《数值计算方法》课程

插值

（拉格朗日插值）

胡建芳

（研究方向：计算机视觉）

http://sdcs.sysu.edu.cn/content/5143

计算机学院

插值

- **插值与拟合**

它们共同的**数学模型**是：已知若干个点处的函数值（近似），如何恢复这个函数?

1，通过有限个点的函数有无穷多个。因此，想要得到非常精确的函数是不可能的。

2，只能找一个原来函数的近似函数。这样，可以找一个性质“**好**”的，形式上熟悉的近似函数；

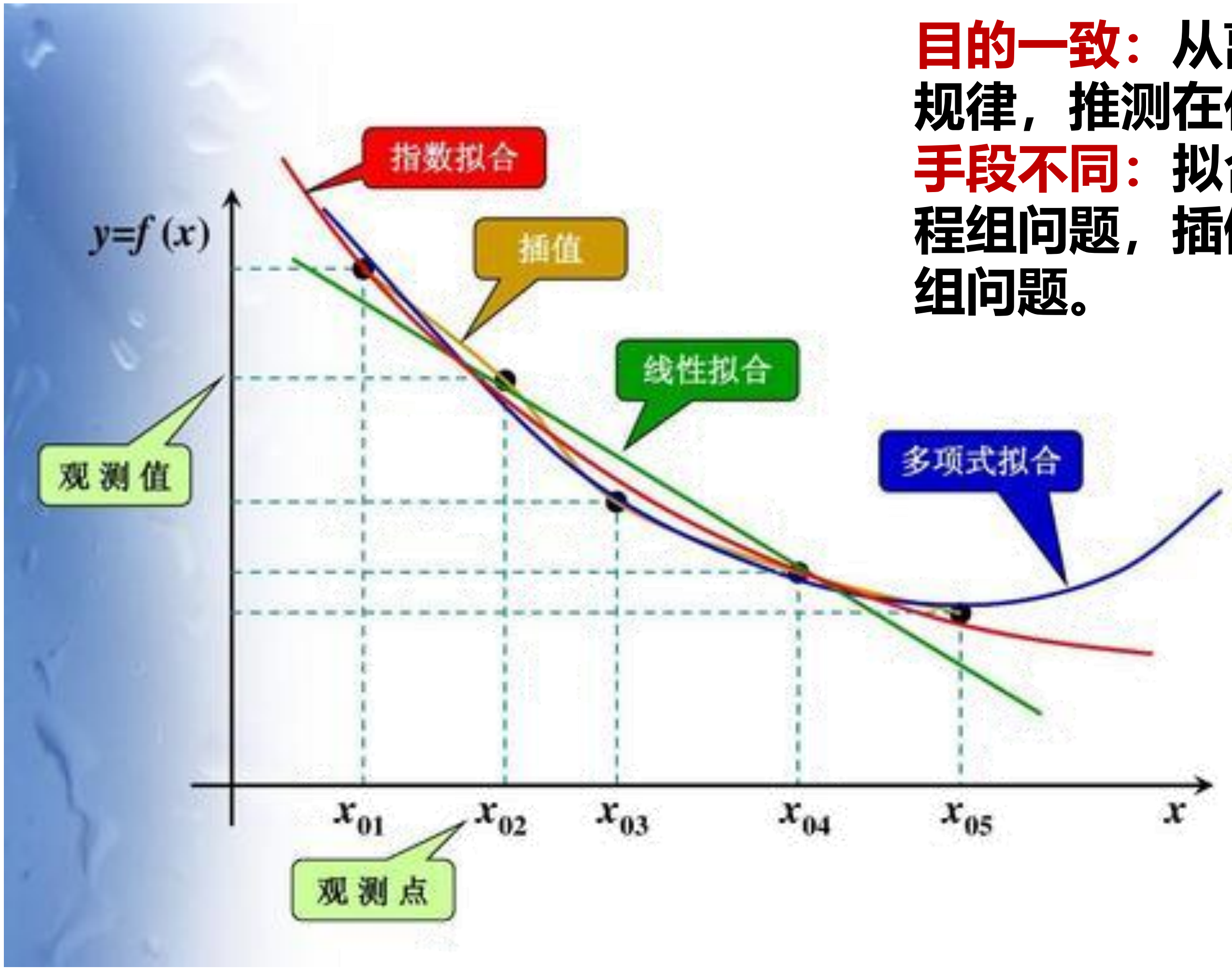
拟合：找一个“**简单**”函数，尽可能接近已知点的函数值。

-----点多，函数简单，解矛盾方程组

插值：找“**简单**”函数的组合，经过已知点的函数值。

插值

插值与拟合



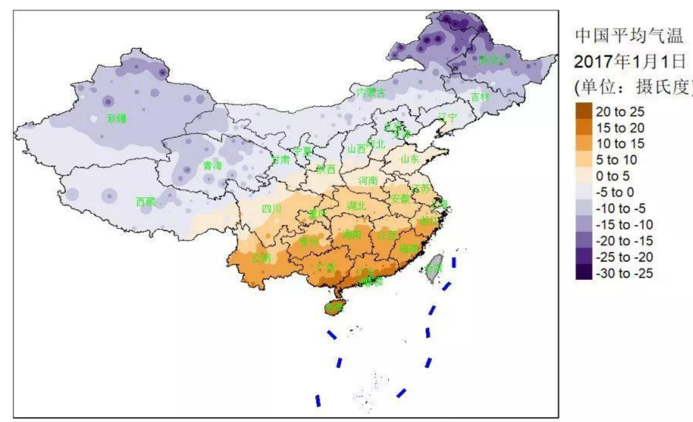
目的一致：从离散观测点中找数据规律，推测在任意一个点的值；**手段不同：**拟合是一次性解矛盾方程组问题，插值是分段解一般方程组问题。

插值

插值有什么用

(a) Six input images　　Appearance from novel viewpoints (b,c)

计算机图形学与可视化



图像处理
计算机视觉
计算摄影学

不仅仅这些，
还有很多……

插值

插值定义

定义 1.
$\{x_i\}_{i=0}^{n}$是$n+1$个互不相同的点，函数$f(x)$在这些节点上的函数值为$f(x_i)$， Φ是已知的函数类(函数空间)。若Φ中存在一个函数$g(x)$，使得

$$g(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$$

则称$g(x)$是$f(x)$的一个*插值函数*。$f(x)$称为*原函数*。$\{x_i\}$称为*插值节点*。

注意：与拟合的区别

找一个性质“好”的近似函数，可以通过使用熟悉的函数类来得到。如:

1. 多项式 $P_n = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\};$
2. 三角函数
   $S_n = span\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$

