

信息论与编码

马啸

maxiao@mail.sysu.edu.cn

计算机学院
中山大学

2021 年春季学期

1 信道编码的基本概念

- 一般码的定义
- 一般码的性能参数
- 一般码的仿真
- 随机一般码集合

2 线性分组码

- 有限域
- 线性空间
- 线性分组码
- 编译码算法
- 线性分组码的简单例子

一般码的定义

Definition 1 (一般码定义)

设 \mathcal{A} 是一个非空集合, \mathcal{A} 上所有 n -重组的全体, 记作 $\mathcal{A}^n = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) | a_i \in \mathcal{A}, 0 \leq i < n\}$, 也称为 \mathcal{A} 的 n -重笛卡儿积。一个码 (或码表), 记作 $\mathcal{C}(n, M)$, 可以表示成一个 $M \times n$ 的阵列

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{(0)} \\ \mathbf{c}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^{(M-1)} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{c}^{(i)} \in \mathcal{A}^n, 0 \leq i < M$, 称为码字。我们称 \mathcal{C} 是定义在 \mathcal{A} 上的码。

一般码的定义

Example 2

设 $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ，则 \mathcal{A} 上的码通常称为二元码。例如：

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

若 \mathcal{A} 是有限集合，且 \mathcal{A} 的元素个数 $|\mathcal{A}| > 2$ ，我们称 \mathcal{A} 上的码为多元码。

一般码的定义

Example 3

实数集 \mathbb{R} 上的码有时候也称为星座（constellation），如：

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

称为正交相移键控（quadrature phase shift keying, QPSK）信号星座，可以用等间隔分布在平面单位圆上的四个点表示。

一般码的定义

一般码的编译码从概念上来讲是很简单的。编码是从消息集合 $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, M-1\}$ 到 \mathcal{C} 的一个映射，即 $\phi: \mathcal{M} \mapsto \mathcal{C}$ 。若要传送消息 $i \in \mathcal{M}$ ，编码器输出第 i 个码字 $\mathbf{c}^{(i)}$ ，即 $\phi(i) = \mathbf{c}^{(i)}$ 。

一般码的定义

设 $\mathbf{c}^{(i)}$ 经过一个信道之后，接收端收到一个 n -重组 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}^n$ ，其中 \mathcal{B} 是信道的输出字符集合。通常情况下， $\mathbf{c}^{(i)}$ 与 \mathbf{y} 之间的对应关系不是确定性的，而是一个“一对多”的对应关系。确切地说，给定 $\mathbf{c}^{(i)}$ ， \mathbf{y} 是按照某种条件概率分布律分布在接收空间 \mathcal{B}^n 上。一个译码准则就是如何从 \mathbf{y} 推测 $\mathbf{c}^{(i)}$ 。

从概念上讲，一个译码准则就是把 \mathcal{B}^n 划分成 M 个互不相交的区域，

即 $\mathcal{B}^n = \bigcup_{i=0}^{M-1} \mathcal{D}^{(i)}$ ，且 $\mathcal{D}^{(i)} \cap \mathcal{D}^{(j)} = \emptyset, i \neq j$ 。译码描述为一个映

射 $\psi: \mathcal{B}^n \mapsto \mathcal{M}$ 。具体地，若 $\mathbf{y} \in \mathcal{D}^{(i)}$ ，则 $\psi(\mathbf{y}) = i$ 。有时候，我们也

把整个接收空间划分成 $M+1$ 个互不相交的区域 $\mathcal{B}^n = \bigcup_{i=0}^M \mathcal{D}^{(i)}$ 。若接

收 $\mathbf{y} \in \mathcal{D}^{(M)}$ ，则译码器输出“译码失败”。这种情况下，我们称为不完全译码，而之前的称为完全译码。

一般码的定义

上面描述的编译码“算法”从原理上看很简单，但是显然不适合很大的 M 。一方面，我们需要足够的空间存储码表；另一方面，我们译码时也要搜索整个码表。

一般码的性能参数

由于接收码字与发送码字之间的依赖关系不是确定性关系，因而译码结果有可能与发送消息不一致。设信道转移概率已知，记为 $P(\mathbf{y}|\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}^n, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}^n$ 。注意，若 y 是连续变量，则 $P(y|x)$ 表示条件概率密度，对 y “求和”可以理解为“积分”。记 E 是译码错误事件，则给定发送消息是 i 的条件下的译码错误概率是

$$P(E|\text{发送 } i) = \sum_{\mathbf{y} \notin \mathcal{D}^{(i)}} P(\mathbf{y}|\mathbf{c}^{(i)}).$$

