Análisis Estadístico con R

Series de Tiempo

true

21 de marzo de 2018

Contents

Introducción

Una serie de tiempo es una sucesión de variables aleatorias ordenadas de acuerdo a una unidad de tiempo, $Y_1, \ldots, Y_T$.

¿Por qué usar series de tiempo?

- Pronósticos
- Entender el mecanismo de generación de datos (no visible al inicio de una investigación)

Rezagos y operadores en diferencia

Operadores de rezagos

Defínción:

$$\Delta Y_{t-i} = Y_t - Y_{t-i}$$

Ejemplos:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Caso general:

$$L^j Y_t = Y_{t-j}$$

Ejemplos:

$$L^1 Y_t = L Y_t = Y_{t-1}$$
$$L^2 Y_t = Y_{t-2}$$

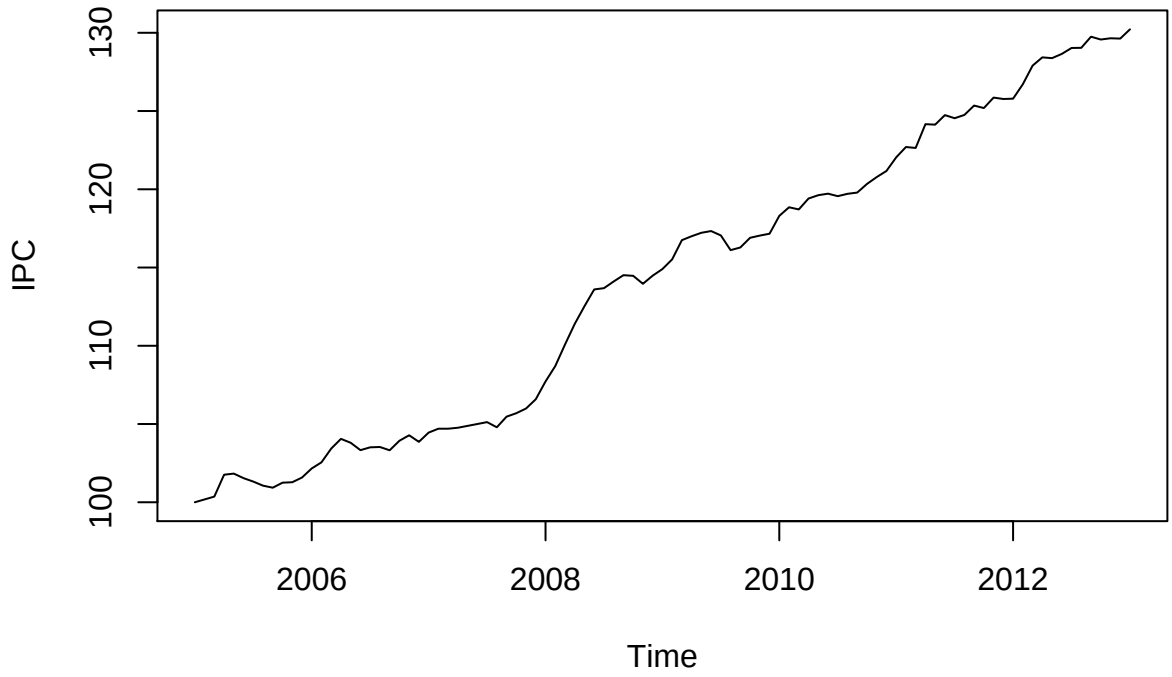
$$L^{-2} Y_t = Y_{t+2}$$

$$L^i L^j = L^{i+j} = Y_{t-(i+j)}$$

Manipulando `ts` en 'R

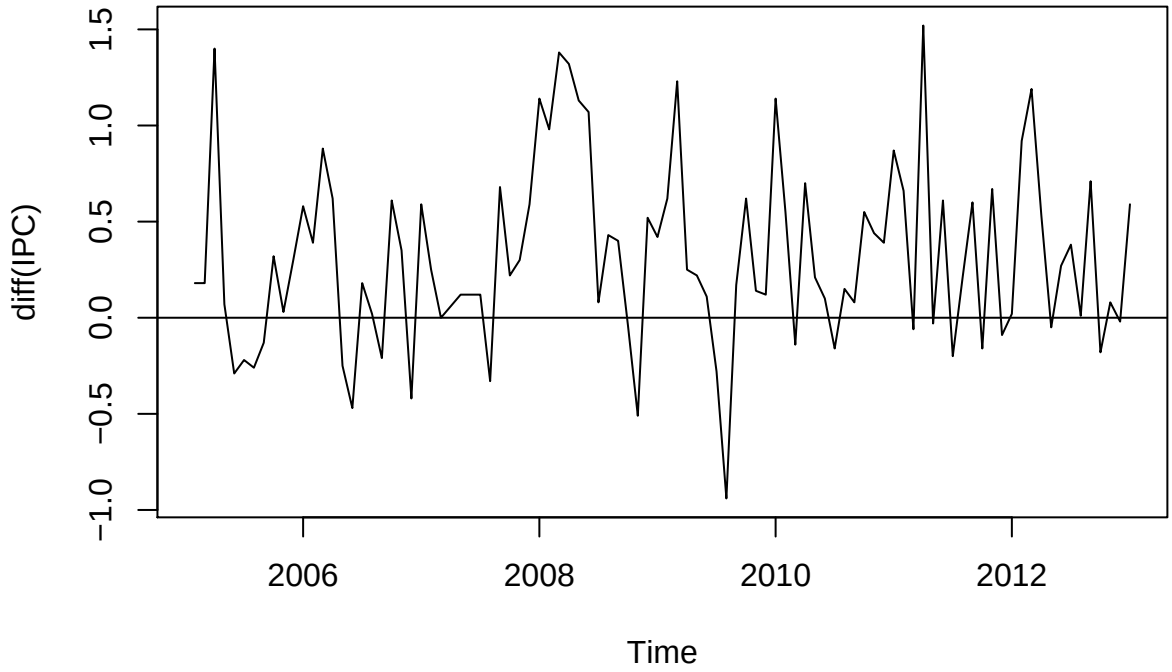
- Abrir `IPCEcuador.csv`
- Se puede ver una inflación variable

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/IPCEcuador.csv"
datos <- read.csv(url(uu),header=T,dec=".",sep=",")
IPC <- ts(datos$IPC,start=c(2005,1),freq=12)
plot(IPC)
```



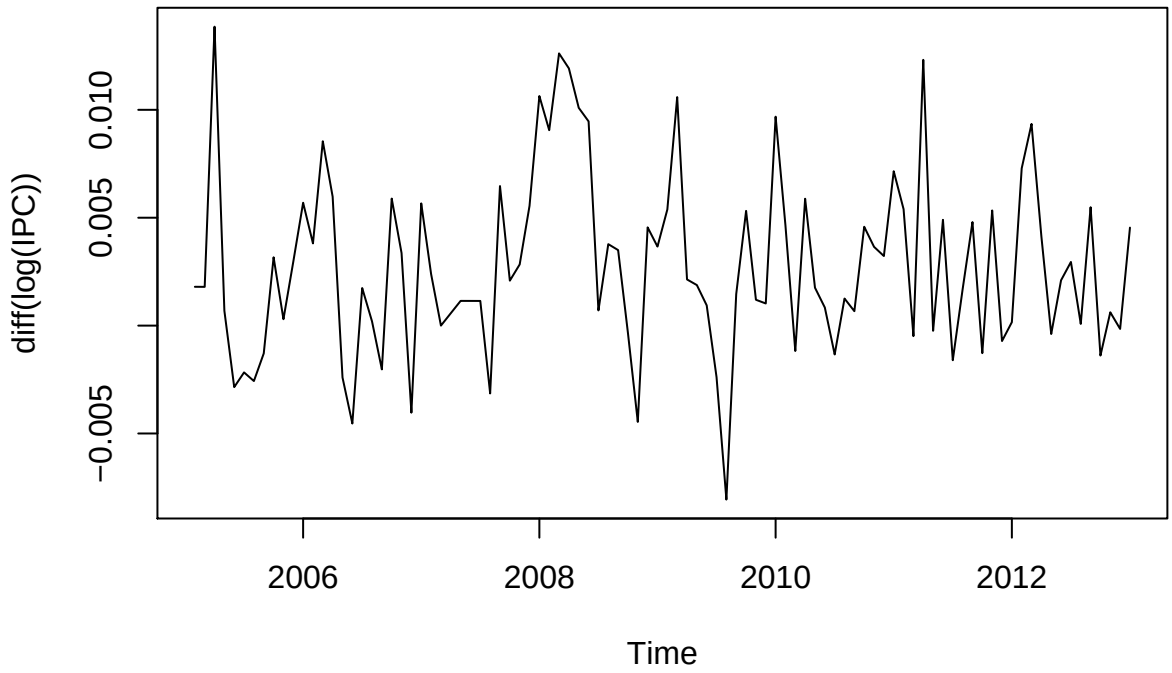
La serie tiene tendencia creciente. Tratemos de quitar esa tendencia:

```
plot(diff(IPC)) # Se puede ver una inlfacion estable
abline(h=0)
```



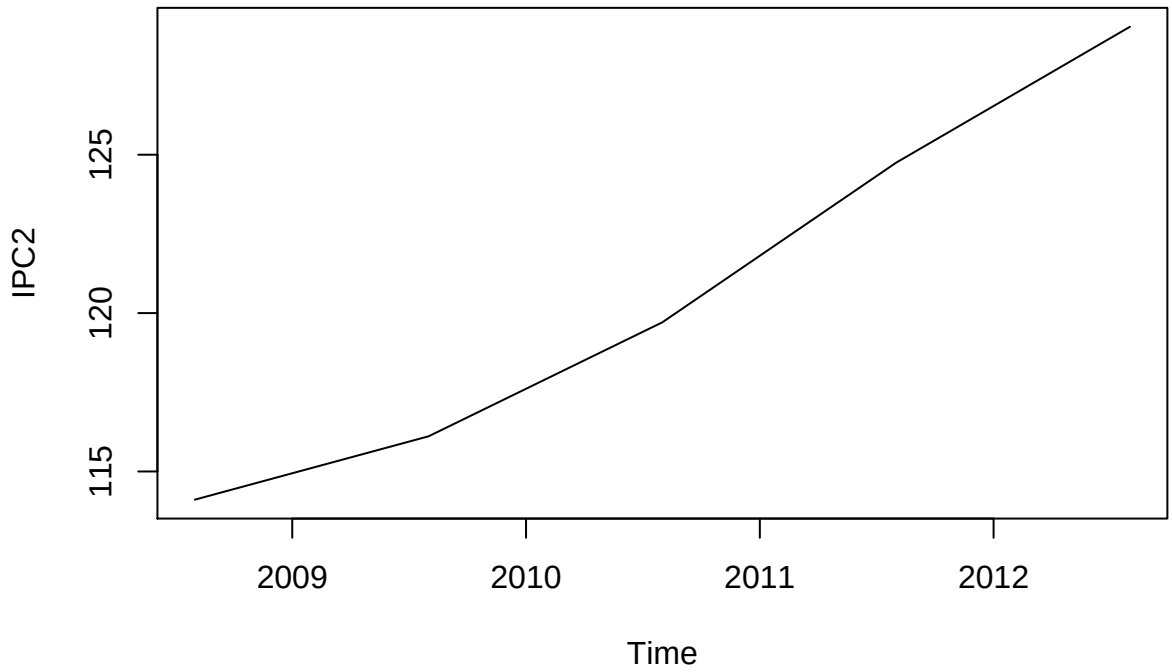
Se ha estabilizado, pero podemos hacerlo aún más con el logartimo de la diferencia:

```
plot(diff(log(IPC))) #Tasa de variacion del IPC
```

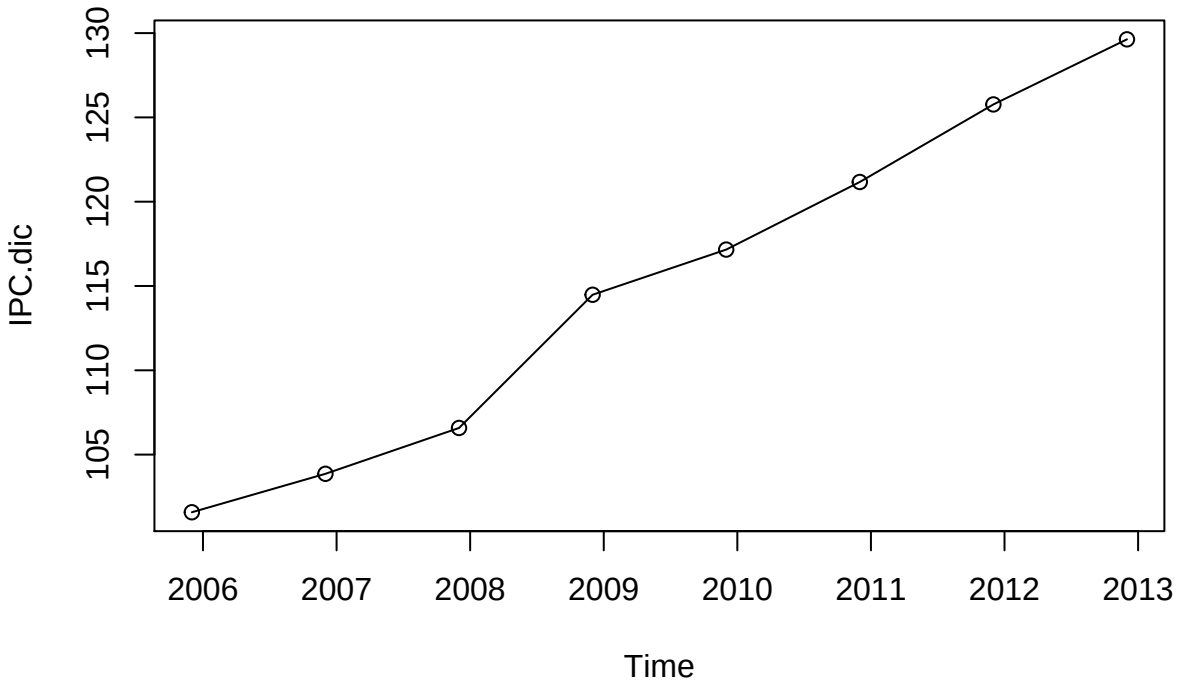


La serie no tiene tendecia y es estable. Ahora, si deseo trabajar con un subconjunto de datos, puedo...