插值

插值计算

设 $\Phi = span\{\phi_0(x), \cdots, \phi_m(x)\}$ 是一个 $m+1$ 维的线性空间，则

$$g(x) = a_0\phi_0(x) + \cdots + a_m\phi_m(x)$$

想办法求出 $a_0, \cdots, a_m$ 即找到了 $g(x)$。

$$g(x_i) = a_0\phi_0(x_i) + \cdots + a_m\phi_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

当m=n，且系数矩阵行列式不为0时，可以算出唯一的插值函数

插值

多项式插值

基函数为多项式

$P_n = span\{1, x, x^2, \cdots, x_n\}$中找插值函数。 由线性代数知识，有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i,j=0,j>i}^{n} (x_j - x_i) \neq 0$$

这是一个Vandermonde行列式。因此，有结论

定理 2.
$n+1$个互不相同节点上的n次插值多项式存在且唯一。

插值

■ 多项式插值计算

基函数为多项式

设插值多项式是$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，由插值条件，可以得到线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n & = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n & = f(x_1) \\ \cdots & \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n & = f(x_n) \end{cases}$$

解方程，得到系数$a_0, \cdots, a_n$。

插值

多项式插值计算

1. 需要解一个线性方程组，
2. Vandermonde矩阵是一个**病态矩阵**。当n比较大(>10)时，数值上的小扰动，会带来明显的计算误差。
3. 当一个点处的函数值发现了变化，需要重新求解整个线性方程组

