



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

Pontificia Universidad Javeriana

Asignatura: ANÁLISIS NUMÉRICO

Docente: EDDY HERRERA DAZA

MÉTODO MÜLLER Y ALGORITMO DE AITKEN

Integrantes:

María Camila Aguirre Collante

aguirrec.mcamila@javeriana.edu.co

Estefanía Bermúdez Arroyo

estefania_bermudeza@javeriana.edu.co

Jessica Tatiana Naizaque Guevara

j.naizaque@javeriana.edu.co

Angie Tatiana Peña Peña

penap_at@javeriana.edu.co

Iván René Ramírez Castro

ivan_ramirez@javeriana.edu.co

Febrero 2021

Índice

1. Introducción	2
2. Método de Müller	2
2.1. Condiciones Iniciales	2
2.2. Explicación geométrica del método	2
2.3. Diagrama de flujo	3
2.4. Código fuente	4
2.5. Raíces	5
2.6. Comportamientos	9
2.6.1. Pérdida de Significancia	9
2.6.2. Iteraciones	10
2.6.3. Convergencia	10
2.7. Solución problema de significancia	11
2.8. Más de dos raíces	11
2.8.1. Comportamiento del método	11
2.8.2. Multiplicidad	12
2.9. Función periódica, par o impar	13
2.10. Gráficas de los resultados	14
2.11. Gráfica relación E_{i+1} y E_i	17
2.12. Comparación con Bisección	20
2.13. Comparación con Taylor	21
3. Algoritmo de Aitken	23
3.1. Condiciones Iniciales	23
3.2. Diagrama de flujo	23
3.3. Código fuente	24
3.4. Comparación raíces	25

1. Introducción

En el presente documento se realizará el análisis del Método de Müller y del algoritmo de Aitken, sus implementaciones por medio del programa R Studio y comparaciones de los resultados con las herramientas Wolfram Alpha y Geogebra. A lo largo del informe se mostrarán diferentes elementos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de los problemas, tales como gráficas, tablas y códigos fuente, con sus respectivas observaciones.

Conceptos Clave: Teorema de Bolzano, Teorema de Bisección, Convergencia Lineal, Pérdida de significancia

Palabras Clave: Iteración, Tolerancia, Error

2. Método de Müller

“El método consiste en obtener los coeficientes de la parábola que pasa por los tres puntos. Dichos coeficientes se sustituyen en la fórmula cuadrática para obtener el valor donde la parábola interseca al eje x; es decir, la raíz estimada.”(1)

2.1. Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales para poder realizar este método son las siguientes:

- Se necesitan tres puntos iniciales x_0, x_1 y x_2 , donde la función a evaluar sea continua.
- Para poder hallar el valor de x_2 , se tiene que cumplir el Teorema de Bolzano. Este teorema establece que “Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe un valor

$$c \in (a, b)$$

tal que $f(c) = 0$ ”. (2)

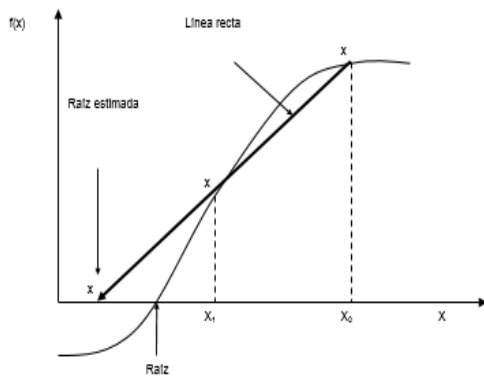
- Siguiendo el Teorema de Bolzano, se tiene que cumplir que:

$$f(x_0) \cdot f(x_1) < 0 \tag{1}$$

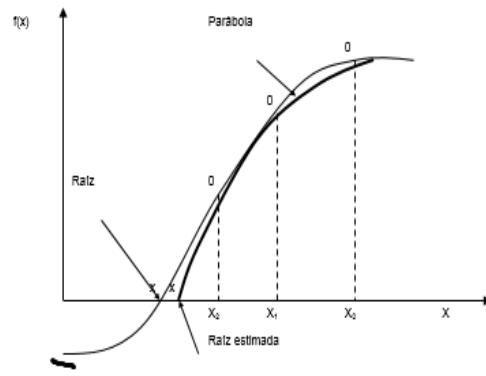
2.2. Explicación geométrica del método

Gráficamente, este método se puede comparar con el Método de la Secante, debido a que ambos usan tres puntos como referencia para poder encontrar un x tal que $f(x) = 0$. Sin embargo, en el caso del Método de la Secante, la recta generada por estos tres puntos es una línea recta. En cambio, en el Método de Müller se forma una parábola que cumple con la siguiente ecuación:

$$p(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \tag{2}$$



Método de Secante



Método de Muller

Figura 1: Método de Secante vs Método de Müller

2.3. Diagrama de flujo

En la Figura 2, se puede observar el diagrama de flujo del programa del Método de Müller:

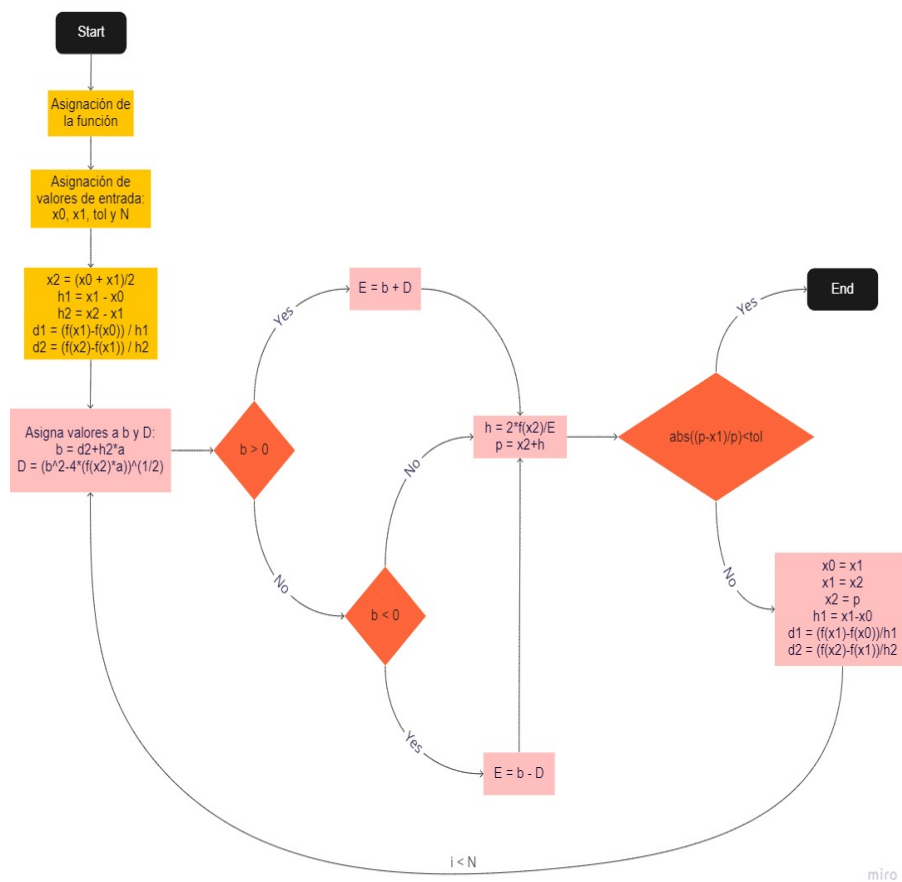


Figura 2: Diagrama de flujo del Método de Müller

2.4. Código fuente

En el Listing 1, se puede observar el código fuente realizado en RStudio por los estudiantes para la ejecución del Método de Müller:

```
1 library(Rmpfr)
2 f <- function(x)(x*sin(x)-1) #Funcion
3 #Creacion del vector que guardara la sucesion
4 iniciales <- c()
5
6 #Definir el intervalo
7 x0 <- 0.0
8 x1 <- 2.0
9
10 # Por medio del metodo de biseccion obtenemos el valor de x2
11 x2 <- (x0 + x1)/2
12
13 # Asignamos el valor de la tolerancia
14 tol <- 1e-5
15
16 # Obtenemos el numero maximo de iteraciones
17 N <- (1/log(2))*(log(abs(x0-x1)/tol))
18 h1 <- x1-x0
19 h2 <- x2-x1
20 d1 <- (f(x1)-f(x0))/h1
21 d2 <- (f(x2)-f(x1))/h2
22 a <- (d2-d1)/h2+h1
23 i <- 0
24
25 #Ciclo que se repite hasta el numero de maximo de iteraciones
26 while(i < floor(N)){
27   b <- d2+h2*a
28   D<-(b^2-4*(f(x2)*a))^(1/2)
29   if (b > 0){E<-b+D}
30   if (b < 0){E<-b-D}
31   h <- 2*f(x2)/E
32   result <- x2+h
33   iniciales <- c(iniciales,result)
34   if (abs((result-x1)/result)<tol){result
35     break
36   }
37   x0 <- x1
38   x1 <- x2
39   x2 <- result
40   h1 <- x1-x0
41   d1 <- (f(x1)-f(x0))/h1
42   d2 <- (f(x2)-f(x1))/h2
43   a <-(d2-d1)/h2+h1
44   i <- i+1
45 }
46 #Imprimir respuesta
47 mpfr(result,168)
```

Listing 1: Código en R convergencia acelerada

Variables:

$a \rightarrow$ Constante del polinomio
 $b \rightarrow$ Constante del polinomio
 $c \rightarrow$ Constante del polinomio
 $D \rightarrow$ Denominador de la ecuación
 $i \rightarrow$ Número de iteraciones realizadas
 $N \rightarrow$ Número máximo de iteraciones
 $p \rightarrow$ Resultado
 $x_0 \rightarrow$ Primer término del polinomio
 $x_1 \rightarrow$ Segundo término del polinomio
 $x_2 \rightarrow$ Tercer término del polinomio

