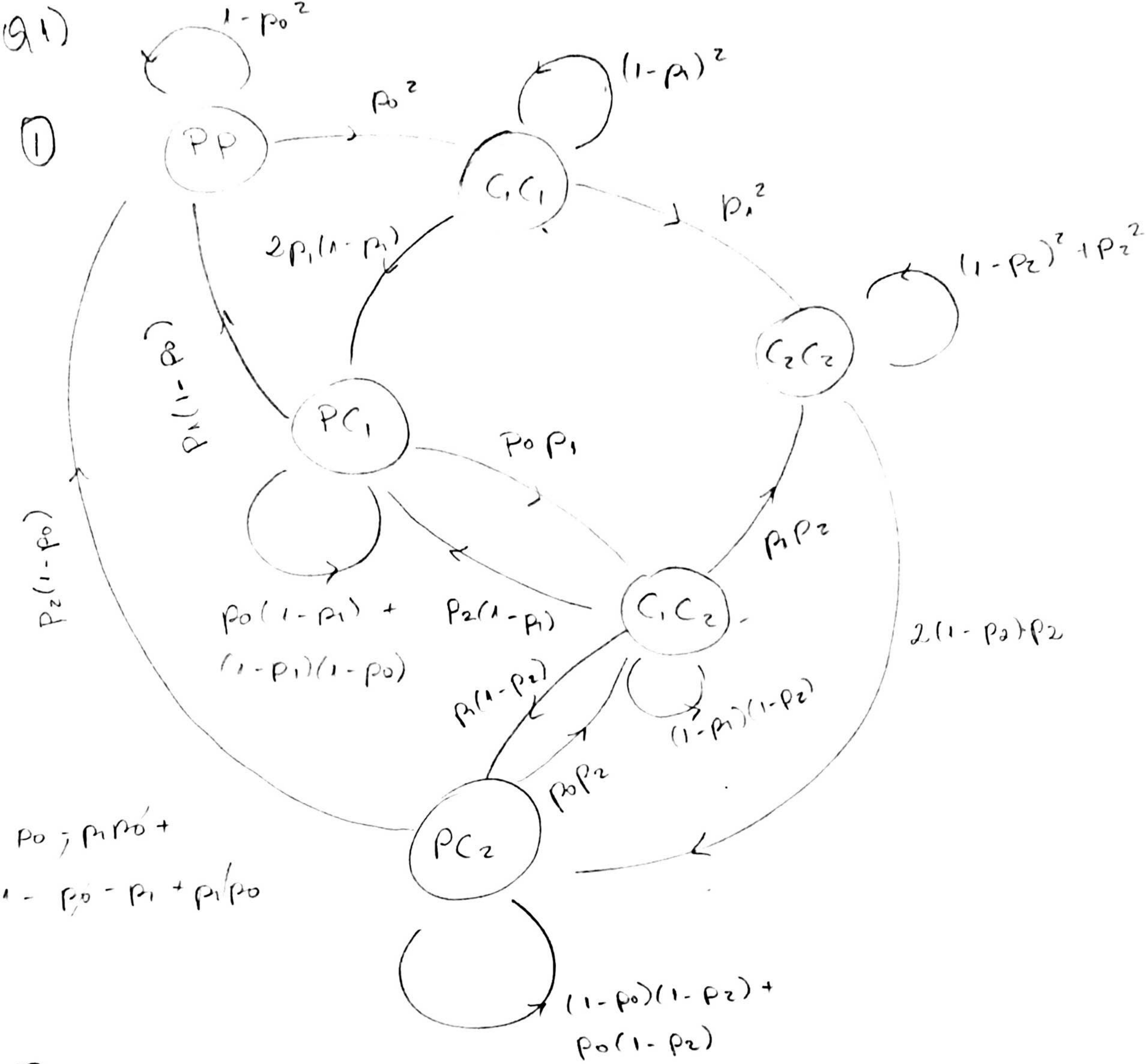
Q1)

1



2

Matriz de Prob

$$
\begin{array}{c}
 \\ PP \\ PC_1 \\ PC_2 \\ C_1C_1 \\ C_1C_2 \\ C_2C_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} PP & PC_1 & PC_2 & C_1C_1 & C_1C_2 & C_2C_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1-p_0^2 & 0 & 0 & p_0^2 & 0 & 0 \\
p_1(1-p_0) & 1-p_1 & 0 & 0 & p_0p_1 & 0 \\
p_2(1-p_0) & 0 & 1-p_2 & 0 & p_0p_2 & 0 \\
0 & 2p_1(1-p_1) & 0 & (1-p_1)^2 & 0 & p_1^2 \\
0 & p_2(1-p_1) & p_1(1-p_2) & 0 & (1-p_1)(1-p_2) & p_1p_2 \\
0 & 0 & 2p_2(1-p_2) & 0 & 0 & p_2^2+(1-p_2)^2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(I) $(1-p_0^2)\pi_0 + p_1(1-p_0)\pi_1 + p_2(1-p_0)\pi_2 = \pi_0$

$p_0^2\pi_0 = p_1(1-p_0)\pi_1 + p_2(1-p_0)\pi_2$

$\pi_0 = \frac{p_1}{p_0^2}(1-p_0)\pi_1 + \frac{p_2}{p_0^2}(1-p_0)\pi_2 \quad (I).$

