第十一章　　　　　　　网络

§11.1　　　　　　流

*作为商品从产地运送到市场必经之途的运输网络，把它看作是具有某些附加结构的有向图时，可以进行极为有效的分析。

°网络：一个网络 N 是指一个具有两个特定顶点子集 X 和 Y 的有向图 D(称为 N 的基础有向图)，以及一个在 D 的弧集 A 上定义的非负整数数值函数 c；假定顶点集 X 和 Y 是不相交的和非空的。

称 X 中的顶点是 N 的发点，Y 中的顶点是 N 的收点，既不是发点又不是收点的顶点称为中间点；所有中间点的集合记为 I。

称函数 c 是 N 的容量函数，它在弧 a 上的值称为 a 的容量。一条弧的容量可以看作沿着这条弧输送商品所能允许的最大流量，而发点对应于产地，收点对应于市场。

°一个网络的例子：（见图 11.1）

若$S \subseteq V$，则用$\bar{S}$表示$V \backslash S$。

若 f 是定义在 N 的弧集 A 上的实值函数，并且$K \subseteq A$，则用 f(K)表示$\sum_{a \in K} f(a)$。

若 K 是形为$(S, \bar{S})$的弧集，则把$f(S, \bar{S})$写成$f^{+}(S)$，而把$f(\bar{S}, S)$写成$f^{-}(S)$。

°流：网络 N 中的流是指定义在 A 上的一个整数值函数 f，使得

$$0 \le f(a) \le c(a), \quad 对所有\ a \in A\ 成立 \qquad (11.1)$$

以及 $$f^-(v) = f^+(v), \quad 对所有\ v \in I\ 成立 \qquad (11.2)$$

f 在弧 a 上的值$f(a)$可以看作是流 f 中物资沿着 a 输送的流量。条件(11.1)式中的上界称为容量约束，它给出一个自然的限制，即沿一条弧的流量不能超过这条弧的容量。(11.2)式称为守恒条件，它要求对于任何中间点 v，物资输入 v 的流量等于输出 v 的流量。

对于中间点，流入会等于流出

°零流：每个网络至少有一个流，即对任何$a \in A$，由$f(a) = 0$所定义的函数显然满足(11.1)式和(11.2)式，它称为零流。

°非平凡流的例子：(见图 11.2)

°合成流量：若 S 是网络 N 的顶点子集，而 f 是 N 中的流，则$f^+(S) - f^-(S)$称为 f 流出 S 的合成流量，而$f^-(S) - f^+(S)$是 f 流进 S 的合成流量。

°流的值：对于任何流 f，流出 X 的合成流量等于流进 Y 的合成流量。这个共同的量称为 f 的值。用val f表示。于是

$$\mathrm{val}\ f = f^+(X) - f^-(X)。$$

°最大流：N 中的流 f 称为最大流，是说：N 中不存在流f'，使得$\mathrm{val}\ f' > val\ f$。

最大流在网络中有重要地位。

-

°将任一网络简化为只有一个发点和一个收点的网络：

对于给定的网络 N，构作一个新的网络N'如下：

(i)在 N 中添加两个新的顶点 x 和 y；

(ii)用一条容量为∞的弧把 x 连接到 X 中的每一个顶点；

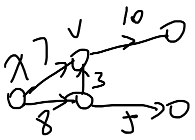
(iii)用一条容量为∞的弧把 Y 中的每一个顶点都连接到 y；

(iv)指定 x 为N'的发点，而 y 为N'的收点。

°例子：图 11.1 中的网络转化为图 11.3 的网络N'。

°N 和N'中的流以一个简单的方式相互对应。若 f 是 N 中的流，则由

发点X只出不进 收点Y只进不出



$$f'(a)=\begin{cases} f(a) & ,\quad 若\ a\ 是\ N\ 的弧 \\ f^{+}(v)-f^{-}(v), & 若\ a=(x,v) \\ f^{-}(v)-f^{+}(v), & 若\ a=(v,y) \end{cases} \qquad (11.3)$$