需要另一种手段来得到插值多项式。

插值

多项式插值: 拉格朗日插值

设插值多项式是

$$g(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

其中$l_i(x), i = 0, \cdots, n$是次数不超过n次的多项式。

1. 由插值的定义,

$$f(x_0) = g(x_0) = f(x_0)l_0(x_0) + f(x_1)l_1(x_0) + \cdots + f(x_n)l_n(x_0)$$

因此,可以假定成立

$$l_0(x_0) = 1, l_i(x_0) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

2. 类似地,由

$$f(x_1) = g(x_1) = f(x_0)l_0(x_1) + f(x_1)l_1(x_1) + \cdots + f(x_n)l_n(x_1)$$

可以得到

$$l_0(x_1) = 0, l_1(x_1) = 1, l_i(x_1) = 0, i = 2, 3, \cdots, n$$

在当前点响应为1,其余处响应为0

插值

多项式插值: 拉格朗日插值

对$i=0,1,\cdots,n$，由

$$f(x_i)=g(x_i)=f(x_0)l_0(x_i)+\cdots+f(x_i)l_i(x_i)+\cdots+f(x_n)l_n(x_i)$$

都有

$$l_i(x_i)=1,l_j(x_i)=0,j=0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$$

可以得到如下的表

	$l_0(x)$	$l_1(x)$	$\cdots$	$l_n(x)$
x_0	1	0	$\cdots$	0
x_1	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	0	0	$\cdots$	1

可以看出，函数$l_i(x)$满足 $l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

在当前点响应为1，其余处响应为0

插值

- **多项式插值: 拉格朗日插值**

$l_i(x)$有零点$x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$， 因此有

$$l_i(x) = a_i(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

其中a_i是某个实数。又$l_i(x_i) = 1$，即

$$a_i(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = 1$$

解得

$$a_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

得到

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

在当前点响应为1，其余处响应为0

插值

- **多项式插值: 拉格朗日插值**

定义 2.
称

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

为*Lagrange基函数*。
插值函数

$$f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

为*Lagrange插值*，记为$L_n(x)$。

插值

多项式插值: 拉格朗日插值

例 2. 给出两点的线性Lagrange插值多项式

解. 依题意，设节点是x_0, x_1，则

$$L_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

线性插值

例 3. 给出三个节点$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$上的2次Lagrange插值多项式

解. 3个Lagrange插值基函数是

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

抛物插值

插值

多项式插值: 拉格朗日插值

求过点$(1,3),(2,2),(3,4)$的插值多项式。

解. 插值节点是$1,2,3$，因此Lagrange插值基函数是

$$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

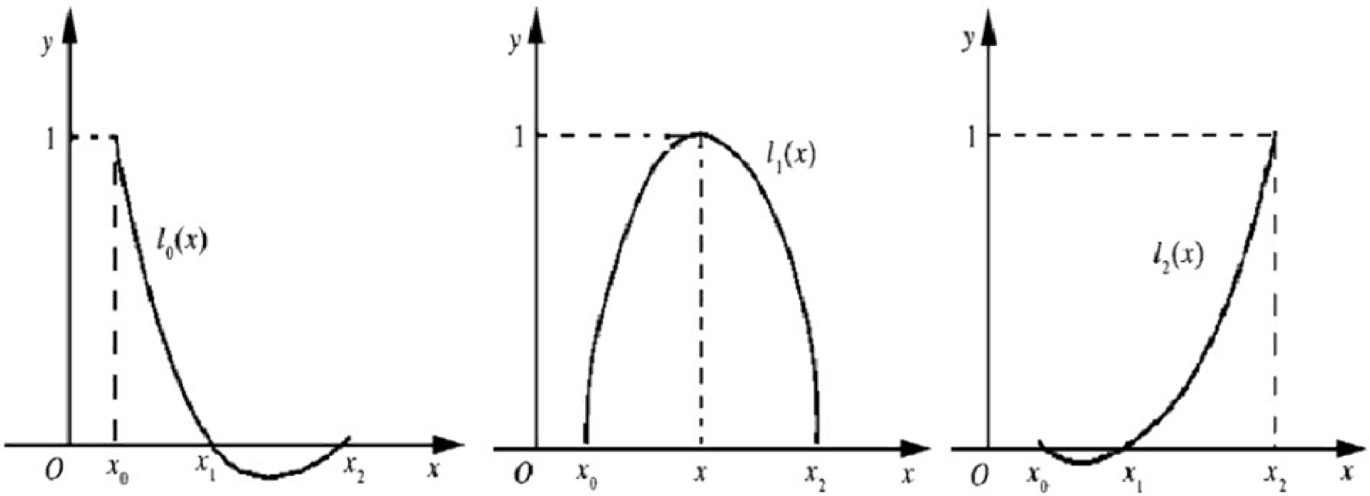
$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

