

Ejercicios con propuestos y su desarrollo

EJERCICIOS DE PROBABILIDADES

1. Sea $S=\{s_1, s_2, s_3\}$ un simple espacio con distribución de probabilidad P dados por $P(s_1) = 0.2$, $P(s_2) = 0.3$, $P(s_3) = 0.5$.

Sea f una función definida en S por $f(s_1) = 5$, $f(s_2) = -2$, $f(s_3) = 1$. ¿Cuál es el valor esperado de f ?

$S=\{s_1, s_2, s_3\}$

S_i	P_i	f
S_1	0.2	5
S_2	0.3	-2
S_3	0.5	1

$$f = \sum_{i=1}^N P(s_i) f(s_i)$$

$$f = \sum_{i=1}^3 P(s_i) f(s_i)$$

$$f = P(s_1)f(s_1) + P(s_2)f(s_2) + P(s_3)f(s_3)$$

$$f = (0.2)(5) + (0.3)(-2) + (0.5)(1)$$

$$f = 0.9$$

2. Dado $S = \{S_1, S_2\}$ es un espacio muestral con probabilidad de distribución P dado por $P(S_1) = 0.7$; $P(S_2) = 0.3$. Sea f la función de S definida en R^2 dada por:

$$f(S_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y

$$f(S_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor esperado de f ?

Solución:

$$f(s) = \sum_{i=1}^N P(S_i) * f(S_j)$$

Entonces: $f(s) = (0.7)(2) + (0.7)(3) + (0.3)(5) + (0.3)(-4) = 3.8$

3. Sea $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, un espacio muestral con una distribución de probabilidad dada por:

$$P(S_1) = 0.5$$

$$P(S_2) = 0.25$$

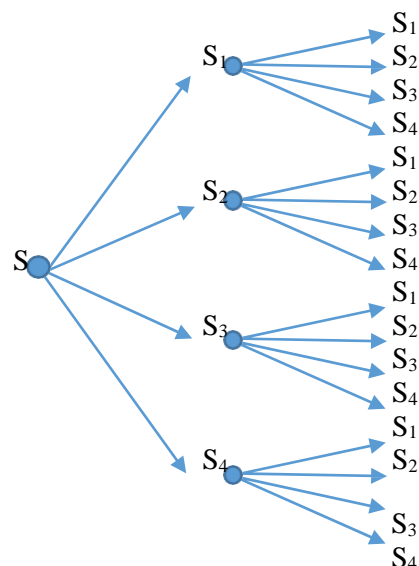
$$P(S_3) = 0.125$$

$$P(S_4) = 0.125$$

Existe 16 posibles eventos que pueden formar a partir de los elementos de S , calcular la probabilidad y la combinación de estos eventos.

Solución:

Como existe 16 eventos, la combinación queda de la siguiente manera:



Resolviendo estas combinaciones, los resultados observamos en la siguiente tabla:

Y\X	S ₁ =1/2	S ₂ =1/4	S ₃ =1/8	S ₄ =1/8
S ₁ =1/2	1/4	1/8	1/16	1/6
S ₂ =1/4	1/8	1/16	1/32	1/32
S ₃ =1/8	1/16	1/32	1/64	1/64
S ₄ =1/8	1/16	1/32	1/64	1/64

EJERCICIOS DE ENTROPÍA

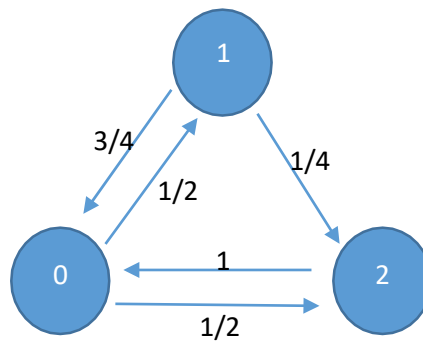
1. El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

- Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
- Dibujar el grafo asociado
- ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

Para el inciso (a)

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el inciso (b)



Para el apartado (c)

Para este caso lo hacemos encontrando cada uno de los valores dándole como incógnitas (x,y,z).

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * (x \ y \ z)$$

Nuestro sistema de ecuaciones nos quedaría:

$$x + y + z = 1 \quad \text{ecu(1)}$$

$$-x + \frac{3}{4}y + z = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 4z = 0 \quad \text{ecu(2)}$$

$$\frac{1}{2}x - y = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \quad \text{ecu(3)}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - z = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 2z = 0 \quad \text{ecu(4)}$$

Desarrollando este sistema de ecuaciones

Tomamos la ecu (1) y ecu(2) y multiplicamos por 4 a la ecu(1) para poder ir eliminando valores

$$\begin{array}{rcl} (4) & x + y + z = 1 & 4x \\ & - 3y - 4z = 0 & 4x \\ \hline & + 4y + 4z = 4 & 4x \\ & - 3y - 4z = 0 & \\ \hline & 8x + y = 4 & \text{ecu(5)} \end{array}$$

Luego tomamos la ecu(5) y la ecu(3) y multiplicamos a nuestra ecu(5) por 2 para poder eliminar el valor de y y así poder encontrar nuestra primer incógnita, para este caso x

$$\begin{array}{rcl} (2) & 8x + y = 4 & \\ & x - 2y = 0 & \\ \hline & 16x + 2y = 8 & \\ & x - 2y = 0 & \\ \hline & 17x = 8 & \\ & x = \frac{8}{17} & \end{array}$$

Remplazando el valor de x en la ecu(3)

$$\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2y = x \\ 2y = \frac{8}{17} \\ y = \frac{4}{17} \end{array}$$

Y para encontrar nuestro valor de z reemplazamos nuestros valores de x y y en la ecu(1)

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x = 1 - \frac{8}{17} - \frac{4}{17} \\ z = \frac{5}{17} \end{array}$$

Por lo tanto la probabilidad de que el ascensor esté en cada uno de los 3 pisos a largo plazo sería:

$$\begin{array}{l} x = \frac{8}{17} \\ y = \frac{4}{17} \\ z = \frac{5}{17} \end{array}$$

2. Convertir los siguientes valores de entropías a unidades de bits: (a) $H(P) = 0.5$; (b) $H(P) = 1.0$; (c) $H(P) = 1.5$; (d) $H(P) = 2.0$; (e) $H(P) = 2.5$; (f) $H(P) = 3.0$.

Solución:

(a) $H_r(P) = \frac{H_e(P)}{\ln(r)}$ *informacion de entropia donde r es la base en la que se trabaja.*

$$H_2(P) = \frac{0.5}{\ln 2} = 0.721 \text{ bits}$$

(b) $H_2(P) = \frac{1.0}{\ln 2} = 1.44 \text{ bits}$

(c) $H_2(P) = \frac{1.5}{\ln 2} = 2.16 \text{ bits}$

(d) $H_2(P) = \frac{2}{\ln 2} = 2.88 \text{ bits}$

(e) $H_2(P) = \frac{2.5}{\ln 2} = 3.606 \text{ bits}$

(f) $H_2(P) = \frac{3}{\ln 2} = 4.32 \text{ bits}$

3. Dado $S = \{s_1, s_2\}$ y $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ siendo P una función de distribución de probabilidad conjunta SXT, dado por $P(s_1, t_1) = 0.5, P(s_1, t_2) = 0.25, P(s_1, t_3) = 0.125, P(s_2, t_1) = 0.0625, P(s_2, t_2) = 0.03125, P(s_2, t_3) = 0.03125$. Calcular las probabilidades de las distribuciones marginales P_S y P_T y las entropías $H(P), H(P_S)$ y $H(P_T)$. También las distribución de probabilidad condicional $P_{S/T}$ y $P_{T/S}$ y sus entropías $H(P_{S/T})$ y $H(P_{T/S})$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix} \text{ matriz de probabilidad de distribucion conjunta}$$

$$P_S(s_i) = \sum_{j=1}^N P(s_i, t_j) \text{ calculo de las probabilidades marginales}$$

$$P_S(s_1) = \sum_{j=1}^2 P(s_1, t_j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P_S(s_2) = \sum_{j=1}^2 P(s_2, t_j) = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

$$P_T(t_1) = \sum_{i=1}^3 P(s_i, t_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

$$P_T(t_2) = \sum_{i=1}^3 P(s_i, t_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32}$$

$$P_T(t_3) = \sum_{i=1}^3 P(s_i, t_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

$$P_S = \left(\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right) \quad P_T = \left(\frac{9}{16}; \frac{9}{32}; \frac{5}{32}\right) \quad \text{respuesta}$$

$$\begin{aligned} H(P) &= - \sum_{i=1}^N P(s_i, t_j) \log_2 P(s_i, t_j) \\ &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{2}{32} \log_2 \frac{1}{32} \\ &= 1.9375 \text{ bits respuesta} \end{aligned}$$

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i = -\frac{7}{8} \log_2 \frac{7}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} = 0.543 \text{ bits respuesta}$$

$$H(T) = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i = -\frac{9}{16} \log_2 \frac{9}{16} - \frac{9}{32} \log_2 \frac{9}{32} - \frac{5}{32} \log_2 \frac{5}{32} = 1.400 \text{ bits respuesta}$$

$$P(S_i/t_j) = \frac{P(s_i, t_j)}{P_T(t_j)} = \frac{P(s_i, t_i)}{\sum_{i=1}^M P(s_i, t_j)} \text{ calculo de probabilidades condicionales}$$

$$P(S_1/t_1) = \frac{1/2}{9/16} = \frac{8}{9}; P(S_2/t_1) = \frac{1/16}{9/16} = \frac{1}{9}; P(S_1/t_2) = \frac{1/14}{9/32} = \frac{8}{9}; P(S_2/t_2) = \frac{1/32}{9/32} = \frac{1}{9}; P(S_1/t_3) = \frac{1/8}{5/32} = \frac{4}{5}; P(S_2/t_3) = \frac{1/32}{5/32} = \frac{1}{5} \text{ respuesta}$$

$$P(t_1, s_1) = \frac{1/2}{7/8} = \frac{4}{7}; P(t_1, s_2) = \frac{1/16}{1/8} = \frac{1}{2}; P(t_2, s_1) = \frac{1/4}{7/8} = \frac{2}{7}; P(t_2, s_2) = \frac{1/32}{1/8} = \frac{1}{4}; P(t_3, s_1) = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}; P(t_3, s_2) = \frac{1/32}{1/8} = \frac{1}{4} \text{ respuestas}$$

$$H(S/T) = H(S, T) - H(T) \text{ entropia condicional en funcion de la entropia conjunta.}$$

$$H(P) = H(S, T) \text{ condicione de igualdad}$$

$$H(S/T) = H(P) - H(T) = 1.9375 - 1.400 = 0.5375 \text{ bits respuesta}$$

$$H(T/S) = H(P) - H(S) = 1.9375 - 0.543 = 1.3945 \text{ bits respuesta}$$

MÉTODO EQUIVALENTE:

$$H(X/Y) = 0.35H(0.25/0.35, 0.1/0.35) + 0.35H(0.3/0.35, 0.05/0.35) + 0.2H(0.1/0.2, 0.05/0.2, 0.05/0.2) + 0.1H(0.1/0.1)$$

$$H(X/Y) = 0.35H(0.71, 0.2857) + 0.35H(0.857, 0.14) + 0.2H(0.5, 0.25, 0.25) + 0.1H(1)$$

Entonces :

$$H(p_i) = - \sum p_i * \log(p_i)$$

$$H(1) = - \sum 1 * \log(1) = 0$$

$$H(0.71, 0.2857) = - \sum 0.71 * \log(0.71) + (- \sum 0.2857 * \log(0.2857)) = 0.866$$

$$H(0.5, 0.25, 0.25) = - \sum 0.5 * \log(0.5) + (- \sum 0.25 * \log(0.25)) + (- \sum 0.25 * \log(0.25)) = 1.5$$