```
# Solo quiero trabajar con los datos de agosto 2008
IPC2 <- window(IPC,start=c(2008,8),freq=1)
plot(IPC2)
```




```
# IPC de todos los diciembres
IPC.dic <- window(IPC,start=c(2005,12),freq=T)
plot(IPC.dic)
points(IPC.dic)
```



Si tengo mensuales y necsito trabajar con el IPC anual:

```
aggregate(IPC)
```

```
## Time Series:
## Start = 2005
## End = 2012
## Frequency = 1
## [1] 1213.09 1241.75 1262.13 1349.24 1399.26 1435.96 1491.87 1542.53
```

A continuación algunas transformaciones frecuentes y su interpretación:

Transformación	Interpretación
$z_t = \nabla y_t = y_t - y_{t-1}$	Cambio en y_t. Es un indicador de crecimiento absoluto.
$z_t = ln(y_t) - ln(y_{t-1}) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$	Es la tasa logarítmica de variación de una variable. Es un indicador de crecimiento relativo. Si se multiplica por 100 es la tasa de crecimiento porcentual de la variable
$z_t = \nabla[ln(y_t) - ln(y_{t-1})]$	Es el cambio en la tasa logarítmica de variación de una variable. Es un indicador de la aceleración de la tasa de crecimiento relativo de una variable.

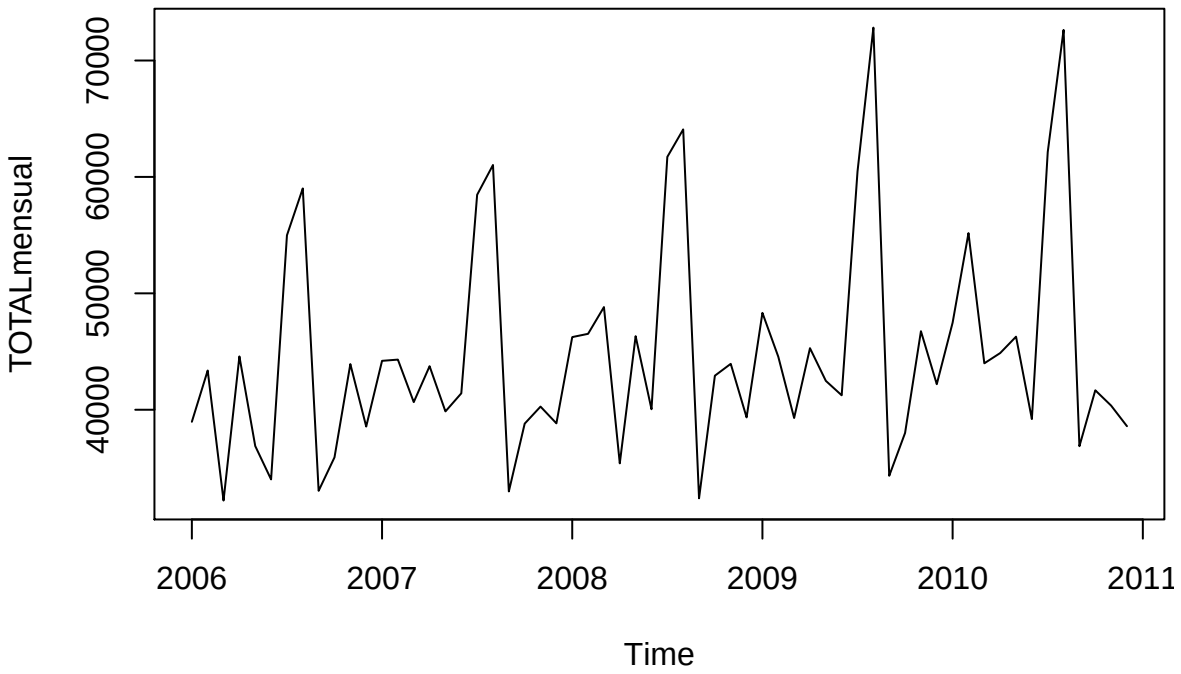
Ejemplo

Veamos un gráfico más interesante usando un conjunto de datos anterior, vamos a:

- Abrir la base `estadísticas Turismo.csv`
- Agregar de manera mensual
- Convertir a `ts` y graficar

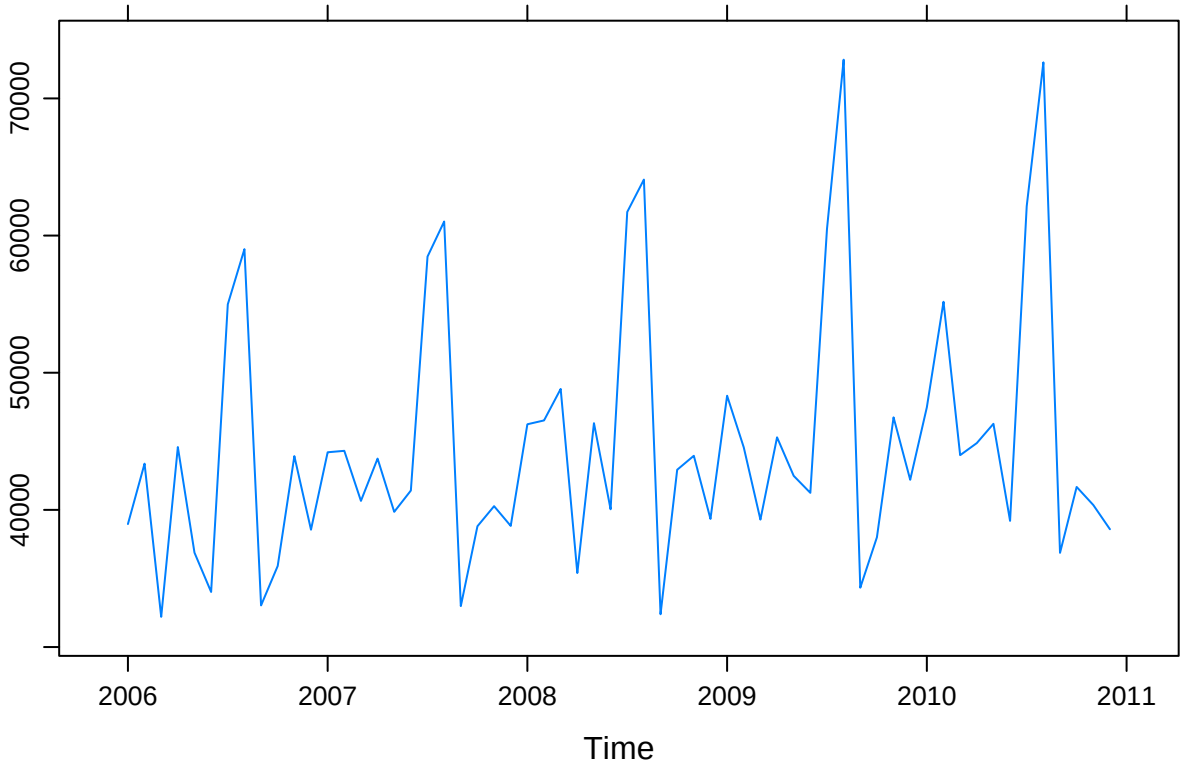
```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/estadisticas%20Turismo.csv"
datos<-read.csv(url(uu),header=T,dec=".",sep=";")
attach(datos)
```

```r
# Visitas a Areas Naturales Protegidas

# Sumar por mes y año

mensual<-aggregate(TOTALMENSUAL,by=list(mesnum,Year),FUN="sum") # Los datos sin mes es el total de ese

TOTALmensual<-ts(mensual[,3],start=c(2006,1),freq=12)
plot(TOTALmensual)
```

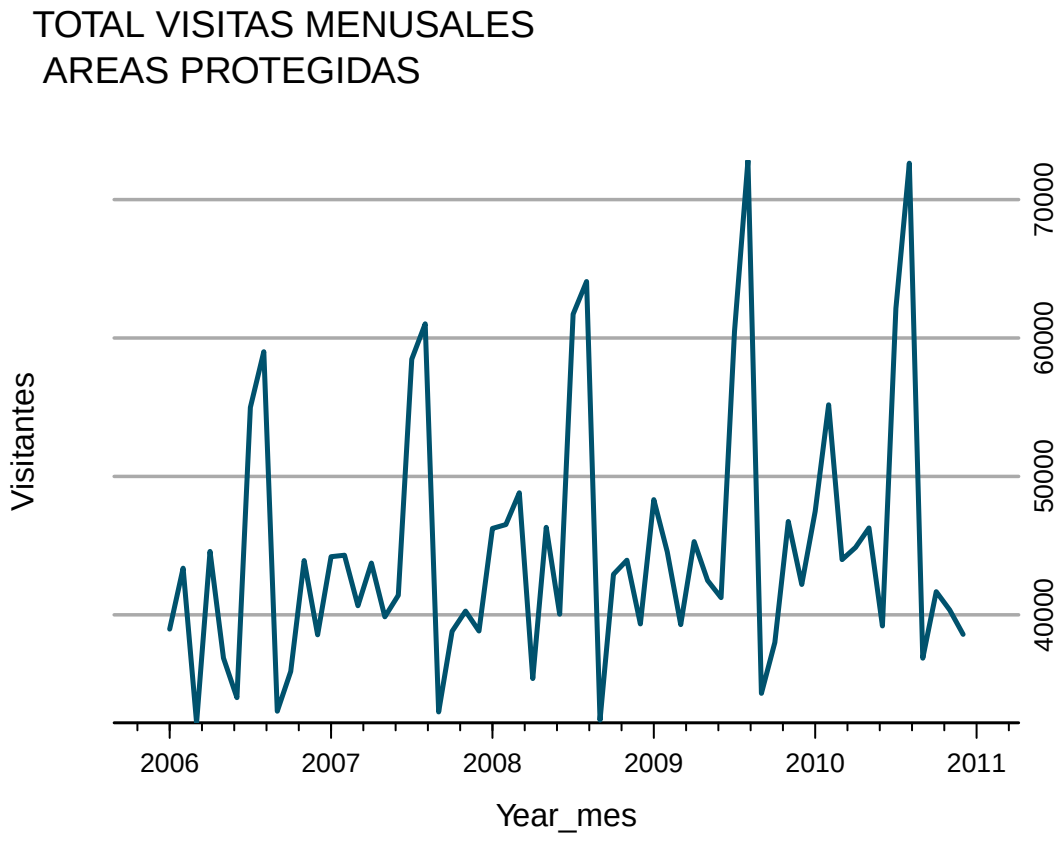


Se ve una tendencia creciente y también una cierta estacionalidad. Veamos la misma serie en gráficos más atractivos:

```r
library(latticeExtra)
library(RColorBrewer)
library(lattice)
xyplot(TOTALmensual)
```