若每个消息发送的概率已知，则译码错误概率

$$P(E) = \sum_{i=0}^{M-1} P(\text{发送 } i) \cdot P(E|\text{发送 } i),$$

此概率称为误帧率（frame error rate, FER）。

一般码的性能参数

前面已经看到，一个确定的译码算法对应一个划分。常见的准则之一是最小错误概率译码准则，即寻找一个划分，使得 $P(E)$ 达到最小。而要确定一个划分，就是要对每个 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}^n$ 找一个“归宿” $\mathcal{D}^{(i)}$ ，根据贝叶斯公式，

$$P(\text{发送 } i | \mathbf{y}) = \frac{P(\text{发送 } i) \cdot P(\mathbf{y} | \mathbf{c}^{(i)})}{P(\mathbf{y})}.$$

我们可以计算给定 \mathbf{y} 的条件下的所有后验概率 $P(\text{发送 } i | \mathbf{y}), 0 \leq i < M$ 。

一般码的性能参数

这组概率可以这样直观理解，若我们独立重复地观察所讨论的编码传输系统，则在充分长的观察样本序列中， \mathbf{y} 可能发生了很多次，比如发生了 N 次；在这 N 次中，大致有 $N \cdot P(\text{发送 } i | \mathbf{y})$ 次是对应发送 i 的。因此，为了最小化误码率（最大化正确译码概率），我们应该把 \mathbf{y} 判决为 \hat{i} ，使得 $P(\text{发送 } \hat{i} | \mathbf{y}) = \max_i P(\text{发送 } i | \mathbf{y})$ 。

当 $P(\text{发送 } i) = \frac{1}{M}, 0 \leq i < M$ 时，最大后验概率译码可以简化为求 \hat{i} ，使得 $P(\mathbf{y} | \text{发送 } \hat{i}) = \max_i P(\mathbf{y} | \text{发送 } i)$ 。这个准则称为**最大似然序列译码**

（**maximum likelihood decoding, MLD**），其在发送消息等概率时，等价于最大后验概率译码，可以使得误码率最小。在先验概率 $P(\text{发送 } i)$ 未知或者定义不明确时，我们通常采用最大似然序列译码。

当然，若有多个 i ，使得 $P(\text{发送 } i | \mathbf{y})$ 达到最大，我们可以按照某个既定规则选择其中一个，或者宣告译码失败。这个译码准则使得误码率达到最小，又称为**最大后验概率序列译码**（**sequence maximum a posteriori decoding, Sequence MAP**）。

一般码的性能参数

影响一个码的误码性能的因素很多，其中一个重要的因素是距离特性。

Definition 4

设 \mathcal{A} 是一个非空集合，我们称 \mathcal{A} 为距离空间，是指在 \mathcal{A} 上引入了一个二元实函数 $\rho(x, y)$ ，满足下列三个条件：对于任意的 $x, y, z \in \mathcal{A}$,

- (1) $\rho(x, y) \geq 0$ ，且 $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ （非负性）；
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ （对称性）；
- (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ （三角不等式：三角形两边之和不小于第三边）。

我们称 ρ 是 \mathcal{A} 上的一个距离。同一个集合上可以根据研究需要，定义不同的距离。若为避免混淆，以 ρ 为距离的距离空间 \mathcal{A} 记作 (\mathcal{A}, ρ) 。

一般码的性能参数

Example 5

对于任意给定的非空集合 \mathcal{A} ，我们总可以引入汉明（Hamming）距离：

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases},$$

其中 $x, y \in \mathcal{A}$ 。此时我们称 (\mathcal{A}, ρ) 为汉明空间，有时记 ρ 为 d_H 。

设 d_H 是 \mathcal{A} 上的汉明距离，则可以定义 \mathcal{A}^n 上的距离： $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{t=0}^{n-1} d(x_t, y_t)$ 。此距离也称为 \mathcal{A}^n 上的汉明距离。码 \mathcal{C} 的最小汉明距离定义为： $d_{\min} = \min\{d(\mathbf{c}^{(i)}, \mathbf{c}^{(j)}) | \mathbf{c}^{(i)}, \mathbf{c}^{(j)} \in \mathcal{C}, i \neq j\}$ 。

由于任意两个码字至少有 d_{\min} 个位置不同，所以任意两个码字中不可能存在完全相同的 $n - d_{\min} + 1$ 位，并且，存在两个码字，其中的 $n - d_{\min}$ 位相同。

