ÁLGEBRA

Sean x, y números reales mayores que 5. Muéstrese que $xy - 5x - 5y + 30 > 5$.

SOLUCIÓN

Se tiene

$$xy - 5x - 5y + 30 > 5$$

$$\leftrightarrow \quad xy - 5x - 5y + 25 > 0$$

$$x(y-5) - 5(y-5) > 0$$

$$(x-5)(y-5) > 0$$

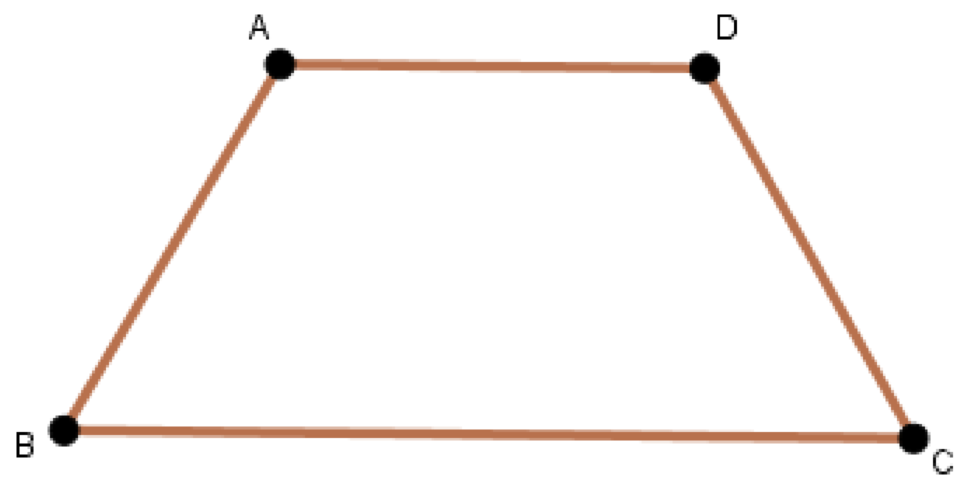
Como $x > 5$ y $y > 5$, entonces,

$$(x-5)(y-5) > 0$$

GEOMETRÍA PLANA

Considérese un trapecio $ABCD$, con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ paralelos y con $|\overline{CD}| = |\overline{DA}| = |\overline{AB}| = \frac{|\overline{BC}|}{2}$.

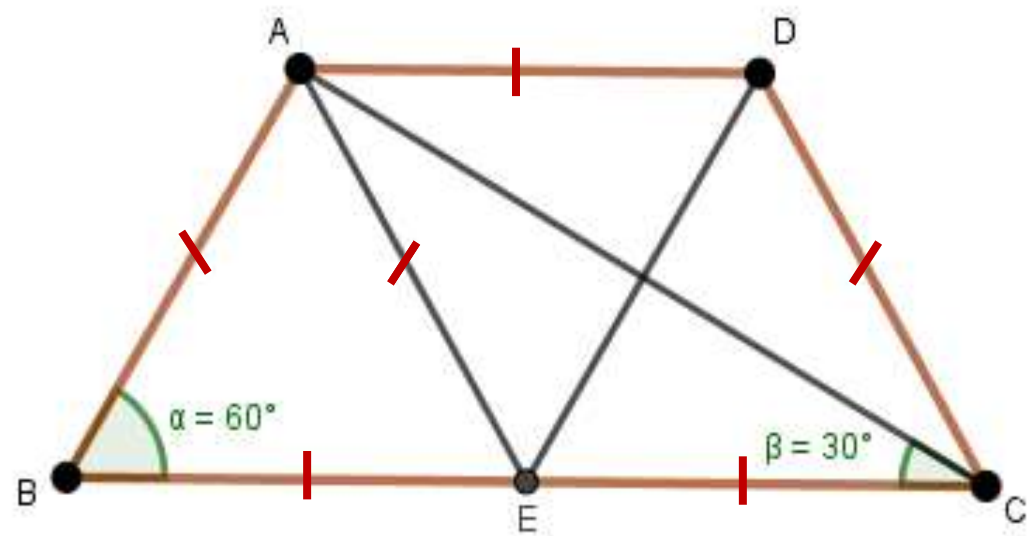
Determínese la medida del ángulo $\measuredangle CAB$ en grados.



SOLUCIÓN

Sea E el punto medio del $\overline{BC}$, se tiene que $\overline{|BE|} = \overline{|EC|} = \overline{|AD|}$, luego $\overline{AD}$ y $\overline{EC}$ son segmentos paralelos y de la misma longitud, por lo que $CDAE$ es un paralelogramo.

Además $CDAE$ es un rombo al contar con tres lados iguales en medida.



Así, el ΔABE resulta ser equilátero y entonces $\angle ABE = 60° = \angle DCE$. Como $\overline{CA}$ es bisectriz de $\angle DCE$ (ya que $\Delta ADC \cong \Delta CEA$), se tiene que $\angle ACE = 30°$, por lo que $\angle CAB = 90°$.

