8考　　ramsey考

第八章　独立集和团

§8.1 独立集

°独立集：设 S 是 V 的一个子集，若 S 中任意两个顶点在 G 中均不相邻，则称 S 为 G 的一个独立集。

°最大独立集：G 的一个独立集 S 称为 G 的最大独立集，是说：G 不包含适合$|S'| > |S|$的独立集 S'。

°例子：(见图 8.1)

°覆盖：G 的一个覆盖是指 V 的子集 K，使得 G 的每条边都至少有一个端点属于 K。

°例子：在图 8.1 中，两个独立集都是覆盖的补集。

定理 8.1：设$S \subseteq V$，则 S 是 G 的独立集当且仅当$V\backslash S$是 G 的覆盖。

证：按定义，S 是 G 的独立集当且仅当 G 中每条边的两个端点都不同时属于 S，即当且仅当 G 的每条边至少有一个端点属于$V\backslash S$，亦即当且仅当$V\backslash S$是 G 的覆盖。 ■

°独立数：G 的最大独立集的顶点数称为 G 的独立数，记为$\alpha(G)$。

°覆盖数：G 的最小覆盖的顶点数称为 G 的覆盖数，记为$\beta(G)$。

推论 8.1：$\alpha + \beta = \upsilon$。

证：设 S 是 G 的一个最大独立集，K 是 G 的一个最小覆盖。由定理 8.1，$V\backslash K$是独立集，而$V\backslash S$是覆盖。因此

$$\upsilon - \beta = |V\backslash K| \le \alpha \qquad (8.1)$$

$$\upsilon - \alpha = |V\backslash S| \ge \beta \qquad (8.2)$$

结合(8.1)式和(8.2)式，即得$\alpha+\beta=\upsilon$。 ■

°边覆盖：G 的一个边覆盖是指 E 的一个子集 L，使得 G 的每个顶点都是 L 中某条边的端点。

°边独立集：即对集。

*注意：边覆盖并不总是存在的，G 有边覆盖，当且仅当$\delta>0$。

°边独立数和边覆盖数：最大对集的边数称为边独立数，记作$\alpha'(G)$;最小边覆盖的边数称为边覆盖数，记作$\beta'(G)$。

*注意：对集的补集不一定是边覆盖，边覆盖的补集也不一定是对集。

定理 8.2 (Gallai)：若$\delta>0$, 则$\alpha'+\beta'=\upsilon$。

证：设 M 是 G 的一个最大对集，U 是 M 非饱和顶点集。由于$\delta>0$且 M 是最大对集，所以存在$|U|$条边的一个集E'，它的每条边都和 U 的每个顶点相关联。显然，$M\cup E'$是 G 的边覆盖，因而

最小边覆盖 $$\beta'\le|M\cup E'|=\alpha'+(\upsilon-2\alpha')=\upsilon-\alpha'$$

即 $$\alpha'+\beta'\le\upsilon \qquad (8.3)$$

M是最小边覆盖里的一个最大对集

再设 L 是 G 的一个最小边覆盖，置$H=G[L]$，并且设 M 是 H 的一个最大对集。用 U 记 H 中的 M 非饱和顶点集。由于 M 是最大对集，所以$H[U]$没有连杆，从而

整个图的顶点数减去最大对集M饱和的顶点数，结果就是U的顶点数

如果有边，就可以生成更大的对集

$$|L|-|M|=|L\backslash M|\ge|U|=\upsilon-2|M|$$

又因为 H 是 G 的子图，所以 M 也是 G 的对集，从而

$$\alpha'+\beta'\ge|M|+|L|\ge\upsilon \qquad (8.4)$$

综合(8.3)式和(8.4)式，即得$\alpha'+\beta'=\upsilon$。 ■

定理 8.3：在$\delta > 0$的偶图 G 中，最大独立集的顶点数等于最小边覆盖的边数。

证：设 G 是$\delta > 0$的偶图。由推论 8.1 和定理 8.2，有

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = V$$

由于 G 是偶图，从定理 6.3 推知$\alpha' = \beta$, 于是 $\alpha = \beta'$。 ■

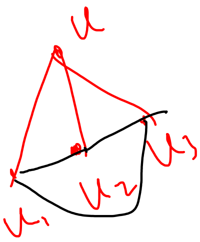
6.3 最大对集的边数等于最小点覆盖数的顶点数

§8.2 Ramsey 定理

例 8.1：证明：任意 6 个人中，一定有 3 个人互相认识或有 3 个人互相不认识。

证明：作一个图 G，有 6 个顶点，每个顶点代表一个人。任意两个顶点 u 和 v 之间有边，当且仅当 u 和 v 互相认识。本题即是要证明：G 中或者有 3 个顶点的团，或者有 3 个顶点的独立集。

