CALCULO AVANZADO: SERIES DE FOURIER:

Ejercicios resueltos y propuestos.

1.- Hallar el período de la función: $f(x) = Sen(\frac{2\pi}{b-a})x$.

Solución:

Si $Sen(\frac{2\pi}{b-a})x = Sen\ u \Rightarrow Sen\,u = Sen(u+2\pi)$ .Si T es el período

$$Sen(\frac{2\pi}{b-a})x = Sen(\frac{2\pi}{b-a}(x+T)) = Sen(\frac{2\pi}{b-a}x + \frac{2\pi}{b-a}T) = Sen(u+2\pi) \quad \therefore$$

$$\frac{2\pi}{b-a}T = 2\pi \quad \text{a bien} \quad T = (b-a) \text{ el período buscado.}$$

Por ejemplo si $f(x) = Sen(\frac{3\pi}{5})x$ y como $f(x) = Sen\frac{2\pi}{\frac{10}{3}}$ el periodo será $\frac{10}{3}$.

2.- Probar que si $f(x)$,tiene periodo p; $f(\alpha\,x)$ tiene periodo $\frac{p}{\alpha}$.

Solución:

$f(\alpha\,x) = f(\alpha(x+T)) = f(\alpha x + p) \Rightarrow \alpha T = p$ ó $T = \frac{p}{\alpha}$.

Del mismo modo entonces $f(\frac{x}{\beta})$ tendrá periodo $T = p\beta$ (Basta cambiar α *por* $\frac{1}{\beta}$).Entonces el período de $Sen\frac{2\pi}{b-a}x$ será $T = 2\pi\cdot\frac{b-a}{2\pi}$ o sea b-a.

Y el periodo de $Cos\frac{\pi x}{l}$ será $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{l}} = 2l$.

3.- Pruebe que la función :

$f(x) = Sen\,x + \frac{1}{3}Sen\,3x + \frac{1}{5}Sen\,5x$, es de periodo 6π

Solución.

$Sen\,x$, tiene periodo $2k_1\pi$

$Sen\,3x$ " " $\frac{2k_2\pi}{3}$

$Sen\,5x$ " " $\frac{2k_3\pi}{5}$ haciendo $k_1 = 3$ $k_2 = 9$ y $k_3 = 15$ cada una será de periodo 6π.

Y por lo tanto la función dada.

4.- Pruebe la ortogonalidad de la base: $\{1; Cosx; Senx; \ldots\ldots\ldots\ldots Coskx; Senkx \ldots\ldots\ldots\}$

Solución:

$$1 \circ Coskx = \int_{-\pi}^{\pi} Coskxdx = 0$$

$$1 \circ Senkx = \int_{-\pi}^{\pi} Senkxdx = 0$$

$$Cos\,nx \circ Sen\,mx = \int_{-\pi}^{\pi} Cosnx \cdot Sen\,mxdx = \ldots\ldots = 0$$

$$Cos\,nx \circ Cos\,mx = \int_{-\pi}^{\pi} Cos\,nx \cdot Cos\,mxdx = \ldots\ldots = 0$$

$$Sen\,nx \circ Sen\,mx = \int_{-\pi}^{\pi} Sen\,nx \cdot Sen\,mxdx = \ldots\ldots = 0.$$

5.- Si la función : $f(t) = Cos\,\alpha\,t + Cos\,\beta\,t$ es de periodo "p".Demostrar que existen m,n enteros tal : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$

Solución.

$Cos\alpha\, t = Cos\,\alpha(t+p) \Rightarrow \alpha\, p = 2m\pi$

$Cos\,\beta\, t = Cos\,\beta(t+p) \Rightarrow \beta p = 2n\pi$. Luego el cuociente $\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{m}{n}$.

6.- Pruebe que la función $f(t) = Cos(10t) + Cos(10+\pi)t$, no es periódica.

Solución.

Del ejemplo anterior Si fuera periódica tendríamos: $\dfrac{10}{10+\pi} = \dfrac{m}{n} \quad \Rightarrow 10(m-n) = \pi$
$\Rightarrow\Leftarrow$ esto no es posible pues el primer miembro es un entero .