(II) $(1-p_1)\pi_1 + 2p_1(1-p_1)\pi_3 + p_2(1-p_1)\pi_4 = \pi_1$

$p_1\pi_1 = 2p_1(1-p_1)\pi_3 + p_2(1-p_1)\pi_2$

$\pi_1 = 2(1-p_1)\pi_3 + \frac{p_2}{p_1}(1-p_1)\pi_2 \quad (II)$

(III) $(1-p_2)\pi_2 + p_1(1-p_2)\pi_4 + 2p_2(1-p_2)\pi_5 = \pi_2$

$p_2\pi_2 = p_1(1-p_2)\pi_4 + 2p_2(1-p_2)\pi_5$

$\pi_2 = \frac{p_1}{p_2}(1-p_2)\pi_4 + 2(1-p_2)\pi_5 \quad (III)$

(IV)

$p_0^2\pi_0 + (1-p_1)^2\pi_3 = \pi_3$ substituindo (I)

$p_1(1-p_0)\pi_1 + p_2(1-p_0)\pi_2 + \cancel{\pi_3} - 2p_1\pi_3 + p_1^2\pi_3 = \cancel{\pi_3}$

$p_1(1-p_0)\pi_1 + p_2(1-p_0)\pi_2 + p_1(p_1-2)\pi_3 = 0$

Substituindo (II):

$(p_1\pi_1)(1-p_0) + (p_2\pi_2)(1-p_0) + p_1(p_1-2)\pi_3 = 0$

$(1-p_0)[2p_1(1-p_1)\pi_3 + p_2(1-p_1)\pi_2] + p_2\pi_2(1-p_0) + p_1(p_1-2)\pi_3 = 0$

$(1-p_0)[(2p_1-2p_1^2)\pi_3 + p_2\pi_2 - p_1p_2\pi_2] + p_2\pi_2(1-p_0) + p_1(p_1-2)\pi_3 = 0$

$\cancel{2p_1\pi_3} - 2p_1^2\pi_3 + \cancel{p_2\pi_2} - p_1p_2\pi_2 - 2p_1p_0\pi_3 - 2p_1^2p_0\pi_3 - \cancel{p_2p_0\pi_2} + p_1p_2p_0\pi_2 + \cancel{p_2\pi_2} - \cancel{p_0p_2\pi_2}$

$\pi_3 p_1^2 - \cancel{2p_1\pi_3} = 0$

$-p_1^2\pi_3 - 2p_1p_0\pi_3 - 2p_1^2p_0\pi_3 + 2p_2\pi_2 - 2p_0p_2\pi_2 + p_1p_2p_0\pi_2 - p_1p_2\pi_2 = 0$

$\pi_3\{p_1^2 + 2p_1p_0 + 2p_1^2p_0\} = \pi_2\{p_0p_2(p_1-2) + p_2(2-p_1)\}$

$\pi_3\{p_1^2(1+2p_0) + 2p_1p_0\} = \pi_2\{(p_1-2)p_2(p_0-1)\}$

$\pi_3[p_1^2(1+2p_0) + 2p_1p_0] = p_2(p_0-1)(p_1-2)\pi_2$

$$\boxed{\pi_3 = \frac{p_2(p_0-1)(p_1-2)\pi_2}{p_1^2(1+2p_0)+2p_1p_0}} \quad (IV)$$

Substituindo (IV) em (II)

$$\pi_1 = \frac{2(1-p_1)\left[p_2(p_0-1)(p_1-2)\right]}{p_1(p_1+2p_0+2p_1p_0)}\pi_2 + \frac{p_2}{p_1}(1-p_1)\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1}\left[\frac{2(p_0-1)(p_1-2)}{p_1+2p_0+2p_1p_0} + 1\right]\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{p_2}{p_1}(1-p_1)\left[\frac{2(p_0-1)(p_1-2) + p_1+2p_0+2p_1p_0}{p_1+2p_0+2p_1p_0}\right]\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{p_2}{p_1}(1-p_1)\left[\frac{(2p_0-2)(p_1-2) + p_1+2p_0+2p_1p_0}{p_1+2p_0+2p_1p_0}\right]\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{p_2}{p_1}(1-p_1)\left[\frac{2p_0p_1-4p_0-4p_1+4+p_1+2p_0+2p_0p_1}{p_1+2p_0+2p_1p_0}\right]\pi_2$$

$$\pi_1 = \frac{p_2}{p_1}\frac{(1-p_1)}{(p_1+2p_0+2p_1p_0)}\left[4p_1p_0 - 2p_0 - 3p_1 + 4\right]\pi_2 \quad (V)$$

