§3.2 块

点连通度大于等于2的连通图

°块：没有割点的连通图称为块。至少有 3 个顶点的块是 2 连通的。一个图的块是指该图的一个子图，这个子图本身是块，而且是有此性质的块中的极大者。

°例子：（见图 3.3）

°内部不相交的路：G 中一族路称为内部不相交的，如果 G 中没有这样的顶点，它是这族路中一条以上的路的内部顶点。

°例子：

定理 3.2：一个$\upsilon \geq 3$的图 G 是 2-连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连。

证：若 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连，则显然，G 是连通的，并且没有 1 顶点割。因此 G 是 2 连通的。

反之，设 G 是 2 连通的。对 u 和 v 之间的距离$d(u,v)$用归纳法来证明：任意两个顶点 u 和 v 至少被两条内部不相交的路所连。

首先假设$d(u,v)=1$。由于 G 是 2 连通的，因此边 uv 不是割边，由定理 2.3，它包含在某个圈中。由此推出：u 和 v 被 G 的两条内部不相交的路所连。

现在假设对于距离小于 k 的任意两个顶点定理均成立，并且设$d(u,v)=k\geq 2$。考察长为 k 的一条(u,v)路，并且设 w 是该路上 v 前面的那个顶点。因为$d(u,w)=k-1$，由归纳假设可知：在 G 中有两条内部不相交的(u,w)路 P 和 Q。又因为 G 是 2 连通的，所以$G-w$是

连通的，并且包含一条(u,v)路 P'。设 x 是在P'中又在$P\cup Q$中的最后一个顶点(见图 3.4)。由于 u 在$P\cup Q$中，这样的顶点 x 是存在的；我

们不排除$x=u$的可能性。

不失一般性，可假定 x 在 P 中。于是 G 有两条内部不相交的(u,v)路，一条由 P 的一节(从 u 到 x)和P'的一节(从 x 到 v)联合组成，另一条由 Q 和路 wv 组成。 ■

推论 3.2.1：若 G 是 2 连通图，则 G 的任意两个顶点都位于同一个圈上。

证：因为，两个顶点位于同一个圈上当且仅当它们由两条内部不相交的路所连，所以这个推论可以从定理 3.2 直接推出。 ■

°边的剖分：边 e 称为被剖分，是指删去它，并换上一条连接它的两个端点而长为 2 的路，该路的内部顶点是一个新顶点。如图 3.5 所示。

二连通图做任意剖分仍然是二连通图

最小度>边连通度>点连通度

°由至少有 3 个顶点的块所组成的类在剖分运算下是封闭的。

推论 3.2.2：若 G 是$\upsilon\geq 3$的块，则 G 的任意两条边都位于同一个圈上。

证：设 G 是$\upsilon\geq 3$的块，并且e_1和e_2是 G 的两条边。将e_1和e_2剖分构成一个新图G'，以v_1和v_2记新的顶点。显然，G'是至少有五个顶点的块，因而是 2 连通的。由推论 3.2.1 得出：v_1和v_2位于G'的同一个圈上。于是e_1和e_2位于 G 的同一个圈上(见图 3.6).

§3.3 Menger 定理

°定理 3.2 可推广到 k 连通图，称为 Menger 定理。

定理 3.3(Menger 定理)：设 u 和 v 是图 G 中的两个不相邻的顶点。分割 u 和 v 的最小顶点数目等于 u 到 v 的内部不相交的路径的最大数目。

证：我们对图的边数ε归纳证明。当$\varepsilon = 0, G$是空图，结论成立。

假设对边数小于ε的任意图结论成立。

现在设图 G 的边数为ε。设 G 中分割 u 和 v 的最小割集的顶点数为 k，显然 u 到 v 的内部不相交的路径的最大数目不超过 k。我们证明：这样的路径数目恰好为 k。我们讨论以下三种情形：

情形 1：分割 u 和 v 的最小割集U中包含一个顶点 x 满足：$ux, xv \in E(G)$。

在$G - x$中，$U - \{x\}$是分割 u 和 v 的最小割集，且$|U - \{x\}| = |U| - 1 = k - 1$。$G' = G - x$的边数小于$\varepsilon$，由归纳假设，$G'$中存在$k - 1$条从 u 到 v 的内部不相交的路径$P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$，再加上$P_k = uxv$，则$P_1, P_2, \cdots, P_k$是 G 中 k 条内部不相交的$(u, v)$路。