```
asTheEconomist(xyplot(TOTALmensual,
                      main="TOTAL VISITAS MENUSALES \n AREAS PROTEGIDAS")
               ,xlab="Year_mes",ylab="Visitantes")
```



Descomposición de una serie de tiempo

Componentes

- Tendencia-ciclo: representa los cambios de largo plazo en el nivel de la serie de tiempo
- Estacionalidad: Caracteriza fluctuaciones periódicas de longitud constante causadas por factores tales como temperatura, estación del año, periodo vacacional, políticas, etc.

$$Y_t = f(S_t, T_t, E_t)$$

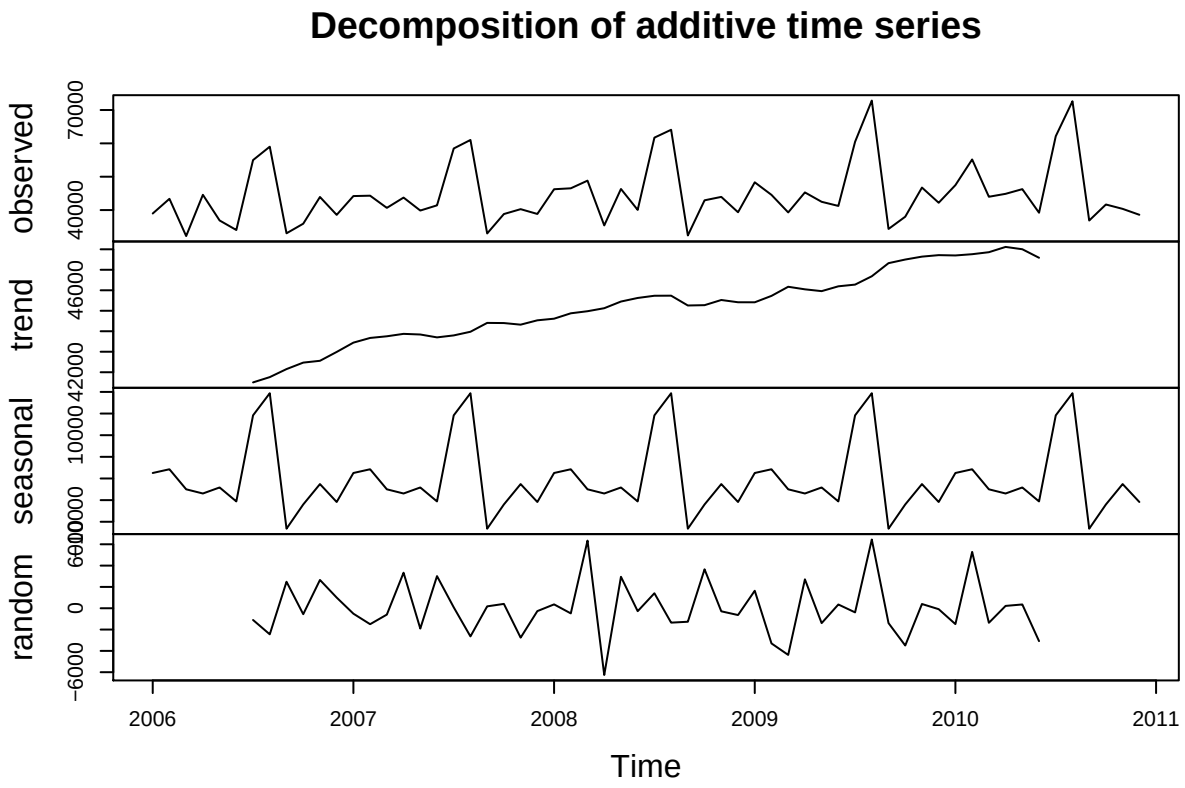
donde Y_t es la serie observada, S_t es el componente estacional, T_t es la tendencia y E_t es el término de error.

La forma de f en la ecuación anterior determina tipos de descomposiciones:

Descomposición	Expresión
Aditiva	$Y_t = S_t + T_t + E_t$
Multiplicativa	$Y_t = S_t * T_t * E_t$
Transformación logaritmica	$log(Y_t) = log(S_t) + log(T_t) + log(E_t)$
Ajuste estacional	$Y_t - S_t = T_t + E_t$

Ejemplo

```
visitas.descompuesta<-decompose(TOTALmensual, type="additive")
plot(visitas.descompuesta)
```



Dentro de `visitas.decompuesta` tenemos los siguientes elementos:

- `$x` = serie original

- `$seasonal` = componente estacional de los datos EJ: en marzo hay un decremento de 2502 (para cada dato)
- `$trend` = tendencia
- `$random` = visitas no explicadas por la tendencia o la estacionalidad
- `$figure` = estacionalidad (mismo que `seasonal` pero sin repetición)

Descomposición: ¿aditiva o multiplicativa?

Visualmenete:

- Aditivo:
  - las fluctuaciones estacionales lucen aproximadamente constantes en tamaño con el tiempo y
  - no parecen depender del nivel de la serie temporal,
  - y las fluctuaciones aleatorias también parecen ser más o menos constantes en tamaño a lo largo del tiempo
- Multiplicativo
  - Si el efecto estacional tiende a aumentar a medida que aumenta la tendencia
  - la varianza de la serie original y la tendencia aumentan con el tiempo

Forma alternativa de elegir: ver cuál es la que tiene un componente aleatorio menor.

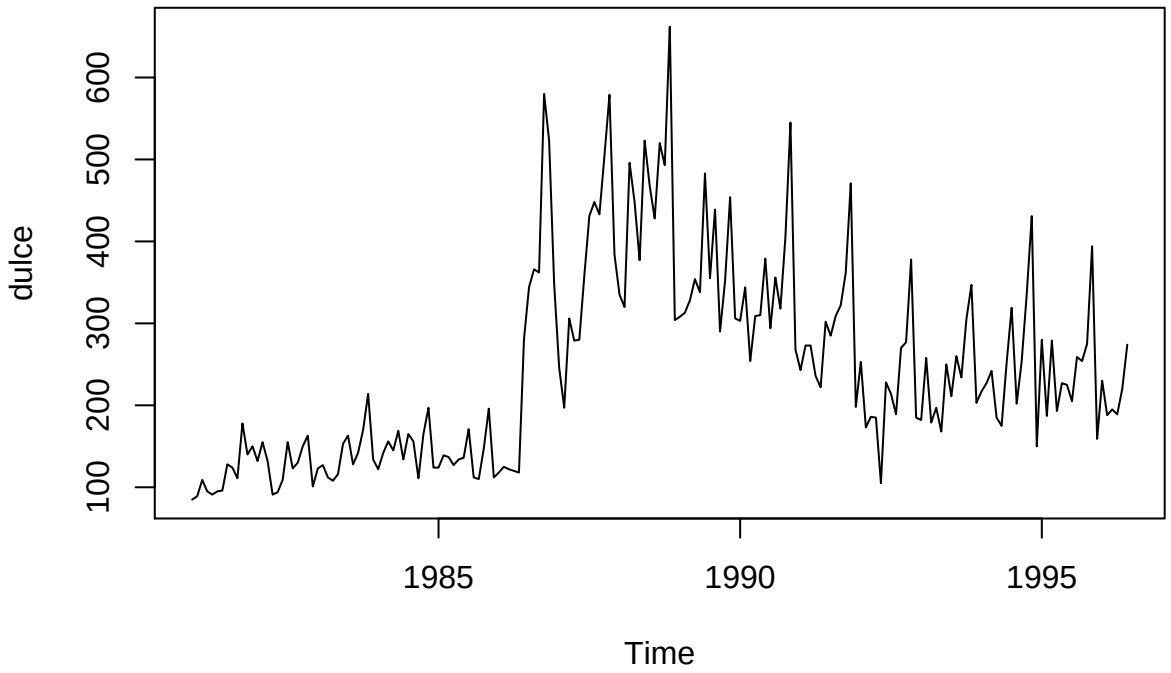
Ejemplo:

Los datos en el archivo `wine.dat` son ventas mensuales de vino australiano por categoría, en miles de litros, desde enero de 1980 hasta julio de 1995. Las categorías son blanco fortificado (`fortw`), blanco seco (`dryw`), blanco dulce (`sweetw`), rojo (`red`), rosa (`rose`) y espumoso (`spark`).

```
direccion<- "https://raw.githubusercontent.com/dallascard/Introductory_Time_Series_with_R_datasets/maste
wine<-read.csv(direccion,header=T,sep="")
attach(wine)
head(wine)
```

```
##   winet fortw dryw sweetw  red rose spark
## 1     1  2585 1954     85  464  112  1686
## 2     2  3368 2302     89  675  118  1591
## 3     3  3210 3054    109  703  129  2304
## 4     4  3111 2414     95  887   99  1712
## 5     5  3756 2226     91 1139  116  1471
## 6     6  4216 2725     95 1077  168  1377
```

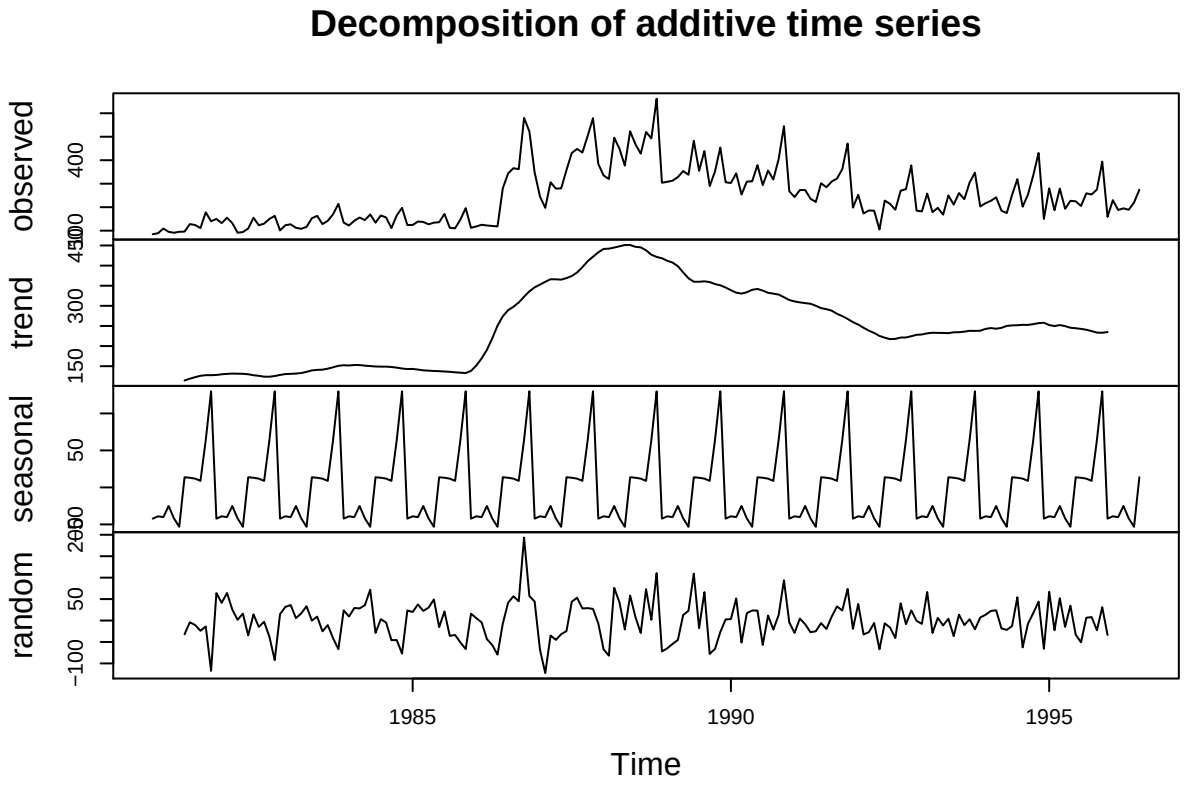
```
dulce <- ts(sweetw,start=c(1980,12), freq=12)
plot(dulce)
```



Tratemos la serie como un caso aditivo:

En funcion del grafico de la variable, se decide el "type" de la descomposicion La estacionalidad tiene valores negativos porque se plantea respecto de la tendencia