ÁLGEBRA

Sean x, y números reales distintos de -2. Pruébese que $2xy + 4x + 4y + 6 \neq -2$.

SOLUCIÓN

Si $2xy + 4x + 4y + 6 \neq -2$ **se tendría**

$$0 = 2xy + 4x + 4y + 8$$

$$= 2x(y + 2) + 4(y + 2)$$

$$= (2x + 4)(y + 2)$$

$$= 2(x + 2)(y + 2)$$

Como $x \neq -2$ **y** $y \neq -2$**, es claro que**

$$2(x + 2)(y + 2) \neq 0$$

Por tanto, $2xy + 4x + 4y + 6 \neq -2$

ÁLGEBRA

El sistema de ecuaciones siguiente no tiene solución.

$$\boldsymbol{9x - 3y = -15}$$

$$\boldsymbol{6x - 2y = m}$$

Determínese las condiciones que debe cumplir $\boldsymbol{m}$ para que esto ocurra.

SOLUCIÓN

Al analizar los coeficientes de las variables en cada una de las ecuaciones, es posible identificar que ambas rectas tienen la misma pendiente; esto es,

Ecuación	**Pendiente de la recta**
$\boldsymbol{9x - 3y = -15}$	$\boldsymbol{pendiente = \frac{9}{3} = 3}$
$\boldsymbol{6x - 2y = m}$	$\boldsymbol{pendiente = \frac{6}{2} = 3}$

Por tanto, hay dos posibilidades respecto a la solución del sistema de ecuaciones; la primera es que el sistema tenga infinitas soluciones, lo que indica que las ecuaciones son equivalentes; es decir, las líneas rectas que las representa son la misma, o lo que es equivalente, ambas rectas están sobre puestas (Figura 1a).

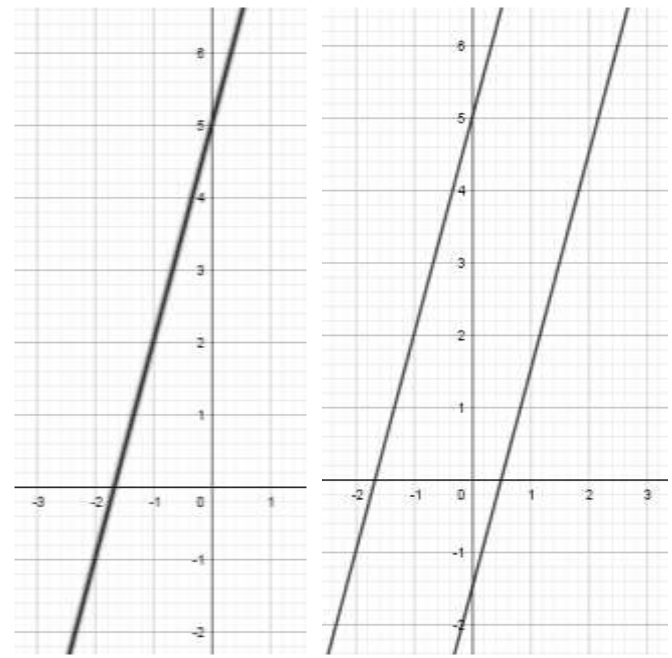


Figura 1. a y b

La segunda posibilidad es que el sistema de ecuaciones no tenga solución; es decir, que las rectas sean paralelas (Figura 1b).

De manera que, para que se cumpla la condición de que el sistema de ecuaciones no tiene solución, las rectas deben ser paralelas; de tal forma que es necesario analizar la razón entre los coeficientes para determinar cuál es la razón por la que las ecuaciones son equivalentes.

Así,

	Variable x	**Variable y**
Razón entre coeficientes	$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

De manera que, para que el sistema no tenga solución, m debe ser tal que

$$\frac{-15}{m} \neq \frac{3}{2}$$

Por tanto, $m \neq -10$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Un entrenador de futbol escolar, debe decidir cuál de dos jugadores enviar a un torneo de penales, para ello analiza la cantidad de goles anotados en seis pruebas. Con base en argumentos estadísticos, determínese qué jugador debe asistir al torneo.

Jugador 1	
# prueba	Cantidad de goles anotados
1	0
2	3
3	2
4	10
5	2
6	7

Jugador 2	
# prueba	Cantidad de goles anotados
1	4
2	3
3	0
4	3
5	10
6	4

SOLUCIÓN

Para tomar una decisión es necesario conocer el rendimiento de cada jugador, de manera que conviene determinar las medidas de tendencia central de ambos jugadores:

	Jugador 1	Jugador 2
Media aritmética	4	4
Mediana	2.5	3.5
Moda	2	3 y 4

Con los argumentos propuestos se identifica que el jugador 2 presenta una mayor estabilidad en su desempeño. Por lo que conviene analizar la dispersión de los datos mediante la desviación media.