(VI) $p_0p_1\pi_1 + p_0p_2\pi_2 + (1-p_1)(1-p_2)\pi_4 = \pi_4$

Substituindo (V):

$$\frac{p_0p_2(1-p_1)}{p_1+2p_0+2p_0p_1}\cdot(4p_1p_0-2p_0-3p_1+4)\pi_2 + p_0p_2\pi_2 = \pi_4 - (1-p_1)(1-p_2)\pi_4$$

$$\frac{\pi_2\, p_0p_2}{p_1+2p_0+2p_0p_1}\left\{(1-p_1)(4p_1p_0-2p_0-3p_1+4) + p_1+2p_0+2p_0p_1\right\} = \pi_4 - (1-p_1)(1-p_2)\pi_4$$

$$\frac{\pi_2\, p_0p_2}{p_1+2p_0+2p_0p_1}\left\{4p_1p_0-2p_0-3p_1+4-4p_1^2p_0+2p_1p_0+3p_1^2-4p_1+p_1+2p_0+2p_0p_1\right\} = \pi_4-(1-p_1)(1-p_2)\pi_4$$

$$\frac{\pi_2\, p_0p_2}{p_1+2p_0+2p_0p_1}\left\{8p_0p_1 - 6p_1 - 4p_1^2p_0 + 3p_1^2 + 4\right\} = (p_1+p_2-p_1p_2)\pi_4$$

$$\pi_4 = \frac{\pi_2\, p_0p_2}{(p_1+2p_0+2p_0p_1)}\cdot\frac{(8p_0p_1-6p_1-4p_1^2p_0+3p_1^2+4)}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

Substituindo π_4 em (III)

$$p_2\pi_2 = p_1(1-p_2)\pi_4 + 2p_2(1-p_2)\pi_5$$

$$p_2\pi_2 - p_1(1-p_2)\pi_4 = 2p_2(1-p_2)\pi_5$$

$$\pi_5 = p_2\pi_2 - p_1(1-p_2)\left[\frac{p_0 p_2 (8p_0p_1 - 6p_1 - 4p_1^2p_0 + 3p_1^2 + 4)}{(p_1+2p_0+2p_0p_1)(p_1+p_2-p_1p_2)}\right]\pi_2$$

$$\pi_5 = \pi_2 \cdot \frac{\{p_2(p_1+2p_0+2p_0p_1)(p_1+p_2-p_1p_2) - p_1(1-p_2)(p_0p_2)(8p_0p_1-6p_1-4p_1^2p_0+3p_1^2+4)\}}{(p_1+2p_0+2p_0p_1)(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

$$p_0^2\pi_0 - 2p_1\pi_3 + p_1^2\pi_3 = 0$$

$$p_0^2\pi_0 + p_1(p_1-2)\pi_3 = 0$$

$$p_0^2\pi_0 = \pi_3(2-p_1)p_1$$

$$\pi_0 = \pi_3\frac{p_1}{p_0^2}(2-p_1) \rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{p_2(p_0-1)(p_1-2)p_1(2-p_1)}{p_1^2+2p_0p_1^2+2p_1p_0}\pi_2}$$

$\pi_0, \pi_1, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ estão em funçõu de π_2, como $\sum_{i=0}^{5}\pi_i = 1 \Rightarrow$

temos uma expressão para todos as distribuições estacionárias.

(Q1)

4. A fração de Intervalos de Tempo em que o sistema produz uma transmissão de sucesso.

Seja τ_i o tempo médio de retorno do sistema, temos que $\tau_i = \frac{1}{\pi_i}$.

Temos que o tempo em que o sistema produz ao menos uma transmissão de sucesso é saindo dos estado 0,1,2 e voltando a eles, logo $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2$, mas como queremos a fração faremos $\frac{\tau_0+\tau_1+\tau_2}{\sum_{i=0}^{5} \tau_i}$

5. A ociosidade média do sistema será:

$$\frac{\tau_3+\tau_4+\tau_5}{\sum_{i=0}^{5} \tau_i}$$

Q2)

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{W_i} \quad , \text{onde } W_i = \sum_j w_{ij}$$

1. Qualquer matrix satisfazendo $0 \le P_{ij} \le 1$, $1 \le i,j \le N$

e $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$, $1 \le i \le N$ é

é uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov.

Se montarmos a matriz associada ao passeio aleatório, teremos uma matriz cujas entrada i,j serão P_{ij} $\forall\, i,j$.

Como $P_{ij} = \frac{w_{ij}}{W_i} = \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}}$ se $(i,j) \in E$, 0 c.c então

$1 \geq P_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i,j$

$$\sum_{j=1} P_{ij} = \sum_j \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}} = \frac{\sum_j w_{ij}}{\sum_j w_{ij}} = 1$$

$\forall\, i$, logo essa matriz é uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov, portanto o passeio aleatório induz uma Cadeia de Markov

Temos também $P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-3} = i_{n-3}, \dots X_0 = i_0\} = P_{ij}$ pois a probabilidade de ir para o próximo estado só depende do estado atual.

②

Para um grafo sem peso temos que

$$\pi_i = \frac{grau(i)}{2|E|}$$

Se fizermos uma comparação em que grau(i) são todos o nº de estados que têm conexção com i:

$grau(i) \Rightarrow \sum_j w_{ji}$, e $2|E|$ é o somotório de todos as arestas $\Rightarrow 2|E| \Rightarrow \sum_j \sum_i w_{ji}$

$$\pi_i = \frac{\sum_j w_{ji}}{\sum_j \sum_i w_{ji}} \qquad \sum_i \pi_i = \frac{\sum_i \sum_j w_{ji}}{\sum_j \sum_i w_{ji}} = \frac{\sum_i \sum_j w_{ji}}{\sum_i \sum_j w_{ji}} = 1$$