```
dulce.descompuesta<-decompose(dulce, type="additive")
plot(dulce.descompuesta)
```

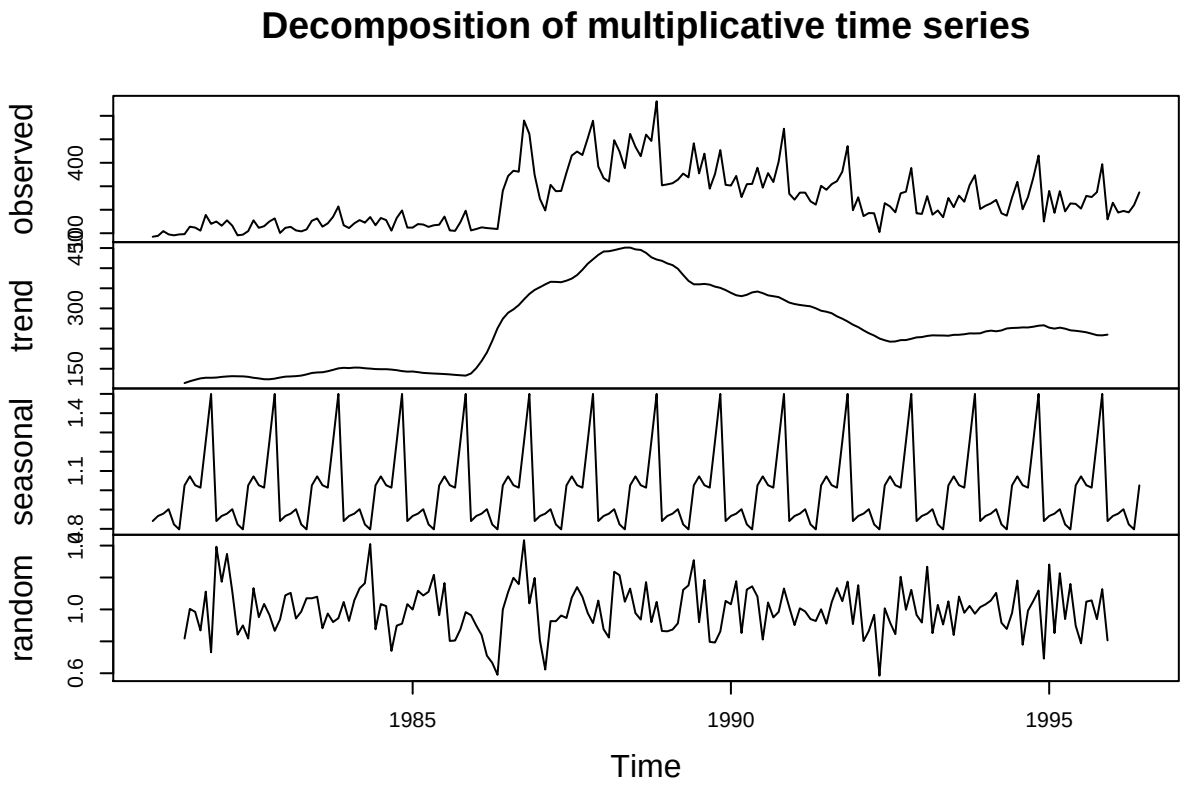


```
a<-dulce.descompuesta$trend[27] # La tendencia era de 130 en mayo del 82
b<-dulce.descompuesta$seasonal[27] # El componente de la estacionalidad era este
c<-dulce.descompuesta$random[27]  # Es el componente aleatorio

a+b+c # La sumatoria de la descomposicion de la serie da el valor real, si es aditiva
```

```
## [1] 127
```

Veamos el caso multiplicativo:

```
# Multiplicativa
dulce.descompuesta1<-decompose(dulce, type="multiplicative")
plot(dulce.descompuesta1)
```




```
a<-dulce.descompuesta1$trend[27] # La tendencia era de 130 en mayo del 82
b<-dulce.descompuesta1$seasonal[27] # El componente de la estacionalidad era este
c<-dulce.descompuesta1$random[27]  # Es el componente aleatorio

a*b*c # La sumatoria de la descomposicion de la serie da el valor real, si es aditiva
```

```
## [1] 127
```

Veamos la forma alternativa de elección:

```
u1<-var(dulce.descompuesta$random,na.rm=T)
u2<-var(dulce.descompuesta1$random,na.rm=T)
cbind(u1,u2)
```

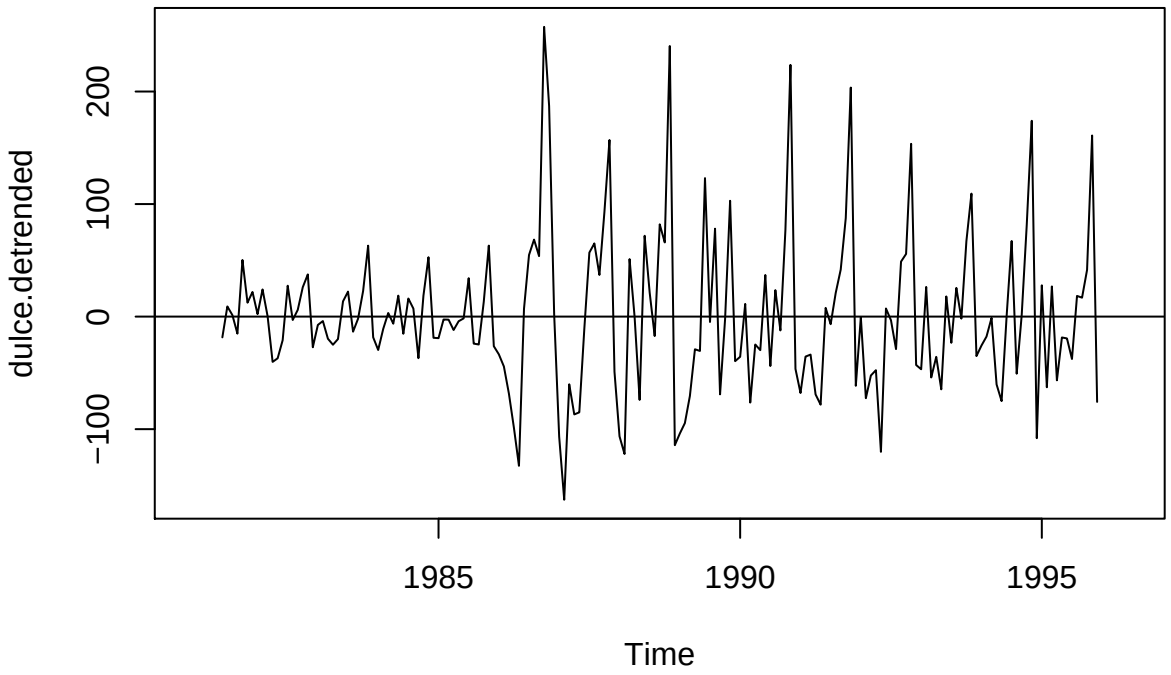
```
##            u1         u2
## [1,] 1970.235 0.02247602
```

Se escoge la multiplicativa en este caso.

Detrend:

Las series se ofrecen generalmente sin tendencia ni estacionalidad. Veamos la serie sin tendencia:

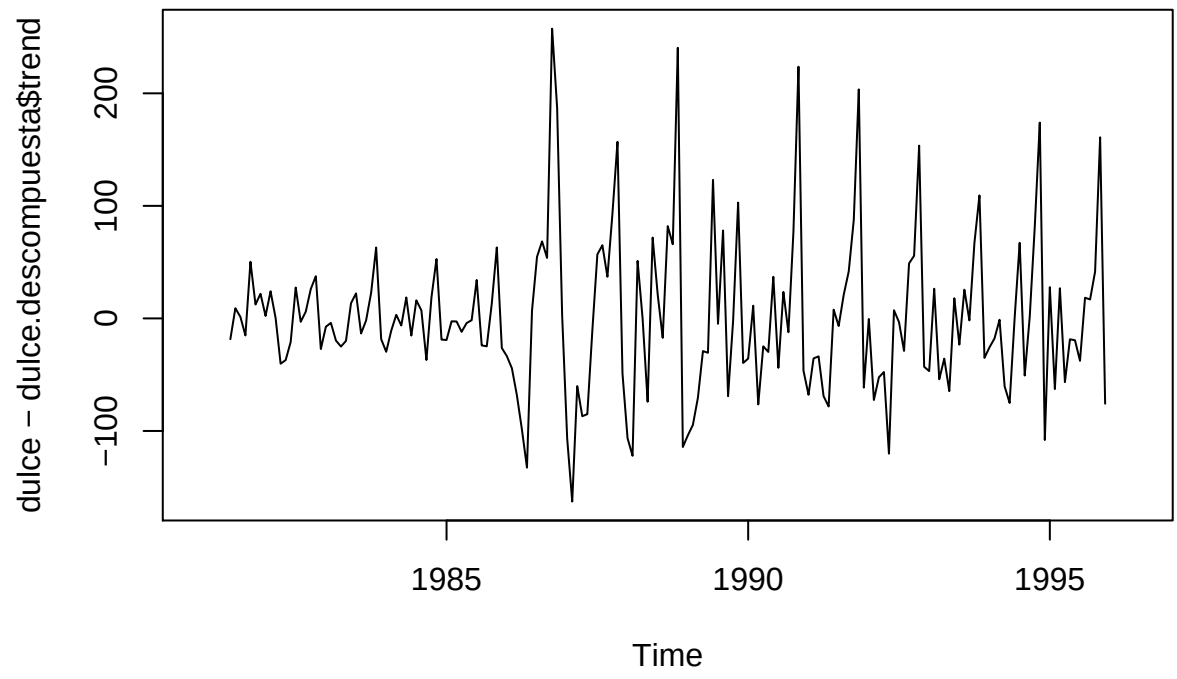
```
dulce.detrended <- dulce-dulce.descompuesta$trend
plot(dulce.detrended)
abline(h=0)
```



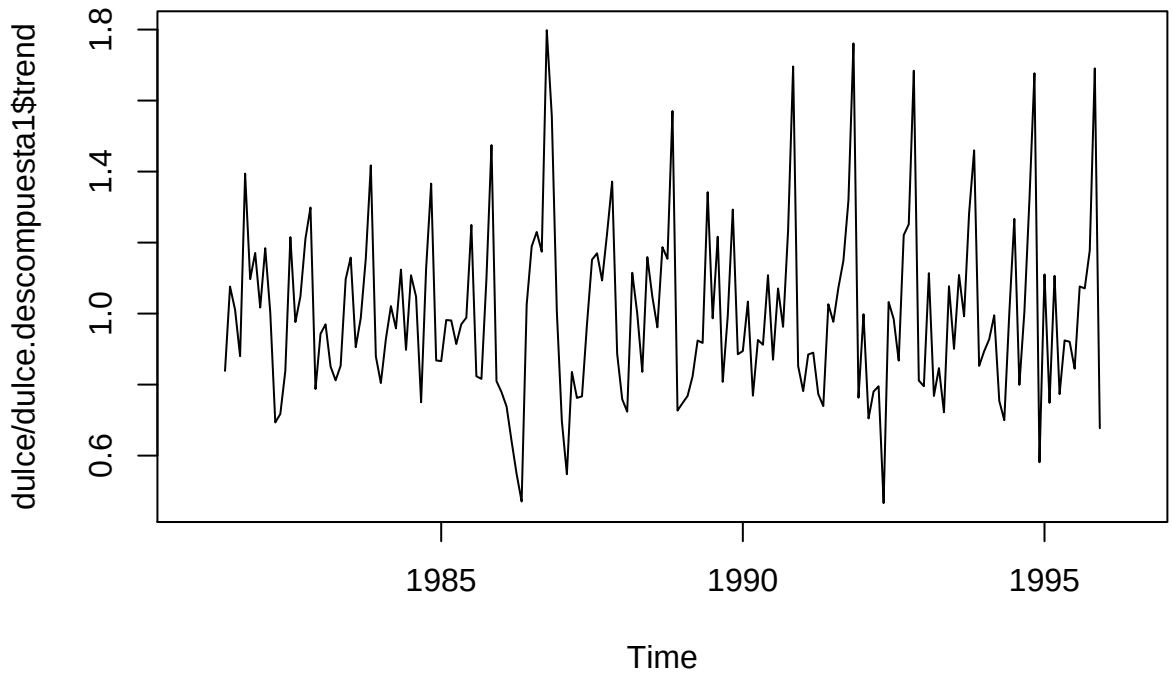
Parece ser que hay un cambio en la varianza desde el 85.

Si descomponemos multiplicativamente en vez de restar se debe dividir.