一般码的性能参数

我们有如下的命题，称为辛格尔顿（Singleton）界。

Proposition 1

设有限字符集 \mathcal{A} 上的码 $\mathcal{C}(n, M)$ 具有最小汉明距离 d_{\min} ，则 $M \leq |\mathcal{A}|^{n-d_{\min}+1}$ 。

证明：从 \mathcal{C} 中任意删除掉 $d_{\min} - 1$ 列，则剩余的子阵列仍然具有不同的行。由不同行的个数最多 $|\mathcal{A}|^{n-d_{\min}+1}$ 得证。

一般码的性能参数

给定一个码，我们可以固定一个码字，不妨设为 $\mathbf{c}^{(0)}$ ，然后考察所有码字与 $\mathbf{c}^{(0)}$ 的汉明距离。这些距离可以用一个母函数的形式记录：

$$A(X) = \sum_{i=0}^{M-1} X^{\rho(\mathbf{c}^{(i)}, \mathbf{c}^{(0)})}.$$

这个多项式（合并同类项）的系数也称为 \mathcal{C} 的条件距离谱。形象地说，是站在 $\mathbf{c}^{(0)}$ 的位置四周巡望，看看其他码字离多远。我们也可以考察任何两个码字之间的距离。不同的距离至多有 $\binom{M}{2} = \frac{M(M-1)}{2}$ 种。

一般码的性能参数

Example 6

考虑二元码

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

若从 $\mathbf{c}^{(0)} = (0, 0, 0)$ 的角度看, 其汉明距离谱 $A(X) = 1 + 3X^2$, 其中, 有一个码字距其 0, 三个码字距其 2。

Example 7

若一个码是 n -维实空间 \mathbb{R}^n 的一个非空子集, 我们可以考虑欧几里德

(Euclid) 距离: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{t=0}^{n-1} (x_t - y_t)^2}$ 。对于欧氏距离空间的码, 用平方距离谱取代距离谱更方便。

一般码的性能参数

Example 8

考虑 QPSK 星座，

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix},$$

若从 $\mathbf{c}^{(0)} = (+1, +1)$ 的角度看，其欧氏平方距离谱 $A(X) = 1 + 2X^4 + X^8$ 。这个多项式表示有一个星座点（其实就是自身）离 $(+1, +1)$ 的距离为 0，有两个星座点离 $(+1, +1)$ 的平方距离为 4，有一个星座点离 $(+1, +1)$ 的平方距离为 8。

一般码的性能参数

在实际工程中， M 通常可以写成 2^k 的形式。此时，消息集可以看作是 $\{0,1\}^k$ 。一个 k -重二元组，经过编码之后映射成一个 n -重码元组。在这种场景下，我们可以定义误比特率（bit error rate, BER）。若发送的消息是 $U \in \{0,1\}^k$ ，而译码消息是 \hat{U} ，则 BER 定义为

$$\text{BER} = \frac{\mathbf{E}d_H(U, \hat{U})}{k},$$

其中 \mathbf{E} 表示数学期望。

一般码的仿真

仿真的主要目的是估计 FER 或 BER。仿真模块按照类可以分为三个模块：一个模块是信源—信宿；一个模块是一般码，包括编译码；一个模块是信道。我们建议初学者仅考虑时间离散无记忆信道，其数学描述如下。

若输入一个 n -重组 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^n$ ，则在概率 $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的控制下输出 $\mathbf{y} \in \mathcal{B}^n$ ，且

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{n-1} P(y_i|x_i).$$

在仿真中，我们假定 $P(y_i|x_i)$ 是已知的。更多情况下，我们约定 y_i 与 x_i 之间通过运算式子建立联系，而这个运算过程中有随机数参与。

信源—信宿的角色是产生待发送的数据，比较译码的结果，并统计错误事件。一般码模块要定义码长，定义码表的大小等，也就是要定义阵列 \mathcal{C} 。此外，一般码模块还要包括编译码函数等。

一般码的仿真

这些模块定义好之后，可以按照下述流程完成仿真。

0. 初始化: $\text{num_BE} = 0$, $\text{num_FE} = 0$, $\text{tot_Fr} = 0$ 。

1. 循环:

while ($\text{tot_Fr} \leq \text{max_Fr}$ 且 $\text{num_FE} \leq \text{max_FE}$)

按照均匀分布产生一个消息 $u \in \mathcal{M}$;