③ Para a Cadeia ser reversível temos que $\pi_i P_{ij} = P_{ji} \pi_j$

$$\pi_i P_{ij} = \frac{\sum_j w_{ji}}{\sum_j \sum_i w_{ji}} \cdot \frac{w_{ij}}{\sum_j w_{ij}} = \frac{w_{ji}}{\sum_i w_{ji}} \, \pi_j \Rightarrow$$

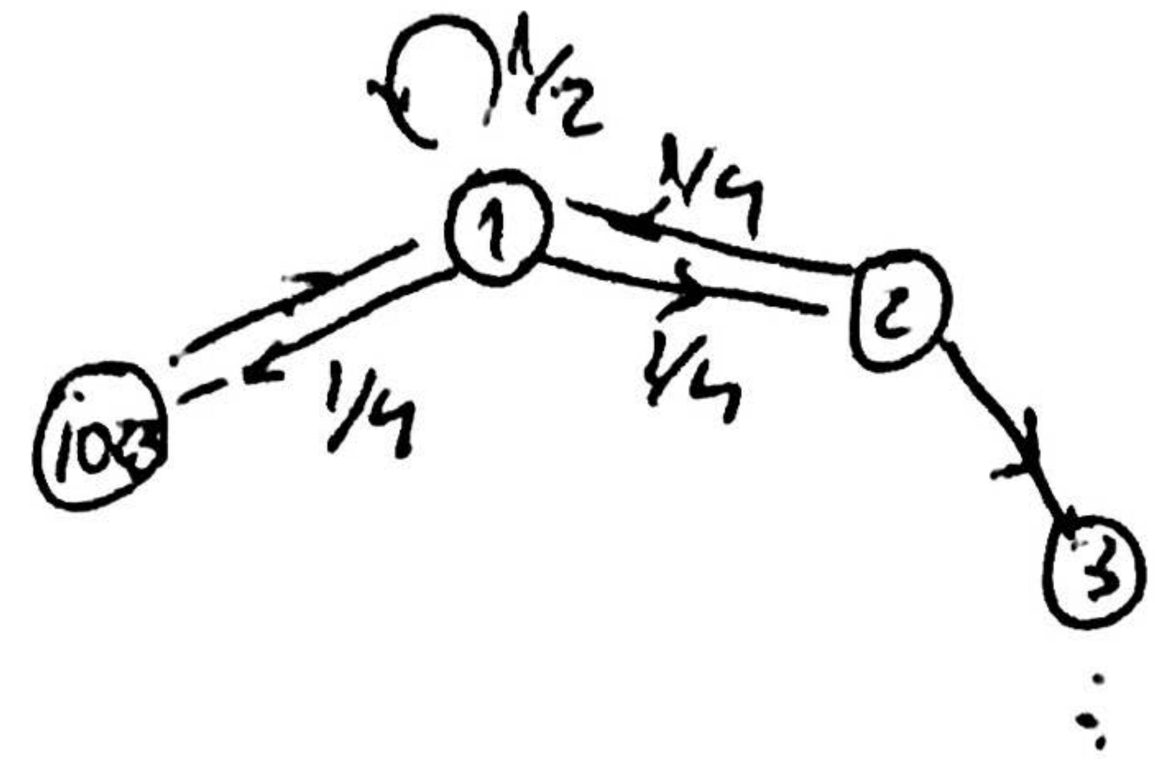
$$\pi_j = \frac{\sum_i w_{ji}}{\sum_j \sum_i w_{ji}} \cdot \frac{\sum_j w_{ji}}{\sum_j w_{ij}} \cdot \frac{w_{ij}}{w_{ji}}$$

, como é um grafo não direcionado $w_{ij} = w_{ji}$

$$\pi_j = \frac{\sum_i w_{ji}}{\sum_j \sum_i w_{ji}} \cdot \cancel{\frac{\sum_j w_{ij}}{\sum_j w_{ij}}}^{\,1} \cdot \frac{w_{ji}}{w_{ji}}$$

$\rightarrow$ logo é uma Cadeia Reversível.

Q 3)



$$\begin{cases} P_{ii} = 1/2 \\ P_{i,i+1} = 1/4 & \forall\ i < 1023 \\ P_{i,i-1} = 1/4 & \forall\ i > 1 \\ P_{1,1023} = 1/4 \\ P_{1023,1} = 1/4 \end{cases}$$