```
plot(dulce-dulce.descompuesta$trend)
```

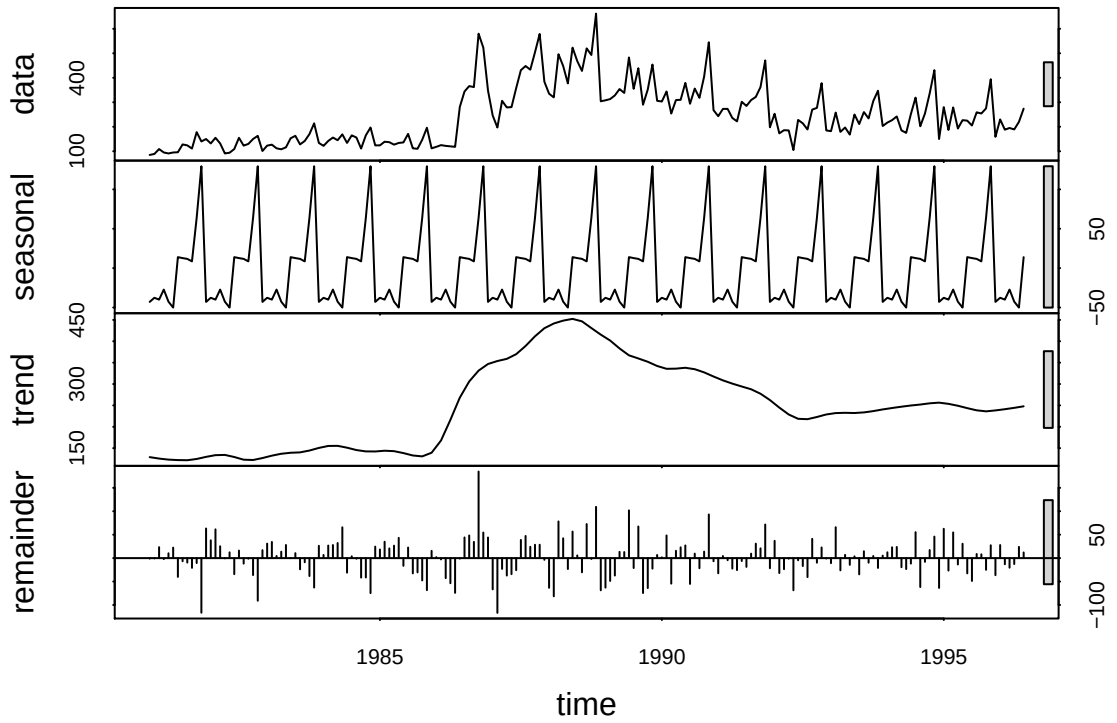


```
plot(dulce/dulce.descompuesta1$trend)
```



Existen formas de descomponer más sofisticadas, por ejemplo, usando la función `stl`.

```
dulce.stl<-stl(dulce,s.window="per")
plot(dulce.stl)
```



En este caso el calculo de la tendencia cambia, se calcula con formas no paramétricas. La barra del final es la desviacion estándar.

Suavizamiento: Holt-Winters

El método se resume en las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1} \\ s_t &= \gamma(x_t - a_t) + (1-\gamma)s_{t-p} \end{aligned}$$

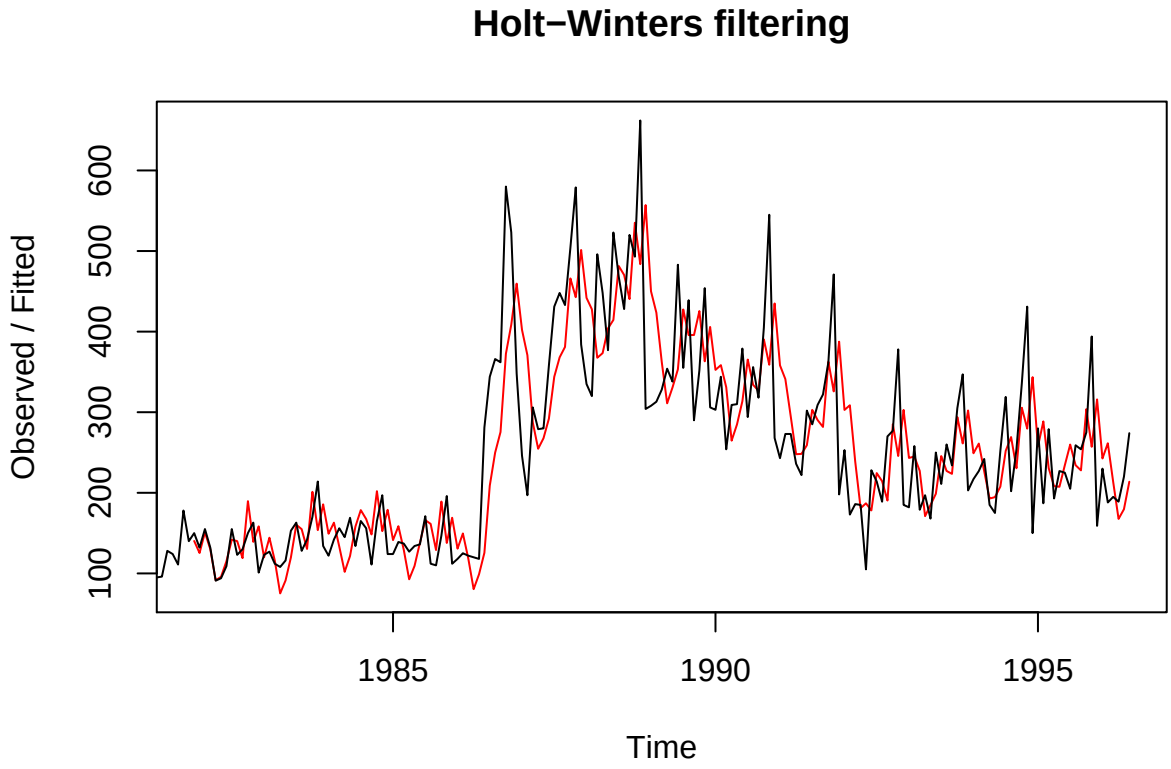
El método de Holt-Winters generaliza el método de suavizamiento exponencial.

Ejemplo

Veamos un modelo más sencillo:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_t + w_t \\ \mu_t = a_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)a_{t-1} \end{aligned}$$

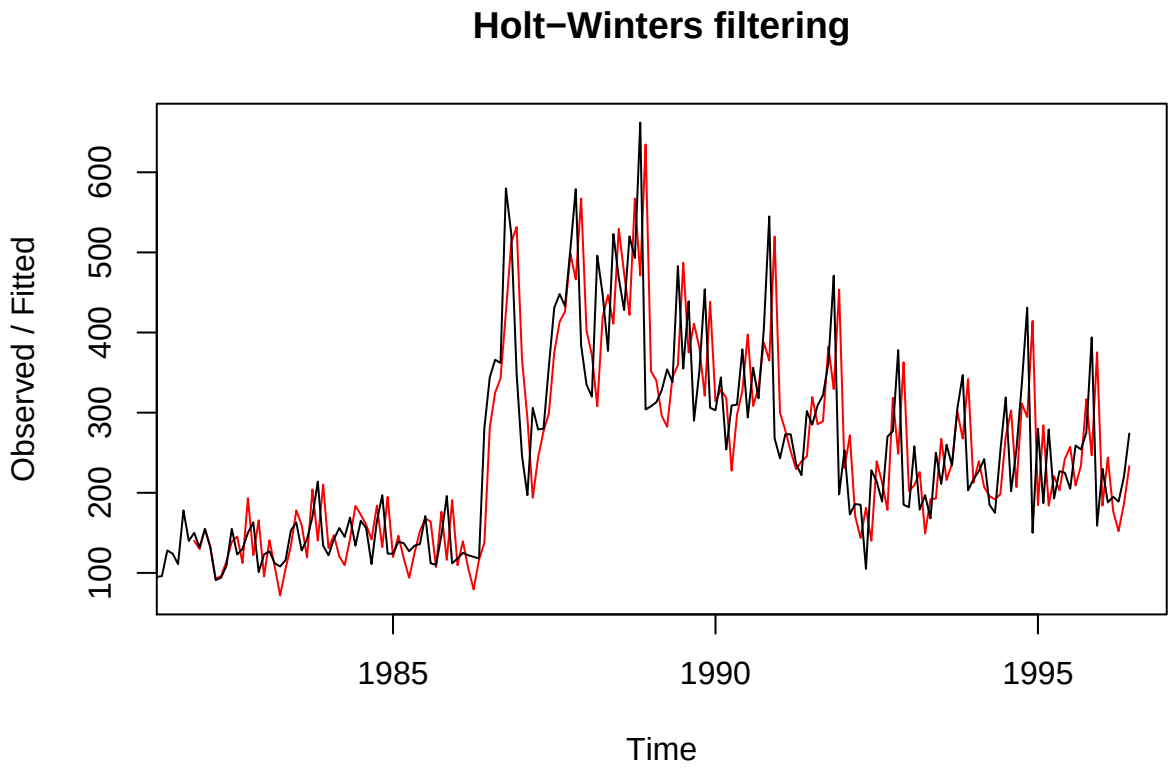
```
dulce.se <- HoltWinters(dulce,beta=0,gamma=0)
plot(dulce.se)
```



Es un suavizamiento HW sin tendencia y sin componente estacional. La serie roja son los datos con suavizamiento exponencial y la negra son los observados. R buscó el alpha que le pareció apropiado.

Usemos un alpha deliberado:

```
dulce.se1 <- HoltWinters(dulce,alpha=0.8,beta=0,gamma=0)
plot(dulce.se1)
```



¿Qué pasó con los errores?

```
dulce.se$SSE # Suma de los residuos al cuadrado (de un paso)
```

```
## [1] 963408.2
```

```
dulce.se1$SSE # Suma de los residuos al cuadrado (de un paso)
```

```
## [1] 1132577
```

Es decir, el criterio para la busqueda de los parámetros es la minimización del SSE.

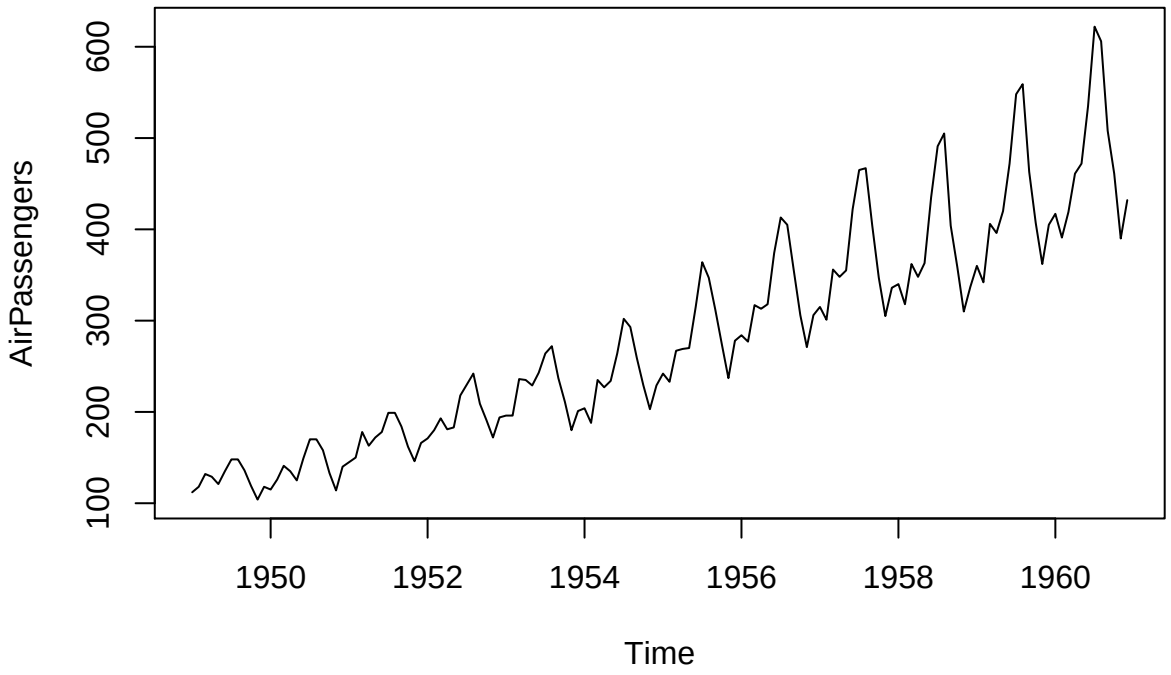
Ejemplo

Total mensual de pasajeros (en miles) de líneas aéreas internacionales, de 1949 a 1960.