7.- Pruebe que la función : $f(t) = 10^2\,Cos^2 t$, es de período π .

Solución.

$f(t) = 10^2(\dfrac{1+Cos2t}{2}) = 50(1+Cos2t)$, Como Cos 2t tiene período $\dfrac{1}{2}2\pi$, la función lo es.

8.- Encontrar el período de la función: $f(t) = Cos\dfrac{t}{3} + Cos\dfrac{t}{4}$.

Solución.

$Cos\dfrac{t}{3}$ es de período 6π

$Cos\dfrac{t}{4}$ es de período $8\,\pi$, luego ambas lo son de período $24\,\pi$

9.- Determinar **los coeficientes de Fourier,** de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & 0 < x \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Solución.

Los coeficientes serán: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}dx = \ldots\ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Coskxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}Coskxdx = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2k}Senk\frac{\pi}{2} =$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Senkxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}Senkxdx = \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2k}(1 - Cosk\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2k} \ldots\ldots k \ impar \\ \frac{1}{k} \ldots\ldots k = 2,6,10,14\ldots \\ 0 \ldots\ldots k = 4,8,12,16 \end{cases}$$

10.- Encontrar la **Serie de Fourier** de la función: $f(x) = \begin{cases} \pi + x \ldots\ldots -\pi \le x \le 0 \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Solución.

Como lo muestra el gráfico es una función par

luego su Serie será :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k Coskx, \text{ con } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xCoskxdx = \ldots\ldots \frac{1}{k^2}(Cosk\pi - 1) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots k \ \ par \\ \frac{-2}{k^2} \ldots k \ \ impar \end{cases}$$

La **S de F** será: $\frac{\pi}{2} - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{Cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

11.- Si f(x) = Cos (αx), $-\pi \le x \le \pi$; α una constante no entera. Probar que a partir de su Serie de Fourier.

$$\frac{\pi}{Sen\alpha\pi} = 2\alpha(\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{1}{\alpha^2 - 3^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Solución.

Se trata de una función par ,luego $b_k = 0$ y $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Cos\ \alpha\ x dx = \frac{2}{\alpha\pi} Sen\ \alpha\pi$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Cos\,\alpha\, x \cdot Cos\, kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\ Cos(\alpha+k)x + Cos(\alpha-k)x\ \right)\ dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Sen(\alpha+k)x}{\alpha+k} + \frac{Sen(\alpha-k)x}{\alpha-k}\right)_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Sen(\alpha+k)\pi}{\alpha+k} + \frac{Sen(\alpha-k)\pi}{\alpha-k}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Sen\alpha\pi \cdot Cosk\pi}{\alpha+k} + \frac{Sen\alpha\pi \cdot Cosk\pi}{\alpha-k}\right) = \frac{(-1)^k\, Sen\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k}\right)$$

$$a_k = \frac{2\alpha(-1)^k}{(\alpha^2-k^2)\pi}\ \ Sen\alpha\pi\ .$$

Luego la representación quedará:

$$Cos\alpha\, x = \frac{Sen\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_1^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^k\, Sen\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-k^2)} = \frac{Sen\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum\frac{(-1)^k\, Coskx}{(\alpha^2-k^2)}\right);\ \ \textbf{si x = 0}$$

$$\frac{\pi}{Sen\alpha\pi} = 2\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum\frac{(-1)^k}{(\alpha^2-k^2)}\right).$$

12.- Determinar la representación en Serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Graficar la extensión periódica que ella representa y probar que: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Solución.

Fig.

La serie debe ser de la forma: $\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty} a_k Coskx + b_k Senkx$; donde :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx=\frac{\pi}{2} \qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xCoskxdx=\frac{1}{\pi k^2}(Cosk\pi-1)=\begin{cases}0............k.....par\\ \frac{-2}{\pi k^2}..........k....impar\end{cases}$$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xSenkxdx=\frac{1}{k}(-1)^{k+1}$. Luego la representación será:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\frac{Cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\frac{(-1)^k\pi}{2k}Senkx\,.$$

En x = 0 la serie converge al valor de la función, por ser continua $\Rightarrow$

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8}=\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Sin embargo en $x=\pi$ converge al valor promedio de los limites laterales o sea a $\frac{\pi}{2}$ y el resultado es el mismo.