2.5. Raíces

1. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

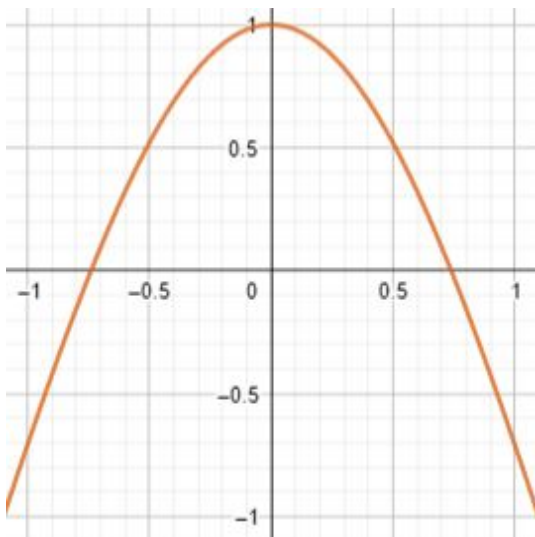


Figura 3: Función en Geogebra

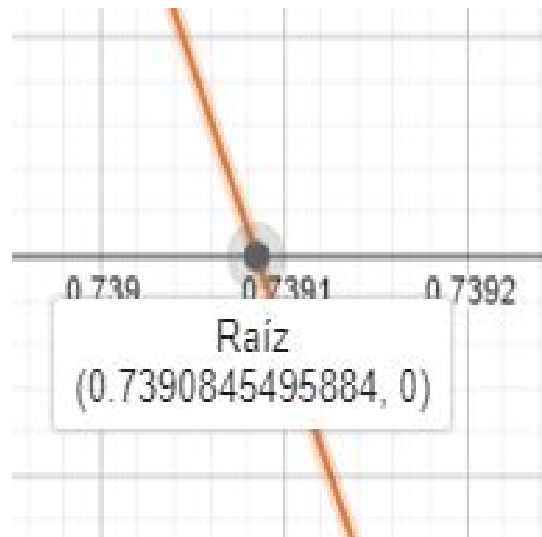


Figura 4: Raíz de la función en Geogebra

Tolerancia	Resultado
$1e^{-8}$	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
$1e^{-16}$	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
$1e^{-32}$	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
$1e^{-56}$	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375

Tabla 1: Resultados obtenidos para $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Tolerancia	Nmáx. iteraciones	Num. iteraciones
$1e^{-8}$	27	9
$1e^{-16}$	53	11
$1e^{-32}$	106	11
$1e^{-56}$	186	11

Tabla 2: Iteraciones resultantes para $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

El resultado obtenido por medio del software Wolfram Alpha fue:

$$x \approx 0,73908513321516064166$$

2. $f(x) = x \sin(x) - 1$

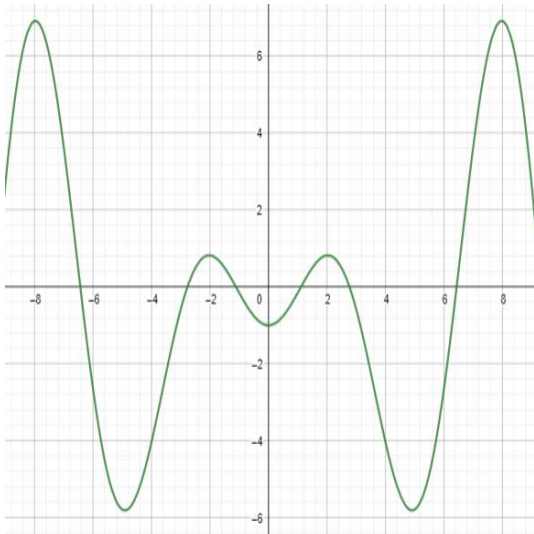


Figura 5: Función en Geogebra

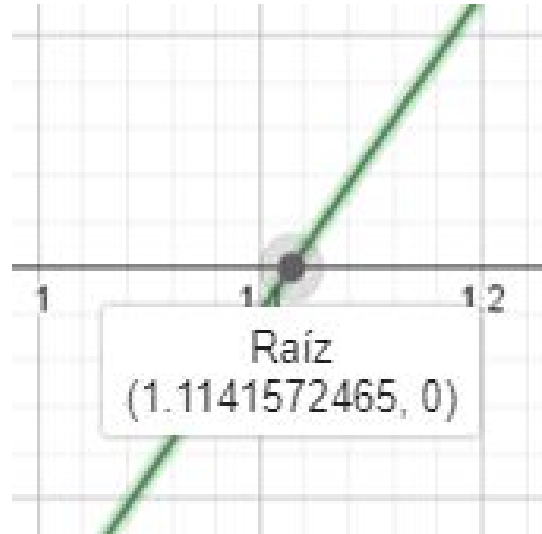


Figura 6: Raíz de la función en Geogebra

Tolerancia	Resultado
$1e^{-8}$	1.114157140871930184999882840202189981937408447265625
$1e^{-16}$	1.114157140871930184999882840202189981937408447265625
$1e^{-32}$	1.114157140871930184999882840202189981937408447265625
$1e^{-56}$	1.114157140871930184999882840202189981937408447265625

Tabla 3: Resultados obtenidos para $f(x) = x \sin(x) - 1$

Tolerancia	Nmáx. iteraciones	Num. iteraciones
$1e^{-8}$	28	8
$1e^{-16}$	53	10
$1e^{-32}$	106	10
$1e^{-56}$	186	10

Tabla 4: Iteraciones resultantes para $f(x) = x \sin(x) - 1$

El resultado obtenido por medio del software Wolfram Alpha fue:

$$x \approx 1,11415714087193008730052518$$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

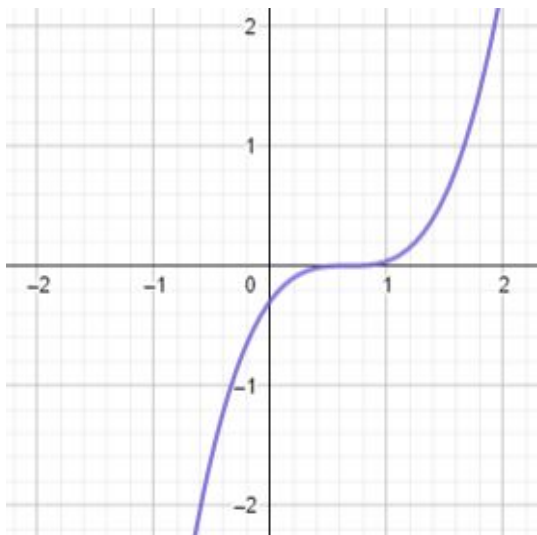


Figura 7: Función en Geogebra

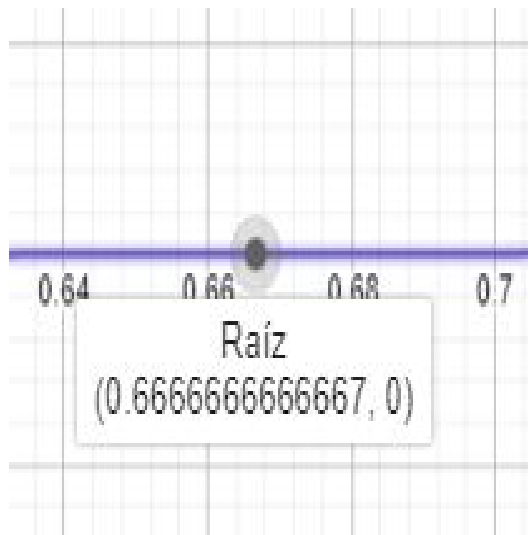


Figura 8: Raíz de la función en Geogebra

Tolerancia	Resultado
$1e^{-8}$	0.6609627744943492588802769205358345061540603637695312
$1e^{-16}$	0.6654678023451904289586877894180361181497573852539062
$1e^{-32}$	0.66642037374592799636729978374205529689788818359375
$1e^{-56}$	0.6665951814580980405722243631316814571619033813476562

Tabla 5: Resultados obtenidos para $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

Tolerancia	Nmáx. iteraciones	Num. iteraciones
$1e^{-8}$	27	27
$1e^{-16}$	53	53
$1e^{-32}$	106	106
$1e^{-56}$	186	186

Tabla 6: Iteraciones resultantes para $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

El resultado obtenido por medio del software Wolfram Alpha fue:

$$x \approx 0,6666666666666667$$

4. $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

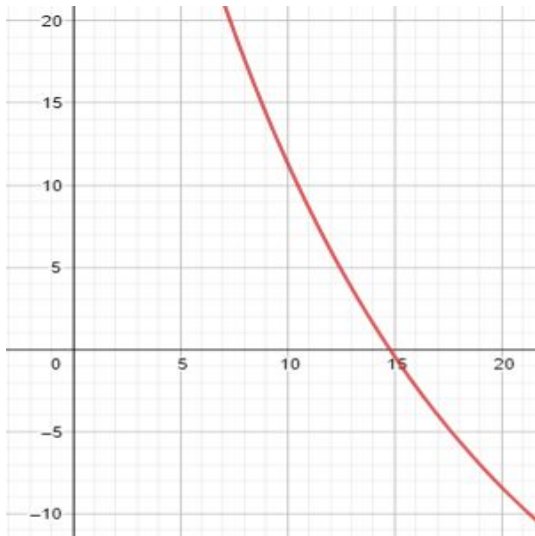


Figura 9: Función en Geogebra

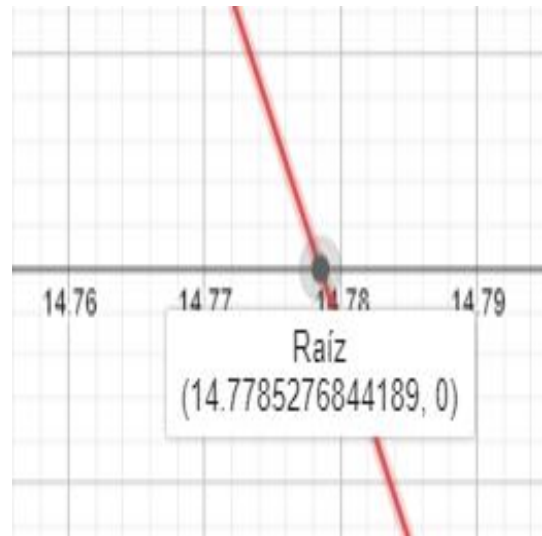


Figura 10: Raíz de la función en Geogebra

Tolerancia	Resultado
$1e^{-8}$	14.794129378848854372563437209464609622955322265625
$1e^{-16}$	14.794129378848854372563437209464609622955322265625
$1e^{-32}$	14.794129378848854372563437209464609622955322265625
$1e^{-56}$	14.794129378848854372563437209464609622955322265625

Tabla 7: Resultados obtenidos para $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

Tolerancia	Nmáx. iteraciones	Num. iteraciones
$1e^{-8}$	29	15
$1e^{-16}$	55	17
$1e^{-32}$	109	17
$1e^{-56}$	188	17

Tabla 8: Iteraciones resultantes para $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