```
data(AirPassengers)
str(AirPassengers)
```

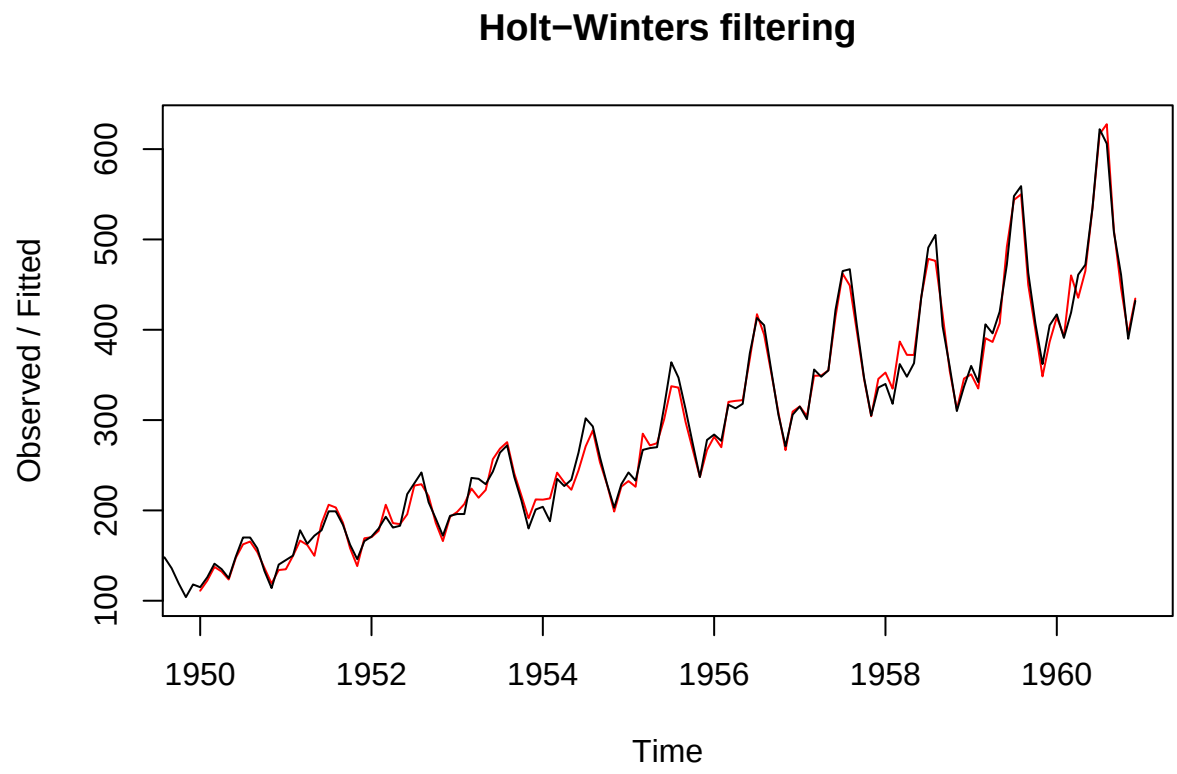
```
##  Time-Series [1:144] from 1949 to 1961: 112 118 132 129 121 135 148 148 136 119 ...
```

```
plot(AirPassengers)
```

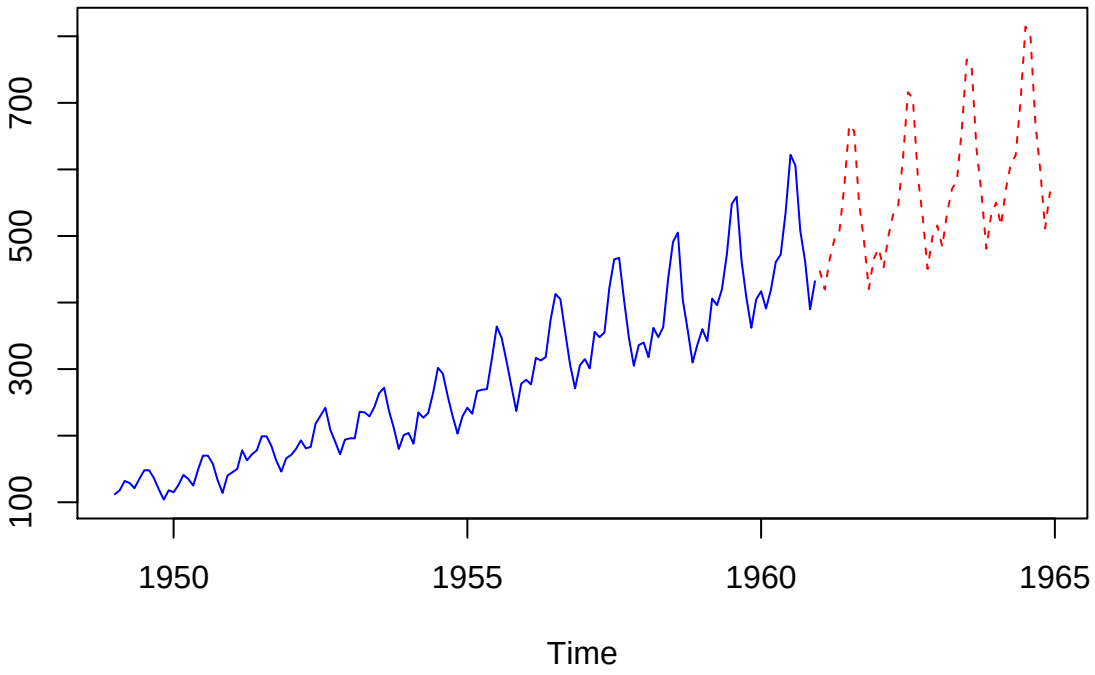


Se aprecia tendencia y variabilidad. Podemos usar HW para predicción:

```
ap.hw<- HoltWinters(AirPassengers,seasonal="mult")
plot(ap.hw)
```




```
ap.prediccion <- predict(ap.hw,n.ahead=48)
ts.plot(AirPassengers,ap.prediccion,lty=1:2,
col=c("blue","red"))
```



Modelos de series de tiempo

Ruido blanco

Una serie $(\epsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ se dice que es Ruido Blanco si cumple

- $E(\epsilon_t) = 0$ (media cero)
- $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$ (varianza constante)
- $\forall k \neq 0$, $Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) = 0$ (Incorrelación)

Si además cumple que $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ se dice que ϵ_t es Ruido Blanco Gaussiano (RBG).

```
n   <-200
mu  <- 0
sdt <- 3
w <- rnorm(n,mu,sdt)
```

¿Cómo se si algo tiene ruido blanco? : Analizo la función de autocorrelación muestral.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

donde

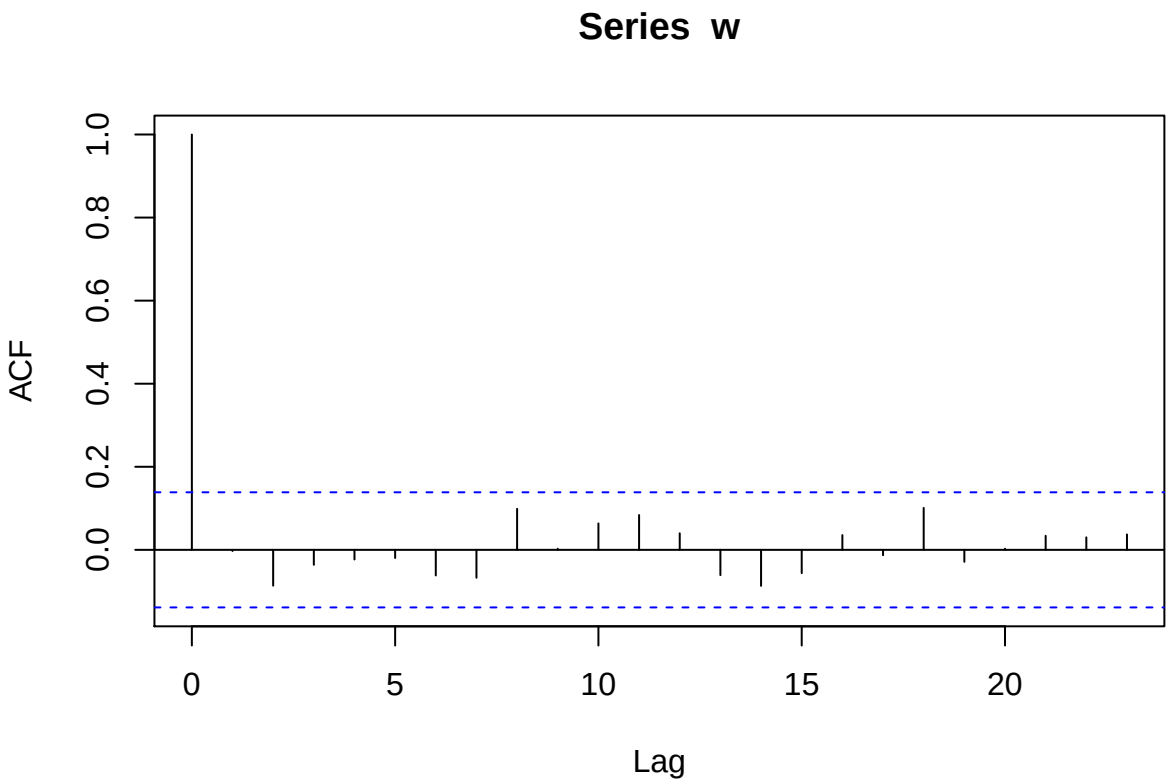
$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{n}$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{n}$$

Se asume que $\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/n)$. Es decir:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

```r
acf(w)
```



Si se sale de las franjas, si hay correlación y no hay ruido blanco

Serie estacionaria (en covarianza)

Una serie $(Y_t, t \in Z)$ se dice estacionaria en covarianza o simplemente estacionaria si cumple dos condiciones:

1. $E(Y_t) = \mu$
2. $Cov(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = R(t_2 - t_1)$ con R función par $(f(-x) = f(x))$

Es decir, la covarianza entre Y_{t_1} y Y_{t_2} depende únicamente de la distancia entre los tiempo t_2 y t_1, $|t_2 - t_1|$.

Procesos ARMA(p,q)

En los modelos de descomposición $Y_t = T_t + S_t + \epsilon_t$, $t = 1, 2, \ldots$ se estima $\hat{\epsilon}_t$ y se determina si es o no ruido blanco mediante, por ejemplo, las pruebas LjungBox y DurbinWatson.

En caso de encontrar que $\hat{\epsilon}_t$ no es ruido blanco, el siguiente paso es modelar esta componente mediante tres posibles modelos:

1. Medias Móviles de orden q, $MA(q)$.
2. Autoregresivos de orden q, $AR(p)$.
3. Medias Móviles Autoregresivos, $ARMA(p, q)$.

El modelo Autoregresivo AR(p)

Se dice que Y_n, $n \in \mathbb{Z}$ sigue un proceso $AR(p)$ de media cero si

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$ y $p = 1, 2, \ldots$. Usando el operador de rezago L se puede escribir como:

$$\phi_p(L)(Y_n) = \epsilon_n$$

con $\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$,el polinomio autorregresivo.

Condición Suficiente para que un $AR(p)$ sea Estacionario en Covarianza

La condición suficiente para que $Y_t \sim AR(p)$ sea estacionario en covarianza es que las p raíces de la ecuación $\phi_p(z) = 0$, z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ cumplan

$$|z_i| > 1.$$

En palabras, la condición se describe como *para que un proceso autorregresivo de orden p sea estacionario en covarianza, es suficiente que las raíces del polinomio autorregresivo estén por fuera del círculo unitario*

Si el proceso Y_t es estacionario en covarianza se cumple que su media es constante, $Y_t = \mu$

Propiedades

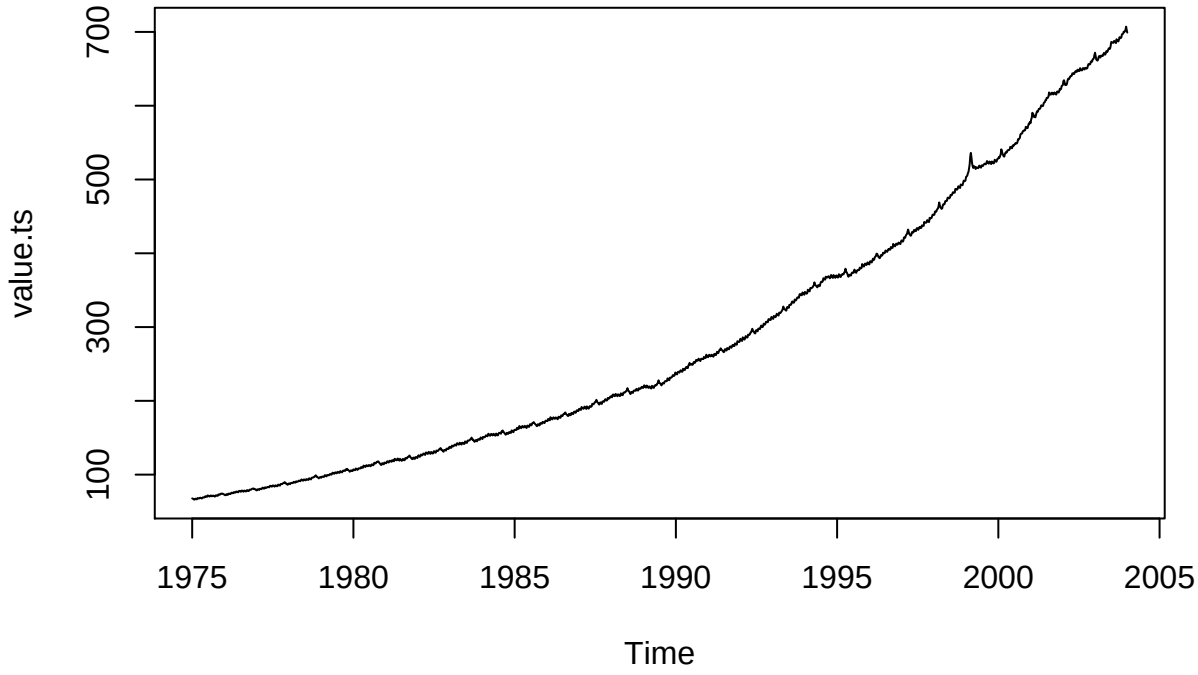
1. $E(Y_t) = 0$
2. $\sum_{j=1}^{p} \phi_j < 1$

Trabajaremos con datos de $M1$ (WCURRNS dinero en circuación fuera de los Estados Unidos) semanales de los Estados Unidos desde enero de 1975.

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/WCURRNS.csv"
datos <- read.csv(url(uu),header=T,sep=";")
names(datos)
```