编码得到码字 $\mathbf{c}^{(u)}$;

经过信道得到 \mathbf{y} ;

译码得到 \hat{u} ;

$\text{tot_Fr} \leftarrow \text{tot_Fr} + 1$;

如果 $\hat{u} \neq u$,

则 $\text{num_FE} \leftarrow \text{num_FE} + 1$, $\text{num_BE} \leftarrow \text{num_BE} + d_H(\hat{u}, u)$ 。

2. 计算:

$$\text{FER} = \frac{\text{num_FE}}{\text{tot_Fr}},$$

$$\text{BER} = \frac{\text{num_BE}}{\text{tot_Fr} * k}, \text{ 其中 } k = \log_2 |\mathcal{M}|.$$

随机一般码集合

一个随机码集合可以描述为一个码表的集合，且其中每个码表均被赋予一个概率（或概率密度）。

Example 9

考虑 $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ 上的 $(2, 2)$ 码集，这样的码表共有 16 个，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

若我们赋予每个阵列概率 $\frac{1}{16}$ ，可以得到一个随机码集。当然，我们也可以赋予不同的概率。从概念上讲，任何概率向量 $(p_0, p_1, \dots, p_{15})$, $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ ，均可以定义随机码集。

随机一般码集合

Example 10

考虑 \mathbb{R} 上的 $(2, 2)$ 码集, 这样的码表具有 $\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}$ 的形式, 因而有无穷多个码表。如果我们约定 c_{ij} 是按照正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 独立产生的, 我们同样也得到了一个随机码集。

随机一般码集合

随机码集是 Shannon（香农）研究信道编码定理时引入的重要工具。Shannon 的基本想法可以粗略描述如下。

考虑一个随机码集 (n, M) ，给定其中一个特定的码表 \mathcal{C} ，我们可以定义 FER，这个 FER 可以看作 \mathcal{C} 的函数。进而，我们可以定义码集的平均 FER，即

$$\text{FER} = \sum_{\mathcal{C}} P(\mathcal{C}) \cdot \text{FER}(\mathcal{C}).$$

当 \mathcal{C} 是定义在连续集上时，上面的求和可以换成积分。

一个简单的事实是，对于某个 $\epsilon > 0$ ，如果可以证明 $\text{FER} \leq \epsilon$ ，则一定有某个特定的码表使得 $\text{FER}(\mathcal{C}) \leq \epsilon$ 。在很多情况下，分析一个具体码的性能比较困难，而给出一个平均 FER 的上界却相对“容易”（当然，对于初学者也不那么容易）。

线性分组码

有限域

设 \mathbb{F} 是一个非空集合，至少包含两个不同的元素。在 \mathbb{F} 上定义两种二元运算，分别记作“+”与“ \times ”，即

+ : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \exists! \gamma \in \mathbb{F}$ (“ $\exists!$ ”表示“存在且唯一”)，使得 $\gamma = \alpha + \beta$ ，称为和。

\times : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \exists! \gamma \in \mathbb{F}$ ，使得 $\gamma = \alpha \times \beta$ ，称为积。

为简单起见，我们通常记 α 与 β 的积为 $\alpha \cdot \beta$ 或 $\alpha\beta$ 。需要指出的是，所谓二元运算是指两个操作数对应一个确定的结果。上述和与积的运算符号“+”与“ \times ”只是表示符号，与实数的和运算、积运算或“大相径庭”。

有限域

我们称 \mathbb{F} 为域，是指所定义的二元运算满足以下九条规律：

1. $(\mathbb{F}, +)$ 是一个交换群，即

1.1 交换律： $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ，有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 。

1.2 结合律： $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ ，有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ 。

1.3 零元： $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \exists \theta \in \mathbb{F}$ ，使得 $\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$ 。

1.4 负元： $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \exists \beta$ ，使得 $\alpha + \beta = \theta$ 。

可以证明，“零元”是唯一的，通常简记为 0 。也可以证明，给定 $\alpha \in \mathbb{F}$ ，负元 β 也是唯一的，简记为 $-\alpha$ （相当于实数中的相反数）。

有限域

2. $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \times)$ 是一个交换群, 即

2.1 交换律: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 有 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ 。

2.2 结合律: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 有 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ 。

2.3 幺元: $\forall \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, \exists e \in \mathbb{F}$, 使得 $\alpha \cdot e = e \cdot \alpha = \alpha$ 。

2.4 逆元: $\forall \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, \exists \beta$, 使得 $\alpha \cdot \beta = e$ 。