El resultado obtenido por medio del software *Wolfram Alpha* fue:

$$x \approx 14,7941293788488506451718684$$

5. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

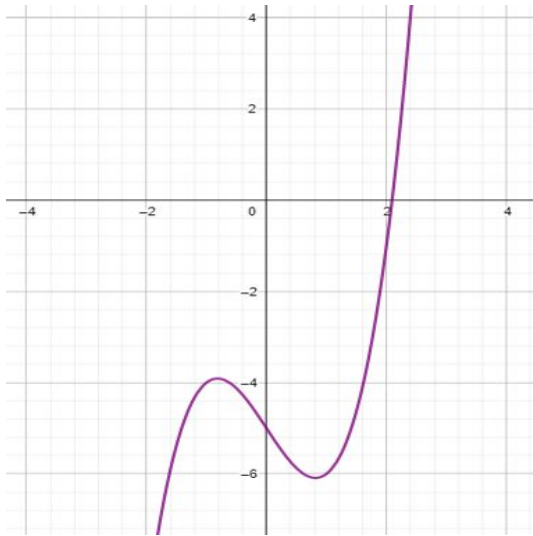


Figura 11: Función en Geogebra

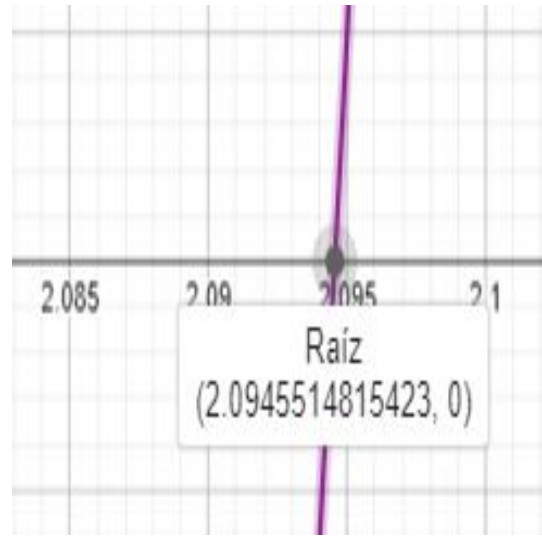


Figura 12: Raíz de la función en Geogebra

Tolerancia	Resultado
$1e^{-8}$	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
$1e^{-16}$	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
$1e^{-32}$	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
$1e^{-56}$	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375

Tabla 9: Resultados obtenidos para $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Tolerancia	Nmáx. iteraciones	Num. iteraciones
$1e^{-8}$	28	11
$1e^{-16}$	55	13
$1e^{-32}$	108	13
$1e^{-56}$	188	13

Tabla 10: Iteraciones resultantes para $f(x) = x^3 - 2x - 5$

El resultado obtenido por medio del software Wolfram Alpha fue:

$$x \approx 2,094551481542326591482387$$

2.6. Comportamientos

El siguiente análisis tiene en cuenta los ejercicios desarrollados en la sección 2.5.

2.6.1. Perdida de Significacia

Usualmente, para encontrar las raíces de un problema matemático, se utiliza la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

Se pueden encontrar las raíces a diferentes ecuaciones, sin embargo, esta tiene una pérdida de significancia bastante grande y relevante, por lo cual, el Método de Müller se basa en una ecuación equivalente, la cual es:

$$x = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (4)$$

Al usar la ecuación (4), se observa que la pérdida de significancia no es tan grande si se compara con los resultados dados por la fórmula cuadrática inicial, ecuación (3). Por lo tanto, considerando que el Método de Müller se basa en la fórmula de la ecuación (4), entonces la pérdida de significancia no es tan grande.

Adicionalmente, si se realiza el código fuente del Método Müller sin librerías que tengan como objetivo aumentar la cantidad de cifras significativas, la pérdida de significancia va a ser alta, de igual forma, porque no es tan preciso el análisis de los resultados.

2.6.2. Iteraciones

Desarrollando un análisis detallado de las Tablas 2, 4, 6, 8 y 10 se puede observar que en la mayoría de problemas, las iteraciones realizadas por el método son mucho menores que las que se proponen como iteraciones máximas. Por lo tanto, se puede afirmar que este método presenta una gran ventaja en cuanto a la velocidad con la que puede llegar a la raíz de la función. En general, la cantidad de iteraciones que requiere el programa para obtener el resultado con la tolerancia más baja ($tol = 10^{-8}$) son menores si se comparan con las otras tres tolerancias ($tol = 10^{-16}$, $tol = 10^{-32}$, $tol = 10^{-56}$).

Además, se realizó una investigación adicional, en la cual se tuvieron en cuenta distintos métodos con el mismo objetivo, en esta comparación se observó que Müller tiene una velocidad mayor para encontrar la raíz, esto se sabe porque se ejecutan menos iteraciones y presenta mayor cantidad de cifras significativas con respecto a los demás. Esta comparación se realizó con respecto a los métodos Secante, Newton, Régula falsi y Bisección. (3)

2.6.3. Convergencia

Teniendo en cuenta que la convergencia de un método numérico asegura que al desarrollar una cantidad considerable de iteraciones, los resultados aproximados que se obtienen son bastante cercanos al valor de la raíz a encontrar. Y, que la rapidez de convergencia se relaciona con la menor cantidad de iteraciones requeridas para llegar al resultado esperado (4), se puede decir que el Método de Müller tiene una convergencia rápida y cuadrática en el intervalo cercano a la raíz.

Considerando que el orden de convergencia de un método numérico mide la velocidad con la que el proceso va llegando al resultado, es decir, la raíz de la ecuación. Y, además, que entre mayor sea el orden, mayor será la velocidad con la que el método encontrará el resultado esperado. Se encontró que el orden de convergencia del Método de Müller es $p \approx 1,839286755 \approx 1,84$. Por lo cual, al compararlo con otros métodos, se puede decir que el Método de Müller es más rápido que el de la Secante, sin embargo, es más lento que el de Newton. Lo anterior, se puede asegurar ya que los ordenes de sus convergencias son $\approx 1,62$ y 2 , respectivamente. (5)

2.7. Solución problema de significancia

Teniendo en cuenta que la pérdida de significancia tiene lugar por la herramienta utilizada y no por el método de Müller, una solución bastante viable es el uso de la librería Rmpfr. Lo anterior, debido a que en esta se encuentra la función `mpfr` que tiene como objetivo aumentar la cantidad de cifras significativas que deben tener en cuenta distintas variables para que no se pierda tanta precisión al momento de obtener diferentes soluciones a problemas, como, por ejemplo, las raíces en las ecuaciones del presente informe.

2.8. Más de dos raíces

2.8.1. Comportamiento del método

El Método de Müller se basa en tomar tres puntos de la función y aproximarse a su raíz. Estos puntos empiezan a acercarse más al resultado con cada iteración, lo cual impide que el método se concentre en más de una raíz.

Cuando las funciones tienen más de dos raíces, es necesario que el intervalo tomado sea bastante cerrado. Lo anterior, con el fin de que el método pueda ser más preciso al encontrar la raíz que busca. Para evitar tomar un intervalo incorrecto, se deben evaluar los extremos del mismo, en la función. Las imágenes encontradas deben tener signos contrarios, ya que de esta forma cumplirían con la condición que requiere el método. Si esta condición no se cumple, el método no puede realizar correctamente su proceso y no encontraría la raíz que se busca.

Para analizarlo de manera gráfica, se tendrán en cuenta dos casos de la función $f(x) = x\sin(x) - 1$, los que se evidenciarán en la Figura 13, la cual muestra una gráfica realizada con la herramienta Geogebra.

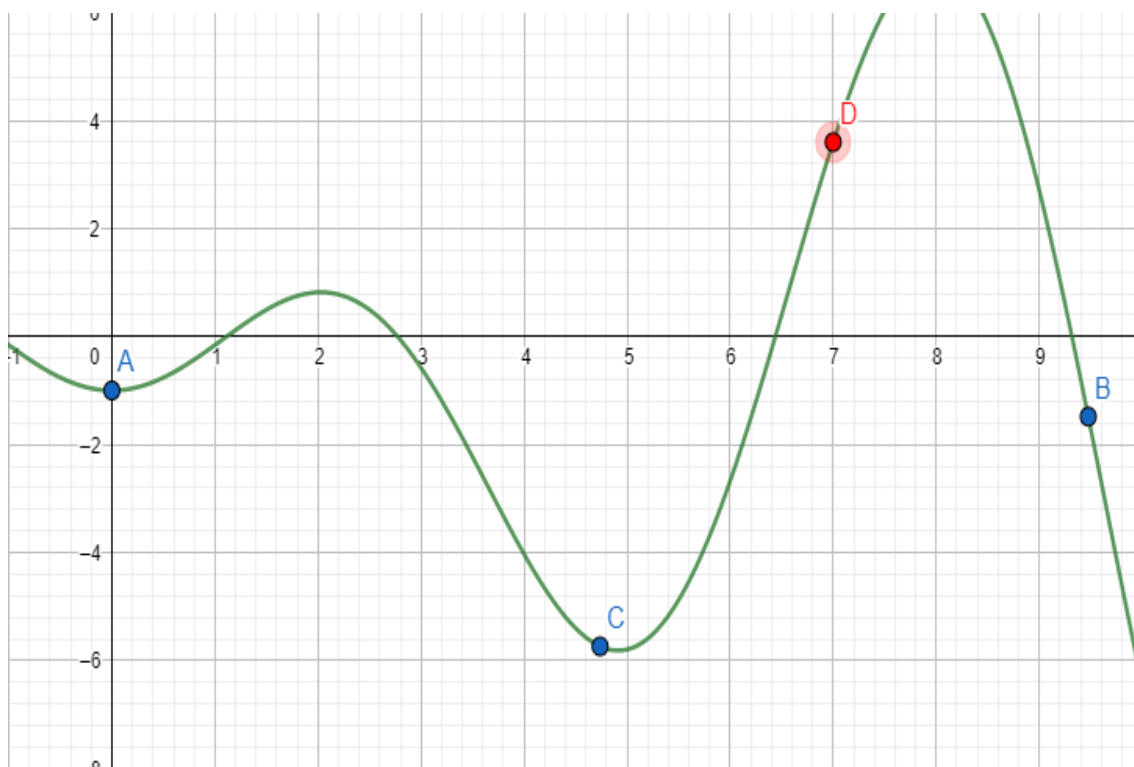


Figura 13: Función $f(x) = x\sin(x) - 1$

En el primer caso, se toman los puntos $[A, B]$, entre los cuales, claramente, se encuentran ubicadas cuatro raíces de la función. Teniendo en cuenta lo anterior, el Método de Müller no podría realizar correctamente su proceso porque este se enfoca en encontrar una sola raíz, por lo que sería un error darle un intervalo tan amplio. En el segundo caso, se toman los puntos $[C, D]$, entre los cuales, se encuentra solamente una raíz de la función. En ese orden de ideas, el Método de Müller realizaría óptimamente su proceso y tendría más precisión al encontrar la raíz.