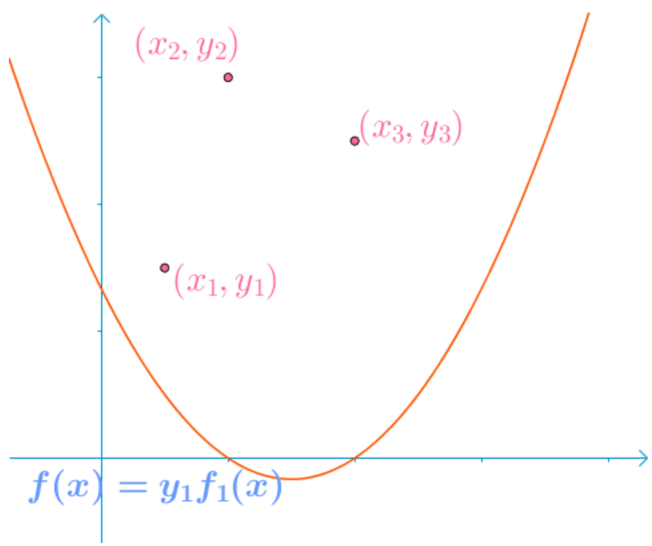
因此，插值函数为

$$g(x)=3\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+2\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+4\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

插值

- 多项式插值: 拉格朗日插值





插值

- **多项式插值: 拉格朗日插值**

已知 $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4$ 求 $\sqrt{7}$

解 取 $x_0=4, y_0=2$， $x_1=9, y_1=3$ ， $x_2=16, y_2=4$.

（1）线性插值:

取 $x_0=4, x_1=9$

$$L_1(x) = \frac{x-9}{4-9} \times 2 + \frac{x-4}{9-4} \times 3$$

$$\sqrt{7} \approx L_1(7) = \frac{2}{5}(9-7) + \frac{3}{5}(7-4) = \frac{13}{5} = 2.6$$

插值

- **多项式插值: 拉格朗日插值**

已知 $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4$ 求 $\sqrt{7}$

（2）**抛物插值:**

取$x_0=4, x_1=9, x_2=16$

$$\sqrt{7} \approx L_2(7)$$
$$=\frac{(7-9)(7-16)}{(4-9)(4-16)}\times 2+\frac{(7-4)(7-16)}{(9-4)(9-16)}\times 3+\frac{(7-4)(7-9)}{(16-4)(16-9)}\times 4$$

$$=2.6286$$

$$(\sqrt{7} \approx 2.6458)$$

插值

多项式插值: 拉格朗日插值

可以看到

- $L_n(x)$是一个次数不超过n次的多项式，
- 由插值多项式的存在唯一性知，$L_n(x)$与待定系数法得到的多项式是一样的，而它避开了求解一个病态的线性方程组。
- 当节点不变化时，Lagrange插值基函数也不会改变。

节点变化时，拉格朗日插值是否需要重新计算？

1，节点的x坐标变化

2，节点的个数变化，如增加一个或减少一个

插值

分段拉格朗日插值

1. 分段线性插值的构造

设插值节点为x_i，函数值为y_i，$i=0,1,2,\ldots\ldots,n$

$h_i=x_{i+1}-x_i$，$i=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$，

任取两个相邻的节点x_k，x_{k+1}，形成一个插值区间$[x_k，x_{k+1}]$，

构造Lagrange线性插值

$$L_1^{(k)}(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$=y_k\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