我们构造 6 个顶点的完全图，两顶点 u 和 v 之间连红边表示 u 和 v 认识，连蓝边表示 u 和 v 互相不认识。本题要证 G 中或者存在一个红色的三角形，或者存在一个蓝色的三角形。



由于在一个完全图K_6中，每个顶点的度数为 5，任取一点 u，u 或者至少与三条红色的边相关联，或者至少与三条蓝色的边相关联。不失一般性，设 u 与u_1, u_2, u_3通过红色的边相邻。若u_1, u_2, u_3中至少有两个顶点通过红色的边相邻(不妨设u_1u_2是红色边)，那么uu_1u_2u是一个红色三角形。否则，u_1, u_2, u_3任意两点之间没有红色边，则u_1, u_2, u_3构成一个蓝色三角形。证毕。

*本节仅讨论简单图。

•团：简单图 G 的一个团是指 V 中的一个子集 S，使得 G[S]是完全图。

显然，S 是 G 的团，当且仅当 S 是G^c的独立集。G^c是 G 的补图。

*团和独立集的概念是互补的。若 G 没有大的团，则可以料想 G 有大的独立集。

Ramsey(1930)证明：给定任意正整数 k 和 l 后，总存在一个最小正整数 r(k, l)，使得每个有 r(k, l)个顶点的图，或者包含一个有 k 个顶点的团，或者包含一个有 l 个顶点的独立集。

容易看出：$$r(1,l)=r(k,1)=1 \tag{8.5}$$

$$r(2,l)=l,\ \ r(k,2)=k \tag{8.6}$$

• Ramsey 数：r(k, l)称为 Ramsey 数。

定理 8.4：对于任意两个整数$k\geq 2$ 和 $l\geq 2$，有

$$r(k,l)\leq r(k,l-1)+r(k-1,l) \tag{8.7}$$

并且，若$r(k,l-1)$和 $r(k-1,l)$都是偶数，则(8.7)式中的不等式严格成立。

证明：设 G 是有$r(k,l-1)+r(k-1,l)$个顶点的图，并设$v\in V$。以下分两种情形讨论：

(i)v 和至少有$r(k,l-1)$个顶点的集 S 不相邻；或

(ii)v 和至少有$r(k-1,l)$个顶点的集 T 相邻。

注意：情形(i)或(ii)中必有一个成立，因为与 v 不相邻的顶点数加上与 v 相邻的顶点数等于$r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$。

在情形(i)中，G[S]包含 k 个顶点的团或是包含$(l-1)$个顶点的独立

集，所以$G[S\cup\{v\}]$包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集。类似地，在情形(ii)中，$G[T\cup\{v\}]$中包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集。由于情形(i)和(ii)必有一个成立，因此推出 G 包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集。这就证明了(8.7)式。

现在假设$r(k,l-1)$和 $r(k-1,l)$都是偶数，并且设 G 是有$r(k,l-1)$ $+r(k-1,l)-1$个顶点的图。由于 G 有奇数个顶点，由定理 1.1 的推论知，存在一个偶点 v；特别地，v 不能恰好与$r(k-1,l)-1$个顶点相邻。所以，不管情形(i)或情形(ii)哪个成立，G 都包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集。于是

$$r(k,l)\le r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$$

成立。■

*一般说来，确定 Ramsey 数是一个非常困难的尚未解决的问题，通过构作适当的图可以得到它的下界。(见图 8.2)