同样可以证明, “幺元” 是唯一的, 通常简记为 1。也可以证明, 给定 $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 逆元 β 也是唯一的, 简记为 α^{-1} (相当于实数中的倒数)。

3. 分配律: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$, 有 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ 。

有限域

Example 11

所有实数构成的集合在通常意义下构成一个域，记作 \mathbb{R} 。我们常见的例子还有有理数域（记作 \mathbb{Q} ）、复数域（记作 \mathbb{C} ）。但是全体整数构成的集合在通常的运算下不构成一个域。考虑如下例子：2 是一个整数，但我们找不到整数 x ，使得 $2x = 1$ 。

通俗地讲，一个域就是可以做“加、减、乘、除”四项基本运算的集合。我们之前遇到的域多是无限集合，而在编码领域还经常用到有限域，即元素个数 $|\mathbb{F}| < \infty$ 的域。

Example 12

最简单的有限域 $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ ，其运算规定如下：

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 1 = 1。$$

通常，对于素数 p ，集合 $\mathbb{F} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ 在模 p 意义下做加法与乘法，构成一个域，记作 \mathbb{F}_p ，也称为素数域。

有限域

Example 13

有限域 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 的运算可以用下述两个表格定义。

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

\times	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

同样地，我们可以定义 \mathbb{F}_5 , \mathbb{F}_7 , 等等。

有限域

Example 14

$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 在模 4 运算下，不是域。因为 $2 \cdot 2 = 4 = 0 \pmod{4}$ ，这不符合我们之前的认识：即非零元素之积不应该为零。但是按照域的定义， \mathbb{Z}_4 违反了哪一条呢？比如，我们可以断言，找不到 x ，使得 $2x = 1$ 。详细证明略去。

但是，如果我们规定如下运算，

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

我们可以验证 $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 构成一个域。

有限域

从上面的例子来看，域不仅与集合有关，还与集合上定义的运算有关。对于有限域，有如下优美的结论。

Proposition 2

当且仅当 $q = p^m$ (p 是素数, m 是正整数) 时, 存在 (在同构意义下是唯一存在的) 有限域 \mathbb{F}_q 。

注意, 当 $m > 1$ 时, \mathbb{F}_{p^m} 的运算法则不是简单的模 q 运算。有限域由于其元素个数有限, 有许多组合计数的问题, 具有简单而美的结构。

线性空间

设 \mathbb{F} 是一个域，考虑其 n -重笛卡儿积 \mathbb{F}^n 。我们在 \mathbb{F}^n 上定义如下运算，称为向量加法。

对于 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{F}^n$ ，定义 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ，其中 $c_t = a_t + b_t, 1 \leq t \leq n$ 。

我们也可以定义一个称为数乘的运算。对于 $\lambda \in \mathbb{F}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ ，定义数乘 $\lambda \cdot \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ ，也简记为 $\lambda \mathbf{a}$ 。

向量加法可以看作是“信号叠加”，而数乘可以看作是“信号缩放”，这两个运算都是线性运算。

线性空间

我们可以验证上述定义的两个运算满足如下八条规律。因此， \mathbb{F}^n 是一般线性空间的一个特例。

1. 向量加法：

1.1 交换律： $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。

1.2 结合律： $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 。

1.3 零向量： $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ 。

1.4 负向量： $\forall \mathbf{a}, \exists \mathbf{b}$ ，使得 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。

2. 数乘

2.1 规范性： $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ 。

2.2 累积性： $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{a})$ 。

3. 分配律

3.1 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ 。

3.2 $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$ 。

线性空间

下面我们着重考虑 \mathbb{F}_q^n ，即有限域上的 n -重组全体构成的线性空间。在此约定下，我们不仅可以考虑一般线性空间中的维数、线性相关、线性无关、秩、极大线性无关组等概念，还可以计数。

Definition 15

\mathbb{F}_q^n 的一个非空子集 U ，若在向量加法与数乘下封闭，则称 U 为一个线性子空间，即 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ ，有 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \in U$ ； $\forall \mathbf{a} \in U, \lambda \in \mathbb{F}$ ，有 $\lambda \cdot \mathbf{a} \in U$ 。

线性空间

Example 16

考虑有限域 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 及其上定义的线性空间 \mathbb{F}_2^3 ，这个线性空间包括 8 个向量 $\{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), v_i \in \mathbb{F}_2\}$ 。这个空间的自然基是 $\mathbf{e}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (1, 0, 0)$ ，就是说：

1. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 线性无关；
2. 任何 \mathbb{F}_2^3 中的向量都可以由 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 线性表出。

我们可以验证， $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$ 也满足上面两条性质，因而也是一组基。

线性分组码

Definition 17

设 \mathbb{F} 是一个有限域。一个维数是 k ，长度是 n 的线性分组码，记作 $\mathcal{C}[n, k]$ ，是 \mathbb{F}^n 的一个 k 维线性子空间。

线性分组码

Example 18

我们可以验证,

$$\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$$

中的向量在向量加法与数乘运算下封闭, 因而构成一个线性子空间, 也称为一个码, 记作 $\mathcal{C}[3, 2]$, 因而是二维。

线性分组码

既然 $\mathcal{C}[n, k]$ 是线性子空间，则存在一组基。设 $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{k-1}\}$ 是这样一组基，构造一个矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{k-1} \end{bmatrix},$$

这个矩阵称为生成矩阵，缘由如下：任何一个码字 $\mathbf{c} \in \mathcal{C}[n, k]$ ，总可以找到一组元素 $u_0, u_1, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{F}$ ，使得 $\mathbf{c} = u_0\mathbf{g}_0 + u_1\mathbf{g}_1 + \dots + u_{k-1}\mathbf{g}_{k-1}$ ，即 $\mathbf{c} = \mathbf{uG}$ 。

线性分组码

对于给定的线性分组码，我们可以定义与之对偶的码。

Definition 19

设 $\mathcal{C}[n, k]$ 是一个线性分组码，我们记 \mathcal{C}^\perp （“ \perp ”表示垂直）是与之对偶的码，其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^\perp$ 当且仅当 \mathbf{x} 与所有 \mathcal{C} 中的码字正交，

即 $\forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}, \sum_{i=0}^{n-1} x_i c_i = 0$ 。

需要指出的是，上述“点积”形式是域 \mathbb{F} 上的运算。可以验证，对偶码自身也是线性分组码，维数是 $n - k$ 。设

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{(n-k-1)} \end{bmatrix},$$

是对偶码的生成矩阵，则称其为原码的校验矩阵。

线性分组码

综上所述，对于线性分组码 $\mathcal{C}[n, k]$ ，我们至少有两种描述，即

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{\mathbf{c} | \mathbf{c} = \mathbf{u}\mathbf{G}, \mathbf{u} \in \mathbb{F}^k\}, \\ &= \{\mathbf{c} | \mathbf{c} = \mathbf{H}\mathbf{c}^T = \mathbf{0}, \mathbf{c} \in \mathbb{F}^n\}.\end{aligned}$$

其中，“ T ”表示转置。注意，一个码可有不同形式的生成矩阵与校验矩阵。

编译码算法

线性分组码的编码算法比较简单，设 $\mathcal{C}[n, k]$ 是一个线性分组码， \mathbf{G} 是一个生成矩阵。编码可以表示成一个线性映射

$$\varphi: \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$$

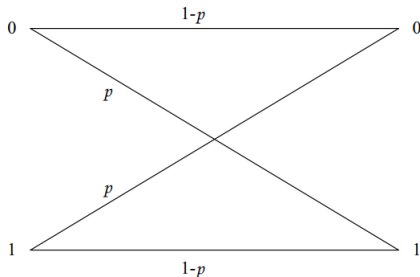
使得，对于给定的 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$ ，有唯一码字 $\mathbf{c} = \mathbf{uG}$ 与之对应。这种一般的编码算法的复杂度与 \mathbf{G} 的稀疏程度有关。在实际工程中，常用的是系统编码方法，此情形对应生成的矩阵 \mathbf{G} 具有形式 $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \ \mathbf{P}]$ ，其中 \mathbf{I} 是 k 阶单位矩阵，而 \mathbf{P} 是 $k \times (n - k)$ 的矩阵。系统码有个校验矩阵，形式为 $[-\mathbf{P}^T \ \mathbf{I}]$ 。对于系统编码，码字具有形式 $\mathbf{c} = (\mathbf{u}, \mathbf{uP})$ 。就是说信息向量 \mathbf{u} “原封不动”地出现在码字中。我们有如下命题。