Como é um passeio aleatório, C.M. é reversível, logo

$$P_{ji}\pi_j = \pi_i P_{ij}$$

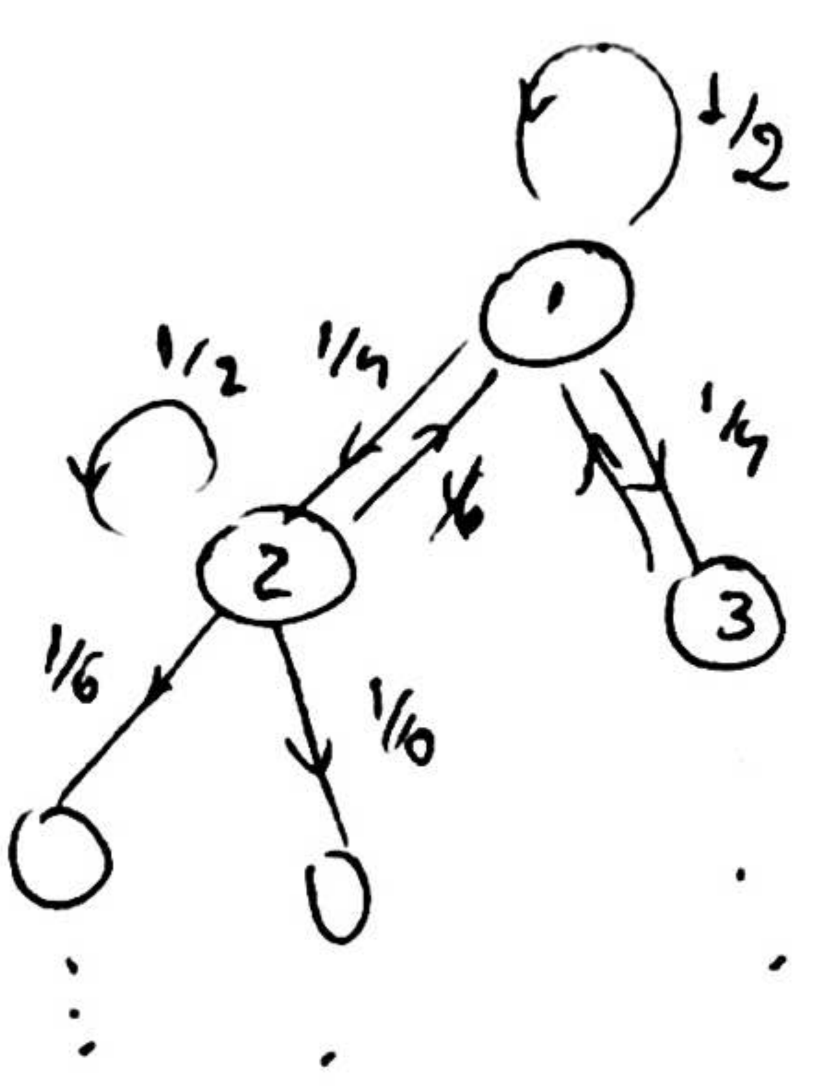
$$P_{i,i+1}\pi_i = P_{i+1,i}\pi_{i+1} \Rightarrow \tfrac{1}{4}\pi_i = \tfrac{1}{4}\pi_{i+1} \to \pi_i = \pi_{i+1} \quad \forall\ 1023 > i > 1$$

$$P_{1023,1}\pi_{1023} = P_{1,1023}\pi_1 \Rightarrow \pi_{1023} = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_i \quad \forall\ i \le n = 1023$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1, \text{ como } \pi_i = \pi_j \ \forall\ i,j \text{ então:}$$

$$\sum_{i=1}^{1023} \pi = 1 \to 1023\pi = 1 \to \boxed{\pi = \frac{1}{1023}}, \text{ logo } \pi_i = \frac{1}{1023} \ \forall i$$

Para ser uma árvore completa assumiremos 1023 nós.



$P_{ii} = 1/2$

$P_{2i,i} = P_{2i+1,i} = P_{i,2i} = P_{i,2i+1} = 1/6$

$\forall \; 1 < i < 512$ e $2i < 512$ se $2i \geq 512$:

$P_{2i,i} \neq P_{i,2i} \neq P_{2i+1,i} \neq P_{i,2i+1}$

se $512 \leq i \leq 1023$:

$P_{i,\lfloor i/2 \rfloor} = 1/2$ onde $\lfloor i/2 \rfloor$ é o menor inteiro positivo mais próximo de $i/2$

Como é um passeio aleatório, temos que a C.M. é reversível, logo:

$\cancel{P_{i,2i}}\,\pi_i = P_{2i,i}\,\pi_{2i} \quad \forall \; 1 < i < 512$ e $2i < 512$

$\pi_i = \pi_{2i} = \pi_{2i+1}$, logo $\pi_i = \pi_j \quad \forall \; 1 < i,j < 512$

$\pi_1 P_{12} = \pi_2 P_{21}$ e $\pi_1 P_{13} = \pi_3 P_{31}$ $\Rightarrow$ $\pi_1 \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\pi_2$, $\frac{\pi_1}{4} = \frac{1}{6}\pi_3$ $\Rightarrow \pi_2 = \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_1 =$