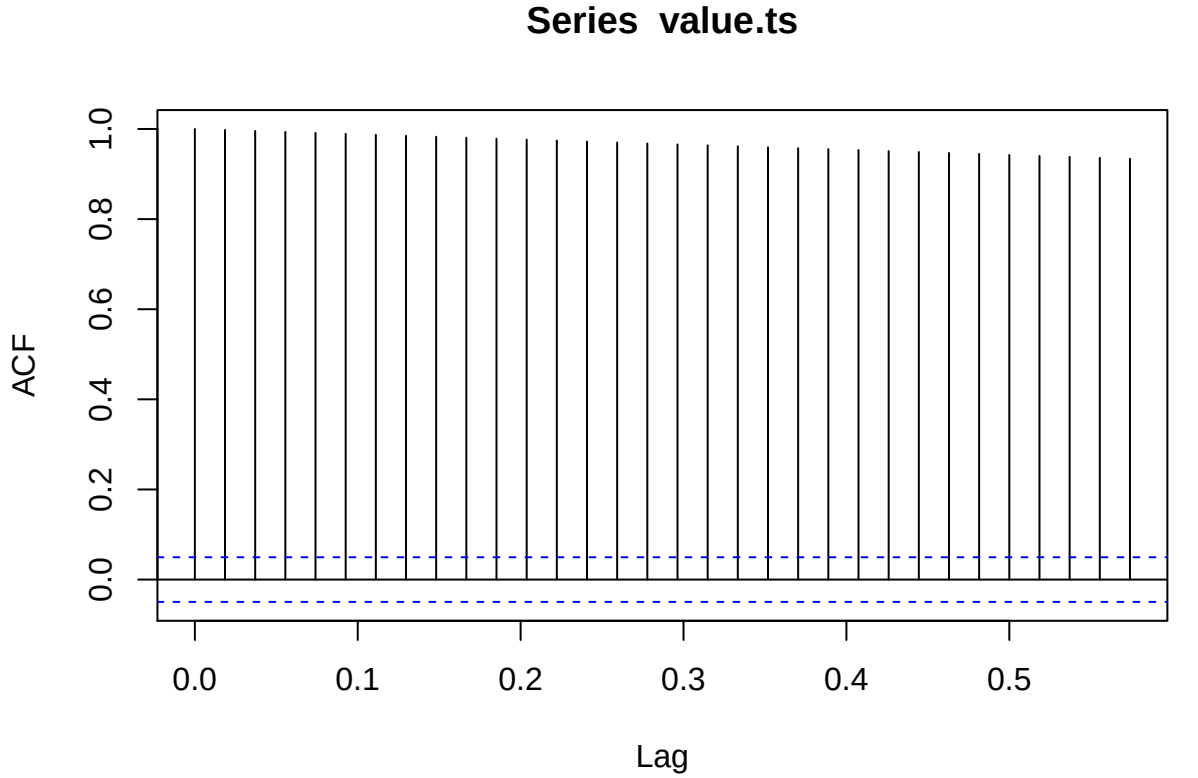
```
## [1] "DATE"  "VALUE"
```

```
attach(datos)
value.ts <- ts(VALUE, start=c(1975,1),freq=54)
ts.plot(value.ts)
```



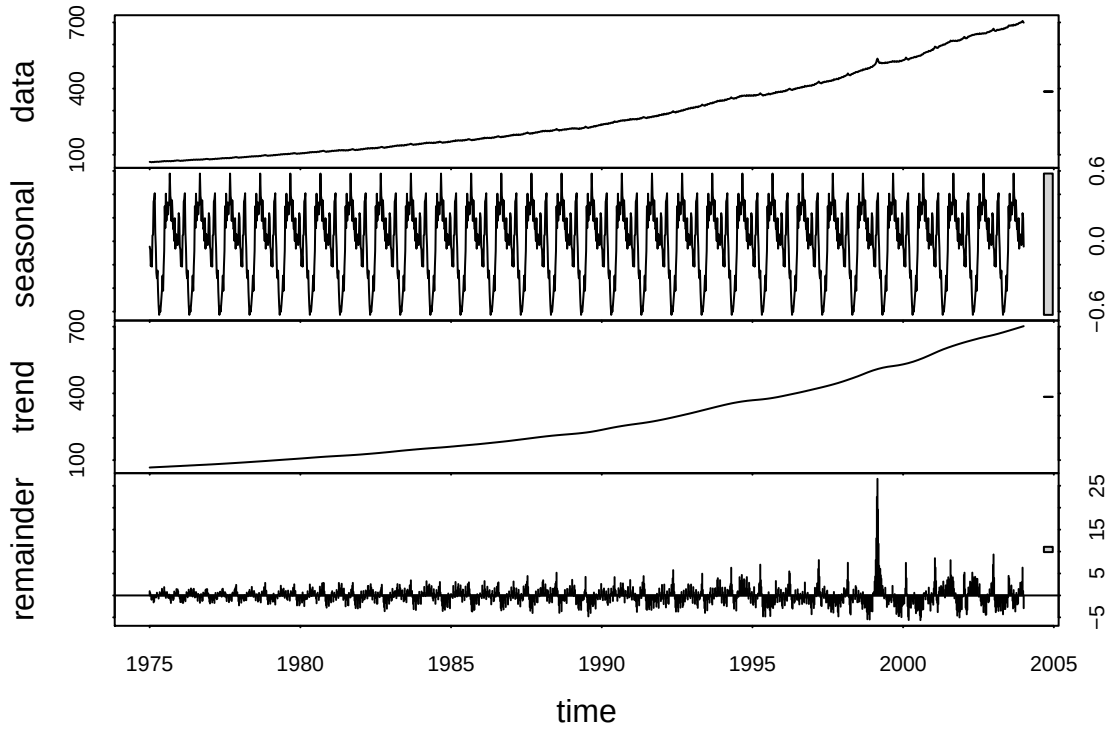
Estacionariedad: La serie es estacionaria si la varianza no cambia

```
acf(value.ts)
```



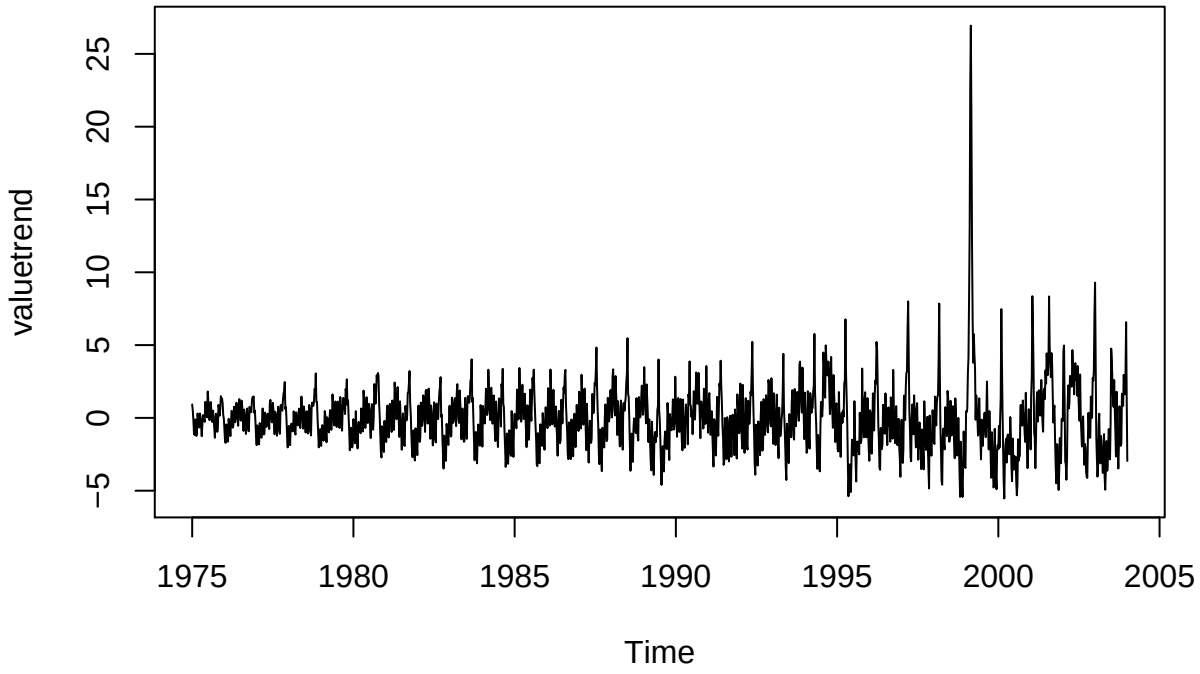
Esta es la marca de una serie que NO es estacionaria, dado que la autocorrelación decrece muy lentamente.

```r
plot(stl(value.ts,s.window="per"))
```



Una forma de trabajar con una serie esacionaria es quitarle el *trend*

```r
valuetrend<- value.ts- stl(value.ts,s.window="per")$time.series[,2]
plot(valuetrend)
```

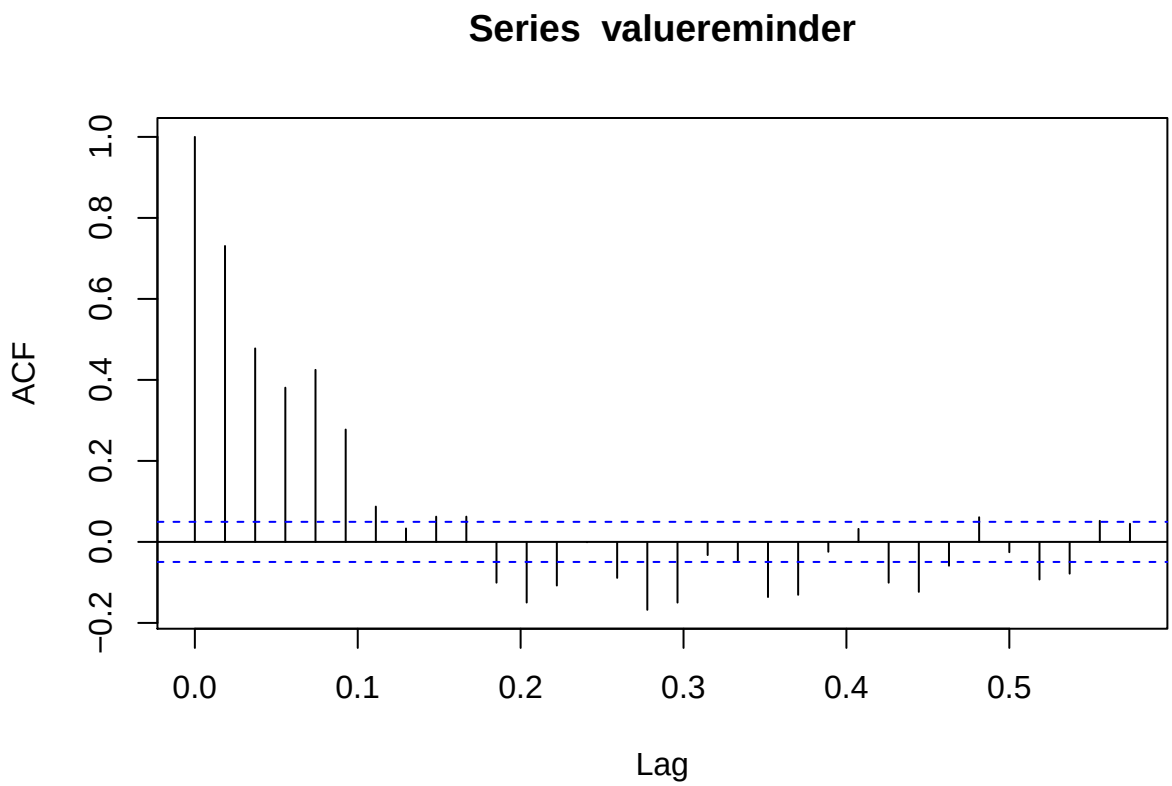


Reminder es lo que queda sin tendencia ni estacionalidad

```
valuereminder<-
stl(value.ts,s.window="per")$time.series[,3]
```