Fig

13.- Hallar la Serie de Fourier parta la función $f(x)=\begin{cases}x & -\pi/2<x<\pi/2\\ \pi-x & \pi/2<x<3\pi/2\end{cases}$.

Solución.

Fig.

Aqui el intervalo es $(-\pi/2,3\pi/2)$ por lo que la serie debe tener la fórmula más general aunque (b-a) = 2π, luego será de la forma.

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_k Coskx + b_k Senkx, \text{ siendo } a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)dx\right) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xCoskxdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \pi Coskxdx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} xCoskxdx\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xSenkxdx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \pi Senkxdx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} xSenkxdx\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi k^2}\begin{cases}(-1)^{k+1} \ldots\ldots. k \ \ impar \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. k \ \ par\end{cases} + \frac{1}{2k}\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. k \ \ impar \\ (-1)k \ldots\ldots. k \ \ par\end{cases}$$

Luego la serie de Fourier para esta función queda:

$$\sum \frac{3(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} Sen(2k-1)x + \frac{(-1)^k}{4k} Sen2kx.$$

Observación.

Nótese que al trasladar el gráfico de la función dada hacia la izquierda en $\pi/2$ se transforma en una función par cuya serie no es la misma.

14.- Encontrar la Serie de Fourier y su Serie de Cosenos para la función:

$$f(x) = \begin{cases}1/2 - x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. 0 \le x \le 1 \\ x - 3/2 \ldots\ldots\ldots\ldots. 1 < x \le 2\end{cases}$$

Fig.

Solución.

a) Como el intervalo es de dimensión 2 la Serie tomará la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_k Cos\, k\pi x + b_{k} Senk\, \pi x\,,$$

con $a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (1/2 - x)dx + \int_1^2 (x-3/2)dx = 0$

$$a_k = \int_0^1 (1/2 - x)Cosk\pi x\,dx + \int_1^2 (x-3/2)Cos\,k\pi x\,dx = \ldots\ldots\ldots \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots k \;\; par \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2} \ldots k\; impar \end{cases}$$

$$b_k = \int_0^1 (1/2 - x)Sen\,k\pi x\,dx + \int_1^2 (x-3/2)Sen\,k\pi x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots k \;\;\; par \\ -\dfrac{3}{k\pi} \ldots\ldots k \;\;\; impar \end{cases}$$

Así la S de F quedará:

$$\boxed{\frac{4}{\pi^2}\sum \frac{Cos(2k-1)k\pi x}{(2k-1)^2} - \frac{3}{\pi}\sum \frac{Sen(2k-1)k\pi x}{(2k-1)}}$$

b) La extensión par de la función hace que la Serie sea

$$:\frac{a_0}{2} + \sum a_k Cos\frac{k\pi}{2}x \quad \text{con (b-a)} = 4$$

Donde $a_0 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = 0$ y $a_k = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)Cos\frac{k\pi}{2}xdx$

$$a_k = \int_0^1 \frac{1}{2}Cos\frac{k\pi}{2}x\,dx - \int_0^1 xCos\frac{k\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 xCos\frac{k\pi}{2}xdx - \frac{3}{2}\int_1^2 Cos\frac{k\pi}{2}xdx =$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{16}{k^2\pi^2} \quad si \quad k = (2,6,10\ldots\ldots\ldots(4k-2))$$

La Serie: $\boxed{\frac{16}{\pi^2}\sum \frac{Cos\frac{(4k-2)\pi}{2}x}{(4k-2)^2}}$.(¿)

15.- Sea la función $f(x) = |Senx|$ a) determine el periodo. b) Pruebe que es par c) encuentre la **S de F**. en $[-\pi/2, \pi/2]$.

Fig.

Solución.

$\left|Sen(x+\pi)\right| = \left|SenxCos\pi + CosxSen\pi\right| = \left|-Senx\right| = \left|Senx\right|$, periodo π, que el gráfico también confirma.

b) $\left|Sen(-x)\right| = \left|-Senx\right| = \left|Senx\right|$ par.

c) La S de F. será : $\dfrac{a_0}{2} + \sum a_k Cos2kx$; pues el intervalo es de magnitud π ,donde

$a_0 = 2\cdot\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} Sen\,xdx = \dfrac{1}{\pi}$ $\qquad a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} Senx\cdot Cos2kxdx = \dfrac{2k}{\pi(4k\ \ -1).}$ quedando .