插值

- **分段拉格朗日插值**

$$L_1(x)=\begin{cases} L_1^{(0)}(x) & x_0 \le x < x_1 \\ L_1^{(1)}(x) & x_1 \le x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ L_1^{(n-1)}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

显然 $L_1(x_i)=y_i$ $i=0,1,2,\ldots,n$

我们称由上式构成的插值多项式$L_1(x)$为**分段线性Lagrange插值多项式**。

插值

分段拉格朗日插值

设$x = x^*$为插值点

若$x_k \le x^* \le x_{k+1}$

则 $y^* = L_1(x^*) \;= L_1^{(k)}(x^*)$

内插

$$= y_k \frac{x^* - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

若$x^* \le x_0$

外插

取 $y^* = L_1(x^*) \;= L_1^{(0)}(x^*) \;= y_0 \frac{x^* - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x^* - x_0}{x_1 - x_0}$

若$x^* \ge x_n$

外插

取 $y^* = L_1(x^*) = L_1^{(n-1)}(x^*) = y_{n-1} \frac{x^* - x_n}{x_{n-1} - x_n} + y_n \frac{x^* - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

插值

分段拉格朗日插值

分段线性插值$y = L_1(x)$的图象

实际上是连接点(x_k, y_k)，

$i = 0,1,\cdots,n$的一条折线

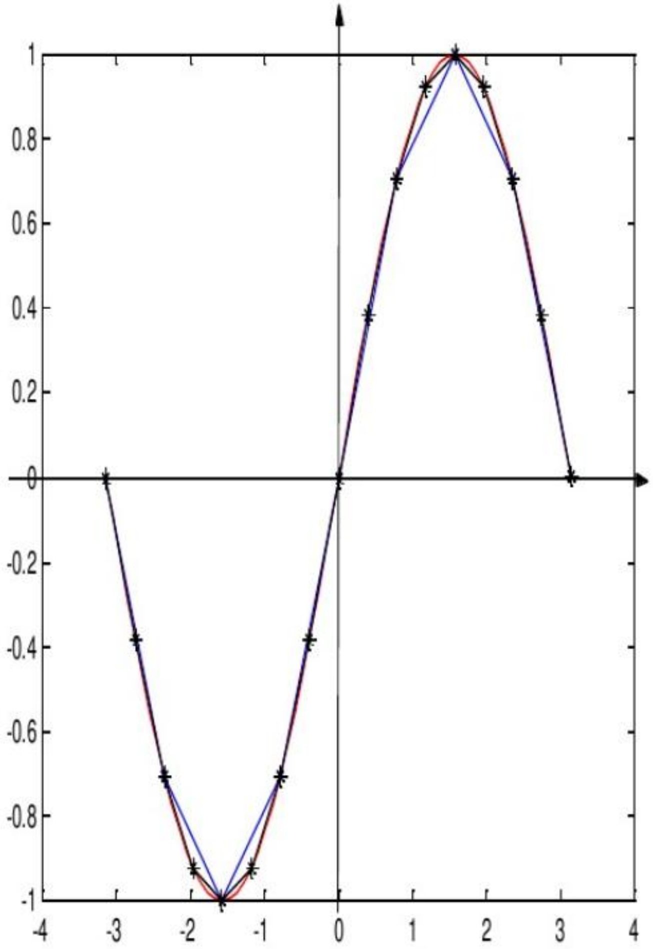
故也称折线插值，如右图：

但曲线的光滑性较差，且在节点处有尖点。

如果增加节点的数量，减小步长，会改善插值效果。

因此 若$f(x)$在$[a,b]$上连续

则 $\lim_{h\to 0} L_1(x) = f(x)$



插值

- **分段拉格朗日插值**

1. 分段二次插值的构造

设插值节点为x_i，函数值为y_i，i=0,1,2,……,n