	Jugador 1	**Jugador 2**
Desviación media	$\frac{4+2+2+1+3+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$	$\frac{0+1+4+1+6+0}{6} = \frac{12}{6} = 2$

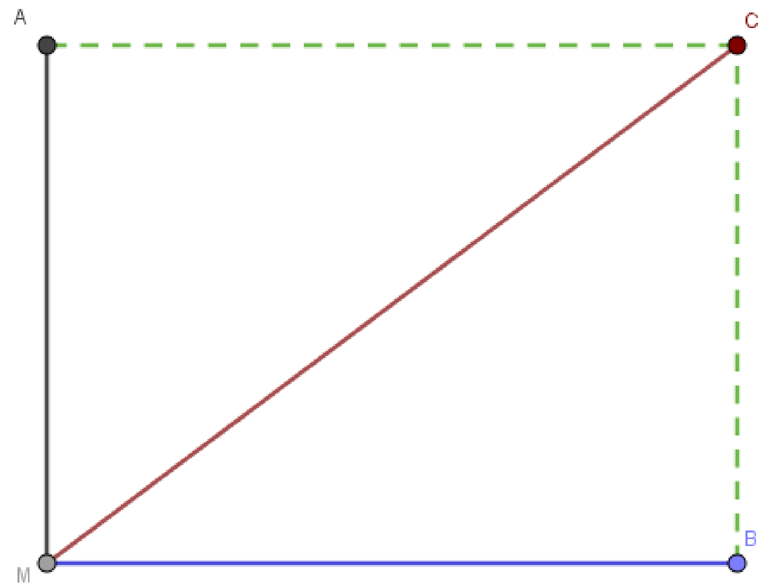
Por tanto, se puede decir que es conveniente que asista al evento el jugador 2, pues su desempeño es más estable, esto se evidencia en que la dispersión de los datos es menor.

GEOMETRÍA PLANA

Tres barcos parten de un muelle al mismo tiempo. El barco A viaja en línea recta hacia el norte con una velocidad de $30\ km/h$. El barco B viaja en línea recta hacia el este con una velocidad de $40\ km/h$; y el barco C se desplaza en dirección noreste. Si después de $2\ horas$ el barco C se encuentra a la misma distancia del muelle respecto al barco A y a la misma distancia del muelle respecto al barco B. Determínese la velocidad del barco C.

SOLUCIÓN

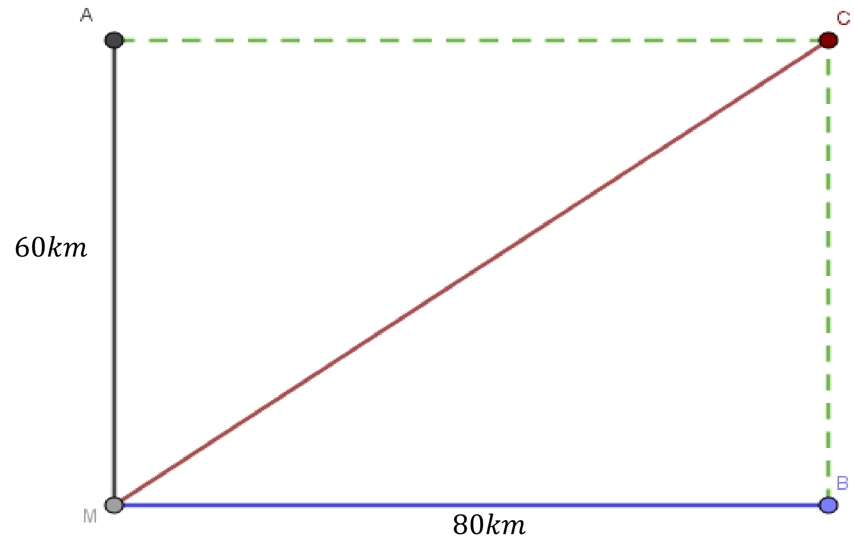
Considérese la imagen siguiente



Para poder determinar la velocidad del barco C, es necesario calcular la distancia que ha recorrido en

las dos horas, para ello se necesita calcular la distancia respecto al muelle de los barcos A y B.

Así, sabe que el barco A se desplaza a una velocidad de $30km/h$, por lo que al cabo de $2h$ habrá recorrido $60km$; por su parte, el barco B se desplaza a una velocidad de $40km/h$, por lo que al cabo de $2h$ habrá recorrido $80km$. Como el barco C se encuentra a la misma distancia horizontal y



vertical que los demás barcos, utilizando el teorema de Pitágoras es posible determinar la distancia recorrida.

Así,

$$\boldsymbol{distancia\ recorrida\ por\ el\ barco\ C\ es}$$

$$\boldsymbol{d(C) = \sqrt{(60)^2 + (80)^2} = \sqrt{10000} = 100}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{distancia\ recorrida\ por\ el\ barco\ C\ es\ 100km}$$

De manera que,

$$\boldsymbol{velocidad\ del\ barco\ C = \frac{100km}{2h} = 50km/h}$$