上周作业解答

Exercise 1.[王育民(2013)]

计算由下述转移概率矩阵给定的DMC的容量。

(a)

$$\begin{bmatrix} \text{1-P} & \text{P} & 0 \\ 0 & \text{1-P} & \text{P} \\ \text{P} & 0 & \text{1-P} \end{bmatrix}$$

解：易知该矩阵对应DMC为对称信道。因此当输入分布为等概分布时，达到信道容量：

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X;Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \log|\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r}) \\ &= \log 3 - H(P) \end{aligned}$$

上周作业解答

(b)

$$\begin{bmatrix} \frac{1-P}{2} & \frac{1-P}{2} & \frac{P}{2} & \frac{P}{2} \\ \frac{P}{2} & \frac{P}{2} & \frac{1-P}{2} & \frac{1-P}{2} \end{bmatrix}$$

解：易知该矩阵对应DMC为对称信道。因此当输入分布为等概分布时，达到信道容量：

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X;Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \log|\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r}) \\ &= \log 4 - H(\frac{1-P}{2}, \frac{1-P}{2}, \frac{P}{2}, \frac{P}{2}) \end{aligned}$$

上周作业解答

(c)

$$\begin{bmatrix} 1\text{-P} & \text{P} & 0 \\ \text{P} & 1\text{-P} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：设输入信道的符号概率分布为 p_0, p_1, p_2，输出符号的概率分布为 q_0, q_1, q_2。

方法一：假设 p_0, p_1, p_2 全不为零，则根据公式，可列出方程组 $I(x = k; Y) = C$，$k = 0, 1, 2$，其中，

$$I(x = k; Y) = \sum_{\mathcal{Y}} p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{p(y)}$$

方程组为（见下页）：

上周作业解答

$$\begin{cases} (1-P)\log\frac{1-P}{q_0} + P\log\frac{P}{q_1} = C \text{ ①} \\ P\log\frac{P}{q_0} + (1-P)\log\frac{1-P}{q_1} = C \text{ ②} \\ \log\frac{1}{q_2} = C \text{ ③} \\ \sum_{i=0}^{2} q_i = 1 \text{ ④} \end{cases}$$

解得各输出分布为（可由式①和②得 $q_0 = q_1$ 化简运算）

$$\begin{cases} q_0 = q_1 = \frac{2^{-H(P)}}{1+2^{-H(P)+1}} \\ q_2 = \frac{1}{1+2^{-H(P)+1}} \\ C = \log(1+2^{-H(P)+1}) \end{cases}$$

并可根据概率转移矩阵计算输入分布为 $p_0 = p_1 = q_0$，$p_2 = q_2$。

上周作业解答

方法二：可以利用书本和信道的性质，将题目中信道拆成两个信道。

Theorem 1 (定理4.5.2[王育民(2013)])

信道*1*和信道*2*的和信道容量 C 满足下式

$$2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$$

或

$$C = \log(2^{C_1} + 2^{C_2})$$

上周作业解答

题目中的信道可分解为信道1

$$\begin{bmatrix} \text{1-P} & \text{P} \\ \text{P} & \text{1-P} \end{bmatrix}$$

和信道2

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

其中信道1为对称信道，其容量 C_1 为

$$C_1 = 1 - H(P)$$

信道2为无噪信道，其容量 C_2 为

$$C_2 = 0$$

因此，信道1和信道2的和信道容量 C 为

$$C = \log(1 + 2^{1-H(P)})$$

上周作业解答

Theorem 2 (定理4.5.1[王育民(2013)])

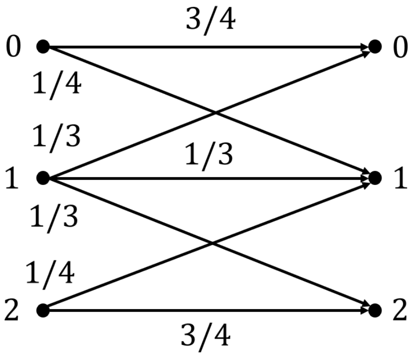
独立并行信道的容量为各分信道容量之和，即

$$C = C_1 + C_2$$

Exercise 2.[王育民(2013)]

计算图中DMC的容量及最佳输入分布。

(a)



上周作业解答

解：设输入信道的符号概率分布为 p_0, p_1, p_2，输出符号的概率分布为 q_0, q_1, q_2。

由图写出转移概率矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

上周作业解答

假设 p_1 为零，p_0, p_2 不为零。列出方程：

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}\log\dfrac{3/4}{q_0}+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{1/4}{q_1}=C \quad ① \\ \dfrac{1}{3}\log\dfrac{1/3}{q_0}+\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1/3}{q_1}+\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1/3}{q_2}\le C \quad ② \\ \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1/4}{q_1}+\dfrac{3}{4}\log\dfrac{3/4}{q_2}=C \quad ③ \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2}q_i=1 \quad ④ \end{cases}$$

由式①和③得 $q_0=q_2$。

上周作业解答

根据转移概率矩阵列出 p 和 q的方程组 $q_j = \sum_{i=0}^{2} p_i p(j|i)$，解得输出分布为

$$[\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$$

输入分布为

$$[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$$

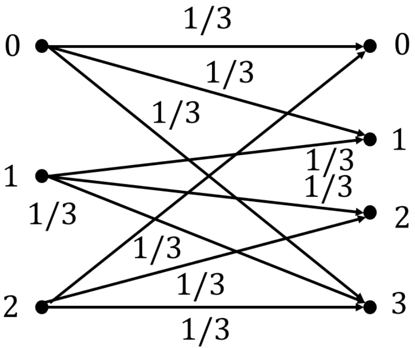
信道容量

$$C = 3/4$$

代入方程②，不等式成立，故该分布为最终解。

上周作业解答

(b)



解：根据书中关于准对称信道的定义和性质

Definition 3 (定义4.2.6[王育民(2013))

若信道输出集 Y 可以划分成几个子集，而每个子集所对应的信道转移概率矩阵 P 中的列所组成的子阵具有下述性质：

(1) 每一行都是第一行的置换。

(2) 每一列都是第一列的置换。

则称信道为准对称信道。

显然，准对称信道关于输入是对称的。特别当输出集 Y 划分的子集只有一个，此时信道关于输出和输入都是对称的，称它为对称信道。

Theorem 4 (定理4.2.3[王育民(2013))

实现准对称DMC信道容量的输入分布是准对称的。

上周作业解答

由图写出转移概率矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

可知该矩阵对应信道为准对称信道。所以当输入为等概分布时，信道达到容量。此时输出分布为：

$$[\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$$

据此计算信道容量 C 为

$$\begin{aligned} C &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \sum_{i=0}^{3} q_i \log \frac{1}{q_i} + H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}) \\ &= 0.3899 \end{aligned}$$