$$H(0.857, 0.14) = - \sum 0.33 * \log(0.33) + (- \sum 0.66 * \log(0.66)) = 0.537$$

$$H(X|Y) = 0.35 * 0.81 + 0.35 * 0.537 + 0.2 * 1.5 + 0.1 * 0$$

$$H(X|Y) = 0.8 \text{ bits}$$

		Y=				
		1	2	3	4	
X =	1	0.25	0	0	0	0.25
	2	0.1	0.3	0	0	0.4
	3	0	0.05	0.1	0	0.15
	4	0	0	0.05	0.1	0.15
	5	0	0	0.05	0	0.05
		0.35	0.35	0.20	0.1	

$$H(Y|X) = - \sum_i \sum_j p(X = i, Y = j) \log p(x/y) = \sum_j p(X = i) H(Y/X = i)$$

$$H(Y|X) = -p(y_1, x_1) \log p(y_1/x_1) - p(y_1, x_2) \log p(y_1/x_2) - p(y_2, x_2) \log p(y_2/x_2) \\ - p(y_2, x_3) \log p(y_2/x_3) - p(y_3, x_3) \log p(y_3/x_3) - p(y_3, x_4) \log p(y_3/x_4) \\ - p(y_4, x_4) \log p(y_4/x_4) - p(y_3, x_5) \log p(y_3/x_5)$$

$$H(X/Y) = 0.6 \text{ bits}$$

Equivalente:

$$H(Y|X) = 0.25H(0.25/0.25) + 0.4H(0.1/0.4, 0.3/0.4) + 0.15H(0.05/0.15, 0.1/0.15) \\ + 0.15H(0.05/0.15, 0.1/0.15) + 0.05H(0.05/0.05)$$

$$H(X|Y) = 0.6 \text{ bits}$$

Explicación detallada:

$$H(Y|X) = - \sum_i \sum_j p(X = i, Y = j) \log p(x/y) = \sum_j p(X = i) H(Y/X = i)$$

Según la tabla tenemos :

$$p(y_1, x_1) = 0.25$$

$$p(y_1, x_2) = 0.1$$

$$p(y_2, x_2) = 0.3$$

$$p(y_2, x_3) = 0.05$$

$$p(y_3, x_3) = 0.1$$

$$p(y_3, x_4) = 0.05$$

$$p(y_4, x_4) = 0.1$$

$$p(y_3, x_5) = 0.05$$

$$\sum p(x_1) = 0.25$$

$$\sum p(x_2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

$$\sum p(x_3) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$

$$\sum p(x_4) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$

$$\sum p(x_5) = 0.05$$

SI

$$\begin{aligned} \mathbf{H(Y/X)} = & -p(y_1, x_1) \log p(y_1/x_1) - p(y_1, x_2) \log p(y_1/x_2) - p(y_2, x_2) \log p(y_2/x_2) \\ & - p(y_2, x_3) \log p(y_2/x_3) - p(y_3, x_3) \log p(y_3/x_3) - p(y_3, x_4) \log p(y_3/x_4) \\ & - p(y_4, x_4) \log p(y_4/x_4) - p(y_3, x_5) \log p(y_3/x_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H(Y/X)} = & -0.25 * \log p(1) - 0.1 * \log p(0.25) - 0.3 * \log p(0.75) - 0.05 * \log p(0.33) \\ & - 0.1 * \log p(0.66) - 0.05 * \log p(0.33) - 0.1 \\ & * \log p(0.66) - 0.05 * \log p(1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H(Y/X)} = \mathbf{0.6 \textit{ bits}}$$

MÉTODO EQUIVALENTE:

$$\begin{aligned} \mathbf{H(Y/X)} = & 0.25H(0.25/0.25) + 0.4H(0.1/0.4, 0.3/0.4) + 0.15H(0.05/0.15, 0.1/0.15) \\ & + 0.15H(0.05/0.15, 0.1/0.15) + 0.05H(0.05/0.05) \end{aligned}$$

$$H(Y/X) = 0.25H(1) + 0.4H(0.25, 0.75) + 0.15H(0.33, 0.66) + 0.15H(0.33, 0.66) + 0.05H(1)$$

Entonces :

$$H(p_i) = - \sum p_i * \log(p_i)$$

$$H(1) = - \sum 1 * \log(1) = 0$$

$$H(0.25, 0.75) = - \sum 0.25 * \log(0.25) + (- \sum 0.75 * \log(0.75)) = 0.81$$

$$H(0.33, 0.66) = - \sum 0.33 * \log(0.33) + (- \sum 0.66 * \log(0.66)) = 0.92$$

$$H(Y | X) = (0.25 * 0) + (0.4 * 0.81) + (0.15 * 0.92) + (0.15 * 0.92) + (0.05 * 0)$$

$$H(Y | X) = 0.6 \text{ bits}$$

4. Dado $X = \{0, 1\}$ y considerando dos distribuciones p y q en X . dado $p(0)=1-r$, $p(1)=r$, y dado $q(0)=1-s$, $q(1)=s$.

a) Si $r=s$.

$$\begin{aligned} D(p||q) &= (1-s) * \log \frac{1-s}{1-s} + s * \log \frac{s}{s} \\ &= (1-s) * 0 + s * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cómo se indicó anteriormente si p y q son iguales $D(p||q) = D(q||p) = 0$.

b) Si $r = 1/2$, $s=1/4$.

$$\begin{aligned} D(p||q) &= (1-r) * \log \frac{1-r}{1-s} + r * \log \frac{r}{s} \\ D(p||q) &= (1/2) * \log \frac{1/2}{3/4} + (1/2) * \log \frac{1/2}{1/4} \\ D(p||q) &= 0.2075 \text{ bit,} \end{aligned}$$

Mientras,

$$\begin{aligned} D(q||p) &= (1-s) * \log \frac{1-s}{1-r} + s * \log \frac{s}{r} \\ D(q||p) &= (3/4) * \log \frac{3/4}{1/2} + (1/4) * \log \frac{1/4}{1/2} \\ &= 0.1884 \text{ bit.} \end{aligned}$$

Se puede notar que $D(p||q) \neq D(q||p)$ cuando $p(x) \neq p(y)$.

5. Dadas dos variables aleatorias discretas (X, Y) que pueden asumir 4 valores distintos cada una:

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Calcular las probabilidades marginal

$$P(x) = \sum_{i=1}^4 P(X, Y_i) = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right]$$

$$P(y) = \sum_{i=1}^4 P(X, Y_i) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$$

Podemos ver que las variables son dependientes porque:

$$p(x, y) \neq p(x)p(y)$$

b. Calcular la probabilidades condicionales

Para hallar las densidades condicionales (serán matrices), utilizaremos:

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

$$p(y/x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$$

$$p(x | y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p(y | x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Calcular las Entropías:

$$H(X) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right) \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) - (2) \left(\frac{1}{8}\right) \log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1.75 \text{ bits/simbolo}$$

$$H(Y) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -4 \left(\frac{1}{4}\right) \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ bits}$$

$$H(X | Y) = \sum_{i=1}^4 p(y_i) \cdot H(X | y_i) \quad ; \quad H(Y | X) = \sum_{j=1}^4 p(x_j) \cdot H(Y | x_j)$$

Las $H(X | y_i)$ y las $H(Y | x_j)$ son respectivamente las entropías de las filas de $p(x | y)$ y las entropías de las columnas de $p(y | x)$:

$$p(x | y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow H(X | y = 1) = 7/4 \\ \longrightarrow H(X | y = 2) = 7/4 \\ \longrightarrow H(X | y = 3) = 2 \\ \longrightarrow H(X | y = 4) = 0 \end{matrix}$$

$$H(X | Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{11}{8} \text{ bits}$$

A la misma manera, trabajando sobre las columnas de $p(y | x)$ y promediando logramos:

$$H(X | Y) = \frac{13}{8} \text{ bits}$$

La Información Mutua será:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y) = H(Y) - H(Y | X) = \frac{3}{8} \text{ bits}$$

La Entropía Conjunta podemos calcularla directamente de la matriz $p(x, y)$:

$$H(X, Y) = -\frac{2}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{6}{16} \log \frac{1}{16} - \frac{4}{32} \log \frac{1}{32} = \frac{27}{8} \text{ bits} = 3.37 \text{ bits}$$

O a través de una de las formulas:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X; Y) = \frac{7}{4} + 2 - \frac{3}{8} = \frac{14 + 16 - 3}{8} = \frac{27}{8} \text{ bits}$$

6. Sean $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $S_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ dos fuentes equiprobables independientes. Sea una fuente (S) cuya salida es el mcm de la salida de las fuentes anteriores $S = mcm(S_1, S_2)$.

- Calcule la entropía de la fuente $H(S)$
- Calcular la información mutua $I(S; S_1)$

Solución:

S_1	S_2	S
1	2	2
2	2	2
3	2	6
4	2	4
1	4	4

2	4	4
3	4	12
4	4	4

1	6	6
2	6	6
3	6	6
4	6	12
1	8	8
2	8	8
3	8	24
4	8	8

Entonces la fuente S queda conformada por los siguientes elementos:

$$S = \{2,4,6,8,12,24\}$$

Cuyas probabilidades de ocurrencia son:

$$P(2) = \frac{1}{8}; P(4) = \frac{1}{4}; P(6) = \frac{1}{4}; P(8) = \frac{3}{16}; P(12) = \frac{1}{8}; P(24) = \frac{1}{16}$$

a. Entonces la entropía de la fuente es:

$$H(S) = - \sum_{i=1}^r P(a_i, b_j) \log_2(P(a_i, b_j))$$

$$H(S) = 2.453 \text{ bits/simbolo}$$

b. Para calcular la $I(S; S_1)$ se puede calcular directamente la entropía de la fuente conjunta $H(S/S_1)$ para todos los valores de S_1 , esto es:

$$H(S/1) = 2$$

$$H(S/2) = 2$$

$$H(S/3) = 1.5$$

$$H(S/4) = 1.5$$

Entonces para calcular la entropía de la fuente sacamos la longitud media de cada entropía y aplicamos la regla de la cadena para calcular la información mutua:

$$H(S/S_1) = (1/2) * (2) + (1/2) * 1.5 = 1.75 \text{ bits/simbolo}$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$I(S; S_1) = H(S) - H(S/S_1)$$

$$I(S; S_1) = 2.4534 - 1.75 = 0.703 \text{ bits/simbolo}$$

7. Para una fuente binaria:

(a) Mostrar que la entropía, H, es máxima cuando la probabilidad de enviar un 1 es igual a la probabilidad de enviar un 0.

(b) Hallar el valor máximo de la entropía.