$\boxed{\dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum\dfrac{kCos2kx}{(4k-1)}}$. Como la serie pedida.

16.- Sea la función y = f(x) seccionalmente continua, par y de periodo $4l$ e impar respecto a la recta $x = l$ .Determinar que su Serie de Fourier para f(x) está dada por:

$\boxed{\displaystyle\sum_1^{\infty} a_{2n-1} Cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x}$ con $\qquad \boxed{a_{2n-1} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)Cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x}$

Fig.

Solución.

$b_n = 0$

$a_0 = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-2l}^{2l} f(x)dx = \dfrac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx$. Pero $\displaystyle\int_0^{2l} f(x)dx = \int_0^{l} f(x)dx + \int_l^{2l} f(x)dx$

$$= \int_0^l f(x)dx - \int_0^l f(x)dx = 0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)Cos\,\frac{n\pi}{2l}x=\frac{1}{l}\left\{\int_0^{l}f(x)Cos\,\frac{n\pi}{2l}x+\int_l^{2l}f(x)Cos\,\frac{n\pi}{2l}x\right\}\quad \text{Si}\quad x=2l-u\,.$$

$$a_n=\frac{1}{l}\left\{\int_0^{l}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}x+\int_l^{0}f(u)Cos\frac{n\pi}{2l}(u)(du)\right\}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\left\{\int_0^{l}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}x+\int_l^{0}f(2l-x)Cos\frac{n\pi}{2l}(2l-x)(-dx)\right\}\;;f(2l-x)=-f(x)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\left\{\int_0^{l}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}dx-\int_0^{l}f(x)\left\{Cos\frac{n\pi}{2l}2lCos\frac{n\pi}{2l}x+Sen\frac{n\pi}{2l}2lSen\frac{n\pi}{2l}x\right\}dx\right\}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\left\{\int_0^{l}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}x\,dx+\int_0^{l}(-1)^{n+1}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}x\,\mathrm{dx}\right\}$$

$$a_n=\begin{cases}0 & si\;\;n\;\;par\\ \frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)Cos\frac{n\pi}{2l}dx & si\;n\;\;impar\end{cases}\quad\therefore\quad\boxed{a_{2n-1}=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)Cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}dx}$$

17.- Sea $\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_kCoskx+b_kSenkx)$, la Serie de Fourier de f(x).Si $g(x)=f(x-\pi)$, mostrar que la Serie de Fourier de g(x) es $\frac{a_0}{2}+\sum(-1)^k(a_kCoskx+b_kSenkx)$

Solución.

Fig

Nótese que el gráfico de g(x) se obtiene desplazando el de f(x) a la derecha en π ,entonces:

Si $g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum A_kCoskx+B_kSenkx$ donde $0<x<2\pi$ pues $-\pi<x-\pi<\pi$

$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-\pi)dx$, si hacemos u= $x-\pi \quad \Rightarrow -\pi < u < \pi$, luego

$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du = a_0 \qquad A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)Coskxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-\pi)Coskxdx$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)Cos(u+\pi)du$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\{Cos(u)Cos\,\pi - Sen\,uSen\,\pi\ \}du$$

$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)Cos(u)Cos\,\pi\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-1)^k\ f(u)Cos(u)du = (-1)^k\ a_k$.

Igualmente para B_k .

18.- Sea $t \in R$ y $f(x) = Cos(tSenx)$.

a) Probar que f(x) es par y de periodo π

b) Escriba los coeficientes y la Serie de Fourier si $x \in [0,\pi]$

c) Probar que para $a_0(t)$ se tiene : $ta_0'' + a_0' + ta_0 = 0$.

Solución.

a) $f(x)$ *par sii* $f(x) = f(-x) \qquad x \in [-\pi;\pi]$

$f(-x) = Cos(tSen(-x) = Cos(-tSen(x)) = Cos(tSenx)$ luego es par.