Proposition 3

任何一个线性分组码 $\mathcal{C}[n, k]$ （必要时经过分量置换），均存在一个系统形式的生成矩阵。

编译码算法

线性分组码的译码算法需要结合信道模型来讨论。我们首先考虑二进制对称信道（binary symmetry channel, BSC）模型，如下图所示：

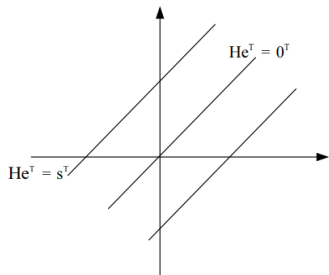


编译码算法

二进制对称信道是无记忆信道，输入是 $\{0, 1\}$ ，以 $p(< \frac{1}{2})$ 的概率发生错误。设 $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ 是发送码字，则接收向量 $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ 可以表示成 $\mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$ ，其中 \mathbf{e} 称为错误图样向量，“+”是模 2 运算。我们说信道是 BSC 是指， \mathbf{e} 是一个独立同分布的随机二进制向量的样本，其分量取 1 的概率是 p 。在接收端，当收到 \mathbf{r} 之后，我们可以计算 $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{r}^T$ ，其中 \mathbf{H} 是校验矩阵。由于 $\mathbf{H}\mathbf{c}^T = \mathbf{0}$ ，我们可以得到 $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{e}^T$ ，我们称 \mathbf{S} 是伴随式。如果 $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ，我们认为没有错误发生。若 $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ ，则一定有错误发生。利用这个性质，我们可以实现检错。而纠错是指，我们想从 $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{e}^T$ 中解出 \mathbf{e} 。这是一个线性方程组，包含有 $n - k$ 个方程， n 个未知数 $\{e_i, 0 \leq i \leq n - 1\}$ 。这个方程组有 2^k 个解，译码就是从中选择一个解。

编译码算法

对于一般的线性方程组 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{s}^T$ ，通常的解法是求出齐次线性方程组 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$ 的所有解，然后再求出一个特解（有可能不存在，但在译码这里一定是存在的）。那么， $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{s}^T$ 的所有解就可以表示为特解 + 齐次线性方程组通解的形式。解方程组的过程也可以从几何的角度去描述。齐次线性方程组 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$ 的解空间是一个线性子空间，在这里实际上就是线性分组码 \mathcal{C} 本身，含有 2^k 个码字。而一般的线性方程组 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{s}^T$ 的解空间相当于把 \mathcal{C} 进行了一个平移，如下图所示。



编译码算法

所以，若 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{s}^T$ 有解的话，与 $\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \mathbf{0}^T$ 的解的个数是一样多的，同为 2^k 个。现在的问题是，如何从这 2^k 个解中挑选出一个作为译码器的输出。

这个挑选规则与信道特性紧密相关，在 BSC 信道条件下，一个错误图样 \mathbf{e} 发生的概率是

$$P(\mathbf{e}) = p^{W_H(\mathbf{e})}(1-p)^{n-W_H(\mathbf{e})}$$

其中， $W_H(\mathbf{e})$ 表示 \mathbf{e} 的汉明重量。可以看出， $P(\mathbf{e})$ 是 $W_H(\mathbf{e})$ 的减函数（注意 $p < \frac{1}{2}$ ）。由此，若 \mathbf{e}_1 与 \mathbf{e}_2 是两个解，但 $W_H(\mathbf{e}_1) < W_H(\mathbf{e}_2)$ ，我们应该选择哪一个呢？一个合理的选择是 \mathbf{e}_1 ，因为它较 \mathbf{e}_2 发生的机会大，这就是最小汉明距离译码。在 BSC 信道条件下等价于最大似然译码。对于码参数比较小的码，我们通常列一个表，给出 \mathbf{s} 与 \mathbf{e} 之间的对应关系。当然，若某个 \mathbf{s} 对应的解中有两个 \mathbf{e} ，它们的重量相等，且同为最轻，则我们可以随意选择一个 \mathbf{e} ，或者报告一个译码失败的信息。

线性分组码例子

Example 20 (重复码)

设 $u \in \mathbb{F}_2$ 是一个待传比特，一个简单的编码是 $u \rightarrow \mathbf{c} = (u, u, \dots, u)$ ，即把 u 重复 n 次。这个码的生成矩阵是 $\mathbf{G} = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times n}$ ，对应的校验矩阵是 $\mathbf{H} = [\mathbf{1}^T \mid \mathbf{I}]$ ，即

