随堂测解答

专选

掷三个骰子，点数记为 X_1, X_2, X_3，设 X_1, X_2, X_3独立，且骰子均匀。

1)求 $\max\{X_1, X_2, X_3\}$的分布律。

2)求 $\min\{X_1, X_2, X_3\}$的分布律。

随堂测解答

1)求 $\max\{X_1, X_2, X_3\}$的分布律。

设 $M_+ = \max\{X_1, X_2, X_3\}$。

计算累积分布——设单个骰子点数为 $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$，其累积分布率为 $F_X(x)$。因为三个骰子独立同分布，所以它们中最大点数的累积分布可以表示为：

$$Pr\{M_+ \leq x\} = \prod_{i=1}^{3} Pr\{X_i \leq x\} = [F_X(x)]^3$$

$F_X(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} p_i = \frac{\lfloor x \rfloor}{6}$，所以 $F_{M_+}(x)$ 为：

$$F_{M_+}(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 1 \\ 1/216, 1 \leq x < 2 \\ 8/216, 2 \leq x < 3 \\ 27/216, 3 \leq x < 4 \\ 64/216, 4 \leq x < 5 \\ 125/216, 5 \leq x < 6 \\ 1, 6 \leq x < +\infty \end{cases}$$

随堂测解答

计算概率质量函数——有了累积分布，容易计算得：

$$Pr\{M_+ = x\} = [F_X(x)]^3 - [F_X(x-1)]^3$$

所以

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/216, x = 1 \\ 7/216, x = 2 \\ 19/216, x = 3 \\ 37/216, x = 4 \\ 61/216, x = 5 \\ 91/216, x = 6 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

随堂测解答

2)求 $\min\{X_1, X_2, X_3\}$的分布律。

设 $M_- = \min\{X_1, X_2, X_3\}$。

计算累积分布——要计算 $Pr\{M_- \leq x\}$，可以先计算出 $Pr\{M_- > x\}$。根据三个骰子独立同分布的性质，可得：

$$
\begin{aligned}
Pr\{M_- \leq x\} &= 1 - Pr\{M_- > x\} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{3} Pr\{X_i > x\} \\
&= 1 - [1 - F_X(x)]^3
\end{aligned}
$$

计算概率质量函数——有了累积分布，容易计算得：

$$
Pr\{M_- = x\} = Pr\{M_- \leq x\} - Pr\{M_- \leq x - 1\}
$$

随堂测解答

专必

三个人掷骰子，得到的点数分别记为是 $X_1X_2X_3$，设最大点数是 $M_+ = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ 。

1）求 M_+ 的分布律。

2）若掷得点数最大的人一起平分 1 分。求第一个人得分 Y_1 的分布律。

3）求第一个人得分的数学期望 $E(Y_1)$。

随堂测解答

1）求 M_+ 的分布律

见专选第 1 小题的解答。

2）若掷得点数最大的人一起平分 1 分。求第一个人得分 Y_1 的分布律。

Y_1 的可能取值为 0，1/3，1/2，1。

①当 $\mathbf{Y_1 = \frac{1}{3}}$ 时，此时有 $X_1 = X_2 = X_3$ 均为最大值，则
$P(Y_1 = \frac{1}{3}) = (\frac{1}{6})^3 \times 6 = \frac{6}{216}$

②当 $\mathbf{Y_1 = \frac{1}{2}}$ 时，有两个最大值
$P(Y_1 = \frac{1}{2}) = \sum_{i=2}^{6} \binom{2}{1} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{i-1}{6} = \frac{30}{216}$

③当 $\mathbf{Y_1 = 1}$ 时，X_1 最大，则
$P(Y_1 = 1) = \sum_{i=2}^{6} \frac{1}{6} \times (\frac{i-1}{6})^2 = \frac{55}{216}$

随堂测解答

④当 $\mathbf{Y_1 = 0}$ 时，由于已经计算出 $\mathbf{Y_1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1}$ 下的概率，因此

$P(Y_1 = 0) = 1 - P(Y_1 = \frac{1}{3}) - P(Y_1 = \frac{1}{2}) - P(Y_1 = 1) = \frac{125}{216}$

现在通过分类讨论，验证一下这个答案。 $\mathbf{Y_1 = 0}$ 分为两种情况： X_1 点数最小；以及 X_1 点数为次小，排在三个骰子点数的中间。

$$
\begin{aligned}
P(X_1\text{为唯一最小}) &= \sum_{i=1}^{6} P(X_1 = i)P(X_2 > i)P(X_3 > i) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6}\left(\frac{6-i}{6}\right)^2 = \frac{55}{216}
\end{aligned}
$$

$$
P(\text{共两个最小，其中包含}X_1) = \sum_{i=1}^{5} \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{6-i}{6} = \frac{30}{216}
$$

相加得到

$P(X_1\text{点数最小}) = P(X_1\text{为唯一最小}) + P(\text{含}X_1\text{共两个最小}) = \frac{85}{216}$。

随堂测解答

当 X_1 点数为次小时

$$
\begin{aligned}
P(X_1\text{点数为次小}) &= \sum_{i=2}^{5} P(X_1 = i)P(X_2 < i)P(X_3 > i) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{5} P(X_1 = i)P(X_2 > i)P(X_3 < i) \\
&= 2 \times \sum_{i=2}^{5} \frac{1}{6}\frac{i-1}{6}\frac{6-i}{6} \\
&= \frac{40}{216}
\end{aligned}
$$

所以，$P(Y_1 = 0) = P(X_1\text{点数最小}) + P(X_1\text{点数为次小}) = \frac{125}{216}$

随堂测解答

3）求第一个人得分的数学期望 $\mathsf{E}(Y_1)$。

解法1. 设三个人总得分为 $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$，根据规则，可以知道 Y 的期望 $\mathsf{E}(Y)$ 为：

$$\mathsf{E}(Y) = 1$$

由于 Y_1, Y_2, Y_3 独立同分布，所以

$$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(Y_1 + Y_2 + Y_3) = \mathsf{E}(Y_1) + \mathsf{E}(Y_2) + \mathsf{E}(Y_3)$$

因此，

$$\mathsf{E}(Y_1) = \mathsf{E}(Y_2) = \mathsf{E}(Y_3) = \frac{1}{3}$$

解法2. 根据第二小题求得的概率分布计算 Y_1 的期望。