¿$f(x) = f(x+\pi)$?

$f(x+\pi) = Cos(tSen(x+\pi)) = Cos(t(-Senx)) = Cos(-tSenx) = Cos(tSenx) = f(x)$.

b) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Cos(tSenx)dx \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Cos(tSenx)Cos2kxdx$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Cos(tSenx)$ Sen2kxdx.

c) Si $a_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Cos(tSenx)dx \Rightarrow a'_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-Sen(tSenx))\cdot Senxdx$

$$a''_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-Cos(tSenx)\cdot Sen^2 xdx.$$

Luego:

$$ta''_0+a'_0+ta_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{-tCos(tSenx)\cdot Sen^2x - Sen(tSenx)\cdot Senx+tCos(tSenx)\}dx\ .$$

Pero como: $Si\ \ u=Sen(tSenx)\Rightarrow du=Cos(tSenx)\cdot tCosxdx$
$dv=Senxdx\Rightarrow v=-Cosx$ Entonces:

$$\int_0^{\pi}Sen(tSenx)\cdot Senxdx=-Sen(tSenx)\cdot Cosx+\int_0^{\pi}tCos(tSenx)\cdot Cos^2xdx=\int_0^{\pi}tCos(tSenx)\cdot Cos^2xdx$$

Reemplazando se cumple.

19.- Si $f(x)=e^x$ $\quad 0\le x\le 2$. Obtener la Serie de Fourier de g(x) ,función par de periodo 8 tal que g(x) = f(x) en $0\le x\le 2$.

Solución.

Fig.

Hacemos g(x) como la extensión par de la función f(x) extendida al $0\le x\le 4$

$$f_e(x)=\begin{cases} e^x & 0\le x\le 2\\ 0 & 2<x\le 4\end{cases}$$

Así g(x) es la extensión par de $f_e(x)$, por lo tanto:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_k Cos\frac{k\pi}{4}x+b_k Sen\frac{k\pi}{4}x\ ;$$

Con $a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 e^x Cos\frac{k\pi}{4}xdx = ... = \frac{8e^2}{16-k^2\pi^2}\begin{cases}(-1)^k - 1 & k \ \ par \\ (-1)^{k+1}\frac{k\pi}{4} & k \ \ impar\end{cases}$$

20.- Probar la relación de Parseval:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum({a_k}^2 + {b_k}^2).$$

Solución.

Si $f(x) \in SC[-p;p]$ **y** $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_k Cos\frac{k\pi}{p}x + b_k Sen\frac{k\pi}{p}x \Rightarrow$

$$f(x)\circ f(x) = \int_{-p}^{p} f^2(x)dx = \frac{a_0}{2}(1\circ f) + \sum a_k(Cos\frac{k\pi}{p}x\circ f) + b_k(Sen\frac{k\pi}{p}x\circ f)$$

Pero $1\circ f = \int_{-p}^{p} f(x)dx = pa_0$ $\quad f\circ Cos\frac{k\pi}{p}x = pa_k$ $\quad f\circ Sen\frac{k\pi}{p}x = pb_k$

$$\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = p\left\{\frac{{a_0}^2}{2} + \sum {a_k}^2 + {b_k}^2\right\}$$

21.- Hallar la Serie de Fourier de solo cosenos para la función: f(x)= x en $[0,2]$ y mediante la relación de Parseval, probar que :

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_1^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución.

Haciendo la extensión par de f(x) a $[-2;2]$

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2 \qquad a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x Cos\frac{k\pi}{2} x dx = \begin{cases} 0 & k \ \ par \\ -\frac{8}{k^2\pi^2} & k \ \ impar \end{cases}$$

Aplicando Parseval: $\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{16}{3} \therefore \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = \frac{8}{3}$ y

$$\frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum a_k^{\ 2} = \frac{4}{2} + \sum \frac{64}{\pi^4(2k-1)^4} \Rightarrow \frac{\pi^4}{96} = \sum \frac{1}{(2k-1)^4}$$

22.- Si $a_k \ \ y \ \ b_k$ son los coeficientes de Fourier para f(x) .Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Solución.