Solución:

a. Sea p, la probabilidad de enviar un 1,

Entonces 1-p será la probabilidad de enviar un 0:

La entropía es:

$$H(p) = \sum P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$$

$$H(p) = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p}$$

Para verificar la máxima entropía derivamos con respecto a p,

$$H'(p) = \log_2 \frac{1}{p} + \frac{p^2}{p^2} - \log_2 \frac{1}{1-p} + (1-p) \frac{1-p}{(1-p)^2}$$

$$H'(p) = \log_2 \frac{1-p}{p}$$

En el máximo debe cumplir que $H'(p) = 0$

Entonces

$$; \quad \log_2 \frac{1-p}{p} = 0$$

Eliminando el logaritmo:

$$\frac{1-p}{p} = 2^0$$

$$\frac{1-p}{p} = 1$$

$$\begin{aligned} &\text{Despejando p,} \\ &p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b. Son equiprobables, la entropía es;

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = 1 \text{ bit/simbolo}$$

8. Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ un espacio muestral de N. Calcular la entropía de cada una de las siguientes distribuciones de probabilidad de S.

a. $N=3$, $P(s_1)=0.5$, $P(s_2)=0.25$, $P(s_3)=0.25$

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P(S_i) \cdot \log_2 P(S_i)$$

$$H(S) = - (0.5) \cdot \log_2 P(0.5) - (0.25) \cdot \log_2 P(0.25) - (0.25) \cdot \log_2 P(0.25)$$

$$H(S) = 0.5 + 0.5 + 0.5$$

$$H(S) = 1.5 \text{ bits}$$

b. $N=4$, $P(s_1)=0.5$, $P(s_2)=0.25$, $P(s_3)=0.125$, $P(s_4)=0.125$

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P(S_i) \cdot \log_2 P(S_i)$$

$$H(S) = - (0.5) \cdot \log_2 P(0.5) - (0.25) \cdot \log_2 P(0.25) - 2 \cdot (0.125) \cdot \log_2 P(0.125)$$

$$H(S) = 0.5 + 0.5 + 2(0.375)$$

$$H(S) = 1.75 \text{ bits}$$

c. **N=5, P(s1)=0.5, P(s2)=0.125, P(s3)=0.125, P(s4)=0.125, P(s5)=0.125**

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P(S_i) \cdot \log_2 P(S_i)$$

$$H(S) = - (0.5) \cdot \log_2 P(0.5) - 4 \cdot (0.125) \cdot \log_2 P(0.125)$$

$$H(S) = 0.5 + 4 \cdot (0.375)$$

$$H(S) = 2 \text{ bits}$$

d. **N=5, P(s1)=0.25, P(s2)=0.25, P(s3)=0.25, P(s4)=0.125, P(s5)=0.125**

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P(S_i) \cdot \log_2 P(S_i)$$

$$H(S) = -3 \cdot (0.25) \cdot \log_2 P(0.25) - 2 \cdot (0.125) \cdot \log_2 P(0.125)$$

$$H(S) = 3(0.5) + 2(0.375)$$

$$H(S) = 2.25 \text{ bits}$$

e. **N=5, P(s1)=0.0625, P(s2)=0.125, P(s3)=0.25, P(s4)=0.5, P(s5)=0.0625**

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P(S_i) \cdot \log_2 P(S_i)$$

$$H(S) = - 2 \cdot (0.0625) \cdot \log_2 P(0.5) - (0.125) \cdot \log_2 P(0.125) - (0.25) \cdot \log_2 P(0.25) - (0.5) \cdot \log_2 P(0.5) -$$

$$H(S) = 2(0.25) + 0.375 + 0.5 + 0.5$$

$$H(S) = 1.875 \text{ bits}$$

9. Ejercicio

Dadas dos variables aleatorias discretas X, Y y su matriz de transición. Calcule:

$P(X), P(Y), P(X, Y), P(Y|X), H(X), H(Y), H(X|Y), I(X; Y)$

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede ver claramente que la suma de todos los valores da 1:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p(x, y_i) = 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} + 3 \cdot 0 = 1$$

Con la conjunta, podemos calcular las marginales:

$$p(x) = \sum_{i=1}^4 p(x, y_i) = \text{Sumar las Filas!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$p(y) = \sum_{j=1}^4 p(x_j, y) = \text{Sumar las Columnas!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Para hallar las densidades *condicionales*, usamos:

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} \quad ; \quad p(y | x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

=

$$p(X | Y = 1) = \frac{[1/8, 1/16, 1/32, 1/32]}{1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$p(x | y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo de las Entropías:

$$H(X) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} = 1.75 \text{ bits}$$

$$H(Y) = H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = -4 \left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \right) = 2 \text{ bits}$$

Las fórmulas de las entropías condicionales son:

$$H(X|Y) = \sum_{i=1}^4 p(y_i) \cdot H(X|y_i) \quad ; \quad H(Y|X) = \sum_{j=1}^4 p(x_j) \cdot H(Y|x_j)$$

Las $H(X|y_i)$ y las $H(Y|x_j)$ son **las entropías de las filas de $p(x|y)$ y las entropías de las columnas de $p(y|x)$** :

$$p(x|y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow H(X|y=1) = 7/4 \\ \longrightarrow H(X|y=2) = 7/4 \\ \longrightarrow H(X|y=3) = 2 \\ \longrightarrow H(X|y=4) = 0 \end{array}$$

La entropía condicional será finalmente el promedio de todas:

$$H(X|Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{11}{8} \text{ bits}$$

La *Información Mutua* será:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = \frac{3}{8} \text{ bits}$$

La *Entropía Conjunta* podemos calcularla directamente de la matriz $p(x,y)$:

$$H(X,Y) = -\frac{2}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{6}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{4}{32} \log_2 \frac{1}{32} = \frac{27}{8} \text{ bits} = 3.37 \text{ bits}$$

O a través de una de las formulas:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) - I(X;Y) = \frac{7}{4} + 2 - \frac{3}{8} = \frac{14 + 16 - 3}{8} = \frac{27}{8} \text{ bits} = 3.37 \text{ bits}$$

DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA

1. Encuentre la distribución estacionaria de la fuente de Markov cuya matriz de transición es:

$$H = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.75 \\ 0.85 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por nuestras estacionarias así:

$$H = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.75 \\ 0.85 & 0.25 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}$$

Sacando nuestro sistema de ecuaciones nos quedarían las siguientes:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad \text{ecu(1)}$$

$$0.15w_1 + 0.85w_2 = w_1 \quad \text{ecu(2)}$$

$$0.75w_1 + 0.25w_2 = w_2 \quad \text{ecu(3)}$$

Realizando las operaciones necesarias en cada uno de nuestras ecuaciones nos quedarían:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad \text{ecu(1)}$$

$$-0.85w_1 + 0.85w_2 = 0 \quad \text{ecu(2)}$$

$$0.75w_1 - 0.75w_2 = 0 \quad \text{ecu(3)}$$

Tomando las dos primeras ecuaciones y multiplicando por (0.85) a la ecu(1)

$$\begin{array}{rcl} (0.85) & w_1 + w_2 & = 1 \\ & -0.85w_1 + 0.85w_2 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 0.85w_1 + 0.85w_2 & = & 0.85 \\ -0.85w_1 + 0.85w_2 & = & 0 \\ \hline 0 & 1.7w_2 & = 0.85 \\ & w_2 & = 1/2 \end{array}$$

Reemplazando el valor de w_2 en la ecu(1)

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_1 = 1 - w_2$$

$$w_1 = 1 - 1/2$$

$$w_1 = 1/2$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{l} w_1 = 1/2 \\ w_2 = 1/2 \end{array}$$

2. La cervecería más importante del mundo (Guinness) ha contratado a un analista de investigación de operaciones para analizar su posición en el mercado. Están preocupados en especial por su mayor competidor (Heineken). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo tres estados, los estados G y H representan a los clientes que beben cerveza producida por las mencionadas cervecerías y el estado I representa todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos.

	G	H	I
G	0,7	0,2	0,1
H	0,2	0,75	0,05
I	0,1	0,1	0,8

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes.?

SOLUCIÓN:

Tres estados {G, H, I}

El problema consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$(x, y, z) \cdot P = (x, y, z); x + y + z = 1$, siendo x la probabilidad de que el consumidor compre G, y de que el consumidor compre H y z la del que consumidor compre I. De ambas expresiones se obtiene el siguiente sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$0,7x + 0,2y + 0,1z = x \Rightarrow -3x + 2y + z = 0$$

$$0,2x + 0,75y + 0,1z = y \Rightarrow 20x - 25y + 10z = 0$$

$$0,1x + 0,05y + 0,8z = z \Rightarrow 10x + 5y - 20z = 0$$

Tomando la ecu(1) y ecu(2)

$$\begin{array}{rcl}
 (3) & x + y + z & = 1 \\
 & -3x + 2y + z & = 0 \\
 \hline
 & 3x + 3y + 3z & = 3 \\
 & -3x + 2y + z & = 0 \\
 \hline
 & 5y + 4z & = 3 \quad \text{ecu(5)}
 \end{array}$$

Tomando la ecu(3) y ecu(4)

$$\begin{array}{rcl}
 & 20x - 25y + 10z & = 0 \\
 (-2) & 10x + 5y - 20z & = 0 \\
 \hline
 & 20x - 25y + 10z & = 0 \\
 & -20x - 10y + 40z & = 0 \\
 \hline
 & -35y + 50z & = 0 \quad \text{ecu(6)}
 \end{array}$$

Tomando ecuaciones (5), (6)

$$\begin{array}{r}
 (7) \quad 5y + 4z = 3 \\
 -35y - 30z = 0 \\
 \hline
 35y + 28z = 21 \\
 -35y + 50z = 0 \\
 \hline
 78z = 21 \\
 z = \frac{21}{78} \\
 z = \frac{7}{26}
 \end{array}$$

Reemplazando el valor de z en ecu(5)

$$\begin{array}{r}
 5y + 4z = 3 \\
 5y = 3 - 4z \\
 5y = 3 - 4\left(\frac{7}{26}\right) \\
 5y = \frac{50}{26} \\
 y = \frac{10}{26}
 \end{array}$$

Y por último reemplazando los valores de (y), (z) en ecu(1) para encontrar el valor de x

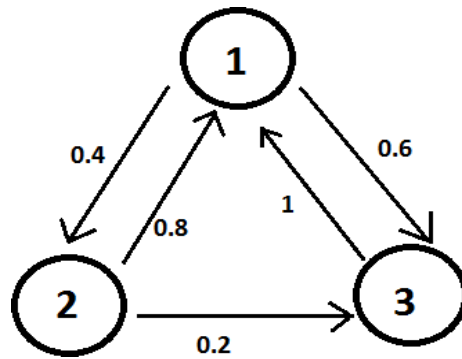
$$\begin{array}{r}
 x + y + z = 1 \\
 x = 1 - y - z \\
 x = 1 - \frac{10}{26} - \frac{7}{26} \\
 x = 1 - \frac{17}{26} \\
 x = \frac{9}{26}
 \end{array}$$

3. Dibuje un diagrama que represente la fuente de Markov con alfabeto $\{0, 1\}$ y un conjunto de estados $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ con las siguientes cinco transiciones:

- a. $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ del estado 1 y $P(2/1) = 0.4$
- b. $\sigma_1 \rightarrow \sigma_3$ del estado 0 y $P(3/1) = 0.6$
- c. $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ del estado 0 y $P(1/2) = 0.8$
- d. $\sigma_2 \rightarrow \sigma_3$ del estado 1 y $P(3/2) = 0.2$
- e. $\sigma_3 \rightarrow \sigma_1$ del estado 1 y $P(1/3) = 1$

Escriba la matriz de transición para esta fuente. ¿Es posible que esta fuente genere una salida que incluya la sub-secuencia 000?, ¿Es posible que esta fuente genere una salida que incluya la sub-secuencia 111?

Solución:



La Matriz de transición es:

$$G = \begin{Bmatrix} 0 & 0.8 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0 \end{Bmatrix}$$

Para encontrar las probabilidades iniciales:

Tenemos que las probabilidades estacionarias se denominan como W_1, W_2, W_3 y se las toma de la matriz de transición en cada columna donde suman las probabilidades 1. Para encontrar las probabilidades estacionarias se multiplica esta matriz por el vector de transición, formándose un sistema de ecuaciones que será resuelto por cualquier método de solución de ecuaciones lineales. Esto es

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0.8 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

$$0.8W_2 + W_3 = W_1 \quad (1)$$

$$0.4W_1 = W_2 \quad (2)$$

$$0.6W_1 + 0.2W_2 = W_3 \quad (3)$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \rightarrow W_3 = \frac{17}{25} W_1 \quad (5)$$

$$(2) \rightarrow W_2 = 0.4 W_1 \quad (6)$$

Reemplazando en (4)

$$\rightarrow W_1 + 0.4 W_1 + \frac{17}{25} W_1 = 1$$

$$\rightarrow W_1 = \frac{25}{52}$$

Reemplazando en (5) y (6):

$$\rightarrow W_2 = \frac{5}{26}$$

$$\rightarrow W_3 = \frac{17}{52}$$

Las probabilidades W_1, W_2, W_3 son las probabilidades conjuntas y estacionarias de la matriz de Markov.