$\frac{3}{2}\pi_1 = 3\pi_{512} \to \pi_1 = 2\pi_{512}$

se $1023 \geq i \geq 512$

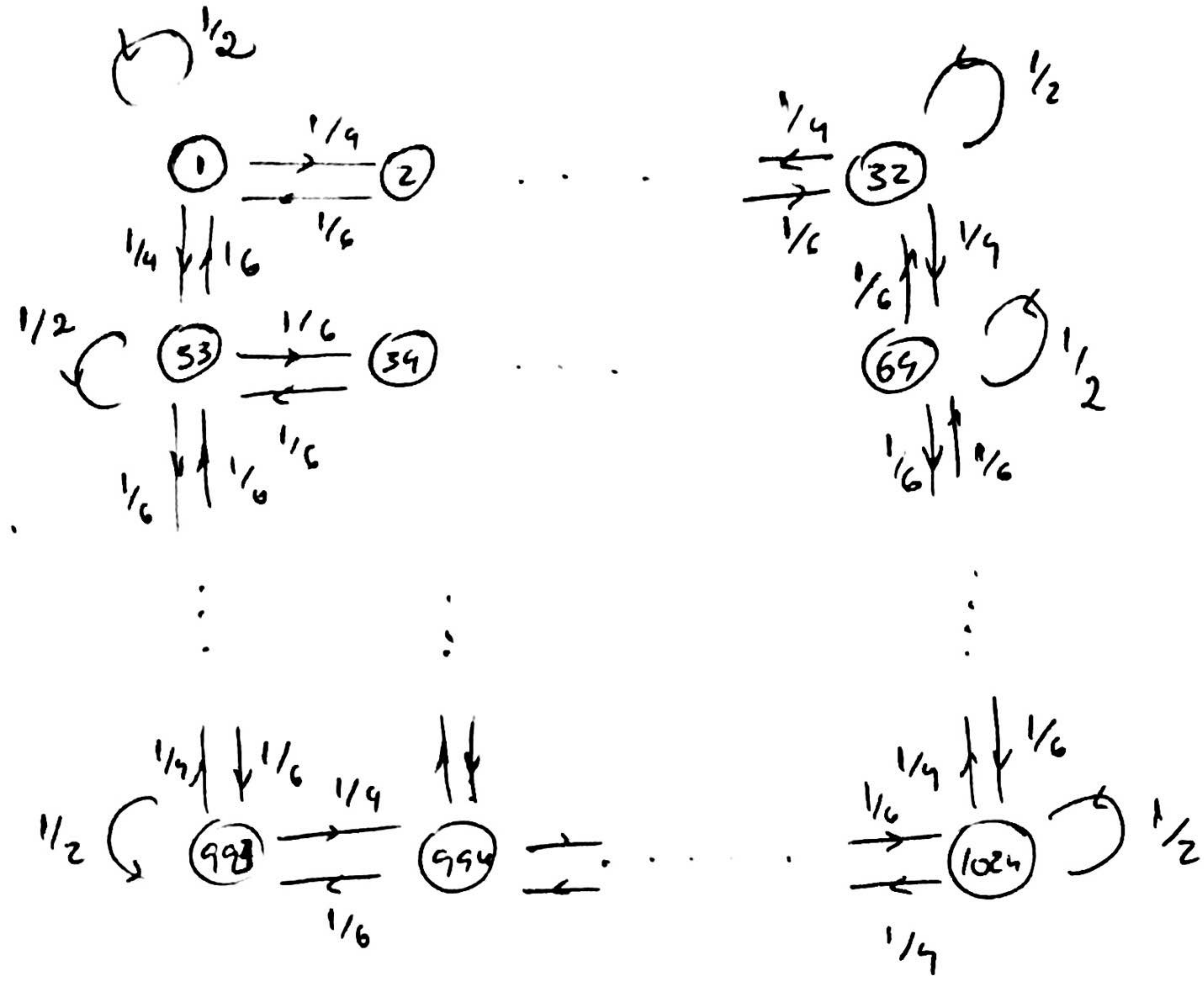
$P_{\lfloor i/2 \rfloor, i}\,\pi_{\lfloor i/2 \rfloor} = P_{i\lfloor i/2 \rfloor}\,\pi_i \Rightarrow \pi_{\lfloor i/2 \rfloor}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\pi_i \Rightarrow \pi_{\lfloor i/2 \rfloor} = 3\pi_i = 3\pi_{512} \quad \forall i$

$$\sum_{i=1}^{1023}\pi_i = \pi_1 + \sum_{i=2}^{511}\pi_i + \sum_{i=512}^{1023}\pi_i = \pi_1 + 510\pi_2 + 512\pi_{512} = 1$$

$510 \cdot (3\pi_{512}) + 512\pi_{512} + 2\pi_{512} = 1 \to \pi_{512} = 1/2044$

$\pi_i = 1/2044 \quad \forall \; 512 \leq i \leq 1023$, $\pi_i = 3/2044 \quad \forall \; 1 < i < 512$ e

$\pi_1 = 1/1022$



$P_{ii} = 1/2$

$P_{i,i+1} = 1/6 = P_{i,i-1}$ se $1 < i < 32$ ou $993 < i < 1024$

$P_{i,i+32} = 1/6$ se $1 < i < 32$ ou $i = 32k+1$ ou $i = 32(k+1)$ $\forall k \in \{1, \dots, 30\}$

$P_{i,i-32} = 1/6$ se $993 < i < 1024$ ou $i = 32k+1$ ou $i = 32(k+1)$ $\forall k \in \{1, \dots, 30\}$

$P_{i,i+32} = P_{i,i-32} = P_{i,i+1} = P_{i,i-1} = 1/8$ se $i \neq 32k+1, i \neq 32(k+1)$ $\forall k \in \{1, \dots, 30\}$ e $32 < i < 993$