Siendo: $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2})$ y que la serie es convergente, entonces su termino general tiende a cero o sea $\lim_{k\to\infty}(a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}) = 0 \Leftrightarrow a_k \to 0 \wedge b_k \to 0.$

Ejercicios propuestos.

1.- Escribir la Serie de Fourier de las funciones:

a) $f(x) = e^{|x|} \qquad -\pi \le x \le \pi$ b) $f(x) = Sen\pi x \quad 0 < x < 1$

c) $f(x) = \begin{cases} x+\pi & -\pi < x < 0 \\ x-\pi & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ Graficar la extensión periódica d) $f(x) = e^{-x}$ -1<x<1

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$ Graficar su extensión periódica y evaluar en x = 0

2.- Si $f(x) = 1 - |x| \quad -1 \le x \le 1$,hallar su Serie de Fourier y deducir la convergencia de la serie numérica: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

3.- Determinar la Serie de Fourier para la función $f(x) = |x| \qquad -4 \le x \le 4$ con ello deducir la convergencia numérica del ejercicio anterior.

4.- Desarrollar en serie de cosenos la función f(x)= Sen x y analizar su convergencia para x = 0.

5.- Desarrollar en Serie de Fourier f(x) = $x^2 \qquad 0 \le x \le 2\pi$, y con ello pruebe que $\frac{\pi^2}{16} = \sum \frac{1}{k^2}$

6.- Dada la función de impulso unitario: $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

¿Cuál es el valor de la serie si a) $x = k\pi$ b) x=$(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$?

CALCULO AVANZADO: INTEGRAL DE FOURIER.

Ejercicios resueltos y propuestos.

1.- Encontrar la integral de Fourier para la función: $f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/2 & x=0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$

Solución.

Si la integral converge, escribimos: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\{A(w)Coswx+B(w)Senwx\}dw$ donde :

$$A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)Cos(wv)dv \qquad\qquad B(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(v)Sen(wv)dv$$

$$A(w)=\int_0^{\infty}e^{-v}Cos(wv)dv=\left.\frac{e^{-v}(-Coswv+wSenwv)}{1+w^2}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{1+w^2}$$

$$B(w)=\int_0^{\infty}e^{-v}Sen(wv)dv=\left.\frac{e^{-v}(-Senwv-wCoswv)}{1+w^2}\right|_0^{\infty}=\frac{w}{1+w^2}$$ Luego:

$\boxed{f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{Coswx+wSenwx}{1+w^2}dw}$ Si x = 0 $\boxed{\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+w^2}dw}$

2.- Demostrar que : $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{Senw}{w}Coswxdw=\begin{cases} 1/2 & 0\le x<1 \\ 1/4 & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$

Solución.

La integral corresponde a una función par puesto que $B(w)=0$, luego consideremos la función extendida par: $f(x)=\begin{cases} 1/2 & 0\le x<1 \\ !/4 & x=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

Así $A(w)=2\displaystyle\int_0^{\infty}1/2Coswvdv=\frac{Senw}{w}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{senw}{w}Coswxdw$

3.- Demostrar que:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Sen\pi w}{1-w^2} Senwxdw = \begin{cases} 1/2Senx & x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}.$$

Solución.

La integral representa a una función impar, pues $A(w)=0$ y $B(w)=\dfrac{Sen\pi w}{1-w^2}$, luego debemos considerar la extensión impar : $f_i(x)=\begin{cases} 1/2Senx & -\pi\le x\le\pi \\ 0 & |x|>\pi \end{cases}$

De ese modo $A(w)=0$ $\quad y \quad$ $B(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(v)Senwvdv=\int_{-\pi}^{\pi} 1/2SenvSenwvdv \Rightarrow$

$$B(w)=-\int_0^\pi SenvSenwvdv=\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(Cos(1-w)v-Cos(1+w)v\right)dv$$

$$B(w)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-w}Sen(1-w)v-\frac{1}{1+w}Sen(1+w)v\Big|_0^\pi\right\}$$

$$B(w)=\frac{1}{2(1-w^2)}\{(1+w)Sen(1-w)\pi-(1-w)Sen(1+w)\pi\}=\frac{Senw\pi}{1-w^2}$$

Así $\quad f_i(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{Senw\pi}{1-w^2}Senwxdw$ $\quad$ y corresponde con f(x) si $x\in(0,\pi)$

4.- Representar mediante una integral de Fourier del tipo $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty A(w)Coswxdx$ a la función:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$

Solución .