2.8.2. Multiplicidad

La multiplicidad de la raíz de un polinomio hace referencia a la cantidad de veces que una raíz se repite en un polinomio en específico. Con el fin de encontrar este valor, se debe factorizar la ecuación y encontrar las raíces pertenecientes al problema. En ese orden de ideas y considerando que el Método de Müller no encuentra la multiplicidad de la ecuación, se realizaron las factorizaciones correspondientes en Wolfram Alpha para encontrar la multiplicidad de los polinomios dispuestos en los problemas 3, 4 y 5.

- **Problema 3.** $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$ En la Figura 14, se puede observar la factorización realizada por Wolfram Alpha, con ella se puede deducir que la multiplicidad en este caso es 3.

$$f(x) = \frac{1}{27} (3x - 2)^3$$

Figura 14: Factorización $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

- **Problema 4.** $f(x) = (\frac{667,832865}{x} \cdot (1 - e^{-0,1468x})) - 40$ En la Figura 15, se puede observar la factorización realizada por Wolfram Alpha, con ella se puede deducir que la multiplicidad en este caso es 1.

$$f(x) = -\frac{40(x - 16.6958)}{x} - \frac{667.833 e^{-0.1468x}}{x}$$

Figura 15: Factorización $f(x) = (\frac{667,832865}{x} \cdot (1 - e^{-0,1468x})) - 40$

- **Problema 5.** $f(x) = x^3 - 2x - 5$ En la Figura 16, se puede observar la factorización realizada por Wolfram Alpha, con ella se puede deducir que la multiplicidad en este caso es 1.

$$x^3 = f(x) + 2x + 5$$

Figura 16: Factorización $f(x) = x^3 - 2x - 5$

2.9. Función periódica, par o impar

Se sabe que la característica que representa a una función par es:

$$f(x) = f(-x) \quad (5)$$

Y también se sabe que la característica que representa a una función impar es:

$$f(-x) = -f(x) \quad (6)$$

Considerando lo anterior, se puede afirmar que cuando una función es par o impar, al momento de usar el Método de Müller, se tiene la posibilidad de encontrar dos raíces. Teniendo en cuenta que este método da como resultado un x tal que $f(x) = 0$ y las igualdades dadas en las ecuaciones (5) y (6), se podría suponer que la otra raíz de la función es $-x$. Un ejemplo de esto puede ser la función $f(x) = \cos^2(x) - x^2$, ya que esta es una función par, como se puede observar en la Figura 17. Esta función tiene dos cortes con el eje x , usando el Método de Müller se logra encontrar $x \approx 0,7391$ y si se toma la ecuación (5), se puede suponer que el otro valor de x que cumple con la condición $f(x) = 0$ es $x \approx -0,7391$, tal y como se evidencia en las Figuras 18 y 19.

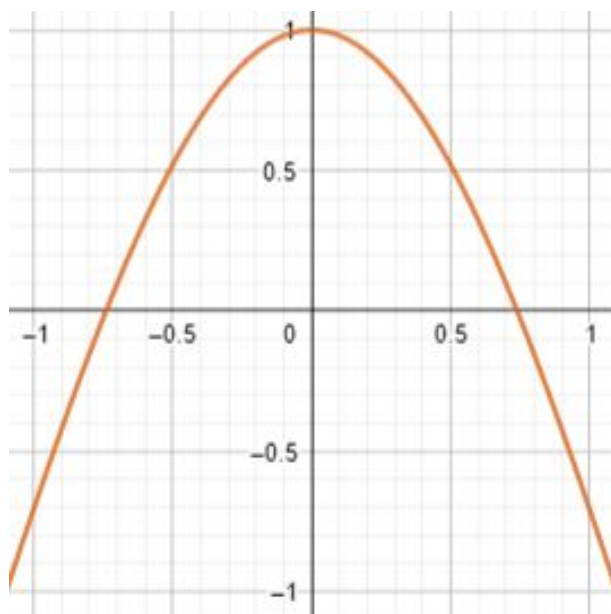


Figura 17: Función $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ en Geogebra

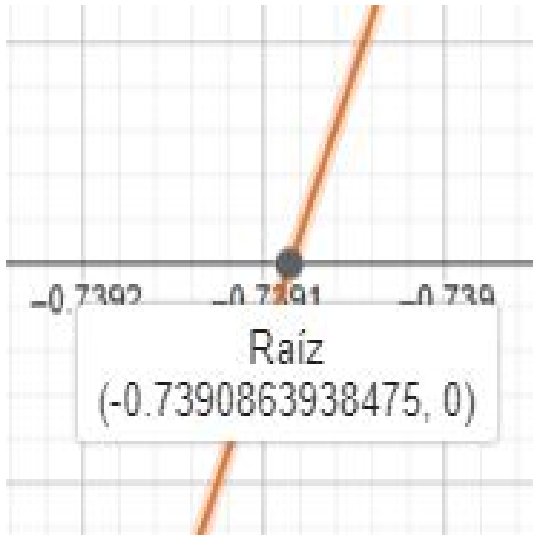


Figura 18: Raíz negativa de la función

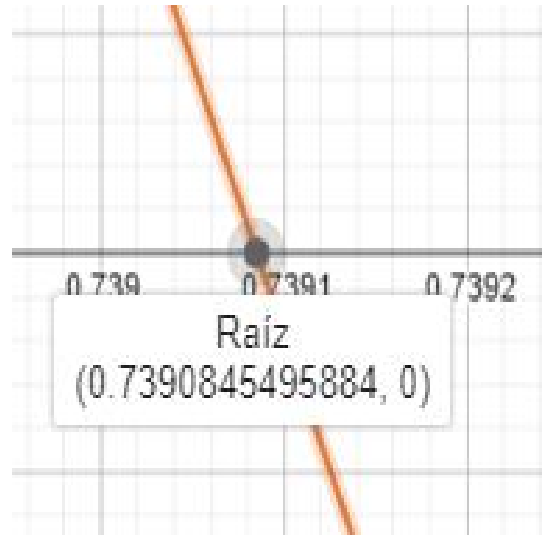


Figura 19: Raíz positiva de la función

Se sabe que una función periódica es aquella que cumple:

$$f(x) = f(x + zT) \quad (7)$$

Donde,

$z \rightarrow$ Número entero

$T \rightarrow$ Periodo

Es decir, si se encuentra el periodo de la función, se podrían hallar los valores de x que cumplan con la condición $f(x) = 0$. Si se tiene en cuenta la ecuación (7), se pueden encontrar diferentes valores de x mediante el Método de Müller. Si a estos valores se le suma $z \cdot T$, siendo z un número entero cualquiera y T el valor del periodo, entonces se encontrará la raíz de la función centrada en el intervalo. En caso que se esté analizando una función trigonométrica, ejemplo, $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$, el periodo va a ser igual a:

$$T = \frac{2\pi}{b} \quad (8)$$

Sin embargo, se debe tener en cuenta que al momento de aplicar el Método de Müller en este tipo de funciones, se debe saber delimitar bien el intervalo para realizar el análisis, como se dijo en la sección 2.8.

2.10. Gráficas de los resultados

Las gráficas que se encuentran a continuación fueron hechas en la herramienta RStudio. En cada una de las gráficas, se podrán observar dos colores, el azul hace referencia a la gráfica de la función en el intervalo inicial $[x_0, x_1]$ y el rojo hace referencia a los puntos marcados por el Método de Müller al momento de sustituir los puntos resultantes en el polinomio de Müller.

1. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

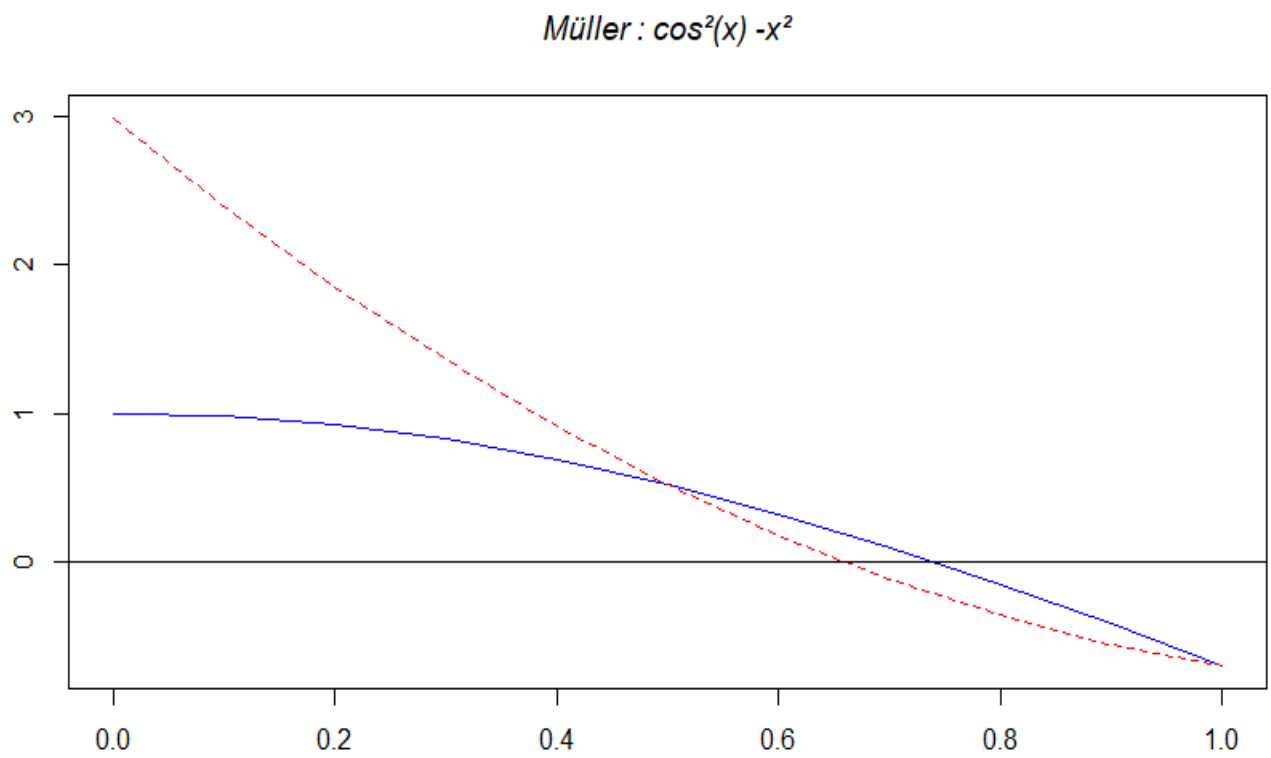


Figura 20: Aproximación del Método de Müller $f(x) = \cos^2(x) - x^2$.