相当于原来的X和Y变成了中间节点，也要满足守恒

所定义的函数f'是N'中使得$\mathrm{val}\,f'=\mathrm{val}\,f$的流。

反之，N'中的流在 N 的弧集上的限制就是 N 中具有相同值的流。

§ 11.2 割

°割：设 N 是具有单一发点 x 和单一收点 y 的网络。N 中的割是指形如$(S,\bar{S})$的弧集，这里$x\in S$, 而 $y\in\bar{S}$。

只包含S发向Sbar的线，即只有正向边，没有反向边

°例如：(见图 11.4)

其中红线表示一个割。

°割 K 的容量：指它的各条弧的容量之和。我们用 cap K 表示 K 的容量。

于是

$$\text{cap } K = \sum_{a \in K} c(a)$$

°例如：图 11.4 中的割的容量为 16.

引理 11.1：对于 N 中的任一流 f 和任一割$(S, \bar{S})$均有

$$\text{val } f = f^+(S) - f^-(S) \qquad (11.4)$$

证明：设 f 是 N 的流，$(S, \bar{S})$是 N 中的割。从流和流值的定义，有

$$f^+(v) - f^-(v) = \begin{cases} \text{val } f, & 若\ v = x \\ 0\ , & 若\ v \in S \backslash \{x\} \end{cases}$$ 因为只有一个出发点x

把 S 上所有顶点的这些方程加起来，并化简(见作业)，得到

$$\text{val } f = \sum_{v \in S} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(S) - f^-(S)。 \quad \blacksquare$$

$$= \underbrace{\sum_{v\in S\, u\in S} f(v,u)}_{①} + \sum_{v\in S, u\in \bar{S}} f(v,u) - \underbrace{\sum_{v\in S\, u\in S} f(u,v)}_{②} - \sum_{v\in S\, u\in \bar{S}} f(u,v)$$

因为①和②都是把S中的边全部求和一遍 故①=②

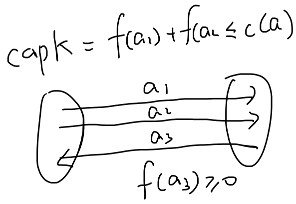
°为方便起见，若$f(a) = 0$，则称弧 a 为 f 零的；若$f(a) > 0$，则称弧 a 是 f 正的；若$f(a) < c(a)$，则称弧 a 是 f 非饱和的；若$f(a) = c(a)$，则称弧 a 是 f 饱和的。

定理 11.2：对于 N 中的任一流 f 和任一割$K = (S, \bar{S})$，均有

$$\text{val } f \le \text{cap } K \qquad (11.5)$$

最小的capK是只有S到Sbar的边，因此等号要成立capK一定是最小的情况。此时capK等于val f，则每一条Sbar到S的流都是0 每一条正向边都饱和

而且，(11.5)式中的等式成立当且仅当$(S,\bar{S})$中的每条弧都是 f 饱和的，且$(\bar{S},S)$中的每条弧都是 f 零的。



证明：根据(11.1)式，有

$$f^{+}(S) \le \mathrm{cap}K \qquad (11.6)$$

以及

$$f^{-}(S) \ge 0 \qquad (11.7)$$

把不等式(11.6)和(11.7)代入(11.4)式，即得(11.5)式。再注意到(11.6)式中等式成立，当且仅当$(S,\bar{S})$中每条弧都是 f 饱和的，而(11.7)式中等式成立当且仅当$(\bar{S},S)$中的每条弧都是 f 零的，即得定理的第 2 个结论。 ■

