Curso de Engenharia de Computação
ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Modelos de computação – Máquinas de Turing

Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia – Escola de Engenharia Mauá
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza
<marco.furlan@maua.br>

Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Máquinas de Turing

- **Conceitos**

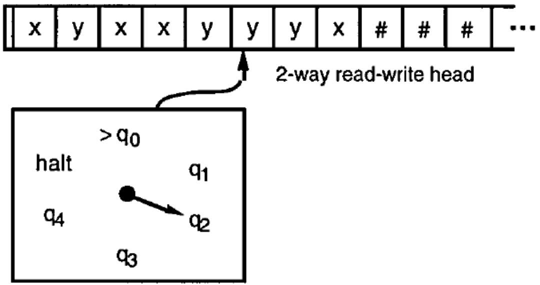
Definição. *Uma **máquina de Turing**[1] é uma quíntupla $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0\}$ onde:*

- Q *é um conjunto finito de **estados**;*
- Γ *é um conjunto finito denominado **alfabeto da fita**, contendo um símbolo especial, $\#$, que representa "**branco**";*
- Σ *é um subconjunto de $\Gamma - \{\#\}$ denominado **alfabeto de entrada**;*
- δ *é uma **função parcial** de $Q \times \Gamma$ para $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ denominada **função de transição**;*
- $q_0 \in Q$ *é o estado inicial.*

[1] Ou máquina de Turing padrão

Máquinas de Turing

- **Conceitos**
  - Uma máquina de Turing é uma **máquina de estados finitos** na qual uma transição imprime um símbolo sobre uma **fita** contendo **infinitas células**:



  - A **cabeça da fita** pode se **mover** tanto para a **direita** (R) quanto para a **esquerda** (L) permitindo a máquina ler/gravar sobre a fita quantas vezes for necessário.

Máquinas de Turing

- **Computação**
  - Para **iniciar uma computação**, uma **cadeia de entrada** é escrita a partir da **extremidade esquerda** da fita e seu restante é preenchido por **brancos**;
  - A **cabeça** de leitura/gravação é **posicionada** sobre o **símbolo** mais à **esquerda** da cadeia;
  - Sempre que a máquina **ler um símbolo** b sobre a cadeia de entrada, enquanto no estado q, sua lógica interna produz a tripla $\delta(q,b) = (p,c,D)$, de modo que o há uma **mudança de estado** para o estado p com a **substituição do símbolo** b por c e a **movimentação da cabeça** de leitura/gravação para uma **célula** na direção D, $D \in \{L,R\}$, sobre a qual estará **pronta** para ler o **próximo símbolo**;
  - Uma computação **para** quando se encontra um par de estado e símbolo de entrada para o qual não há uma transição definida;
  - Uma transição da célula zero para esquerda leva à uma **terminação anormal**.

Máquinas de Turing

- **Representação tabular**
  - Uma máquina de Turing com m estados e n símbolos é denominada de **máquina de Turing** $m \times n$;
  - Assim uma máquina de Turing $m \times n$ pode ser representada por uma **tabela** contendo m **linhas**, que são seus **estados**, e n **colunas**, que são os símbolos de entrada (Γ);
  - A **entrada** em uma linha q e **coluna** b é o **valor da função** $\delta(q,b)$, (p,c,D), ou um **estado de parada** h (alguns autores deixam esta entrada simplesmente indefinida);

Máquinas de Turing

- **Representação tabular**
  - **Exemplo**

δ	$\#$	a	b
q_0	$q_1,\#,R$		
q_1	$q_2,\#,L$	q_1,b,R	q_1,a,R
q_2		q_2,a,L	q_2,b,L

  - Simular com a entrada a seguir: $\#abab\#$:

$q_0 \quad \underline{\#}abab\#$

$q_1 \quad \#\underline{a}bab\#$

$q_1 \quad \#b\underline{b}ab\#$

$q_1 \quad \#ba\underline{a}b\#$

$q_1 \quad \#bab\underline{b}\#$

$q_1 \quad \#baba\underline{\#}$

$q_2 \quad \#bab\underline{a}\#$

$q_2 \quad \#ba\underline{b}a\#$

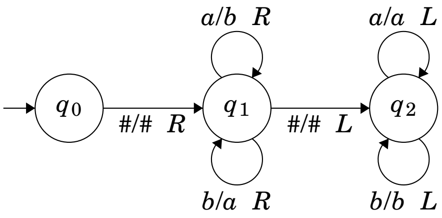
$q_2 \quad \#b\underline{a}ba\#$

$q_2 \quad \#\underline{b}aba\#$

$q_2 \quad \underline{\#}baba\#$

Máquinas de Turing

- **Representação por diagrama de estados**
  - O **diagrama de estados** representativo de uma máquina de Turing é assim definido:
    - **Vértices** são rotulados com **nomes** de **estados**, com **destaque** do **estado inicial**;
    - Um **arco** orientado é **desenhado** do vértice q_i para o vértice q_j e rotulado com $x/y\ d$ se houver uma **transição** $\delta(q_i, x) = (q_j, y, s)$.
  - **Exemplo**