- La fuente no puede generar un estado que incluya la sub-secuencia (000) debido a que la probabilidad inicial de generar un símbolo 0 es cero.
- La fuente puede generar una salida que incluya la sub-secuencia (111) con probabilidad de 1.

4. Considere una fuente de Markov con matriz de transición:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

y la distribución de probabilidad inicial:

$$W^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Calcule W^t para $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$W^t = \Pi^t \cdot W^0 = W^t = \Pi^t \cdot W^0$$

$t=1,$

$$W^1 = \Pi^1 \cdot W^0$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}^1 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

$t=2,$

$$W^2 = \Pi^2 \cdot W^0$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.4 \\ 0.35 & 0.6 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0.525 \\ 0.475 \end{bmatrix}$$

$t=3,$

$$W^3 = \Pi^3 \cdot W^0$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.6 \\ 0.525 & 0.4 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} 0.5375 \\ 0.4625 \end{bmatrix}$$

$t=4,$

$$W^4 = \Pi^4 \cdot W^0$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.5 \\ 0.4375 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} 0.53125 \\ 0.46875 \end{bmatrix}$$

t=5,

$$W^5 = \Pi^5 \cdot W^0$$

$$W^5 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^5 = \begin{bmatrix} 0.518 & 0.55 \\ 0.481 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^5 = \begin{bmatrix} 0.5343 \\ 0.4656 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS FUENTE AFÍN

- 1) Dada la siguiente matriz de una fuente de Markov encontrar la entropía de la misma y de la fuente afín y comprobar dichas respuestas.

Escriba aquí la ecuación.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Primero se debe hallar las probabilidades de los estados para esto se debe formar unas ecuaciones basándonos en la matriz dada:

$$0.6A + 0.0B + 0.3C = A \quad (1)$$

$$0.4A + 0.3B + 0.3C = B \quad (2)$$

$$0A + 0.7B + 0.4C = C \quad (3)$$

$$A + B + C = 1 \quad (4)$$

Solucionando dicho sistema de ecuaciones tenemos las siguientes probabilidades de estado de nuestra matriz de Markov.

$$P(A) = \frac{21}{73}; \quad P(C) = \frac{24}{73}; \quad P(B) = \frac{28}{73}$$

Para calcular la entropía de la fuente se tiene que:

$$H(S) = \sum_{j=1}^N P(\text{estados}) H(P_{ij})$$

$$H(0.6; 0.3) = -0.6 \log_2 0.6 - 0.3 \log_2 0.3 = 0.9632 \text{ bist}$$

$$H(0.4; 0.3; 0.3) = -0.4 \log_2 0.4 - 0.3 \log_2 0.3 - 0.3 \log_2 0.3 = 1.571 \text{ bits}$$

$$H(0.7; 0.4) = -0.7 \log_2 0.7 - 0.4 \log_2 0.4 = 0.888 \text{ bits}$$

$$H(S) = \frac{21}{73} * 0.9632 + \frac{24}{73} * 1.571 + \frac{28}{73} 0.888 = 1.14 \text{ bits/sim}$$

Para calcular la entropía de la fuente affin se toma las probabilidades estacionarias como se muestra a continuación:

$$H(\mathcal{S}) = - \sum_{j=1}^N P(\text{estacionaria}) \log_2 P(\text{estacionaria})$$

$$H(\mathcal{S}) = - \frac{21}{73} \log_2 \frac{21}{73} - \frac{24}{73} \log_2 \frac{24}{73} - \frac{28}{73} \log_2 \frac{28}{73} = 1.58 \text{ bits/sim}$$

EJERCICIOS INFORMACIÓN MUTUA

1. Los habitantes de cierto caserío están divididos en dos grupos, A y B. En el grupo A la mitad de las personas dicen la verdad, tres décimos mienten y un quinto de ellos se niegan a responder. En el grupo B, tres décimos dicen la verdad, la mitad mienten y dos décimos no responden. Sea p la probabilidad de que una persona seleccionada al azar pertenezca al grupo A. Sea $I = I(p)$ la información transmitida acerca del estatus de una persona (si dice la verdad, miente o no responde) una vez que se conoce a qué grupo pertenece. ¿Cuál es máximo valor que puede tomar I ? y ¿cuál es el porcentaje de personas en el grupo A para las cuales el máximo ocurre?

V=los que dicen a verdad = 3/10

M=Los que mienten = 5/10

N=los que no dicen nada = 2/10

$$P(A) = p$$

$$P(B) = 1 - p$$

$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) = \frac{5}{10}P(A) + \frac{3}{10}P(B)$$

$$P(V) = \frac{5}{10}P(A) + \frac{2}{10}(1 - P(A))$$

$$P(V) = \frac{3}{10} - \frac{2}{10}P(A) = \frac{3}{10} - \frac{2}{10}p$$

$$P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) = \frac{3}{10}P(A) + \frac{5}{10}P(B)$$

$$P(M) = \frac{3}{10}P(A) + \frac{5}{10}(1 - P(A))$$

$$P(M) = \frac{5}{10} - \frac{2}{10}P(A) = \frac{1}{2} - \frac{2}{10}p$$

$$P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B) = \frac{2}{10}P(A) + \frac{2}{10}P(B)$$

$$P(N) = \frac{2}{10}P(A) + \frac{2}{10}(1 - P(A))$$

$$P(N) = \frac{2}{10}$$

Ahora, Y será la variable aleatoria que toma los valores V, M y N según la respuesta del individuo y X será la variable aleatoria que toma valores A y B según el grupo al que pertenezca. Entonces:

$$H(Y) = -\left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p\right] \log_2 \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10}p\right] \log_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10}p\right] - \frac{2}{10} \log_2 \frac{2}{10}$$

y

$$H(Y|X) = P(A)H(Y|X = A) + P(B)H(Y|X = B)$$

$$H(Y|X) = pH(Y|X = A) + (1 - p)H(Y|X = B)$$

$$H(Y|X) = pH_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right) + (1 - p)H_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

$$H(Y|X) = pH_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right) + (1 - p)H_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

$$H(Y|X) = H_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

$$H(Y|X) = \left(\frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{3}{10} \log_2 \frac{10}{3} + \frac{2}{10} \log_2 5\right)$$

$$H(Y|X) = 1,49$$

Finalmente se puede calcular

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$I(Y|X) = -\left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p\right] \log_2 \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10}p\right] \log_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10}p\right] - \frac{2}{10} \log_2 \left[\frac{2}{10}\right] - 1,49$$

Se deriva con respecto a p y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial p} I(Y|X) = -\frac{2}{10} \log_2 \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p\right] - \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \log_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10}p\right] + \frac{2}{10}$$

Se iguala a cero y se obtiene el valor del p para el que la información es máxima

$$\frac{2}{10} \log_2 \frac{1 - \frac{2}{10}p}{\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1 - \frac{2}{10}p}{\frac{3}{10} + \frac{2}{10}p}\right)^{\frac{2}{10}} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Reemplazando el valor de p en la ecuación de I(Y|X)

$$I(Y|X) = - \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \log_2 \left[\frac{3}{10} + \frac{2}{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\ - \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \log_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{10} \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{2}{10} \log_2 \left[\frac{2}{10} \right] - 1,49$$

$$I(Y|X) = - \left[\frac{4}{10} \right] \log_2 \left[\frac{4}{10} \right] - \left[\frac{4}{10} \right] \log_2 \left[\frac{4}{10} \right] - \frac{2}{10} \log_2 \left[\frac{2}{10} \right] - 1,49$$

Con este valor de p el valor máximo de la información es

$$I_{\max}(Y|X) = 0,4 \log_2 0,4 - 0,4 \log_2 0,4 - 0,2 \log_2 0,2 - 1,49 = 0,037$$

Lo cual quiere decir que saber a qué grupo pertenece el individuo no da mucha información sobre si dice la verdad, miente o no responde.

2. La información mutua entre variables aleatorias X, Y está definida por la ecuación 2.47. explique cómo I(X,Y) proporciona una medida de la cantidad de independencia entre X y Y.

$$I(X; Y) = \int f_{XY}(x, y) \log_2 \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} \quad \text{Ecuación 4.27}$$

Como nos podemos dar cuenta en la ecuación 2.47 los eventos que ocurren son mutuamente excluyentes uno del otro pero están en el mismo espacio muestral, es decir que se da un evento que ocurra en la variable X para encontrar el evento que ocurre en la variable Y, dentro de una función dada para las variables aleatorias X, Y definida como $f_{XY}(X, y)$ donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las funciones marginales.

3. Un modelo de 2-gram con un lenguaje {A, B, C} se da por las probabilidades

$P(AA) = 0.000$	$P(AB) = 0.200$	$P(AC) = 0.133$
$P(BA) = 0.133$	$P(BB) = 0.000$	$P(BC) = 0.200$
$P(CA) = 0.200$	$P(CB) = 0.133$	$P(CC) = 0.000$

Las probabilidades de los símbolos individuales son

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

Construir una fuente de Markov (primer orden) a partir de estos modelos. Dibuje un diagrama para representar la fuente y anotar su matriz de transición.

Calculando las probabilidades de transición nos quedaría de la siguiente manera:

$$P(A|A) = \frac{P(AA)}{P(A)} = \frac{0,000}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,200}{\frac{1}{3}} = 0,6$$

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{0,133}{\frac{1}{3}} = 0,4$$

$$P(A|B) = \frac{P(BA)}{P(B)} = \frac{0,133}{\frac{1}{3}} = 0,4$$

$$P(B|B) = \frac{P(BB)}{P(B)} = \frac{0,000}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{0,200}{\frac{1}{3}} = 0,6$$

$$P(A|C) = \frac{P(CA)}{P(C)} = \frac{0,200}{\frac{1}{3}} = 0,6$$

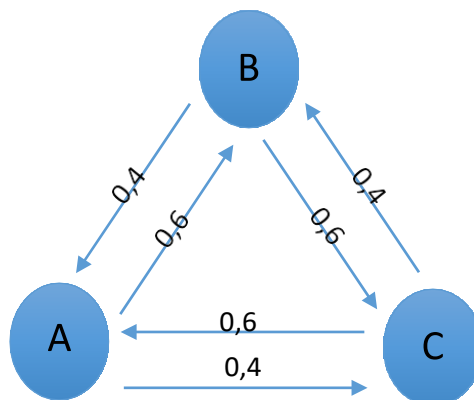
$$P(B|C) = \frac{P(CB)}{P(C)} = \frac{0,133}{\frac{1}{3}} = 0,4$$

$$P(C|C) = \frac{P(CC)}{P(C)} = \frac{0,000}{\frac{1}{3}} = 0$$

Armando nuestra matriz de transición sería:

	A	B	C
A	0	0,6	0,4
B	0,4	0	0,6
C	0,6	0,4	0

Y por último nuestro diagrama de estados nos quedaría de la siguiente manera:



4. Demostrar que si M^n es la n_{th} extensión de una fuente de primer orden de Markov M sus entropías están relacionadas por: $H(M^n) = nH(M)$

Tomemos una fuente de markov de primer: $M = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Con probabilidades de transición: $P(S_i/S_{j1}, S_{j2} \dots S_m)$

Y distribuciones estacionarias: $P_1, P_2 \dots P_n$

Tomando la extensión de la fuente: M^n

Tenemos que la entropía de una fuente de Markov de orden n se la puede calcular por medio de la expresión:

$$H(M^n) = - \sum_{M^n} \sum_{M^n} P(S_j, S_i) \log p(S_j/S_i)$$

Operando con el segundo término de la igualdad, descomponemos el mismo en términos de la suma de n términos hasta (n-1), esto es:

$$= - \sum_{M^{2n}} (S_j, S_i) \log p(S_j/S_i) \dots \dots - \sum_{M^2} (S_{n-1}, S_{m-1}) \log p(S_{n-1}/S_{m-1})$$