$P_{1,2} = P_{1,33} = P_{32,31} = P_{32,64} = P_{993,961} = P_{993,994} = P_{1024,1023} = P_{1024,992} = 1/4$

$P_{i,j} = 0$ c.c

$\forall i$: $32 < i < 993$ e $i \neq 32k+1$ e $i \neq 32(k+1)$

$P_{i,i+1}\pi_i = \pi_{i+1} P_{i+1,i} \Rightarrow \pi_i = \pi_{i+1}$

Se $i = 32k+1$ ou $i = 32(k+1)$ ou $1 < i < 32$ ~~ou 993<i<1024~~

$P_{i,i+32}\pi_i = \pi_{i+32} P_{i+32,i} \Rightarrow \frac{1}{6}\pi_i = \frac{1}{8}\pi_{i+32} \to \pi_{i+32} = \frac{4}{3}\pi_i$

Também vale para

$\pi_{i-32} = \frac{4}{3}\pi_i$, onde $i = 32k+1, i = 32(k+1)$ $993 < i < 1024$

$P_{1,2}\pi_1 = \pi_2 P_{2,1} \Rightarrow \frac{1}{4}\pi_1 = \frac{1}{6}\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$

logo

$$\sum_{i=1}^{1024} \pi_i = 4.\pi_1 + 30.4.\pi_2 + 900\,\pi_{34} = 1$$

$$\frac{8}{3}\pi_2 + 120\pi_2 + 900\pi_{34} = 1$$

$$8\pi_2 + 360\pi_2 + 2700\pi_{34} = 3$$

$$368\pi_2 + 2700\pi_{34} = 3$$

$$368\pi_2 + 2700 . \frac{4}{3}\pi_2 = 3$$

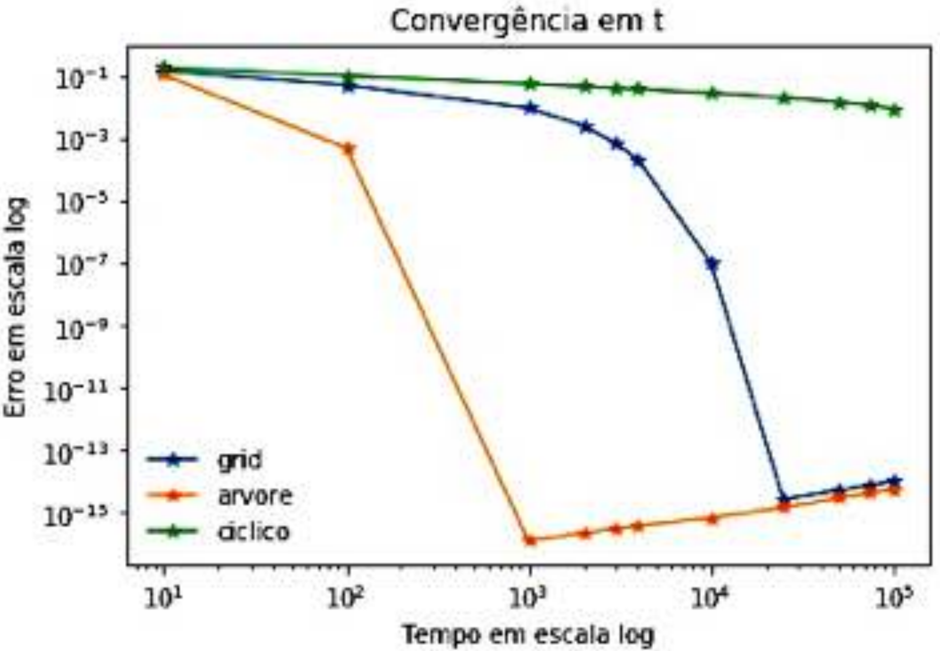
$$(3600 + 368)\pi_2 = 3 \rightarrow 3968\pi_2 = 3$$

$$\pi_2 = \frac{3}{3968}$$

$$\pi_1 = \pi_{32} = \pi_{993} = \pi_{1024} = \frac{2}{3968}$$

$\pi_i = \frac{4}{3968}$ $\forall\ i \in \{ 32 < i < 993 \mid i \neq 32k+1$ e $i \neq 32(k+1)$ onde $k \in \{1, \cdots, 30\}\}$

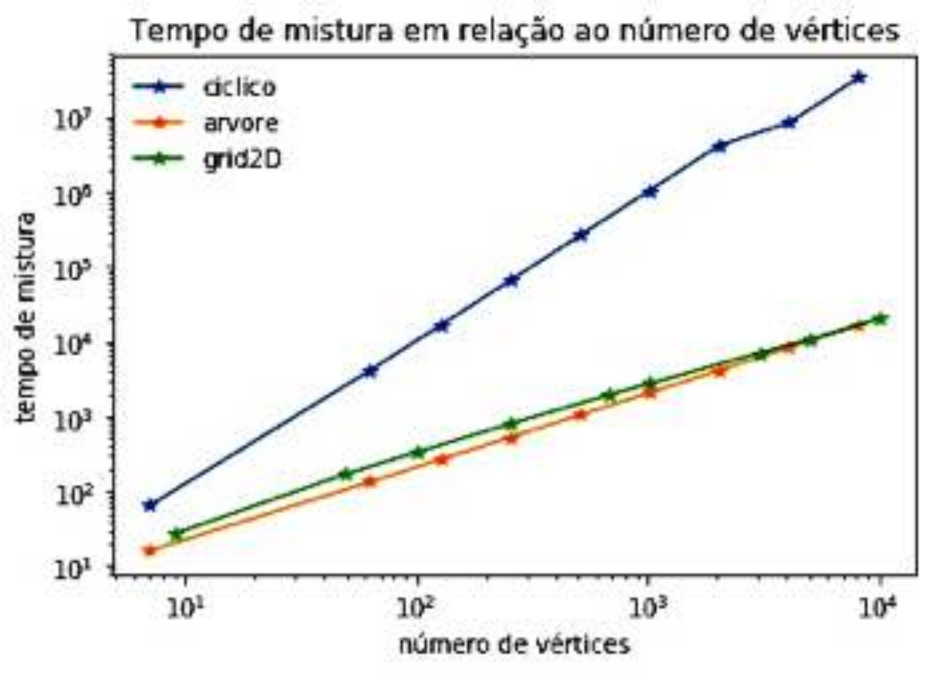
$\pi_i = \frac{3}{3968}$. $\forall\ i \in \{ 1 < i < 32,\ 993 < i < 1024,$ $i = 32k+1,\ i = (32(k+1))$ onde $k \in \{1, \ldots, 30\}\}$