Máquinas de Turing

- **Configuração de máquina**
  - Uma configuração de máquina consiste em **um estado**, **a fita** e **posição da cabeça** de leitura/gravação;
  - Em **qualquer passo** de uma computação em uma máquina de Turing, **somente** um **segmento finito** da fita **é não branco**;
  - Uma **configuração** é **escrita** como $uq_iv\#$ onde todas as posições à direita de # são brancas e uv é a cadeia não branca escrita na fita (possivelmente com brancos em seu interior);
  - A notação $uq_iv\#$ indica que a máquina está no **estado** q_i e está **lendo** o **primeiro símbolo** de v e a **fita** inteira à **direita** de uv é #;
  - A utilização de configuração facilita acompanhar as computações de uma máquina de Turing.

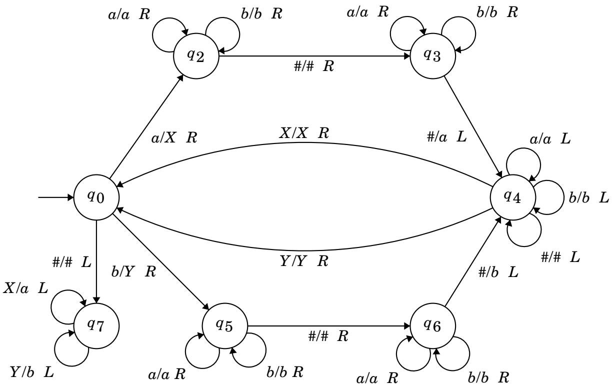
Máquinas de Turing

- **Configuração de máquina**
  - A notação $uq_iv \vdash_M xq_jy\#$ indica que a configuração $xq_jy\#$ é obtida de $uq_iv\#$ por uma simples transição da máquina M;
  - A notação $uq_iv \vdash_M^* xq_jy\#$ indica que a configuração $xq_jy\#$ é obtida de $uq_iv\#$ por um número finito, possivelmente zero, de transições;
  - **Exemplo**

$$
\begin{aligned}
& q_0\#abab\# \\
& \vdash \#q_1abab\# \\
& \vdash \#bq_1bab\# \\
& \vdash \#baq_1ab\# \\
& \vdash \#babq_1b\# \\
& \vdash \#babaq_1\# \\
& \vdash \#babq_2a\# \\
& \vdash \#baq_2ba\# \\
& \vdash \#bq_2aba\# \\
& \vdash \#q_2baba\# \\
& \vdash q_2\#baba\#
\end{aligned}
$$

Máquinas de Turing

- **Exemplo**
  - A máquina descrita a seguir faz uma cópia da cadeia u presente na fita, $\#u\#$, terminando com a configuração $\#u\#u\#$:



Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Aceitação de linguagens

- **Conceitos**
  - Máquinas de Turing podem ser projetadas para **aceitar linguagens** e **computar funções**;
  - O **resultado** de uma **computação** pode ser definido em termos do **estado** no qual a **computação termina** ou a **configuração** da **fita** no **final** da **computação**;
  - No caso de aceitação ou rejeição de cadeias, define-se que a computação aceitou ou rejeitou uma cadeia se ela levar a máquina a um **estado final**;
  - Neste caso, **estende-se a máquina de Turing** com um conjunto de **estados finais**, F, definindo-a como uma sêxtupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde $F \subseteq Q$.

Aceitação de linguagens

Definição. *Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ uma máquina de Turing. Uma cadeia $u \in \Sigma*$ é* ***aceita por estado final*** *se a computação de M com entrada u parar em um estado final. Uma computação que termina diferentemente rejeita a entrada, não importando o estado em que terminar. A linguagem de M, denotada por $L(M)$, é o conjunto de todas as cadeias aceitas por M.*

Aceitação de linguagens

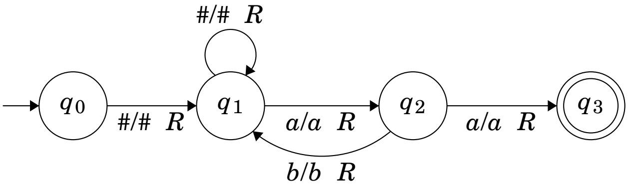
- **Conceitos**
  - Uma linguagem aceita por uma máquina de Turing é chamada de **linguagem recursivamente enumerável**;
  - Como a máquina de Turing pode se mover em ambas as direções e processar brancos, é **possível** que a máquina **possa não parar** para uma entrada particular;
  - **Possíveis resultados** de uma computação com máquina de Turing:
    - Parar e aceitar a cadeia;
    - Parar e rejeitar a cadeia;
    - Não parar.
  - Então, uma máquina M reconhece L se ela aceita L mas não necessariamente para com todas as entradas.

