第四章 Euler 环游和 Hamilton 圈

§ 4.1 Euler 环游

°Euler 迹：经过图 G 的每条边的迹称为 G 的 Euler 迹。

°Euler 环游：经过图 G 的每条边恰好一次的闭迹。（图 G 的环游是指经过 G 的每条边至少一次的闭途径）。

*一笔画问题：

°Euler 图：一个图若包含 Euler 环游，则这个图称为 Euler 图。

°半 Euler 图：一个图若包含 Euler 迹，但不包含 Euler 环游，则这个图称为半 Euler 图。

*哥尼斯堡七桥问题：

定理 4.1：一个非空连通图是 Euler 图当且仅当它没有奇点。

证：设 G 是 Euler 图，C 是 G 的 Euler 环游，其起点(也是终点)为 u。顶点 v 作为 C 的内部顶点每出现一次，就有两条与它关联的边出现，因为 Euler 环游包含 G 的每条边，所以对于所有的 $v \neq u$，$d(v)$都是偶数。类似地，由于 C 开始并且终止于 u，所以 $d(u)$也是偶数。于是，G 没有奇点。

反之，假设 G 是一个非 Euler 连通图：它至少有一条边，而且没有奇点。选择这样一个图 G，使其具有尽可能少的边。由于 G 的每个顶点的度至少是 2，所以 G 包含一个闭迹。设 C 是 G 中其长为最大的闭迹。根据假设，C 不是 G 的 Euler 环游，因而 $G - E(C)$具有适合 $\varepsilon(G') > 0$ 的某个分支 G'。由于 C 本身是 Euler 图，它没有奇点；于是连通图 G'也没有奇点。由于$\varepsilon(G') < \varepsilon(G)$, 根据 G 的选择可以推知：G'

有一条 Euler 环游 C'。因为 G 是连通的，所以在 $V(C) \cap V(C')$中存在一个顶点 v。不失一般性可以假设 v 是 C 和 C'的起点和终点。于是 CC'就是 G 的适合$\varepsilon(CC') > \varepsilon(C)$的一条闭迹，和 C 的选择矛盾。 ■

推论 4.1：一个连通图有 Euler 迹当且仅当它最多有两个奇点。

证：若 G 有 Euler 迹，则如定理 4.1 所证明的，这条迹除起点和终点外的每个顶点都是偶点。

反之，假设 G 是最多有两个奇点的非平凡连通图。若 G 没有奇点，则由定理 4.1，G 有闭 Euler 迹。否则，G 恰有两个奇点 u 和 v，此时，设 G + e 表示 G 中添加连接 u 和 v 的新边 e 所得到的图。显然，G + e 的每个顶点都是偶点，由定理 4.1，G + e 有 Euler 环游 $C = v_0e_1v_1\cdots e_{\varepsilon+1}v_{\varepsilon+1}$，这里$e_1 = e$，迹$v_1e_2v_2\cdots e_{\varepsilon+1}v_{\varepsilon+1}$是 G 的一条 Euler 迹。 ■

§4.2 中国邮递员问题

°问题：邮递员必须走过他投递范围内的每一条街道至少一次。在这个前提下，希望选择一条尽可能短的路线。这个问题名为中国邮递员问题。

°对应的图论问题：在一个赋权图中，环游$v_0e_1v_1\cdots e_nv_0$的权定义为$\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$。中国邮递员问题就是在具有非负权的赋权连通图中找出一条最小权的环游。这种环游称为最优环游。

若 G 是 Euler 图，则 G 的任何 Euler 环游都是最优环游，因为 Euler 环游是一条通过 G 的每条边恰好一次的环游。

一． 求 Euler 图的 Euler 环游的算法

(1) Fleury 算法：

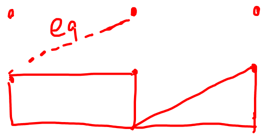
1. 任意选取一个顶点v_0，置$W_0 = v_0$;

2. 假设迹$W_i = v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$已经选定，那么按下述方法从 $E-\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选取边$e_{i+1}$:

(i)e_{i+1}和v_i相关联；

(ii)除非没有别的边可选择，否则e_{i+1}不是$G_i = G-\{e_1,e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边；

3. 当第 2 步不能再执行时，算法终止。



(2) 例子：(见图 4.1)

删除边但不删顶点！e9是割边，但此时有别的选择

迹：$v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_9v_2$走不下去了，错在哪里？

(3) Fleury 算法的正确性

定理 4.2：若 G 是 Euler 图，则 G 中任一用 Fleury 算法作出的迹都是 G 的 Euler 环游。

证：设 G 是 Euler 图，$W_n = v_0e_1v_1\cdots e_nv_n$是 G 中用 Fleury 算法作出的迹，显然，终点v_n在G_n中的度必然为零。由此推知$v_n = v_0$；换言之，W_n是闭迹。

没有下一个点可以选择了，所以必为闭迹

还有边连在上面的点

现在假设W_n不是 G 的 Euler 环游，并且设 S 是G_n中度为正的顶点集。那么，S 是非空的，且$v_n \in \bar{S}$，这里$\bar{S} = V \backslash S$。设 m 是使得$v_m \in S$以及$v_{m+1} \in \bar{S}$的最大整数。由于W_n终止于$\bar{S}$，所以e_{m+1}是G_m中$[S, \bar{S}]$的仅有的一条边，因此也就是G_m的一条割边(见图 4.2)。

vm还有别的边和它相连，删去下一条边后em+1，vm+1变成孤立点，因此em+1就是一个割边

设 e 是G_m中和v_m关联的另外任意一条边。可以推得(第 2 步)：e 必然也是G_m的一条割边，因而是$G_m[S]$的割边。但是由于$G_m[S] = G_n[S]$，所以$G_m[S]$中每个顶点都是偶点。可是由此推出$G_m[S]$没有割边(习题三，2)，导致矛盾。 ■ 3

二. 求一般赋权图的最优环游的算法

°算法： 增加重边让图变成欧拉图

1. 找出图 G 中任意一对奇点 u, v 之间的最短路径长度 $d(u, v)$；
2. 以 G 中奇点为顶点集，构造图$G' = (V', E')$，$\forall u, v \in V'$，uv 边上的权 $w(u, v) = d_G(u, v)$；
3. 求出 G'的最小权完美对集 M'；
4. 构造 G"：若 $uv \in M'$，则在 G 中取奇点 u 和 v 之间的最短路径 P，将 P 上每条边加一条重边；
5. 最后，用 Fleury 算法在 G"中找一条 Euler 环游。

°例子：（见图 4.3）

$d(v_1, v_2) = 4$, (v_1, u_2, u_3, v_2)

$d(v_1, v_3) = 5$, (v_1, u_2, u_5, v_3)

$d(v_1, v_4) = 2$, (v_1, u_1, v_4)

$d(v_2, v_3) = 3$, (v_2, u_4, v_3)

$d(v_2, v_4) = 5$, $(v_2, u_3, u_2, u_6, v_4)$

$d(v_3, v_4) = 3$, (v_3, v_4)

最小完美对集 $\{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$

G"中的一个 Euler 回路对应 G 中的最优环游：$(v_1, u_1, v_4, v_3, u_4, v_2,$
$v_1, u_2, u_3, v_2, u_4, u_3, u_5, v_3, u_4, u_1, v_4, u_6, u_5, u_2, u_6, u_1, v_1)$ 。