Podemos calcular el segundo término de la igualdad calculando los $(2n - n)$ términos de todos ellos por superposición y nos queda:

$$= - \sum_{M^{2n-2n-2}} (S_j, S_i) \log p(S_j/S_i) - \sum_{M^{2-2n-2}} (S_i, S_j) \log p(S_{n-2}/S_{m-2})$$

Pasamos al primer miembro:

$$\sum_{M^n} (S_j, S_i) \log p(S_j/S_i) = -n \sum_{M^1} (S_{n-1}, S_{m-1}) \log p(S_{n-1}/S_{m-1})$$

Como se puede ver el primer término de la igualdad es: $H(M^n)$

Y el segundo miembro de la igualdad nos queda, debido a que la entropía de la sumatoria es lo mismo que multiplicar por n veces la operación, esto es: $nH(M)$

Que son las entropías de la extensión de una fuente de markov. Por lo tanto:

$$H(M^n) = nH(M)$$

4. Dado $H(B/A) = 0.83$, $H(A) = 0.92$ y $H(A/B) = 0.73$. Encontrar $H(B)$, $H(A/B)$ y $I(A; B)$.

Solución:

$$I(A; B) = H(A) - H(A/B)$$

$$I(A; B) = 0.92 - 0.73$$

$$I(A; B) = 0.19 \text{ bits/simbolo}$$

$$H(B) = H(B/A) + I(A; B)$$

$$H(B) = 0.83 + 0.19$$

$$H(B) = 1.02 \text{ bits/simbolo}$$

$$H(A; B) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$

$$H(A; B) = 0.92 + 1.02 - 0.19$$

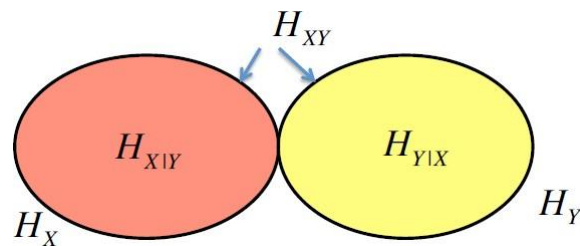
$$H(A; B) = 1.75 \text{ bits/simblo}$$

5. Se estableció que el valor mínimo de $I(A; B)$ es 0, es decir $I(A; B) \geq 0$. ¿Cuál es el valor máximo de $I(A; B)$?

Solución:

Información mutua mínima

$I(A; B) \geq 0$; Cuando A y B son independientes entre sí. Es decir, $A \neq B$.



Entonces;

$$I(A; B) = 0$$

$$H(A) = H(A/B)$$

$$H(B) = H(B/A)$$

$$H(A; B) = H(A) + H(B)$$

Información mutua máxima

$I(A; B) = \text{Maxima}$; cuando la Variable $A=B$

Es totalmente dependiente tanto A y B

$$I_{XY} = H_X = H_Y$$

Entonces se cumple que;

$$H(A; B) = H(A) = H(B) = I(A; B)$$

$$H(A/B) = 0$$

$$H(B/A) = 0$$

6. Considerar un canal con la propiedad de que X_i y Y_j son estadísticamente independientes para todo i, j . Mostrar que:

$$H(X/Y) = H(X) \text{ y } I(X, Y) = 0$$

Solución:

Por definición la entropía condicional es:

$$H(X/Y) = \sum_{X,Y} P(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i/y_j)}$$

Como x e y son independientes cumple que:

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$$

$$P(x_i/y_j) = P(x_i)$$

Reemplazando;

$$H(X/Y) = \sum_x \sum_y P(x_i) P(y_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$$

$$H(X/Y) = \sum_y P(y_j) \sum_x P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$$

Como,

$$\sum_y P(y_j) = 1$$

Entonces;

$$H(X/Y) = \sum_x P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$$

$$H(X/Y) = H(X) \text{ Rta.}$$

Para la información mutua, aplicando la definición:

$$I(X, Y) = \sum_{X,Y} P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)}$$

Aplicado las igualdades;

$$I(X, Y) = \sum_{X,Y} P(x_i) P(y_j) \log_2 \frac{P(x_i)}{P(x_i)}$$

$$I(X, Y) = \sum_{X,Y} P(x_i) P(y_j) .0$$

$$I(X, Y) = 0$$

7. Un teclado numérico tiene los números 0, 1, 2..... 9. Se asume que cada tecla es utilizada en forma equiprobable. Calcule con qué cadencia deben ser oprimidas las mismas para generar un flujo de información de 2 bit/s.

Solución:

Ecuación $R = rH$

donde;

r es la tasa símbolos

R =Tasa de Información

$R=2$

La probabilidad de cada teclado es:

$$P(T) = \frac{1}{10}$$

El espacio muestra es:

$$S = \{0,1,2,3,4, \dots \dots \dots, 9\}$$

Calculando la entropía de la fuente:

$$H(S) = \sum P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)}$$

Como son equiprobables;

$$H(S) = 10 \left\{ \frac{1}{10} \log_2(10) \right\}$$

$$H(S) = 3.32 \text{ bits/simbolo}$$

Entonces despejando y reemplazando valores;

$$R = rH$$

$$r = \frac{R}{H}$$

$$r = \frac{2}{3.32}$$

$$r = 0.6 \text{ simbolo/segundo}$$

8. De un mazo de 52 cartas se elige una al azar.

(a) Hallar la información en bits que se tiene cuando se conoce que la carta es:

- **de corazones**
- **una figura**
- **una figura de corazones**

(b) Cuanta información se necesita para identificar la carta si, se sabe que es roja.

Solución:

a)

- De corazones

La probabilidad que la carta sea de corazones es:

$$P(\text{corazones}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

La información que sea de corazones es:

$$I(\text{corazones}) = \log_2 4 = 2 \text{ bits}$$

- Una figura

La probabilidad que sea una figura es:

$$P(\text{figura}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

La información de corazones es:

$$I(\text{figura}) = \log_2 \frac{13}{3} = 2.1154 \text{ bits}$$

- Una figura de corazones

La probabilidad que sea una figura de corazones es:

$$P(\text{figuracorazones}) = \frac{3}{52}$$

La información de corazones es:

$$I(\text{figuracorazones}) = \log_2 \frac{52}{3} = 4.1154 \text{ bits}$$

b) La información que se tiene al identificar una carta es:

$$I(\text{unacarta}) = \log_2 52 \text{ bits}$$

Como tenemos 26 cartas de color rojo entonces

$$P(\text{roja}) = \frac{1}{2}$$

$$I(\text{roja}) = \log_2 2 = 1 \text{ bit}$$

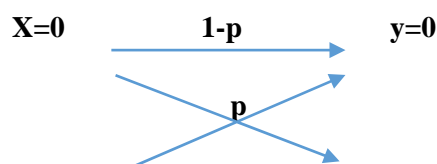
La cantidad de información que se requiere:

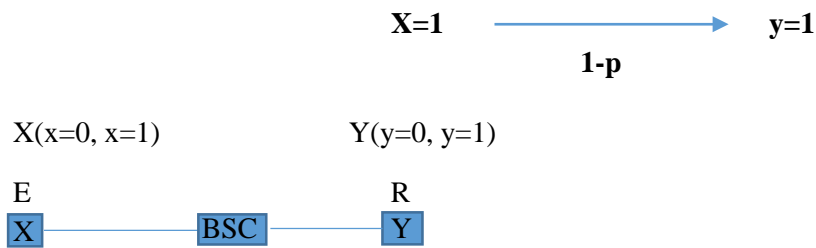
$$I(\text{unacarta}) - I(\text{Roja}) = \log_2 52 \text{ bits} - 1$$

$$I = \log_2(26) \text{ bits}$$

EJERCICIOS CANAL BSC

1. Halle $H(y|x)$, $H(x|y)$, información mutua y la p_y ; con $s = \{0, 1\}$, $P_x(0) = 0.7$ y un error $p = 0.2$.





Como tenemos que $p(0) = 0.7$ por defecto tenemos que $p(1)=0.3$ para que nuestro vector de probabilidad inicial nos de en la suma 1

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{P(x)} \quad (\mathbf{P_x(0)} \quad \mathbf{P_x(1)}) \\
 \quad \quad (0.7 \quad 0.3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{P_Y(0)} \quad \mathbf{P_Y(1)} \\
 \left\{ \begin{array}{cc} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{P(y)} \quad (\mathbf{P_y(0)} \quad \mathbf{P_y(1)}) \\
 \quad \quad (0.62 \quad 0.38)
 \end{array}$$

$$\mathbf{P(x)} = (P_x(0) + P_x(1)) = (0.7 + 0.3) = 1$$

Si nos fijamos en el canal BSC obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{P(X(0) | Y(0))} = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\mathbf{P(X(0) | Y(1))} = 0.2$$

$$\mathbf{P(X(1) | Y(0))} = 0.2$$

$$\mathbf{P(X(1) | Y(1))} = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$$

La respuesta de $P(y)$ es :

$$\mathbf{P_Y(0)} = (0.7)(0.8) + (0.3)(0.2) = 0.62$$

$$\mathbf{P_Y(1)} = (0.7)(0.2) + (0.3)(0.8) = 0.38$$

La distribución conjunta de las varieables aleatorias X y Y quedaría:

$$\begin{array}{c}
 P(X,Y) = \begin{pmatrix} (0.8)(0.7) & (0.2)(0.7) \\ (0.2)(0.3) & (0.8)(0.3) \end{pmatrix} \\
 \\
 P(X,Y) = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.14 \\ 0.06 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\
 \quad \quad \quad \begin{pmatrix} 0.62 & 0.38 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Con nuestra matriz $P(x,y)$ ya podemos calcular nuestras entropías

$$H(x,y) = -0.56\log_2 0.56 - 0.14\log_2 0.14 - 0.06\log_2 0.06 - 0.24\log_2 0.24$$

$$\mathbf{H(x,y) = 1.6 bits}$$

$$H(x) = -0.56\log_2 0.7 - 0.14\log_2 0.3 - 0.06\log_2 0.38 - 0.24\log_2 0.38$$

$$\mathbf{H(x) = 0.88 bits}$$

$$H(y) = -0.56\log_2 0.62 - 0.06\log_2 0.62 - 0.14\log_2 0.38 - 0.24\log_2 0.38$$

$$H(y) = 0.96 \text{ bits}$$

$$H(X|Y) = H(x,y) - H(y)$$

$$H(X|Y) = 1.6 \text{ bits} - 0.96 \text{ bits}$$

$$H(X|Y) = 0.65 \text{ bits}$$

$$H(Y|X) = H(x,y) - H(x)$$

$$H(Y|X) = 1.6 \text{ bits} - 0.88 \text{ bits}$$

$$H(Y|X) = 0.72 \text{ bits}$$

Finalmente calcularemos la información mutua.

$$I(X; Y) = H(x) - H(X|Y)$$

$$I(X; Y) = 0.88 \text{ bits} - 0.65 \text{ bits}$$

$$I(X; Y) = 0.23$$

2. Un canal binario transmite correctamente un 0 (como un 0) dos veces más como transmitir incorrectamente (como un 1) y transmite correctamente un 1 (como un 1) tres veces antes de transmitir incorrectamente (como un 0). La entrada del canal puede asumirse como equiprobable.