Aceitação de linguagens

- **Conceitos**
  - Uma **linguagem aceita** por uma máquina de Turing é dita ser **recursiva**;
  - Se as computações param para todas as entradas, então a máquina é também um dispositivo que **decide** a linguagem;
  - A existência de uma máquina de Turing que para em todas as entradas é suficiente para mostrar que a pertinência na **linguagem** é **decidível** e que a linguagem é **recursiva**;
  - No entanto, existem linguagens que são reconhecidas por uma máquina de Turing mas que não decididas por qualquer máquina de Turing.

Aceitação de linguagens

- **Exemplo**
  - A máquina M descrita a seguir aceita a linguagem $(a \cup b)^* aa(a \cup b)^*$:



  - Por exemplo, a cadeia $aabb$ é aceita, conforme as derivações a seguir. Esta linguagem é recursiva – as computações de M param para toda cadeia de entrada.

$q_0\#aabb\#$

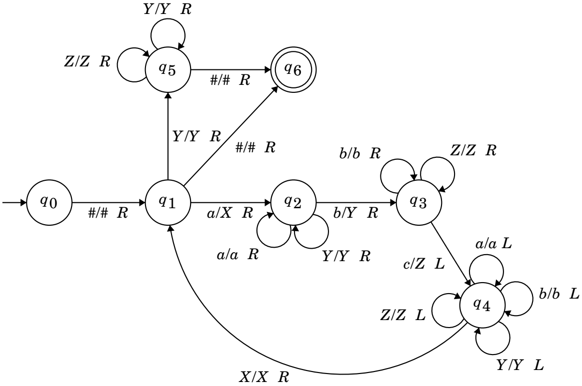
$\vdash \#q_1aabb\#$

$\vdash \#aq_2abb\#$

$\vdash \#aaq_3bb\#$

Aceitação de linguagens

- **Exemplo**
  - A linguagem $L = \{a^i b^i c^i | i \geq 0\}$ é aceita pela máquina de Turing a seguir:



Aceitação de linguagens

- **Variações da Máquina de Turing**
  - Pode-se determinar máquinas de Turing padrão para as variações da máquina de Turing a seguir:
    - **Máquinas de Turing com múltiplas trilhas**: possuem fita com mais de uma trilha em paralelo;
    - **Máquinas de Turing de dois caminhos**: a cabeça de leitura e gravação não é limitada à esquerda;
    - **Máquinas de Turing multi-fita**: possuem mais de uma fita;
    - **Máquinas de Turing não-determinísticas**: permitem não-determinismo na função de próximo estado.

Exercícios

1. Seja M a máquina de Turing definida por:

δ	$\#$	a	b	c
q_0	$q_1,\#,R$			
q_1	$q_2,\#,L$	q_1,a,R	q_1,c,R	$q1,c,R$
q_2		q_2,c,L		q_2,b,L

Pede-se:

(a) Traçar a computação para a cadeia de entrada $aabca$.

(b) Traçar a computação para a cadeia de entrada $bcbc$.

(c) Desenhar o diagrama de estados de M.

(d) Descrever o resultado de uma computação em M.

Exercícios

2. Construir uma máquina de Turing com alfabeto de entrada $\{a, b\}$ para aceitar as linguagens $\{uu^R | u \in \{a, b\}^*\}$.

3. Construir uma máquina de Turing com alfabeto de entrada $\{a, b, c\}$ que aceite cadeias nas quais o primeiro c é precedido pela cadeia aaa. Uma cadeia deve conter um c para ser aceita pela máquina.

Referências bibliográficas

GERSTING, J. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um Tratamento Moderno de Matemática Discreta**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos. ISBN 9788521614227.

RICH, E. **Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and Its Applications**. New York: McGraw-Hill, 2003. (McGraw-Hill higher education).

SUDKAMP, T. **Languages and Machines: An Introduction to the Theory of Computer Science**. [S.l.]: Pearson Addison-Wesley, 2006.

TAYLOR, R. G. **Models of computation and formal languages**. New York: Oxford University Press, 1998.