Lo que se pide es representar a una función par por lo que hacemos la respectiva extensión de la función dada. Así

$$A(w)=2\int_0^\infty f(v)Cos(wv)dv=2\left\{\int_0^1 vCos(wv)dv+\int_1^2(2-v)Cos(wv)dv\right\}$$ usando tablas.

$A(w) = 2\left\{\dfrac{2Cosw - Cos2w - 1}{w^2}\right\}$ y por lo tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{2Cosw - Cos2w - 1}{w^2} - \right\} Coswxdw}$$

5.- Si f(x) es una función par con su integral $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty A(w)Coswxdw$ .Demostrar que:

$$\boxed{x^2 f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A^*(w)Cos(wx)dw \qquad donde \quad A^*(w) = -\frac{d^2A(w)}{dw^2}}$$

Solución.

Como $x^2 f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty A^*(w)Cos(wx)dw$ pues es una función par y como

$f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty Cos(wx)dw \qquad con \qquad A(w) = 2\int_0^\infty f(v)Cos(wv)dv$ Entonces

$\dfrac{dA}{dw} = -2\displaystyle\int_0^\infty vf(v)Sen(wv)dv \qquad \dfrac{d^2A}{dw^2} = -2\int_0^\infty v^2 f(v)Cos(wv)dv$, comparando con

$A^*(w) = 2\displaystyle\int_0^\infty v^2 f(v)Cos(wv)dv \Rightarrow A^*(w) = -\frac{d^2A(w)}{dw^2}$.

Observación:

Para representar la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ Consideramos la extensión par de

$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ y aplicamos lo anterior en que $A(w) = \dfrac{2Senwa}{w}$

6.- Sea $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty B(w)Sen(wx)dw$. Hallar la integral de Fourier de la función $g(x) = f(x)Senx$.

Solución.

Como f(x) es una función impar, g(x) es par ,luego: $I_g = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(w)Cos(wx)dw$ donde

$$A(w) = 2\int_0^{\infty} g(v)Cos(wv)dv = 2\int_0^{\infty} f(v)SenvCos(wv)dv = \int_0^{\infty} f(v)\{Sen(1+w)v + Sen(1-w)v\}dv$$

$A(w) = \int_0^{\infty} f(v)Sen(1+w)vdv + \int_0^{\infty} f(v)Sen(1-w)vdv = \frac{1}{2}\{B(w+1) + B(w-1)\}$.Luego bastaria con conocer el coeficiente $B(w)$.

7.- Si f(x) es una **función par** con integral: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(w)Cos(wx)dw$. Entonces

$$xf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} -\left(\frac{dA}{dw}\right)Sen(wx)dw.$$

Solución

Para $xf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B^*(w)Sen(wx)dw$ donde $B^*(w) = 2\int_0^{\infty} vf(v)Sen(wv)dv$ .Pero como

$\frac{dA}{dw} = 2\int_0^{\infty} -vf(v)(Senwvdv$ pues $A(w) = 2\int_0^{\infty} f(v)Cos(wv)dv \Rightarrow B^*(w) = -\frac{dA}{dw}$.

8.- Probar que si $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(w)Cos(wx) + B(w)Sen(wx)dw$. Entonces se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A^2(w) + B^2(w)\right)dw.$$

Solución.

$$f \circ f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(w)\{Cos(wx)\circ f\} + B(w)\{Sen(wx)\circ f\}dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\{\ A^2(w) + B^2(w)\ \}dw.$$

9.- Aplicando lo anterior probar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Sen^2(aw)}{w^2}dw = \frac{\pi}{a}.$$

Solución.