°最小割：N 中的割 K 称为最小割，是说：N 中不存在割K'使得$\mathrm{cap}\,K' < \mathrm{cap}\,K$。若$f^*$是最大流，而$\tilde{K}$是最小割，则作为定理 11.2 的特殊情形，有

$$\mathrm{val}\,f^* \le \mathrm{cap}\,\tilde{K} \qquad (11.8)$$

推论 11.2：设 f 是流而 K 是割，适合$\mathrm{val}\,f = \mathrm{cap}\,K$。则 f 是最大流而 K 是最小割。

证明：设f^*是最大流而$\tilde{K}$是最小割，根据(11.8)式，有

$$\mathrm{val}\,f \le \mathrm{val}\,f^* \le \mathrm{cap}\,\tilde{K} \le \mathrm{cap}\,K。$$

因为根据假设，$\mathrm{val}\,f = \mathrm{cap}\,K$，由此推得$\mathrm{val}\,f = \mathrm{val}\,f^*$，以及$\mathrm{cap}\,K = \mathrm{cap}\,\tilde{K}$，于是 f 是最大流而 K 是最小割。 ■

§11.3　　　　　　最大流最小割定理

设 f 是网络 N 中的一个流。对于 N 中的每条路 P，我们用一个非负整数$\iota(P)$与之相伴，其定义为

$$\iota(P)=\min_{a\in A(P)}\iota(a)$$

其中
$$\iota(a)=\begin{cases}c(a)-f(a), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧}\\ f(a)\quad\quad\quad\quad, & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧}\end{cases}$$

容易看出，$\iota(P)$是在不违反条件(11.1)的前提下沿着 P 所能增加的流量(相对于 f)的最大数值。若$\iota(P)=0$，则称路 P 是 f 饱和的。若$\iota(P)>0$，则称路 P 是 f 非饱和的(或者等价地说，若 P 的每条顺向弧是 f 非饱和的而 P 的每条反向弧是 f 正的，则称路 P 是 f 非饱和的)。简单地说，f 非饱和路是没有用足整个容量的路。

°f 可增路：是指从发点 x 到收点 y 的 f 非饱和路。

°例子：(见图 11.5)

路$P=xv_1v_2v_3y$是一条 f 可增路。$\iota(P)=2$。

°网络中存在 f 可增路 P 说明流 f 不是最大流。事实上，沿着 P 增减一个值为$\iota(P)$的附加流得到

$$
\bar{f}(a)=\begin{cases} f(a)+\iota(P), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧} \\ f(a)-\iota(P), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧} \\ f(a) & ,\ \text{其它} \end{cases} \tag{11.9}
$$

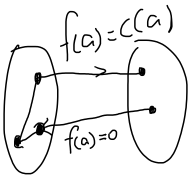
正向弧加，反向弧减，就可以保证每个中间节点仍然保持守恒，同时增大了发点x到收点y的val f的总大小

定义的新流$\bar{f}$，满足：$\text{val}\,\bar{f} = \text{val}\,f + \iota(P)$。

$\bar{f}$称为基于 P 的修改流。(见图 11.5 (b))

定理 11.3：N 中的流 f 是最大流当且仅当 N 不包含 f 可增路

证明：若 N 包含 f 可增路 P，则 f 不能是最大流，因为基于 P 的修改流$\bar{f}$具有更大的值。



反之，假设 N 不包含 f 可增路。我们的目的是证明 f 是最大流。设 S 表示 N 中用 f 非饱和路与 x 连接起来的所有顶点的集。显然$x \in S$。又由于 N 没有 f 可增路，所以$y \in \bar{S}$。因此，$K = (S, \bar{S})$是 N 中的一个割。我们将证明$(S, \bar{S})$中每条弧是 f 饱和的，而$(\bar{S}, S)$中的每条弧是 f 零的。

考察尾$u \in S$，而头$v \in \bar{S}$的弧 a。由于$u \in S$，所以存在一条 f 非饱和(x, u)路 Q。若 a 是 f 非饱和的，则 Q 可以由弧 a 扩充成为一条 f 非饱和(x, v)路。但是$v \in \bar{S}$，因此不能存在这样的路。所以 a 必然是 f 饱和的。同理可证：若$a \in (\bar{S}, S)$，则 a 必然是 f 零的。