情形 2：G 中存在一个$u - v$最小分割集 W，W 中包含一个不与 u 相邻的顶点，并且包含一个不与 v 相邻的顶点。

令$W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$。令$G_u$是 G 的子图，包含所有 u 到$w_i (i = 1, 2, \cdots, k)$的路径所经过的顶点及相关联的边，令$G_u'$为$G_u$加上一个新顶点$v'$及边 $v'w_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$所形成的图。令G_v为 v 到w_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$的所有路径上的顶点及相关联的边所形成的 G 的子图，G_v'为G_v加

上一个新顶点u'及边 $u'w_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$所形成的图。

因为W包含一个不与u相邻的顶点且包含一个不与v相邻的顶点，故G'_u和G'_v的边数小于ε。又因为 W 是G'_u中分割u 和 v'的最小割集，由归纳假设，G'_u中存在 k 条从u 到 v'的内部不相交的路径，其中每一条路径为u 到w_i的路径P_i加上边$w_i v'$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$。类似地，在G'_v中存在 k 条从v 到 u'的内部不相交的路径，其中每一条为v 到w_i的路径Q_i加上边$w_i u'$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$。于是$P_i \cup Q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$为 G 中从 u 到 v 的 k 条内部不相交的路径。

情形 3：（由于情形 1 和 2 不成立）对于 G 中每一个分割 u, v 的最小割集 S，或者 S 中每一个顶点都与 u 相邻，但不与 v 相邻；或者 S 中每一个顶点都与 v 相邻，但不与 u 相邻。设$P: u, x, y, \cdots, v$是 u 到 v 的最短路径，并设$e = xy$。考虑 G 的子图$G - e$，在 $G - e$中每个$u - v$最小割集至少包含$k - 1$个顶点。我们证明$G - e$的最小割集包含 k 个顶点。假如$G - e$中有一个最小$u - v$ 割集 $Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}\}$，那么$Z \cup \{x\}$是 G 中的一个最小$u - v$割集，因为 x 与 u 相邻，由本情形的条件，Z 中所有z_i $(i = 1, 2, \cdots, k - 1)$都与 u 相邻。又因为$Z \cup \{y\}$也是 G 中的最小$u - v$割集，由本情形的条件，y 与 u 也相邻，但这与$P = uxy \cdots v$是 u 到 v 的最短路径矛盾。因此，$G - e$中的最小$u - v$割集含 k 个顶点。但$G - e$的边数小于$\varepsilon$，由归纳假设，$G - e$中存在 k 条从 u 到 v 的内部不相交的路径$P_1, P_2, \cdots, P_k$，而$P_1, P_2, \cdots, P_k$也是 G 中的 u 到 v 的内部不相交的路径。故本定理的结论成立。 ■

推论 3.3：图 G 是 k 连通的，当且仅当对 G 中任意两个顶点 u, v，存

u、v是任意的顶点

在从 u 到 v 的 k 条内部不相交的路径。

证明：对任意一对顶点$u, v \in V(G)$，若从 u 到 v 至少有 k 条内部不相交的路径，则 G 中至少要删除 k 个顶点才能使 u 和 v 不连通。故 G 是 k 连通图。

反之，假设 G 是 k 连通图，对任意一对顶点 u 和 v，要使 u 和 v 不连通，至少要删除 k 个顶点，即分割 u 和 v 的最小顶点数目大于等于 k，由 Menger 定理，从 u 到 v 内部不相交的路径数大于等于 k。本推论得证。 ■

定理 3.4：任一图 G 是 k 边连通的，当且仅当对 G 中任意两个顶点 u 和 v，存在从 u 到 v 的 k 条边不重的路径。

作业 5：

1. 证明：一个图是 2 边连通的当且仅当任意两个顶点至少由两条边不重的路径所连。

隔点是指不是块的原图G的割点

2. 证明：不是块的连通图至少有两个块，每个恰有一个割点。
3. 证明：若 G 是$k \geq 2$的 k 连通图，则 G 的任何 k 个顶点都同时包含在某个圈中。