- a. **Cuál es la matriz del canal P? Dibuje el canal**
- b. **Calcule las probabilidades de salida, P(b)**
- c. **Calcule las probabilidades a priori. P(a/b)**

Solución:

Las probabilidades iniciales como son equiprobables tenemos:

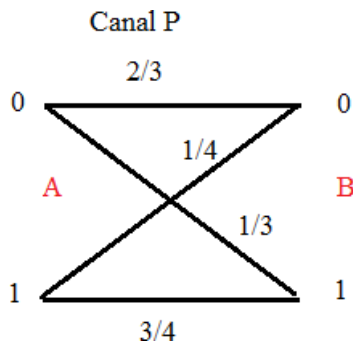
$$P(a = 0) = 1/2$$

$$P(a = 1) = 1/2$$

- a. La matriz del canal P es:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

El diagrama del canal es:



b. Las probabilidades de salida o a posteriori son:

$$P(b = 0) = P(b = 0/a = 0) * P(a = 0) + P(b = 0/a = 1) * P(a = 1)$$

$$P(b = 0) = \left(\frac{2}{3}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$$

$$P(b = 1) = 1 - P(b = 0) = 1 - \frac{11}{24} = \frac{13}{24}$$

c. Las probabilidades a priori son:

$$P(a = 0 / b = 0) = \frac{P(b = 0/a = 0) * P(a = 0)}{P(b = 0)}$$

$$P(a = 0 / b = 0) = \frac{(2/3) * (1/2)}{11/24}$$

$$P(a = 0 / b = 0) = \frac{8}{11}$$

$$P(a = 1/b = 0) = 1 - P(a = 0 / b = 0) = 1 - \frac{8}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(a = 1/b = 1) = \frac{P(b = 1/a = 1) * P(a = 1)}{P(b = 1)}$$

$$P(a = 0 / b = 0) = \frac{(3/4) * (1/2)}{13/24}$$

$$P(a = 0 / b = 0) = \frac{9}{13}$$

$$P(a = 0/b = 1) = 1 - P(a = 1 / b = 1) = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$$

3. El canal AB tiene la matriz de canal:

$$P_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y está conectado con el canal BC con la matriz:

$$P_{BC} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

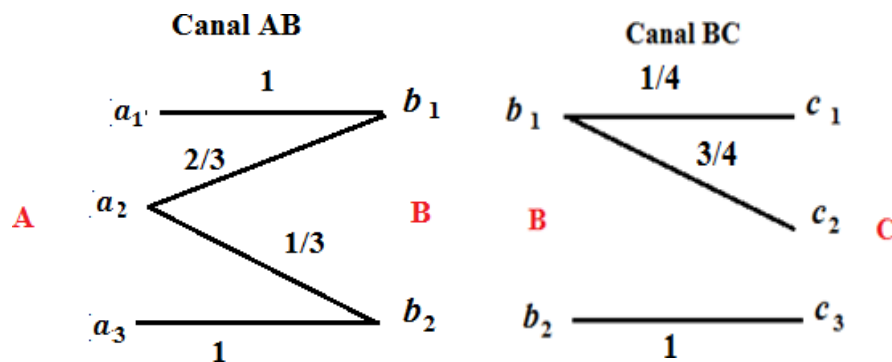
La entrada ternaria de A al sistema de canales tiene las siguientes estadísticas:

$$P(a_1) = \frac{1}{8}, P(a_2) = \frac{3}{8} \text{ y } P(a_3) = \frac{1}{2}$$

La salida del canal AB es B y la salida del canal BC es C.

- Calcular $H(A)$, $H(B)$ y $H(C)$.
- Calcular $I(A; B)$, $I(B; C)$ y $I(A; C)$.
- Qué puede decir acerca del canal BC? ¿Explique?

Solución:



$$a. \quad H(A) = -\frac{1}{8} \log_2 \left(\frac{1}{8} \right) - \frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) - \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1.4056$$

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^r P(b_j/a_i) * P(a_i)$$

$$P(b_1) = (1) \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{8} \right) + (0) \left(\frac{5}{8} \right) = \frac{3}{8}$$

$$P(b_2) = (0) \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{8} \right) + (1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8}$$

Entonces:

$$H(B) = -\frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) - \frac{5}{8} \log_2 \left(\frac{5}{8} \right) = 0.9544$$

$$P(c_j) = \sum_{i=1}^r P(c_j/b_i) * P(b_i)$$

$$P(c_1) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{3}{8} \right) + (0) \left(\frac{5}{8} \right) = \frac{3}{32}$$

$$P(c_2) = \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{3}{8} \right) + (0) \left(\frac{5}{8} \right) = \frac{9}{32}$$

$$P(c_3) = (0) \left(\frac{3}{8} \right) + (1) \left(\frac{5}{8} \right) = \frac{5}{8}$$

Entonces:

$$H(C) = -\frac{3}{32} \log_2 \left(\frac{3}{32} \right) - \frac{9}{32} \log_2 \left(\frac{9}{32} \right) - \frac{5}{8} \log_2 \left(\frac{5}{8} \right) = 1.2586$$

- b. Para calcular la información mutua $I(A; B)$, primero calculamos las probabilidades a posteriori de la siguiente manera:

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{P(b = 1/a = 1) * P(a = 1)}{P(b = 1)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(1)(1/8)}{3/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(a = 2 / b = 1) = \frac{P(b = 1/a = 2)P(a = 2)}{P(b = 1)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(2/3)(3/8)}{3/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{2}{3}$$

$$P(a = 3 / b = 1) = \frac{P(b = 1/a = 3) P(a = 3)}{P(b = 1)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(0)(1/2)}{3/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = 0$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{P(b = 1/a = 1) * P(a = 1)}{P(b = 2)}$$

$$P(a = 1 / b = 2) = \frac{(0)(1/8)}{5/8}$$

$$P(a = 1 / b = 2) = 0$$

$$P(a = 2 / b = 2) = \frac{P(b = 2/a = 2)P(a = 2)}{P(b = 2)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(1/3)(3/8)}{5/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{1}{5}$$

$$P(a = 3 / b = 2) = \frac{P(b = 2/a = 3) P(a = 3)}{P(b = 2)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(1)(1/2)}{5/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{4}{5}$$

Y la entropía:

$$H(A/B) = \sum_{j=1}^r P(b_j)H(A/b_j)$$

$$= P(b = 1)H(A/b = 1) + P(b = 2)H(A/b = 2)$$

$$H(A/b = 1) = -\frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) = 0.9182$$

$$H(A/b = 2) = -\frac{1}{5} \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5} \log_2 \left(\frac{4}{5}\right) = \mathbf{0.7219}$$

Entonces:

$$H(A/B) = \left(\frac{3}{8}\right) * (0.9182) + \left(\frac{5}{8}\right) * (0.7219)$$

$$H(A/B) = 0.3443 + 0.4511 = \mathbf{0.7955}$$

Como ya tenemos la $H(A/B)$ y $H(A)$ podemos calcular la información mutua aplicando la regla de la cadena y a la vez comprobando que $H(A/B) < H(A)$ por lo tanto:

$$I(A; B) = H(A) - H(A/B)$$

$$I(A; B) = 1.2586 - 0.7955$$

$$I(A; B) = \mathbf{0.3849 \text{ bits/simbolo}} \leftrightarrow H(A/B) < H(A)$$

Para calcular $I(B; C)$ calculamos las probabilidades a posteriori:

$$P(b = 1 / c = 1) = \frac{P(c = 1/b = 1) * P(b = 1)}{P(c = 1)}$$

$$P(b = 1 / c = 1) = \frac{(1/4)(3/8)}{3/32}$$

$$P(b = 1 / c = 1) = \mathbf{1}$$

$$P(b = 2 / c = 1) = \frac{P(c = 1/b = 2)P(b = 2)}{P(c = 1)}$$

$$P(b = 1 / c = 1) = \frac{(0)(5/8)}{3/32}$$

$$P(b = 1 / c = 1) = \mathbf{0}$$

$$P(b = 1 / c = 2) = \frac{P(c = 2/b = 1) P(b = 1)}{P(c = 1)}$$

$$P(b = 1 / c = 2) = \frac{(3/4)(3/8)}{9/32}$$

$$P(b = 1 / c = 2) = \mathbf{1}$$

$$P(b = 2 / c = 2) = \frac{P(c = 2/b = 2) * P(b = 2)}{P(c = 2)}$$

$$P(b = 2 / c = 2) = \frac{(0)(5/8)}{9/32}$$

$$P(b = 2 / c = 2) = \mathbf{0}$$

$$P(b = 1 / c = 3) = \frac{P(c = 3/b = 1)P(b = 1)}{P(c = 3)}$$

$$P(b = 1 / c = 3) = \frac{(0)(3/8)}{5/8}$$

$$P(b = 1 / c = 3) = 0$$

$$P(b = 2 / c = 3) = \frac{P(c = 3/b = 2) P(b = 2)}{P(c = 3)}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = \frac{(1)(5/8)}{5/8}$$

$$P(a = 1 / b = 1) = 1$$

Y la entropía: $H(B/C) = \sum_{j=1}^r P(b_j)H(B/c_j)$

$$= P(c = 1)H(B/c = 1) + P(c = 2)H(B/c = 2) + P(c = 3)H\left(\frac{B}{c} = 3\right) \quad (3)$$

$$H(B/c = 1) = -1 * \log_2(1) = 0$$

$$H(B/c = 2) = -1 * \log_2(1) = 0$$

$$H(B/c = 3) = -1 * \log_2(1) = 0$$

Entonces reemplazando en (3):

$$H(B/C) = \left(\frac{3}{32}\right) * (0) + \left(\frac{9}{32}\right) * (0) + \left(\frac{5}{8}\right) * (0) = 0$$

$$H(B/C) = 0$$

Esto quiere decir que es un canal donde no hay pérdida de información

Como ya tenemos la $H(B/C)$ y $H(B)$ podemos calcular la información mutua aplicando la regla de la cadena y a la vez comprobando que $H(B/C) < H(B)$ por lo tanto:

$$I(B; C) = H(B) - H(B/C)$$

$$I(A; B) = 0.9549 - 0$$

$$I(B; C) = 0.9549 \text{ bits/simbolo} \leftrightarrow H(B/C) < H(B)$$

Para calcular $I(A; C)$ debemos primero calcular la matriz del canal BC, está la encontramos multiplicando las matrices del canal esto es:

$$P_{AB} * P_{BC} = P_{AC}$$

$$P_{AC} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida esta matriz de probabilidades del canal procedemos a calcular las probabilidades a posteriori, para calcular $I(B; C)$:

$$P(a = 1 / c = 1) = \frac{P(c = 1/a = 1) * P(a = 1)}{P(c = 1)}$$

$$P(a = 1 / c = 1) = \frac{(1/4)(1/8)}{3/32}$$

$$P(a = 1 / c = 1) = \mathbf{1/3}$$

$$P(a = 2 / c = 1) = \frac{P(c = 1/a = 2)P(a = 2)}{P(c = 1)}$$

$$P(c = 2 / c = 1) = \frac{(1/6)(3/8)}{3/32}$$

$$P(c = 2 / c = 1) = \mathbf{2/3}$$

$$P(a = 3 / c = 1) = \frac{P(c = 1/a = 3) P(a = 3)}{P(c = 1)}$$

$$P(a = 3 / c = 1) = \frac{(0)(1/2)}{3/32}$$

$$P(a = 3 / c = 1) = \mathbf{0}$$

$$P(a = 1 / c = 2) = \frac{P(c = 2/a = 1) * P(a = 1)}{P(c = 2)}$$

$$P(a = 1 / c = 2) = \frac{(3/4)(1/8)}{9/32}$$

$$P(a = 1 / c = 2) = \mathbf{1/3}$$

$$P(a = 2 / c = 2) = \frac{P(c = 2/a = 2)P(a = 2)}{P(c = 2)}$$

$$P(a = 2 / c = 2) = \frac{(1/2)(3/8)}{9/32}$$

$$P(a = 2 / c = 2) = \mathbf{2/3}$$

$$P(a = 3 / c = 2) = \frac{P(c = 2/a = 3) P(a = 3)}{P(c = 2)}$$

$$P(a = 3 / c = 2) = \frac{(0)(1/2)}{9/32}$$

$$P(a = 3 / c = 2) = \mathbf{0}$$

$$P(a = 1 / c = 3) = \frac{P(c = 3/a = 1) * P(a = 1)}{P(c = 3)}$$

$$P(a = 1 / c = 3) = \frac{(0)(1/8)}{5/8}$$

$$P(a = 1 / c = 3) = \mathbf{0}$$

$$P(a = 2 / c = 3) = \frac{P(c = 3/a = 2)P(a = 2)}{P(c = 3)}$$

$$P(a = 2 / c = 3) = \frac{(1/3)(3/8)}{5/8}$$

$$P(a = 2 / c = 3) = \mathbf{1/5}$$

$$P(a = 3 / c = 3) = \frac{P(c = 3/a = 3) P(a = 3)}{P(c = 3)}$$

$$P(a = 3 / c = 3) = \frac{(1)(1/2)}{5/8}$$

$$P(a = 3 / c = 3) = 4/5$$

Y la entropía: $H(A/C) = \sum_{j=1}^r P(c_j)H(A/c_j)$

$$= P(c = 1)H(A/c = 1) + P(c = 2)H(A/c = 2) + P(c = 3)H(A/c = 3) = 3 \quad (4)$$

$$H(A/c = 1) = -\frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) = \mathbf{0.9183}$$

$$H(A/c = 2) = -\frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) = \mathbf{0.9183}$$

$$H(A/c = 3) = -\frac{1}{5} \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) - \frac{4}{5} \log_2 \left(\frac{4}{5}\right) = \mathbf{0.45548}$$