由图 8.2 可知：

$$r(3,3)\ge 6 \qquad (8.8)$$

$$r(3,4)\ge 9 \qquad (8.9)$$

$$r(3,5)\ge 14 \qquad (8.10)$$

$$r(4,4)\ge 18 \qquad (8.11)$$

借助定理 8.4 和方程(8.6)，可以证明(8.8)式，(8.9)式，(8.10)式和(8.11)式的等式成立。由(8.7)式和(8.6)式，有

$$r(3,3) \le r(3,2) + r(2,3) = 6$$

再由(8.8)式，可知 $r(3,3) = 6$。

注意$r(3,3)$和 $r(2,4)$都是偶数，应用定理 8.4 及(8.6)式，得

$$r(3,4) \le r(3,3) + r(2,4) - 1 = 9$$

连同(8.9)式，可知$r(3,4) = 9$。再应用(8.7)式和(8.6)式，得

$$r(3,5) \le r(3,4) + r(2,5) = 14, \qquad \text{以及}$$

$$r(4,4) \le r(4,3) + r(3,4) = 18$$

连同(8.10)式和(8.11)式，可得$r(3,5) = 14$ 和 $r(4,4) = 18$。

• (k, l)Ramsey 图：是指有$r(k,l) - 1$个顶点的既不包含 k 个顶点的团也不包含 l 个顶点的独立集的图。

*由 r(k, l)的定义，对于所有$k \ge 2$ 和 $l \ge 2$，这样的图是存在的。

定理 8.5： $r(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$。

证：对$k+l$用归纳法。利用(8.5)式和(8.6)式，我们看到，当$k+l \le 5$时，定理成立。设 m 和 n 是正整数，并且假定定理对于所有适合$5 \le k+l < m+n$的正整数k 和 l都成立。则由定理 8.4 和归纳法假设，有

$$r(m,n) \le r(m,n-1) + r(m-1,n)$$
$$\le \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

于是，定理对于所有的正整数k 和 l都成立。 ■

定理 8.6：(Erdös, 1947) $r(k,k) \ge 2^{k/2}$。

证：由于$r(1,1) = 1$ 及 $r(2,2) = 2$，所以可以假定$k \ge 3$。用$\mathcal{g}_n$表示

以$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为顶点集的简单图的集，并且用$\mathcal{g}_n^k$表示$\mathcal{g}_n$中具有 k 个顶点的团的那些图的集。显然

$$|\mathcal{g}_n| = 2^{\binom{n}{2}} \quad \text{最多有（n，2）条边} \tag{8.12}$$

因为$\binom{n}{2}$条可能的边$v_i v_j$的每个子集决定$\mathcal{g}_n$中的一个图。类似地，在$\mathcal{g}_n$中以某个特定的 k 个顶点的集作为团的图的个数是

$$2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}。$$ 固定其中k个顶点，其他边可存在可不存在

由于$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$的相异 k 元子集共有$\binom{n}{k}$个，所以

因为会有很多重复的

$$|\mathcal{g}_n^k| \le \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \tag{8.13}$$

由(8.12)式和(8.13)式，有

（n/k）分子全部放大成n，就变成n的k次方

$$\frac{|\mathcal{g}_n^k|}{|\mathcal{g}_n|} \le \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \tag{8.14}$$

现在假设$n < 2^{k/2}$，从(8.14)式推知

如果k>=4 k/2<=k-2 则下式子小于1/2
单独验证k==3 2 1也都有小于1/2

$$\frac{|\mathcal{g}_n^k|}{|\mathcal{g}_n|} < \frac{2^{k^2/2} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

因为团和独立集是对应的，一个团对应哪个图的补图的独立集

因此$\mathcal{g}_n$中只有少于半数的图包含 k 个顶点的团。同时，因为$\mathcal{g}_n = \{G \mid G^c \in \mathcal{g}_n\}$，所以$\mathcal{g}_n$中同样也只有少于半数的图包含 k 个顶点的独立集。

k个顶点的团和k个顶点的独立集数量加起来小于顶点数。

因此，必然有$\mathcal{g}_n$中的某一图既不包含 k 个顶点的团，也不含 k 个顶点的独立集。因为这个结论对任意$n < 2^{k/2}$都成立，所以有$r(k,k) \ge 2^{k/2}$。

■

推论 8.6：若$m = \min\{k, l\}$，则 $r(k, l) \ge 2^{m/2}$。

R(k,l)>=r(m,m)>=2 m/2

作业 11：

1. 证明：任意 9 个人中或者有 4 个人互相认识，或者有 3 个人互相不认识。(用讲义中例 8.1 的方法证明)
2. 称图 G 是α临界的，如果对所有$e \in E$，有 $\alpha(G-e) > \alpha(G)$。证明：连通α临界图没有割点。
3. 所谓 k 部图是指这样的图，它的顶点集可分解为 k 个子集，使得任何一条边的两个端点均不同在任一个子集中；完全 k 部图是指一个简单图，它的每个顶点与不在同一子集中的所有顶点均相连接。具有 n 个顶点的完全 m 部图，若它的每个部分或是有$\lfloor n/m \rfloor$个顶点，或是有$\lceil n/m \rceil$个顶点，则记为$T_{m,n}$。证明：

   (a) $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$，这里$k = \lfloor n/m \rfloor$；

   (b) 若 G 是具有 n 个顶点的完全 m 部图，则$\varepsilon(G) \le \varepsilon(T_{m,n})$，并且仅当$G \cong T_{m,n}$时，等式成立。