§4.3 Hamilton 图

°Hamilton 路：经过图 G 中所有顶点一次且仅一次的路径称为 Hamilton 路。

°Hamilton 圈：经过图 G 中所有顶点一次且仅一次的圈称为 Hamilton 圈。

°Hamilton 图：具有 Hamilton 圈的图称为 Hamilton 图。

°半 Hamilton 图：具有 Hamilton 路但不含 Hamilton 圈的图称为半 Hamilton 图。

°例子：（见图 4.4）

定理 4.3：若 G 是 Hamilton 图，则对于 V 的每个非空真子集 S，均有

$$\omega(G - S) \leq |S| \qquad (4.1)$$

证：设 C 是 G 的 Hamilton 圈，则对于 V 的每个非空真子集 S，均有

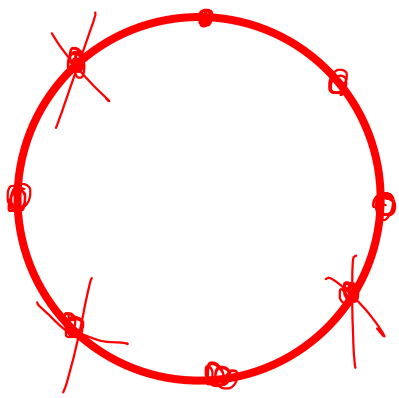
$$\omega(C - S) \leq |S|.$$

$\omega = |S| = 3$

同时，$C - S$ 是 $G - S$ 的生成子图，因而

$$\omega(G - S) \leq \omega(C - S),$$

定理得证。 ■



°例 1：下图中哪些是 Hamilton 图，哪些是半 Hamilton 图，为什么？

(见图 4.5)

推论 4.3：设无向图 $G=(V,E)$ 是半 Hamilton 图，那么对于任意 $\emptyset \neq S \subset V$，均有

$$\omega(G-S) \leq |S|+1。$$

证明：设 P 是 G 中起始于 u 终止于 v 的 Hamilton 路，令 $G'=G+uv$，易知 G'为 Hamilton 图。由定理 4.3 知，$\omega(G'-S) \leq |S|$，而有

$$\omega(G-S)=\omega(G'-S-uv) \leq \omega(G'-S)+1 \leq |S|+1。\blacksquare$$

V个顶点

定理 4.4：设 G 是 $\upsilon(\upsilon \geq 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 u 和 v 均有 $d(u)+d(v) \geq \upsilon$，则 G 中存在 Hamilton 圈。

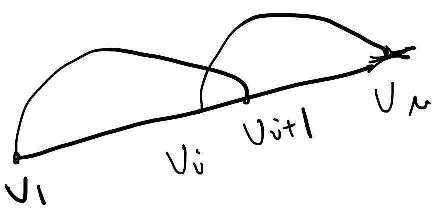
证明：用反证法。假设定理不成立，设 G 是 $\upsilon \geq 3$ 且满足定理条件的极大非 Hamilton 简单图。由于 $\upsilon \geq 3$，所以 G 不能是完全图。设 u 和 v 是 G 的一对不相邻的顶点。根据 G 的选择，$G+uv$ 是 Hamilton 图。并且，由于 G 是非 Hamilton 图，$G+uv$ 的每个 Hamilton 圈必然包含边 uv。于是在 G 中存在起点为 $u=v_1$ 终点为 $v=v_\upsilon$ 的 Hamilton 路 $v_1v_2\cdots v_\upsilon$。置

vi+1和u相邻取vi+1前一个点加入S　　取和V相邻点加入T

$$S=\{v_i \mid uv_{i+1} \in E\} \text{ 和 } T=\{v_i \mid v_iv \in E\}$$

由于 $v_\upsilon \notin S \cup T$，故有

$$|S \cup T| < \upsilon \qquad (4.2)$$



而且

$$|S \cap T| = 0 \qquad (4.3)$$

因为若 $S \cap T$ 包含某个顶点 v_i，则 G 将包含 Hamilton 圈：

$$v_1v_2\cdots v_iv_\upsilon v_{\upsilon-1}\cdots v_{i+1}v_1，$$

与假设矛盾(见图 4.6)。

利用(4.2)和(4.3)式得到

$$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<\upsilon \qquad (4.4)$$

这与 $d(u)+d(v)\geq\upsilon$的条件矛盾。 ■

作业 6：

1. 证明：若 G 有 $2k>0$ 个奇点，则在 G 中存在 k 条边不重的迹 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$，使得 $E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$。
2. 证明：若 G 是$\upsilon>2\delta$的连通简单图，则 G 有长至少是 2δ的路。
3. 设 G 是无向连通图。证明：若 G 中有割边或割点，则 G 不是 Hamilton 图。