Entonces reemplazando en (4):

$$H(A/C) = \left(\frac{3}{32}\right) * (\mathbf{0.9183}) + \left(\frac{9}{32}\right) * (\mathbf{0.9183}) + \left(\frac{5}{8}\right) * (\mathbf{0.45548})$$

$$H(A/C) = \mathbf{0.6290}$$

Como ya tenemos la $H(A/C)$ y $H(A)$ podemos calcular la información mutua aplicando la regla de la cadena y a la vez comprobando que $H(A/C) < H(A)$ por lo tanto:

$$I(B; C) = H(A) - H(A/C)$$

$$I(A; B) = 1.2586 - 0.6290$$

$$I(B; C) = \mathbf{0.6296 \text{ bits/simbolo}} \leftrightarrow H(A/C) < H(A)$$

- c. El canal BC es un canal donde no se pierde la información cuya información mutua es igual a la entropía de B. Se puede decir que es un canal sin ruido.

4. Un amigo tuyo acaba de ver los resultados de tu examen y ha llamado por teléfono para decirte si has pasado o no. Lamentablemente la conexión telefónica es tan mala que si tu amigo dice "aprobado" eso se confunde con "no aprobado" 3 de cada 10 veces y si tu amigo dice "no aprobado", eso se confunde con "aprobado" 1 de cada 10 veces.

Antes de hablar con su amigo había 60% de confía en que habías pasado el examen. ¿Qué tan seguro está usted de haber pasado el examen si usted ha escuchado a su amigo decir que ha aprobado?

Datos:

$$p = 1/10$$

$$q = 3/10$$

A = Emisor

B = Receptor

$$P(A=0) = 0.4 \text{ (probabilidad de no aprobado)}$$

$$P(A=1) = 0.6 \text{ (probabilidad de aprobado)}$$

$$P(A=1|B=1) = ?$$

$$M = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 1/10 & 1/10 \\ 3/10 & 1 - 3/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/10 \\ 3/10 & 7/10 \end{bmatrix}$$

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^N P(B_j|A_i) \cdot P(A_i)$$

$$P(B = 0) = \sum_{j=1}^2 P(B_j|A = 0) \cdot P(A = 0)$$

$$P(B = 0) = P(B = 0|A = 0) \cdot P(A = 0) + P(B = 0|A = 1) \cdot P(A = 1)$$

$$P(B = 0) = \left(\frac{9}{10}\right) \cdot (0.4) + \frac{3}{10} \cdot (0.6)$$

$$P(B = 0) = 0.54$$

$$P(B = 1) = \sum_{j=1}^2 P(B_j|A = 0) \cdot P(A = 0)$$

$$P(B = 1) = P(B = 1|A = 0) \cdot P(A = 0) + P(B = 1|A = 1) \cdot P(A = 1)$$

$$P(B = 1) = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot (0.4) + \frac{7}{10} \cdot (0.6)$$

$$P(B = 1) = 0.46$$

Finalmente calculamos la probabilidad condicional pedida $P(A=1|B=1)$ o probabilidad de haber pasado el examen dado que escuchó que aprobó:

$$\frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(A = 1|B = 1) = \frac{P(B = 1|A = 1) \cdot P(A = 1)}{P(B = 1)}$$

$$P(A = 1|B = 1) = \frac{(0.7) \cdot (0.6)}{(0.46)}$$

$$P(A = 1|B = 1) = 0.913$$

5. Que es mejor canal BEC o BSC?

Considerar un canal de comunicación de fibra óptica con cruce de probabilidad de X y un canal inalámbrico móvil con probabilidad de eliminación de X. calcular la información mutua asumiendo equiprobables entradas para ambos tipos de canales de comunicación. ¿Que el sistema proporciona más información para la misma tasa de error de bit?

Datos:

Canal fibra Óptica = BSC

Canal inalámbrico móvil = BEC

$P(X=0) = 0.5$

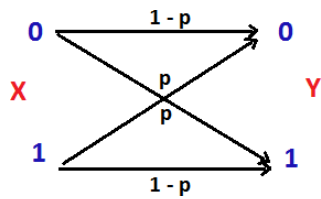
$P(X=1) = 0.5$

$$p = 10^{-2} = 0.01$$

$$q = (1 - 10^{-2}) = 0.99$$

$$I(X, Y) = ?$$

- BSC



$$F(Y|X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$F(Y|X) = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$$

$$P(Y_j) = \sum_{i=1}^N P(Y_j|X_i) \cdot P(X_i)$$

$$P(Y = 0) = \sum_{j=1}^2 P(Y_j|X = 0) \cdot P(X = 0)$$

$$P(Y = 0) = P(Y = 0|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$P(Y = 0) = (0.99) \cdot (0.5) + (0.01) \cdot (0.5)$$

$$P(Y = 0) = 0.5$$

$$P(Y = 1) = \sum_{j=1}^2 P(Y_j|X = 0) \cdot P(X = 0)$$

$$P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$P(Y = 1) = (0.01) \cdot (0.5) + (0.99) \cdot (0.5)$$

$$P(Y = 1) = 0.5$$

$$H(Y) = - \sum_{i=1}^N P(Y_i) \cdot \log_2 P(Y_i)$$

$$H(Y) = -(0.5) \cdot \log_2(0.5) - (0.5) \cdot \log_2(0.5)$$

$$H(Y) = 1 \text{ bit}$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(Y_j|X_i) \cdot P(X_i)$$

$$H(Y|X) = H(Y = 0|X = 0) \cdot P(X = 0) + H(Y = 0|X = 1) \cdot P(X = 1) + H(Y = 1|X = 0) \cdot P(X = 0) + H(Y = 1|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$H(Y|X) = 2 \cdot (0.99) \cdot \log_2 P(0.99) \cdot (0.5) + 2 \cdot (0.01) \cdot \log_2 P(0.01) \cdot (0.5)$$

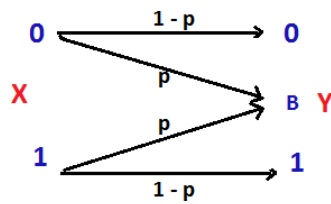
$$H(Y|X) = 0.0808$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$I(X;Y) = 1 - 0.0808$$

$$I(X;Y) = 0.9192 \text{ Bits/símbolo}$$

- **BEC**



$$M(Y|X) = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$M(Y|X) = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$$

$$P(Y_j) = \sum_{i=1}^N P(Y_j|X_i) \cdot P(X_i)$$

$$P(Y = 0) = \sum_{j=1}^2 P(Y_j|X = 0) \cdot P(X = 0)$$

$$P(Y = 0) = P(Y = 0|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$P(Y = 0) = (0.99) \cdot (0.5) + (0) \cdot (0.5)$$

$$P(Y = 0) = 0.495$$

$$P(Y = b) = \sum_{j=1}^2 P(Y_j|X = 0) \cdot P(X = 0)$$

$$P(Y = b) = P(Y = b|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = b|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$P(Y = b) = (0.01) \cdot (0.5) + (0.01) \cdot (0.5)$$

$$P(Y = b) = 0.01$$

$$P(Y = 1) = \sum_{j=1}^2 P(Y_j|X = 0) \cdot P(X = 0)$$

$$P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 0) \cdot P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$P(Y = 1) = (0) \cdot (0.5) + (0.99) \cdot (0.5)$$

$$P(Y = 1) = 0.495$$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^N P(Y_j) \cdot \log_2 P(Y_j)$$

$$H(Y) = -(0.495) \cdot \log_2(0.495) - (0.01) \cdot \log_2(0.01) - (0.495) \cdot \log_2(0.495)$$

$$H(Y) = 1.0708 \text{ bit}$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(Y_j|X_i) \cdot P(X_i)$$

$$H(Y|X) = H(Y = 0|X = 0) \cdot P(X = 0) + H(Y = 0|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$+ H(Y = b|X = 0) \cdot P(X = 0) + H(Y = b|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$+ H(Y = 1|X = 0) \cdot P(X = 0) + H(Y = 1|X = 1) \cdot P(X = 1)$$

$$H(Y|X) = -2 \cdot (0.99) \cdot \log_2 P(0.99) \cdot (0.5) - 2 \cdot (0.01) \cdot \log_2 P(0.01) \cdot (0.5) - 0$$

$$H(Y|X) = 0.0808$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$I(X;Y) = 1.0708 - 0.0808$$

$$I(X;Y) = 0.99 \text{ Bits/símbolo}$$

∴ El Canal BEC contiene más información que el BSC

$$\text{BSC} = 0.9192 \quad \text{vs} \quad \text{BEC} = 0.99$$

EJERCICIOS CANAL BEC

1. Un canal discreto sin memoria esta caracterizado por la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Se encontrará el esquema del observador ideal si $p(x_1) = 1/2$, $p(x_2) = p(x_3) = 1/4$ y se calculará la probabilidad de error asociada

Solución:

La probabilidad de error está asociada por

$$p(e) = \sum_{j=1}^3 p(y_j) p(e|y_j) = \sum_{j=1}^3 p(y_j) [\sum_{i \neq j} p(x_i|j)]$$

Calculemos $p(y_j), j = 1, 2, 3$

$$p(y_1) = p(y_1|x_1)p(x_1) + p(y_1|x_2)p(x_2) + p(y_1|x_3)p(x_3) = \frac{3}{8}$$

$$p(y_2) = p(y_2|x_1)p(x_1) + p(y_2|x_2)p(x_2) + p(y_2|x_3)p(x_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(y_3) = p(y_3|x_1)p(x_1) + p(y_3|x_2)p(x_2) + p(y_3|x_3)p(x_3) = \frac{7}{24}$$

Ahora

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

Y así se obtiene

$$\begin{aligned} p(x_1|y_1) &= \frac{2}{3}, & p(x_1|y_2) &= \frac{1}{3}, & p(x_1|y_3) &= \frac{2}{7} \\ p(x_2|y_1) &= \frac{1}{9}, & p(x_2|y_2) &= \frac{1}{8}, & p(x_2|y_3) &= \frac{1}{3} \\ p(x_3|y_1) &= \frac{1}{9}, & p(x_3|y_2) &= \frac{1}{8}, & p(x_3|y_3) &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Ya se puede calcular la probabilidad de error

$$p(e) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) + \frac{7}{24} \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) = \frac{1}{2}$$

El esquema de decisión del observador ideal es que decodifica y_1 como x_1 , y_2 como x_1 y y_3 como x_3 pues son los que tienen mayor probabilidad.