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n}.$$

线性分组码例子

该码的码率是 $\frac{1}{n}$ 。若重复码在 BSC 信道上使用，则可用大数逻辑译码，即在接收端，根据一个码字中 1 的个数与 0 的个数的多少来判决。若这个数目相等（当 n 是偶数时才有可能相等），则宣告译码失败。设 BSC 的错误概率是 p ，则大数逻辑译码的错误概率是

$$P_b = \sum_{t \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$$

可以证明，当 $p < \frac{1}{2}$ 时， P_b 随着 n 的增大趋于零，可以达到“可靠”通信。但是，要付出的代价是码率 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ，这是通信系统要避免的。

线性分组码例子

Example 21 (奇偶校验码)

设 $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{n-2}] \in \mathbb{F}_2^{n-1}$ 是一个待传信息，奇偶校验码的编码算法是计算 $c_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ ，对应码字是 $\mathbf{c} = [u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, c_{n-1}]$ ，其中 \mathbf{u} 称为信息位， c_{n-1} 称为奇偶校验位。

奇偶校验码的码率是 $\frac{n-1}{n}$ ，生成矩阵是 $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \ \mathbf{1}^T]_{(n-1) \times n}$ ，校验矩阵是 $\mathbf{H} = [\mathbf{1}]_{1 \times n}$ 。

可以验证，码长是 n 的重复码与奇偶校验码互为对偶码。前者的最小汉明距离是 n ，而后者的最小汉明距离是 2。因而奇偶校验码在 BSC 上不具有纠错能力，但是可以检错。事实上，奇偶校验码可以发现任何奇数个错误。这两个码分别记为 $\mathcal{C}[n, 1, n]$ 和 $\mathcal{C}[n, n-1, 2]$ 。

线性分组码例子

Example 22 (汉明码)

前两个例子是从编码的角度引出的，定义码的同时也定义了编码算法。汉明码比较方便的定义是从校验矩阵出发。设 $m > 1$ 是一个整数，考虑 \mathbb{F}_2^m 中的非零向量，共有 $2^m - 1$ 个。以它们为列，构成一个 $m \times (2^m - 1)$ 的矩阵。

线性分组码例子

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

该矩阵的秩是 m 。因此, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c} | \mathbf{H}\mathbf{c}^T = 0\}$ 具有参数: 码长 $2^m - 1$, 维数 $2^m - 1 - m$ 。这样定义的码就是汉明码。汉明码的最小汉明距离是 3, 可以纠正一个位错误, 论证如下。

Proposition 4

一个线性分组码的最小汉明距离是 d_{\min} , 当且仅当其校验矩阵 \mathbf{H} 的任意 $d_{\min} - 1$ 列线性无关且存在某 d_{\min} 列线性相关。

线性分组码例子

从汉明码的定义可以看出， \mathbf{H} 的任何两列不同，所以最小距离至少为 3。由于可以找到三列相加等于 0，我们由上述命题知道 $d_{\min} = 3$ 。假定错误图样 \mathbf{e} 的重量为 1，即只有一位错误，则 $\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{e}^T$ 刚好是错误位置对应的列。因此，可由 \mathbf{S}^T 找出错误的位置。为帮助理解，取 $m = 3$ 为例，这就是常常用来作为例子的 $[7,4,3]$ 汉明码，其校验矩阵是

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

设一个码字 \mathbf{c} ，经过一个 BSC 信道，收到 \mathbf{y} ，计算 $\mathbf{S}^T = \mathbf{H}\mathbf{y}^T$ 。

若 $\mathbf{S}^T = \mathbf{0}^T$ ，则认为无错；若 $\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，我们认为第一位发生了错误。

作业

Exercise 1. [田宝玉(2008)]

设二元码为 $C_b = \{11100, 01001, 10010, 00111\}$ 。

(1) 计算此码的最小距离 d_{min} 。

(2) 计算此码的码率，假定码字等概分布。

(3) 采用最大似然译码准则，当通过二元对称信道传输，接收序列分别为 10000, 01100 和 00100 时，应分别译成什么码字？

作业

Exercise 2. [田宝玉(2008)]

一个二元对称信道的转移概率矩阵

为 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, ($p < 1/2$), 信道输入符号 0, 1 的概率分别为 ω , $1 - \omega$ 。

- (1)求利用MAP准则的判决函数和平均错误率。
- (2)求利用ML准则的判决函数和平均错误率。
- (3)什么情况下,上述两准则的判决结果相同?

作业

Exercise 3. [王育民(2013)]

给出 \mathbb{F}_7 的加法和乘法运算表，并找出每个非零元素的逆元素。

Exercise 4. [田宝玉(2008)]

一个线性分组码的校验矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求该码的生成矩阵和码的最小距离。

谢谢！