Si tomamos: $f(x) = \pi \qquad -a \leq x \leq a$, función par

entonces: $A(w) = 2\int_0^a \pi Cos(wv)dv = \frac{2\pi}{w}Sen(wv)\Big|_0^a = \frac{2\pi}{w}Sen(wa) \therefore A^2(w) = \frac{4\pi^2}{w^2}Sen^2(wa)$

Por otra parte: $\int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \int_{-a}^{a}\pi^2 dx = 2a\pi^2$

Luego: $2a\pi^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A^2(w)dw = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{4\pi^2 Sen^2(wa)}{w^2}dw \therefore \frac{a\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{Sen^2(wa)}{w^2}dw$ o bién

$\pi a = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{Sen^2(wa)}{w^2}dw$

10.- Probar que : $x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{Sen(w\pi)}{w^2} - \frac{\pi Cos(w\pi)}{w}\right\}Sen(wx)dw \qquad 0 < x < \pi$

Solución.

Como se puede apreciar se trata de una función impar o sea $f(x) = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)Sen(wx)dw$ donde

$B(w) = 2\int_0^\pi vSen(wv)dv = -\frac{2\pi}{w}Cos(w\pi) + \frac{2}{w^2}Sen(w\pi) \therefore$

$f(x) = x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{Sen(w\pi)}{w^2} - \frac{Cos(w\pi)}{w}\right\}Sen(wx)dw$

11.- Utilizar la función: $f(x) = xe^{-x} \qquad x \geq 0$, para deducir que

$$\int_0^\infty \frac{1-w}{(1+w^2)^2}Cos(wx)dw = \int_0^\infty \frac{2w}{(1+w^2)^2}Sen(wx)dw.$$

Usar además esta igualdad y la convergencia para deducir que:

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(1+w^2)^2} = \int_0^\infty \frac{w^2dw}{(1+w^2)^2}.-$$

Solución.

a) Considerando la extensión par de la función dada: $f_p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)Cos(wx)dw$

con: $A(w) = 2\int_0^\infty f_p(v)Cos(wv)dv = 2\int_0^\infty ve^{-v}Cos(wv)dv = ... = \frac{(1-w^2)}{(1+w^2)^2} \Rightarrow$

$f_p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-w^2)}{(1+w^2)^2}Cos(wx)dw$.

b) Considerando la extensión impar de la función dada. $f_i(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)Sen(wx)dw$

donde $B(w) = 2\int_0^\infty ve^{-v}Sen(wv)dv = ... = \frac{2w}{(1+w^2)^2}$ luego

$f_i(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2w}{(1+w^2)^2}Sen(wx)dw$

Entonces ambas funciones coinciden en x>0 o sea son iguales las integrales.

$$\int_0^\infty \frac{(1-w^2)}{(1+w^2)^2}Cos(wx)dw = \int_0^\infty \frac{2w}{(1+w^2)^2}Sen(wx)dw$$

En a) si x = 0 $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-w^2)}{(1+w^2)^2}dw = 0 \therefore \int_0^\infty \frac{dw}{(1-w^2)^2} = \int_0^\infty \frac{w^2dw}{(1-w^2)^2}$

Ejercicios propuestos.

1.- Sea: $f(x) = xe^{-|x|}$. Pruebe que: $A(w) = 0$ $\qquad B(w) = \dfrac{4w}{\pi(1+w^2)^2}$

2.- Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ Verifique que $B(w) = 0$ $\qquad A(w) = \dfrac{2Senw}{\pi w}$

y que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2Senw}{\pi w} Cos(wx)dw$ converge a ½ si x =1 ó x = -1.

3.- Represente la función como una Integral de Fourier y discuta su convergencia en cada punto.

a) $f(x) = \begin{cases} x & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} k & |x| < 10 \\ 0 & |x| > 10 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/2 & -5 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \le 5 \\ 0 & |x| > 5 \end{cases}$ $\qquad$ d) $f(x) = xe^{-|x|}$

4.- Haciendo la extensión adecuada encontrar la Integral de Fourier de Senos y de Cosenos para:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 10 \\ 0 & x > 10 \end{cases}$ $\qquad$ b) $f(x) = \begin{cases} Cosh(x) & 0 \le x \le 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$

5.- Para $f(x) = e^{-kx;}$ $\qquad x > 0$, Hallar las Integrales de Senos y de Cosenos.

6.-Si $f(x) = e^{-x} Cosx$ $\qquad x \ge 0$ Hallar la integral de Fourier, además la de Senos y la de Cosenos.