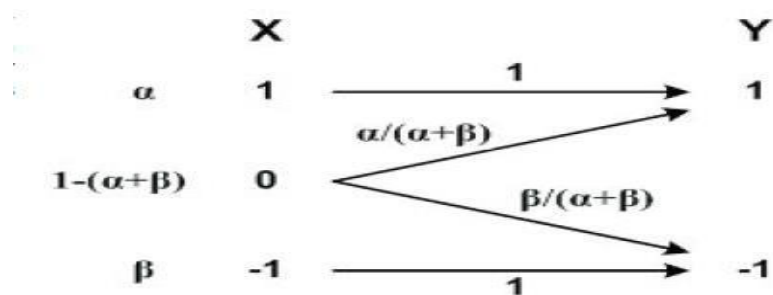
2. Un sistema de transmisión de datos está compuesto por un regenerador de señal. El regenerador tiene por entradas (X) símbolos que pertenecen al alfabeto {1, 0, -1}. Las probabilidades de recepción de los símbolos son:

$$P[X = 1] = a, [X = 0] = 1 - a - Q, [X = -1] = Q, \quad \text{para } 0 < a + Q \leq 1$$

El regenerador restituye los valores de los borrones ($X=0$) en valores de salida $Y=1$ o $Y=-1$, con la misma proporción con la que se generan, y mantienen el mismo valor ($Y=X$) cuando las entradas son $X=1$ o $X=-1$. Así, el sistema de transmisión de datos regenerador se puede

caracterizar a través de la matriz estocástica de probabilidades de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{0}{Q} \\ \frac{a+Q}{0} & \frac{a+Q}{1} \end{pmatrix} \quad 0 < a + Q \leq 1$$



Esquema de transmisión de datos del regenerador de símbolos

- Determine $H(Y)$,
- Calcule $H(Y/X)$,
- Halle $I(X;Y)$,

Solucion :

- Determine $H(Y)$,

$$P(Y = 1) = \alpha + [1 - (\alpha + \beta)] * \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \alpha + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \alpha = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$P(Y = -1) = 1 - P(Y = 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -P(Y = 1) * \log_2 P(Y = 1) - P(Y = -1) * \log_2 P(Y = -1) \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} * \log_2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} * \log_2 \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

- Calcule $H(Y/X)$,

$$H(Y/X) = P(X = 1) * H(Y/X = 1) + P(X = -1) * H(Y/X = -1) + P(X = 0) * H(Y/X = 0)$$

$$H(Y/X) = P(X = 0) * H(Y/X = 0) = 0 \text{ dado que los otros sumando son cero tenemos:}$$

$$H(Y/X) = [1 - (\alpha + \beta)] * \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = [1 - (\alpha + \beta)] * H(Y)$$

- Halle $I(X;Y)$,

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(Y) - [1 - (\alpha + \beta)]H(Y) = (\alpha + \beta) * H(Y)$$

$$I(X;Y) = (\alpha + \beta) * \left[-\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \log_2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \log_2 \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right]$$

3. Un sistema de transmisión de datos está compuesto por una fuente binaria X y un canal binario con borrados, cuya salida denominaremos Y . La fuente emite el símbolo 0 con probabilidad α y el símbolo 1 con probabilidad $1 - \alpha$. El canal se caracteriza por la matriz estocástica:

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix} \quad \text{Donde } p \text{ es la probabilidad de recibir un borrado (B) a la salida}$$

del canal cuando se emite un símbolo binario (0,1).

- Halle la relación entre $H(Y)$ y $H(X)$. Razone el resultado obtenido para los casos donde: $p=0$ y $p=1$.
- Calcule $H(X/Y)$.
- Determine $H(Y/X)$.
- Información mutua $I(X;Y)$.
- Especifique cual es el valor de la capacidad C del canal con borrados en bits por símbolo.

Expresar los resultados utilizando $H(\alpha)$ y $H(p)$

Solución:



- a) Armandó la matriz con las probabilidades dadas queda:

$$\begin{pmatrix} (1-p)\alpha & \alpha p & 0 \\ 0 & p(1-\alpha) & (1-p)(1-\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{dado que } P(X=0) = \alpha \text{ y } P(X=1) = 1-\alpha$$

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= (1-p)\alpha \\ P(Y=B) &= \alpha p + p(1-\alpha) = p[\alpha + (1-\alpha)] = p(\alpha + 1 - \alpha) = p \\ P(Y=1) &= (1-p)(1-\alpha) \end{aligned}$$

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N P_{ij} \log_2 P_{ij} \quad \text{fórmula para encontrar la entropía}$$

$$H(X) = -\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha) \quad \text{por motivos de escritura } H(X) = H(\alpha)$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -(1-p)\alpha \log_2 (1-p)\alpha - p \log_2 p - (1-p)(1-\alpha) \log_2 (1-p)(1-\alpha) \\ &= -(1-p)\alpha [\log_2 (1-p) + \log_2 \alpha] - p \log_2 p \\ &\quad - (1-p)(1-\alpha) [\log_2 (1-p) + \log_2 (1-\alpha)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -(1-p)\alpha \log_2 (1-p) - (1-p)\alpha \log_2 \alpha - p \log_2 p \\ &\quad - (1-p)(1-\alpha) \log_2 (1-p) - (1-p)(1-\alpha) \log_2 (1-\alpha) \end{aligned}$$

$$H(Y) = -\alpha[(1-p)\log_2(1-p)] - (1-p)[\alpha\log_2\alpha] - p\log_2 p \\ - (1-\alpha)[(1-p)\log_2(1-p)] - (1-p)[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)]$$

$$H(Y) = [(1-p)\log_2(1-p)][-\alpha - (1-\alpha)] - p\log_2 p \\ + [-(1-p)][\alpha\log_2\alpha + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)] \\ = [(1-p)\log_2(1-p)](-1) - p\log_2 p \\ + [(1-p)][-\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)] \\ = -(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 p + (1-p)H(\alpha)$$

$$H(Y) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) + (1-p)H(\alpha)$$

$$H(Y) = H(p) + (1-p)H(\alpha) \text{ Respuesta}$$

Para cuando se tiene $p=0$ tenemos $H(Y) = H(\alpha) = H(X)$

Para cuando se tiene $p=1$ tenemos $H(Y) = 0$

b) Cálculo de la entropía condicional

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

$$H(X, Y) = -(1-p)\alpha\log_2(1-p)\alpha - \alpha p\log_2 \alpha p - p(1-\alpha)\log_2 p(1-\alpha) - (1-p)(1-\alpha)\log_2(1-p)(1-\alpha)$$

$$H(X, Y) = -(1-p)\alpha[\log_2(1-p) + \log_2 \alpha] - \alpha p[\log_2 \alpha + \log_2 p] \\ - p(1-\alpha)[\log_2 p + \log_2 p(1-\alpha)] - (1-p)(1-\alpha)[\log_2(1-p) + \log_2(1-\alpha)]$$

$$H(X, Y) = -(1-p)\alpha\log_2(1-p) - (1-p)\alpha\log_2 \alpha - \alpha\log_2 \alpha \\ - \alpha p\log_2 \alpha - \alpha p\log_2 p - p(1-\alpha)\log_2 p - p(1-\alpha)\log_2 p(1-\alpha) \\ - (1-p)(1-\alpha)\log_2(1-p) - (1-p)(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$$

$$H(X, Y) = -\alpha[(1-p)\log_2(1-p)] - (1-p)[\alpha\log_2 \alpha] - p[\alpha\log_2 \alpha] - \alpha[p\log_2 p] \\ - (1-\alpha)[p\log_2 p] - p[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)] \\ - (1-\alpha)[(1-p)\log_2(1-p)] - (1-p)[(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)]$$

$$H(X, Y) = -[(1-p)\log_2(1-p)][\alpha + 1 - \alpha] - [\alpha\log_2 \alpha][1 - p + p] \\ - [p\log_2 p][\alpha + 1 - \alpha] - [(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)][1 - p + p]$$

$$H(X, Y) = -(1-p)\log_2(1-p) - \alpha\log_2 \alpha - p\log_2 p - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$$

$$H(X, Y) = H(p) + H(\alpha)$$

$$H(X/Y) = H(p) + H(\alpha) - [H(p) + (1-p)H(\alpha)] = H(p) + H(\alpha) - H(p) - (1-p)H(\alpha) \\ = H(\alpha) - (1-p)H(\alpha) = H(\alpha) - H(\alpha) + pH(\alpha)$$

$$H(X/Y) = pH(\alpha) \text{ respuesta}$$

c) Cálculo de $H(Y/X)$

$$H(Y/X) = H(X, Y) - H(X)$$

$$H(Y/X) = H(P) + H(\alpha) - H(\alpha)$$

$$\mathbf{H(Y/X) = H(P) \text{ respuesta}}$$

d) Cálculo de $I(X;Y)$

$$H(X;Y) = H(X) - H(X/Y)$$

$$H(X;Y) = H(\alpha) - pH(\alpha)$$

$$\mathbf{H(X;Y) = H(a)[1 - p] \text{ respuesta}}$$

e) Cálculo de la capacidad máxima

$$C = \max I(X,Y)$$

$$C = \max(1 - p) H(\alpha) = (1 - p)H_{\max}$$

$$H_{\max} = 1, \text{ cuando } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{C = (1 - p) \text{ bits/simbolo } \text{ respuesta}}$$

EJERCICIOS CANAL AWGN

1. Calcule la capacidad de un canal de radio de $SNR = 6dB$ y el ancho de banda empleado es de $5KHz$. Repita el cálculo para un canal de televisión (ancho de banda $5KHz$).

$$SNR = 6dB$$

$$\text{Datos } \{ \begin{array}{l} W = 5KHz \text{ ancho de banda para el radio} \\ W = 5MHz \text{ ancho de banda para el TV} \end{array}$$

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

$$\text{Si } \frac{P}{N} \rightarrow \text{Relación señal ruido SNR}$$

Primero debemos transformar la relación señal ruido SNR en vatios.

$$\frac{P}{N} = 10^{6/10} = 3.98$$

Calculamos la capacidad de canal del radio:

$$C = 5KHz \log_2(1 + 3.98)$$

$$C = 11580.72 \text{ bits/seg} = 11.58 \text{ Kbps}$$

Calculamos la capacidad de canal del radio:

$$C = 5\text{MHz} \log_2(1 + 3.98)$$

$$C = 11.58 \text{ Mbps}$$

EJERCICIOS CANAL GAUSSIANO

1. Considera un canal gaussiano de tiempo discreto:

La señal $u(n)$ es blanca y gaussiana de potencia igual a la unidad. La frecuencia de muestreo es de 1KHz. La potencia de la señal de entrada es también igual a la unidad. Obtenga la capacidad del canal (expresada en bit/seg).

<i>frecuencia de muestro</i>	$f_w = 1\text{KHz}$
<i>Datos {potencia de la señal de entrada</i>	$P = 1 \text{ watts}$
<i>potencias del ruido</i>	$N = 1 \text{ watts}$

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \text{ bits por uso de canal}$$

Como nos pide encontrar la capacidad de canal expresada en bits/seg utilizamos la fórmula:

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

Para encontrar el valor de W utilizamos el teorema de muestreo de Shannon que nos dice:

$$f_w = 2W$$

$$W = \frac{f_w}{2}$$

$$W = \frac{1\text{KHz}}{2}$$

$$W = 500\text{Hz}$$

Reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$C = 500 \log_2 \left(1 + \frac{1}{1} \right)$$

$$C = 500 \text{ bits/seg}$$