$h_i=x_{i+1}-x_i$，i=0,1,2,……,n-1，

任取三个相邻的节点x_{k-1}，x_k，x_{k+1}，以$[x_{k-1}, x_{k+1}]$为插值区间构造二次Langrange插值多项式：

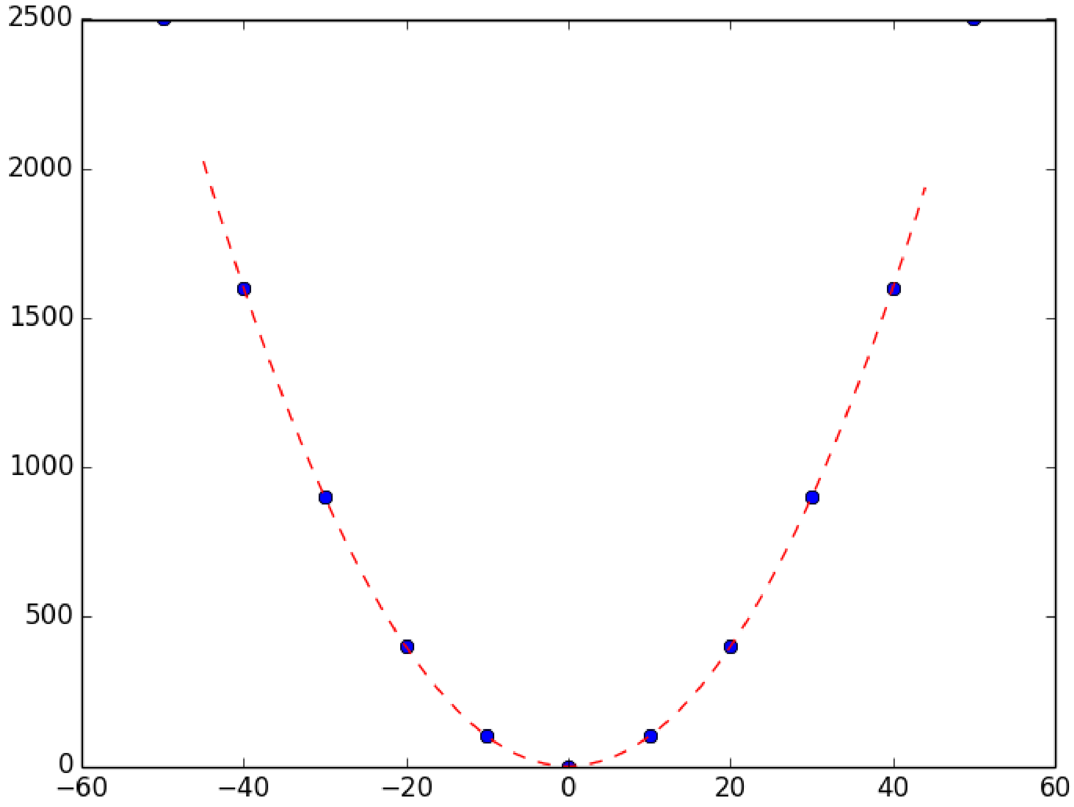
$$L_2^{(k)}(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

$$L_2^{(k)}(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+ y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)} \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

插值

- 分段拉格朗日插值



拟合

- **作业：**

1. 设$f(x)$在各节点处的数据为

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05
y_i	0.30163	0.41075	0.57815	0.69675	0.87335	1.18885

求$f(x)$在$x = 0.36, 0.42, 0.75, 0.98, 1.1$处的近似值
(用分段线性、二次插值

2. **证明拉格朗日插值基函数是线性无关的。**

课外阅读：朗格朗日插值的误差估计

插值

- **插值余项：**

定义　若在$[a,b]$上用$L_n(x)$近似$f(x)$，则其截断误差

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

称**插值多项式的余项**。

定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上具有n阶连续导数，且

$f^{(n+1)}(x)$ 存在，节点$a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$，

$L_n(x)$是满足条件$L_n(x_j)=y_j \quad (j=0,1,2,\dots,n)$的插值多项式，则对任何$x\in[a,b]$，插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad \xi\in[a,b]$$

THE END

谢谢张瑞老师的PPT