应用定理 11.2，得到

$\text{val}\,f = \text{cap}\,K$。

于是从推论 11.2 可以推得 f 是最大流(以及 K 是最小割)。 ■

S是从x出发的非饱和路的终点集合，Sbar是V/S的集合

*在上述证明过程中，我们证实了适合val f = cap K的最大流 f 和最小割 K 的存在，从而有以下定理。

定理 11.4：在任何网络中，最大流的值等于最小割的容量。

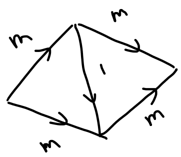
*定理 11.4 称为最大流最小割定理。

°求一个网络 N 中的最大流的算法(标号法)：

°基本思想：从一个已知的流(例如零流)开始，递推地构作出一个其值不断增加的流序列，并且终止于最大流。在每一个新的流 f 作出后，如果存在 f 可增路，则用被称为标号程序的一个子程序来求出它。若找到这样一条路 P，则作出基于 P 的修改流$\bar{f}$，并且取为这个序列的下一个流。如果不存在 f 的可增路，则算法终止。根据定理 11.3，f 就是最大流。

标号法不一定是一个多项式时间算法，可能是和边长度有关的时间复杂度
用广度优先搜索可以找到最短路径，避免标号法的问题

°标号法举例：(见图 11.6)



°f 非饱和树

°生长树的方法

°修改标号的过程

°突破

°修改流

*标号算法的问题：(见图 11.7)

作业 15：

1. 证明：对于 N 中的任一流 f 和任一$\mathrm{S} \subseteq \mathrm{V}$，都有

$$\sum_{v \in S} [f^+(v) - f^-(v)] = f^+(S) - f^-(S)$$

(注意：一般说来，$\sum_{v \in S} f^+(v) \neq f^+(S), \sum_{v \in S} f^-(v) \neq f^-(S)$)

2. 由两家工厂x_1和x_2生产的一种特定商品，通过下列网络运送到市场y_1, y_2, y_3。利用标号法确定从工厂到市场所能运送的最大总量。

(见图 11.8)

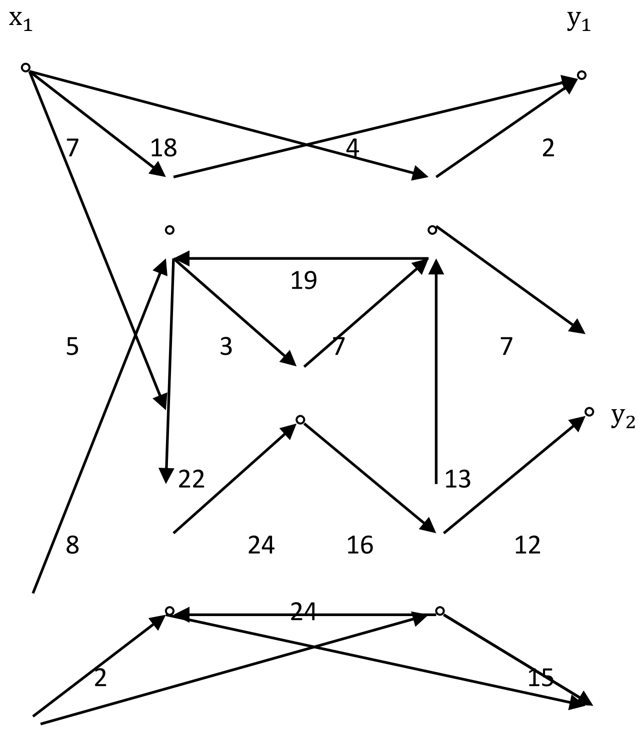


图 11.8