中任意两个顶点 x 和 y，有 $x \to y$ 且 $y \to x$。

故 D 中存在一个尽可能大的顶点子集 S，使得对任意 $x, y \in S$，有 $x \to y$ 且 $y \to x$。如果 $S = V(G)$，则证明完成。假设 $S \neq V(G)$。因为 G 是连通的，存在 $u \in S$ 和 $v \notin S$，有 $uv \in E(G)$。因为 uv 不是割边，由定理 2.3，uv 在一个圈 $C'' = u(v =)v_1v_2\cdots v_s(= u)$中。当然有 $u \in S$，但 u 可能不是 C''中 v 后面第一个属于 S 的顶点。设 $w = v_t\ (t \leq s)$是



第一个这样的顶点，现在给边 $uv, vv_2, \cdots, v_{t-1}v_t$加方向得$< u, v >$，$< v, v_2 >$，$\cdots$，$< v_{t-1}, v_t >$，并设 P 是有向$(u, v_t)$路。如果还有其它边连接 $T = \{v_1, v_2, \cdots, v_{t-1}\}$和 $S \cup T$ 中的顶点，则任意给它加方向。设 D' 是所得到的有向图。（见图 5.2）

不难看出 $S \cup T$ 中任意一对顶点 x, y 有 $x \to y$ 且 $y \to x$，这与前面假设 S 是满足：$\forall x, y \in S$，有 $x \to y$ 且 $y \to x$ 的最大顶点子集 $S \subset V$ 矛盾。 ■

§5.2 竞赛图

°有向 Hamilton 路：设 D 是有向图，若 P 是经过 D 中每一个顶点的路，那么 P 称为 D 的有向 Hamilton 路。

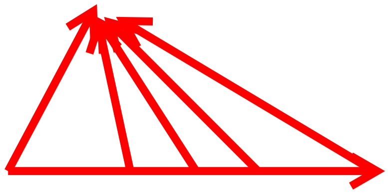
°有向 Hamilton 圈：若 C 是经过 D 中每一个顶点的圈，那么 C 称为 D 的有向 Hamilton 圈。

°竞赛图：给无向完全图K_υ的每条边加一个方向的定向图称为竞赛图。

定理 5.4：每一个竞赛图包含一条 Hamilton 路。

证明：反证法。设 $P = v_1v_2\cdots v_k$是竞赛图 T 的最长路径。如果 P 包含 T 的每一个顶点，则 P 是 T 的 Hamilton 路，证明完成。现在假设 P 不是 Hamilton 路。那么必然存在 T 中一个顶点 v 不在 P 上。(见图 5.3)

这时不存在弧(v, v_1)和(v_k, v)，否则 T 中存在比 P 更长的有向路。因此，(v_1, v)和(v, v_k)是 T 中的弧。因此，必然有某个顶点v_i，$1 \le i \le k-1$，使得$(v_i, v), (v, v_{i+1}) \in E(T)$，从而$P' = v_1v_2\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_k$是 T 中比 P 更



长的有向路，矛盾。 ■

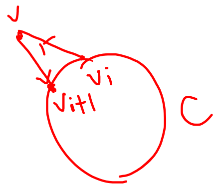
定理 5.5：一个非平凡的竞赛图 T 是 Hamilton 图当且仅当 T 是强连通的。

证明：显然每个 Hamilton 的竞赛图是强连通的。

反过来，假设 T 是非平凡的强连通的竞赛图。因此，T 中包含一个有向圈。设 C 是 T 中最长的有向圈。如果 C 包含 T 的所有顶点，那么 C 是 Hamilton 圈，证明完成。故假设 C 不是 Hamilton 圈，并且

$$C = v_1v_2\cdots v_kv_1$$

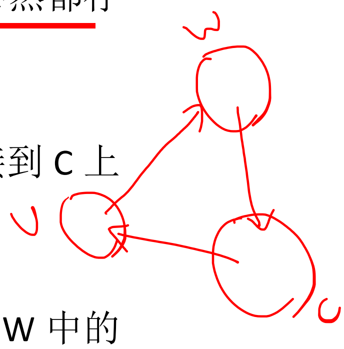
其中，$3 \leq k < \upsilon$。如果 T 中有一个顶点 v 邻接到 C 中某个顶点，并且邻接于 C 中某个顶点，那么 C 中必然有某个顶点v_i，它邻接到 v 并且v_{i+1}邻接于 v。从而



$$C' = v_1v_2\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_kv_1$$

是 T 中比 C 更长的圈，得到矛盾。

因此，T 中每一个不在 C 上的顶点或者邻接到 C 上每一个顶点，或者邻接于 C 上每一个顶点。由于 T 是强连通的，这两类顶点必然都存在。



设 U 是 C 外邻接于 C 上所有顶点的顶点集，W 是 C 外邻接到 C 上所有顶点的顶点集。那么 $U \neq \emptyset$且 $W \neq \emptyset$。

由于 T 是强连通的，必然有一条路径从 C 上每一个顶点到 W 中的每一个顶点。因为 C 上没有顶点邻接到 W 中的顶点，因此必然有一个顶点 $u \in U$ 邻接到 $w \in W$。从而

$$C'' = v_1v_2\cdots v_kuwv_1$$

是 T 中比 C 更长的圈，这与 C 的假设矛盾。 ■

作业 7：

1. 有向图 D 的反向图$\overleftarrow{D}$是将 D 中每一条弧反向得到的有向图。证明：有向图 D 是强连通图，当且仅当$\overleftarrow{D}$是强连通图。
2. 一个竞赛图 T 是可迁的，是说：无论何时(u, v)和(v, w)是 T 中的弧，那么总有(u, w)也是 T 中的弧。证明：一个竞赛图 T 是可迁的当且仅当 T 没有(有向)圈。
3. 证明或否证：如果竞赛图 T 的每个顶点包含在~~一个~~(有向)圈中，那么 T 是强连通图。 所有顶点不一定在同一个有向圈内