2. $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$

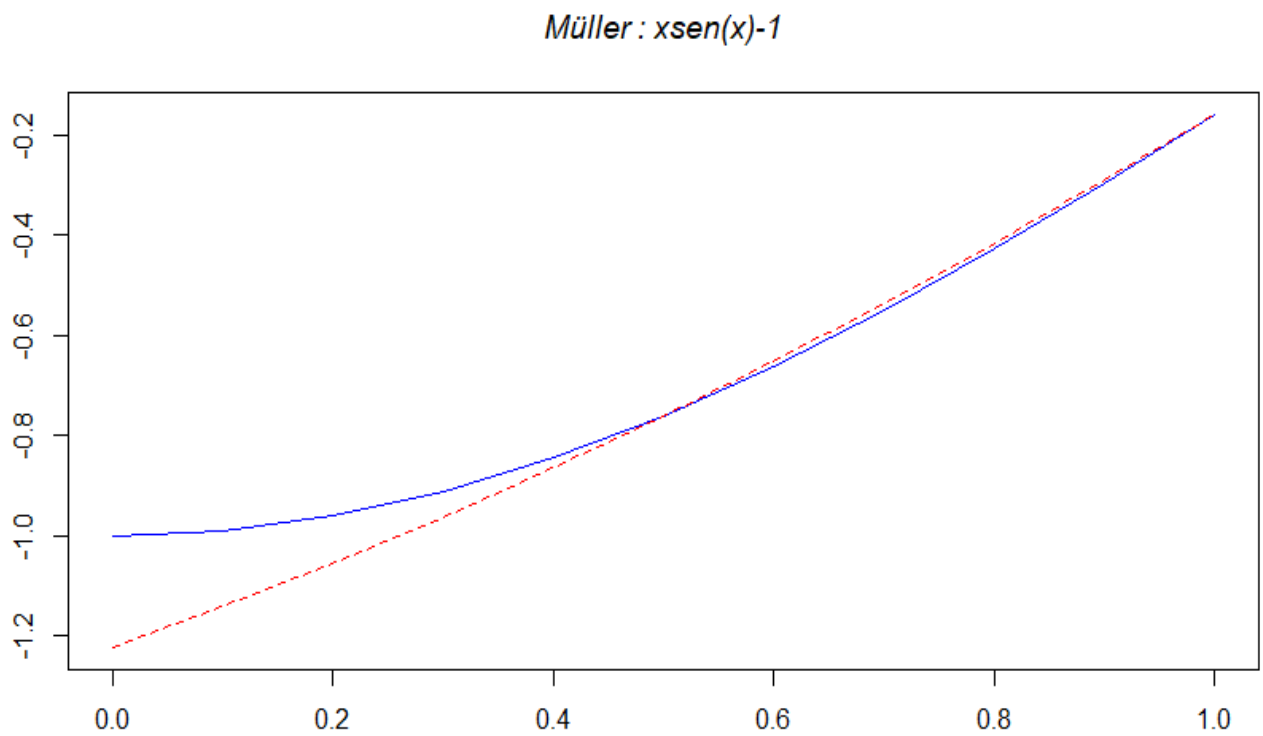


Figura 21: Aproximación del Método de Müller $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$.

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

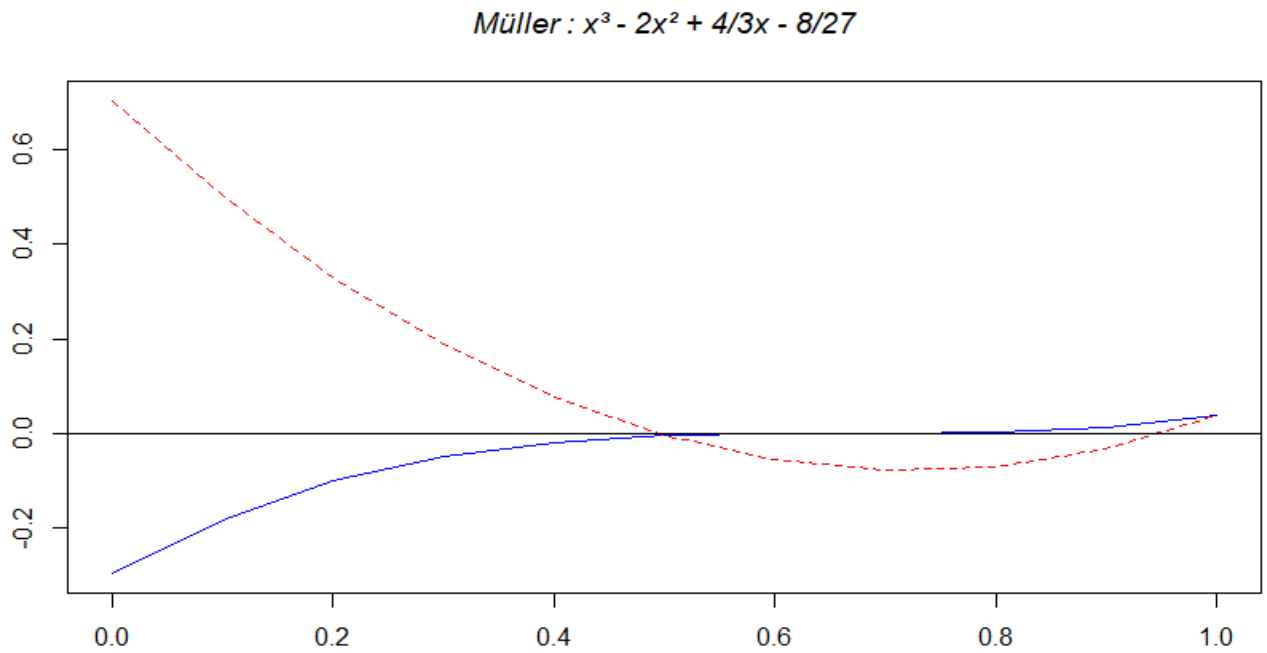


Figura 22: Aproximación del Método de Müller $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$.

4. $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

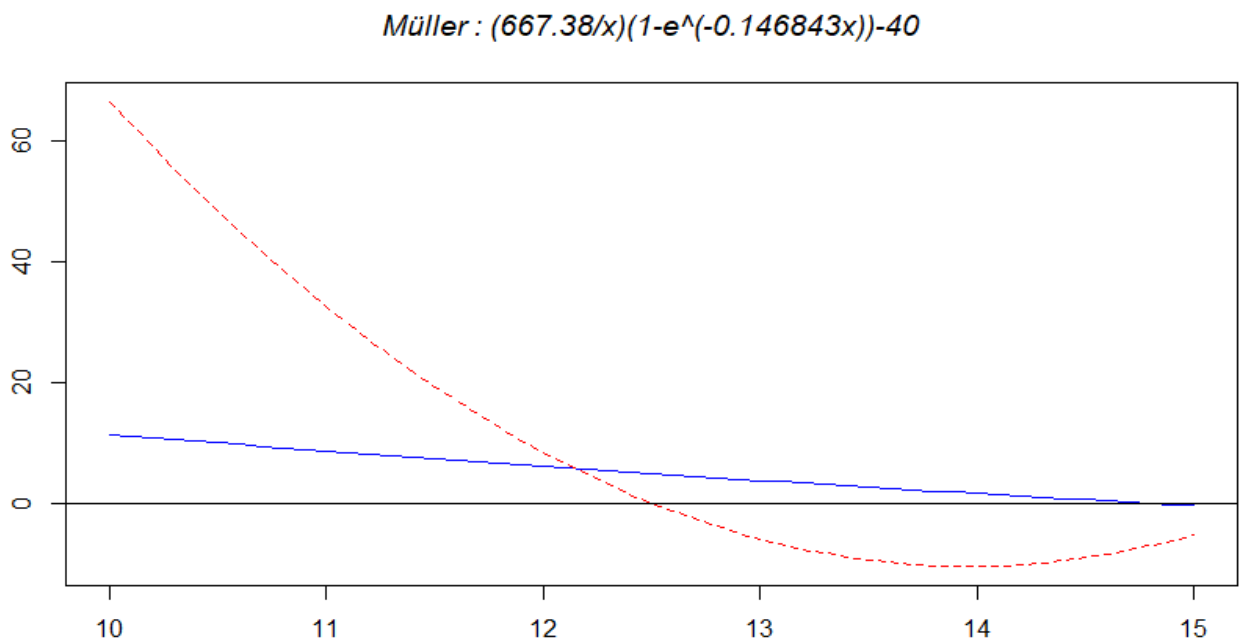


Figura 23: Aproximación del Método de Müller $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$.

5. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

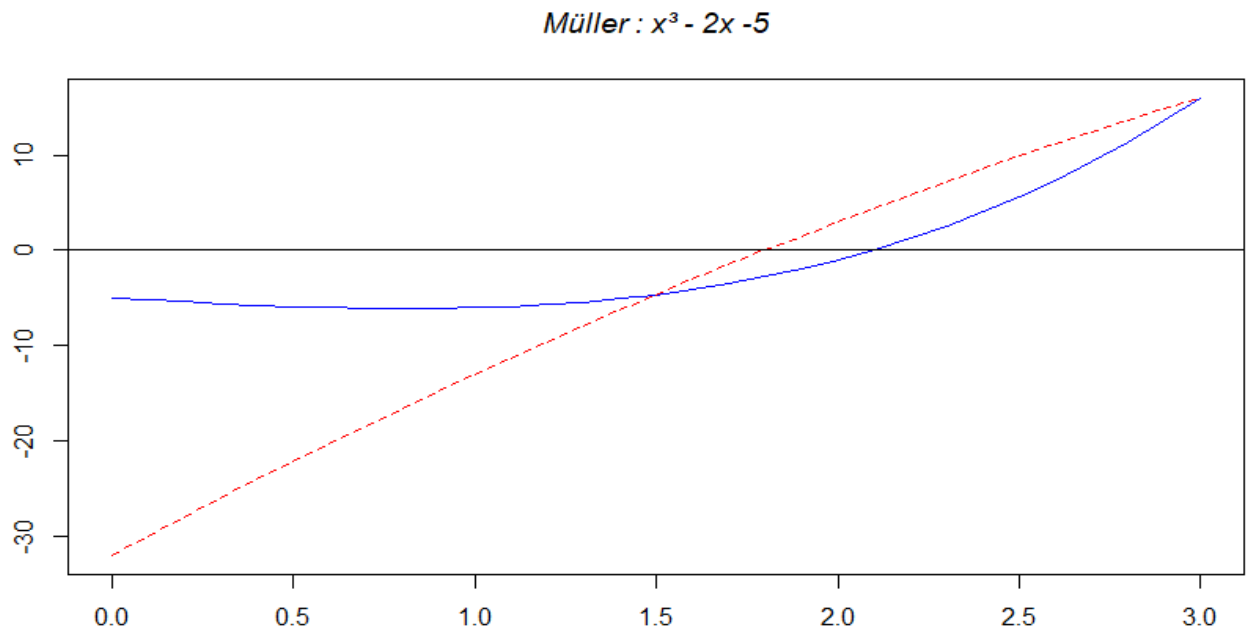


Figura 24: Aproximación del Método de Müller $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

2.11. Gráfica relación E_{i+1} y E_i

Para calcular el error cometido en una aproximación por el Método de Müller se hace uso de la siguiente ecuación:

$$E_i = \left| \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n} \right| * 100 \%$$

A continuación se presentarán las gráficas de los errores de cada uno de los problemas desarrollados.

1. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

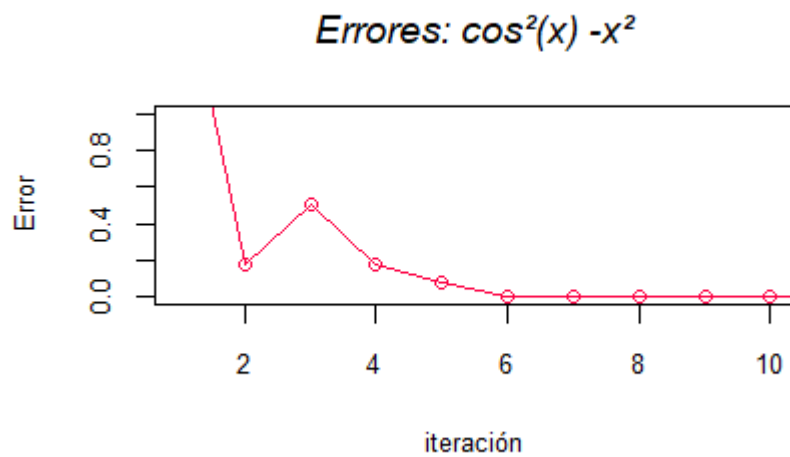


Figura 25: Gráfica errores: $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

2. $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$

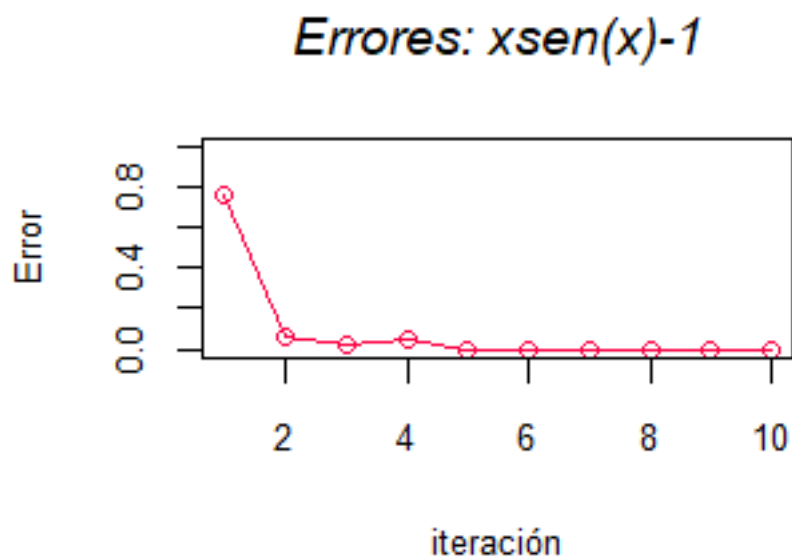


Figura 26: Gráfica errores: $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

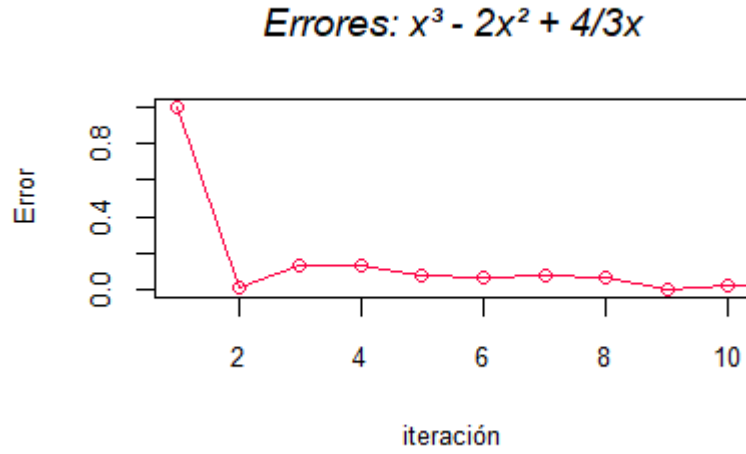


Figura 27: Gráfica errores: $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

4. $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x} \cdot (1 - e^{-0,1468x})\right) - 40$

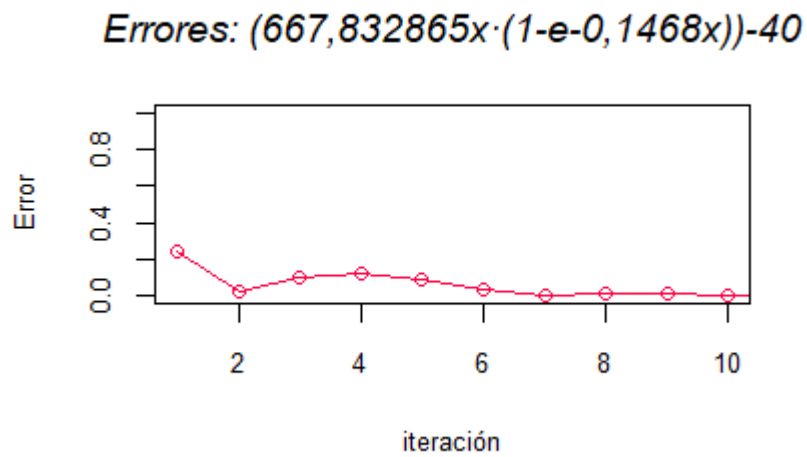


Figura 28: Gráfica errores: $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x} \cdot (1 - e^{-0,1468x})\right) - 40$

5. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

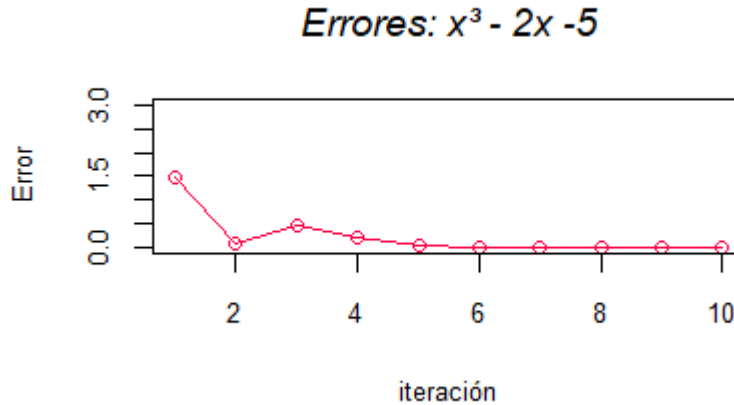


Figura 29: Gráfica errores: $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Teniendo en cuenta la definición 2.7 del Libro Análisis Numérico de Burden, en la que se establece que:

1. Convergencia Lineal = $(0,5)^n$
2. Convergencia Cuadrática = $(0,5)^{2n-1}$

Se puede deducir que el Método de Müller posee una convergencia cuadrática, ya que, tal como se observa en las gráficas, el método converge de modo que $E_{i+1} = (0,25) * E_i$. Finalmente, en cada una de las gráficas se evidencia el comportamiento de los errores y cómo se cumple dicha condición.

2.12. Comparación con Bisección

Para poder realizar la comparación del método de Müller con el Método de Bisección, se tendrán en cuenta las tablas de los resultados que se encuentran en la sección 2.5.

En este análisis se toma el número de iteraciones máximas que hace el Método de Bisección, las cuales se obtuvieron mediante el uso de la siguiente ecuación:

$$N_{\text{máx}} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{|a - b|}{\delta} \quad (9)$$

Donde,

$\delta \rightarrow$ Tolerancia

a \rightarrow Valor de inicio del intervalo

b \rightarrow Valor de fin del intervalo

Para encontrar la cantidad de iteraciones hechas en el Método de Müller, en el código se implementó una variable i que actúa como un contador, la cual aumenta cada vez que el código ejecuta el ciclo.

Como se puede ver en las tablas de la sección 2.5, el número de iteraciones hechas por el Método de Müller es menor o igual al número de iteraciones realizadas por el Método de Bisección. De esto, se concluye que en la mayoría de los casos, encontrar la respuesta por medio del Método de Müller va a ser más rápido que encontrarla por el Método de Bisección.

En las Tablas 2, 4, 8 y 10, el número de iteraciones hechas por el Método de Müller se estabiliza desde la tolerancia $1e^{-16}$. En cambio, en el Método de Bisección, el número de iteraciones aumenta a medida que el valor de la tolerancia aumenta. En otras palabras, el número de iteraciones por el Método de Bisección es directamente proporcional a la tolerancia asignada.

En el caso de la Tabla 6, la cantidad de iteraciones hechas por el Método de Müller es igual a las del Método de Bisección. Como se ve en la Figura 7, la función tiene múltiples cortes seguidos en el intervalo evaluado con el eje x , entonces se podría deducir que existe una posibilidad de que el Método de Müller haga una mayor cantidad de iteraciones que el Método de Bisección.