Convergência em t
Erro em escala log
Tempo em escala log
grid
arvore
ciclico

a 3)

4 Podemos ver que o grafo em árvore converge mais rápido, ou seja, com uma menor quantidade passos que os outros grafos e o passeio aleatório cíclico é o com pior convergência. O cíclico esperávamos que fosse o com pior convergência pois só possui ligação com 2 vértices, ficando mais difícil chegar ao equilíbrio, já o grid esperávamos que fosse pior que a árvore pois, possui muitos possibilidades de vértices e a árvore que fosse a melhor pois toda vez que chega na raiz ou folha é rebatida para ~~os~~ nós, ficando mais fácil chegar ao equilíbrio, ou seja, quanto maior o grau dos vértices melhor a convergência e se tiver uma "força direcionada" para algum lugar ela também fará a convergência ser mais rápida, como é o caso da árvore.



Tempo de mistura em relação ao número de vértices
ciclico
arvore
grid2D
tempo de mistura
número de vértices
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7

Q4) Como podemos observar na questão 3 o tempo de convergência da árvore é menor que o do grid que é menor que o cíclico, logo esperamos que o tempo de mistura da árvore seja menor que o do grid que por sua vez é menor que o do grafo cíclico, logo o gráfico está consistente.

Q5)

① e ② Para $n=2$

Seja U_t^1, U_t^2 o estado do usuário 1 e 2 respectivamente, logo $U_t^1 \in \{0,1\}$ e $U_t^2 \in \{0,1\}$, logo a cadeia tem 4 possíveis estados

$\{00, 01, 11, 10\}$

Para n usuários teremos $U_t^1, U_t^2, \cdots U_t^n$ os estados dos usuários no tempo t onde $U_t^i \in \{0,1\}$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$, logo a cadeia terá 2^n possíveis estados, pois cada usuário tem 2 possíveis estados. $\{\underbrace{0\ldots0}_{n}, \underbrace{0\ldots0}_{n-1}1, \ldots, \underbrace{1\ldots1}_{n}\}$

Seja X_t o estado da Cadeia no tempo t, podemos escrever $X_t = U_t^1 U_t^2 U_t^3 \cdots U_t^n$ e X_{t+1} o estado da Cadeia no tempo $t+1$ onde $X_{t+1} = U_{t+1}^1 U_{t+1}^2 \cdots U_{t+1}^n$

$$P\{X_{t+1} \mid X_t\} = P\{U_{t+1}^1 U_{t+1}^2 U_{t+1}^3 \cdots U_{t+1}^n \mid U_t^1 U_t^2 \cdots U_t^n\}$$

$$P\{U_{t+1}^i = 0 \mid U_t^i = 0\} = 1-p = 1 - P\{U_{t+1}^i = 1 \mid U_t^i = 0\}$$

$$P\{U_{t+1}^i = 1 \mid U_t^i = 1\} = 1-q = 1 - P\{U_{t+1}^i = 0 \mid U_t^i = 1\}$$

logo podemos escrever $P\{U_{t+1}^i \mid U_t^i\}$ como

$$(1-p)^{\overline{U_{t+1}^i} \cdot \overline{U_t^i}} \cdot p^{U_{t+1}^i \cdot \overline{U_t^i}} \cdot (1-q)^{U_{t+1}^i \cdot U_t^i} \cdot q^{\overline{U_{t+1}^i} \cdot U_t^i},$$

Podemos escrever

$$P\{X_{t+1} \mid X_t\} = (1-p)^{\sum_i \overline{U_{t+1}^i}\, \overline{U_t^i}} (p)^{U_{t+1}^i \overline{U_t^i}} (1-q)^{U_{t+1}^i U_t^i} q^{\overline{U_{t+1}^i} U_t^i}$$

prob de estar falando = 1

Q5)

3

$$P[F(t+1)=j \mid F(t)=i] =$$

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{i}{k} (1-q)^{i-k} q^{k} \binom{n-i}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{n-i-j+k}$$

$\forall$ $1 \leq i, j \leq N$

4 Essa nova cadeia possui n+1 estados que são ~~as~~ quantidade de pessoas falando no sistema e +1 porque conta quando todas as pessoas não falam no sistema