2.13. Comparación con Taylor

Con el objetivo de realizar la comparación entre las soluciones dadas por los métodos de Taylor y Müller respectivamente, se debe recordar que las Series de Taylor buscan aproximar una función que pueda derivarse n veces por medio de polinomios. Lo anterior, lo realiza a través de la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Con ayuda de la herramienta Wolfram Alpha, se realizaron las series de Taylor para cada problema y se tomaron los valores de centro y orden como 0 y 10, respectivamente. El software permite visualizar la serie de una forma polinómica, la representación de la misma e, igualmente, encontrar las raíces de la ecuación con una cantidad de cifras significativas considerable. Taylor da la posibilidad de ver simultáneamente todas las raíces de la ecuación, mientras que el Método de Müller solo muestra una raíz en el intervalo dado.

1. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

$$\frac{x^{16}}{638512875} + \frac{2x^{12}}{467775} + \frac{x^8}{315} + \frac{x^4}{3} + 1 = \frac{4x^{14}}{42567525} + \frac{2x^{10}}{14175} + \frac{2x^6}{45} + 2x^2$$

Figura 30: Serie de Taylor para $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Soluciones reales	Soluciones imaginarias
$x \approx -0,73908513321519627015$	$x \approx -4,0356910926848877078 + 4,0977284442992997157i$
$x \approx 0,73908513321519627015$	$x \approx 4,0356910926848877078 - 4,0977284442992997157i$
$x \approx -4,7202307937901663985$	$x \approx -4,0356910926848877078 - 4,0977284442992997157i$
$x \approx 4,7202307937901663985$	$x \approx 4,0356910926848877078 + 4,0977284442992997157i$
	$x \approx -2,4863267709450510516 + 1,8098927368632681092i$

Tabla 11: Soluciones de Taylor para $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

2. $f(x) = x \sin(x) - 1$

$$-1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \frac{x^8}{5040} + \frac{x^{10}}{362880} = 0$$

Figura 31: Serie de Taylor para $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$

Soluciones reales	Soluciones imaginarias
$x \approx -1,11415707539179699206$	$x \approx -5,3606881391342937508 + 3,1487037112147222734i$
$x \approx 1,11415707539179699206$	$x \approx 5,3606881391342937508 - 3,1487037112147222734i$
$x \approx -2,7748356955502427184$	$x \approx -5,3606881391342937508 - 3,1487037112147222734i$
$x \approx 2,7748356955502427184$	$x \approx 5,3606881391342937508 + 3,1487037112147222734i$
$x \approx 5,0411959241810007542$	

Tabla 12: Soluciones de Taylor para $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

$$\frac{1}{27} (-2 + 3x)^3 = \sum_{n=0}^3 x^n \left(-\frac{2}{3}\right)^{3-n} \binom{3}{n}$$

Figura 32: Representación de Taylor para $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

Solución real
$x \approx 0,6666666666666667$

Tabla 13: Soluciones de Taylor para $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

4. $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

$$-40 + \frac{667.833 - 667.833 e^{-0.1468x}}{x} = -40 + \frac{667.833}{x} - \frac{667.833 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0.1468^k (-x)^k}{k!}}{x}$$

Figura 33: Representación de Taylor para $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

Soluciones reales	Soluciones imaginarias
$x \approx 14,7929$	$x \approx -27,9873 - 41,0318i$
$x \approx 37,8892$	$x \approx -27,9873 + 41,0318i$
	$x \approx -5,98686 - 39,6507i$
	$x \approx -5,98686 + 39,6507i$
	$x \approx 13,8384 - 36,768i$

Tabla 14: Soluciones de Taylor para $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

5. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

$$-5 - 2x + x^3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\begin{cases} -5 & n=0 \\ -2 & n=1 \\ 1 & n=3 \end{cases} \right) x^n$$

Figura 34: Representación de Taylor para $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Soluciones reales	Soluciones imaginarias
$x \approx 2,09455148154233$	$x \approx -1,04727574077116 - 1,13593988908893i$
	$x \approx -1,04727574077116 + 1,13593988908893i$

Tabla 15: Soluciones de Taylor para $f(x) = x^3 - 2x - 5$

3. Algoritmo de Aitken

El algoritmo de convergencia acelerada o Algoritmo de Aitken es un método implementado para acelerar la convergencia de una secuencia.

3.1. Condiciones Iniciales

- $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia linealmente convergente con límite p .
- El Método de Aitken acelerará la sucesión x_n si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{x}_n - \ell}{x_n - \ell} = 0$.

3.2. Diagrama de flujo

En la Figura 15. se puede ver el diagrama de flujo del Algoritmo de Aitken:

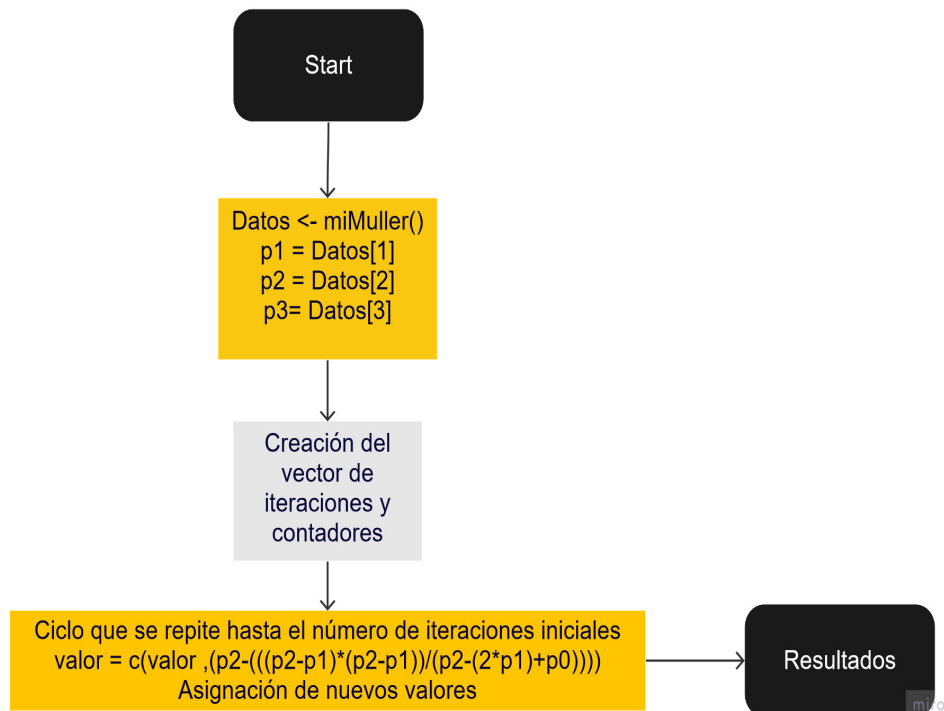


Figura 35:
Diagrama de flujo Algoritmo de Aitken

3.3. Código fuente

En el Listing 2. se puede observar el código fuente realizado en RStudio por los estudiantes para la ejecución del Algoritmo de Aitken:

```

1 mimuller <- function () {
2   f <- function(x) (((cos(x)^2)) - x^2)
3   iniciales <- c()
4   x0 <- 0.0
5   x1 <- 1.0
6   x2 <- (x0 + x1)/2
7   tol <- 1e-5
8
9   N <- (1/log(2)) * (log(abs(x0-x1)/tol))
10  h1 <- x1-x0
11  h2 <- x2-x1
12  d1 <- (f(x1)-f(x0))/h1
13  d2 <- (f(x2)-f(x1))/h2
14  a <- (d2-d1)/h2+h1
15  i <- 0
16
17  while(i < floor(N)) {
18    b <- d2+h2*a
19    D <- (b^2-4*(f(x2)*a))^(1/2)
20    if (b > 0) {E <- b+D}
21    if (b < 0) {E <- b-D}
22    h <- 2*f(x2)/E
23    result <- x2+h
  
```

```

24     iniciales <- c(iniciales,result)
25     if (abs((result-x1)/result)<tol){result
26         break
27     }
28     x0 <- x1
29     x1 <- x2
30     x2 <- result
31     h1 <- x1-x0
32     d1 <- (f(x1)-f(x0))/h1
33     d2 <- (f(x2)-f(x1))/h2
34     a <- (d2-d1)/h2+h1
35     i <- i+1
36 }
37
38 cat (iniciales)
39 iniciales <- c(iniciales,i)
40 return(iniciales)
41 }
42
43 Datos <- mimuller()
44
45 p0 = Datos[1]
46 p1 = Datos[2]
47 p2 = Datos[2]
48 i <- Datos[length(Datos)]
49 Datos[-(length(Datos))]
50 valor = c()
51
52
53 g = 2
54 iteraciones = 0; #Contador de iteraciones
55 for(k in Datos[4:(length(Datos))]-2){ # Ciclo que se repite por la
56     cantidad de datos del vector
57     valor = c(valor ,(p2-(((p2-p1)*(p2-p1))/(p2-(2*p1)+p0)))) # terminos
58     del polinomio propuesto.
59     p0 =Datos[g]
60     p1 =Datos[g+1]
61     p2=Datos[g+2]
62     g=g+1
63     iteraciones = iteraciones + 1
64     print(valor)
65 }
66 cat ("El numero de iteraciones realizadas en el metodo Muller son: ", i,
67     "\n")
68 cat ("El numero de iteraciones realizadas en el metodo Aitken son: ",
69     iteraciones)

```

Listing 2: Código en R convergencia acelerada

3.4. Comparación raíces

1. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Müller y Aitken: $\cos^2(x) - x^2$

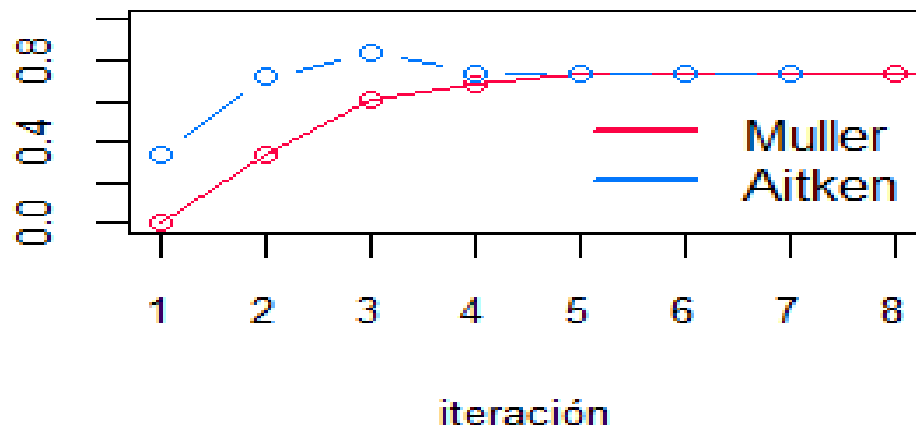


Figura 36: Comparación métodos con la raíz de la ecuación $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Tolerancia	Resultado	Nmáx. iteraciones	Müller	Aitken
$1e^{-8}$	0.73908513321516078331541166335	27	9	7
$1e^{-16}$	0.73908513321516078331541166335	53	11	9
$1e^{-32}$	0.73908513321516078331541166335	106	11	9
$1e^{-56}$	0.73908513321516078331541166335	186	11	9

Tabla 16: Resultados obtenidos con ambos métodos

2. $f(x) = x \sin(x) - 1$

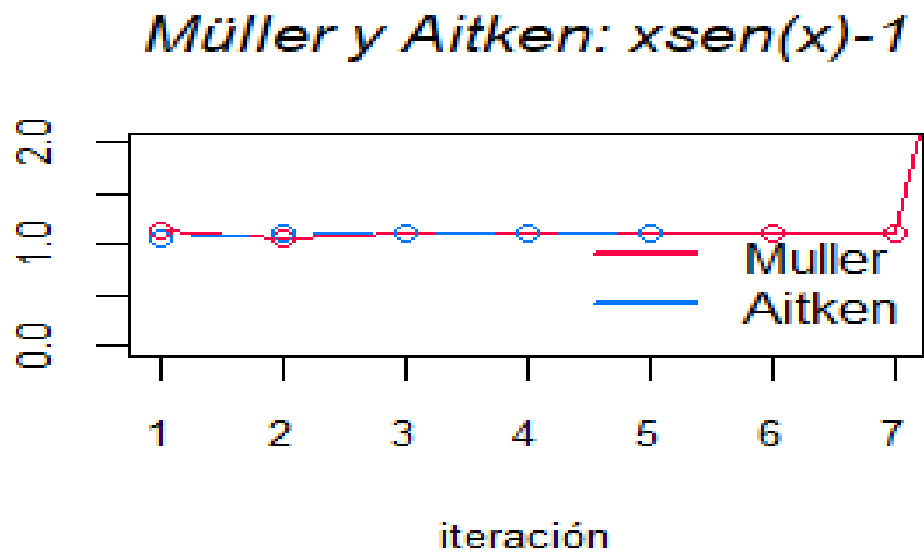


Figura 37: Comparación métodos con la raíz de la ecuación $f(x) = x\text{sen}(x) - 1$

Tolerancia	Resultado	Nmáx. iteraciones	Müller	Aitken
$1e^{-8}$	1.11415714087196437986904129502	28	8	6
$1e^{-16}$	1.11415714087196437986904129502	53	10	8
$1e^{-32}$	1.11415714087196437986904129502	106	10	8
$1e^{-56}$	1.11415714087196437986904129502	186	10	8

Tabla 17: Resultados obtenidos con ambos métodos

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

Müller y Aitken: $x^3 - 2x^2 + 4/3x - 8/27$

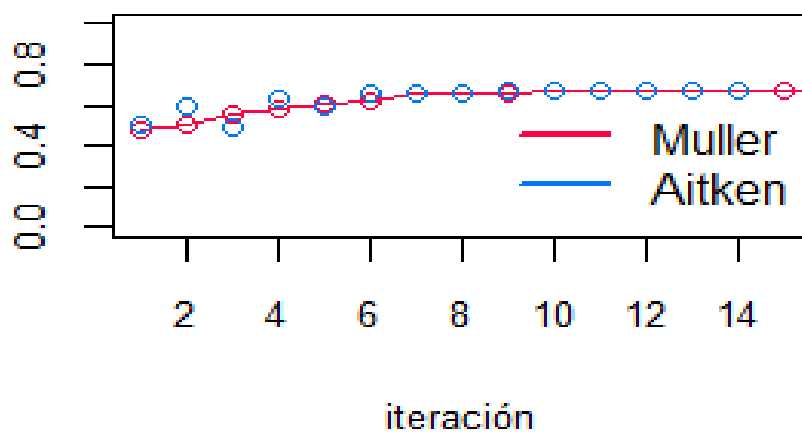


Figura 38: Comparación métodos con la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{8}{27}$

Tolerancia	Resultado	Nmáx. iteraciones	Müller	Aitken
$1e^{-8}$	0.66096277449434925888027692053	27	27	24
$1e^{-16}$	0.66096277449434925888027692053	53	53	51
$1e^{-32}$	0.66096277449434925888027692053	106	106	104
$1e^{-56}$	0.66096277449434925888027692053	186	186	184

Tabla 18: Resultados obtenidos con ambos métodos

4. $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x}\right) \cdot (1 - e^{-0,1468x}) - 40$

Müller y Aitken: $(667.832865/x)(1-e^{(-0.146843x)})-40$

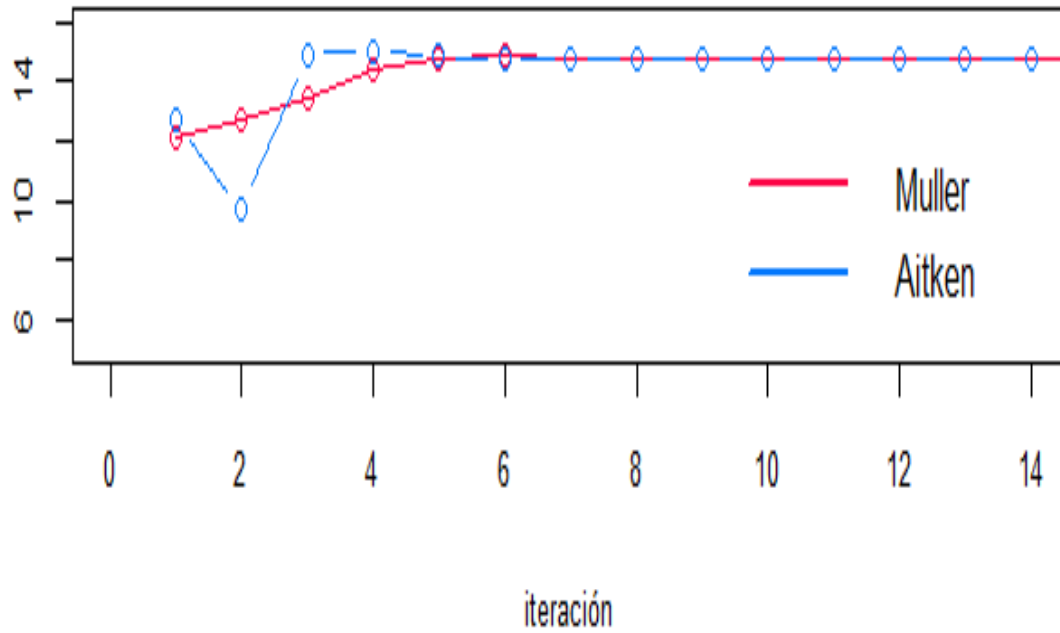


Figura 39: Comparación métodos con $f(x) = \left(\frac{667,832865}{x} \cdot (1 - e^{-0,1468x})\right) - 40$

Tolerancia	Resultado	Nmáx. iteraciones	Müller	Aitken
$1e^{-8}$	14.7941293788488543725634372094	29	15	12
$1e^{-16}$	14.7941293788488543725634372094	55	17	14
$1e^{-32}$	14.7941293788488543725634372094	109	17	14
$1e^{-56}$	14.7941293788488543725634372094	188	17	14

Tabla 19: Resultados obtenidos con ambos métodos

5. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

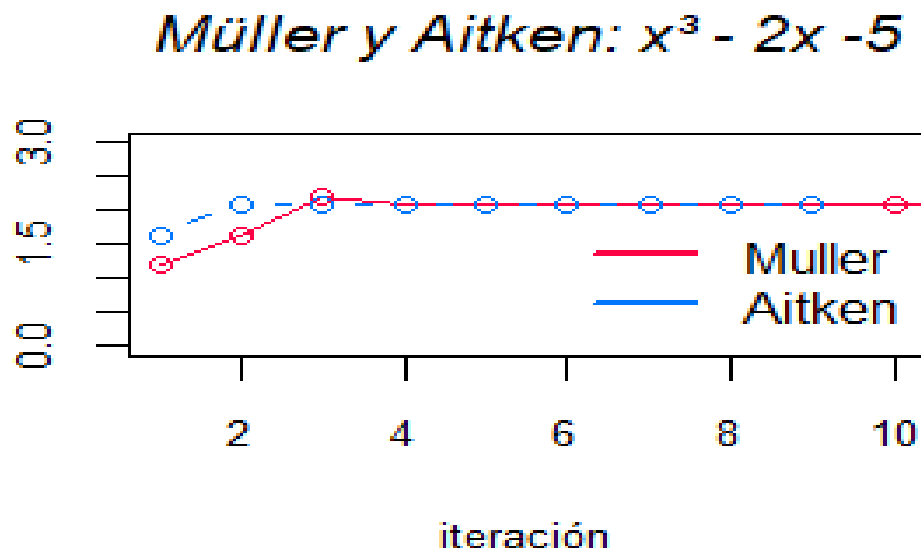


Figura 40: Comparación métodos con la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Tolerancia	Resultado	Nmáx. iteraciones	Müller	Aitken
$1e^{-8}$	2.09455148154232650981043661886	29	11	12
$1e^{-16}$	2.09455148154232650981043661886	55	13	10
$1e^{-32}$	2.09455148154232650981043661886	108	13	10
$1e^{-56}$	2.09455148154232650981043661886	188	13	10

Tabla 20: Resultados obtenidos con ambos métodos

Referencias

- Marta. Teorema de Bolzano y raíces de una función, 1 de Enero de 2021. Recuperado de: <http://minisconlatex.blogspot.com/2013/08/como-anadir-una-pagina-web-en-nuestra.html> [1].
- Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw Hill, fifth edition, 2007. [2].
- Anónimo. Raíces de ecuaciones no lineales, (s.f.). Recuperado de: https://www.uv.es/diazj/cn_tema2.pdf [3].
- Antonio Nieves Hurtado and Federico C. Domínguez Sánchez. *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Patria, second edition, 2014. [5].
- Douglas Wilhelm Harder. Müller's Method, (s.f.). Recuperado de: <https://ece.uwaterloo.ca/~dwharder/NumericalAnalysis/10RootFinding/mueller/> [6].