Veamos cómo quedo la serie:

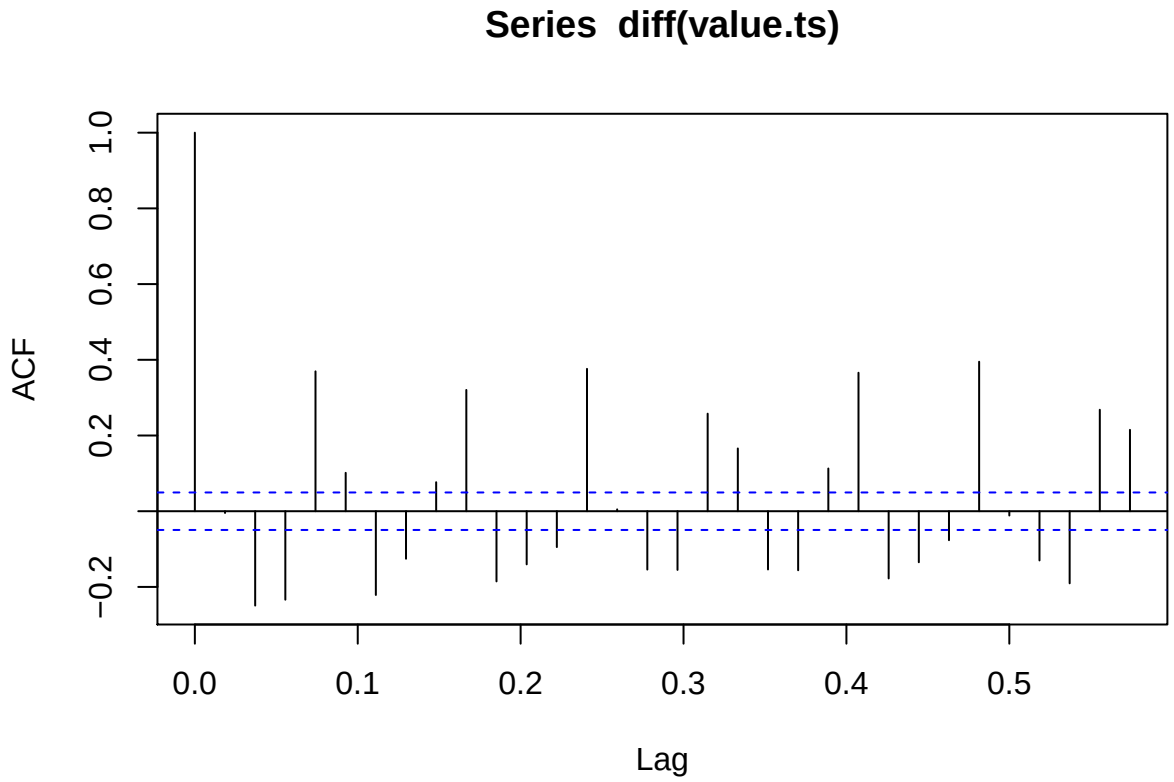
```
acf(valuereminder)
```



Se puede decir que la hicimos una serie estacionaria

Otra forma de hacer estacionaria una serie es trabajar con las diferencias

```
acf(diff(value.ts))
```

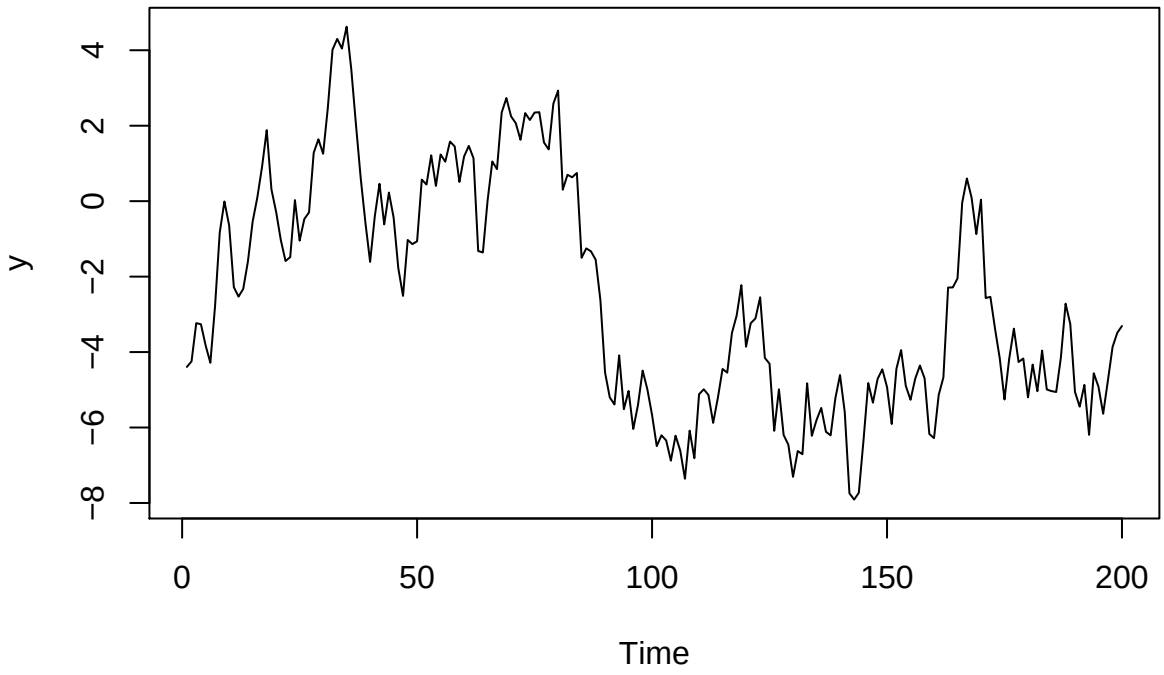


Nos indica que hay una estructura en la serie que no es ruido blanco pero SI estacionaria (cae de 1 a "casi"" cero)

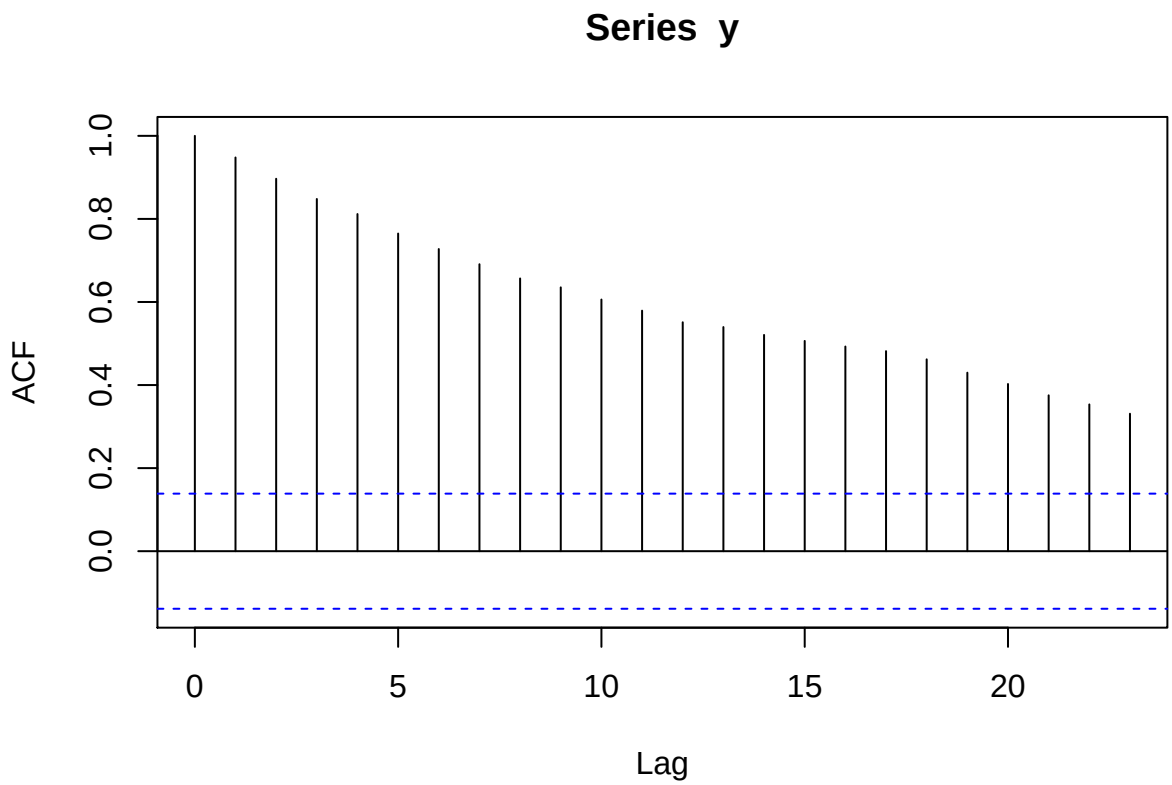
Simulación:

El siguiente paso es modelar esta estructura. Un modelo para ello es un modelo autorregresivo. Simular un $AR(1)$.

```
y <- arima.sim(list(ar=c(0.99),sd=1),n=200)
plot(y)
```



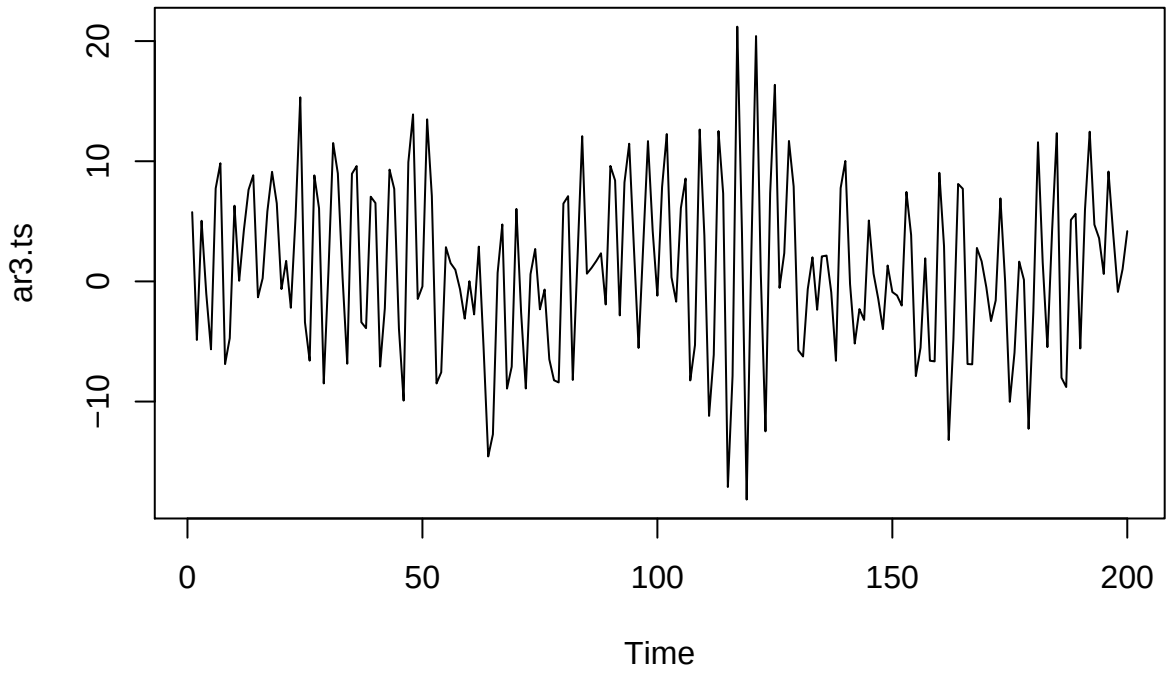

```
acf(y)
```



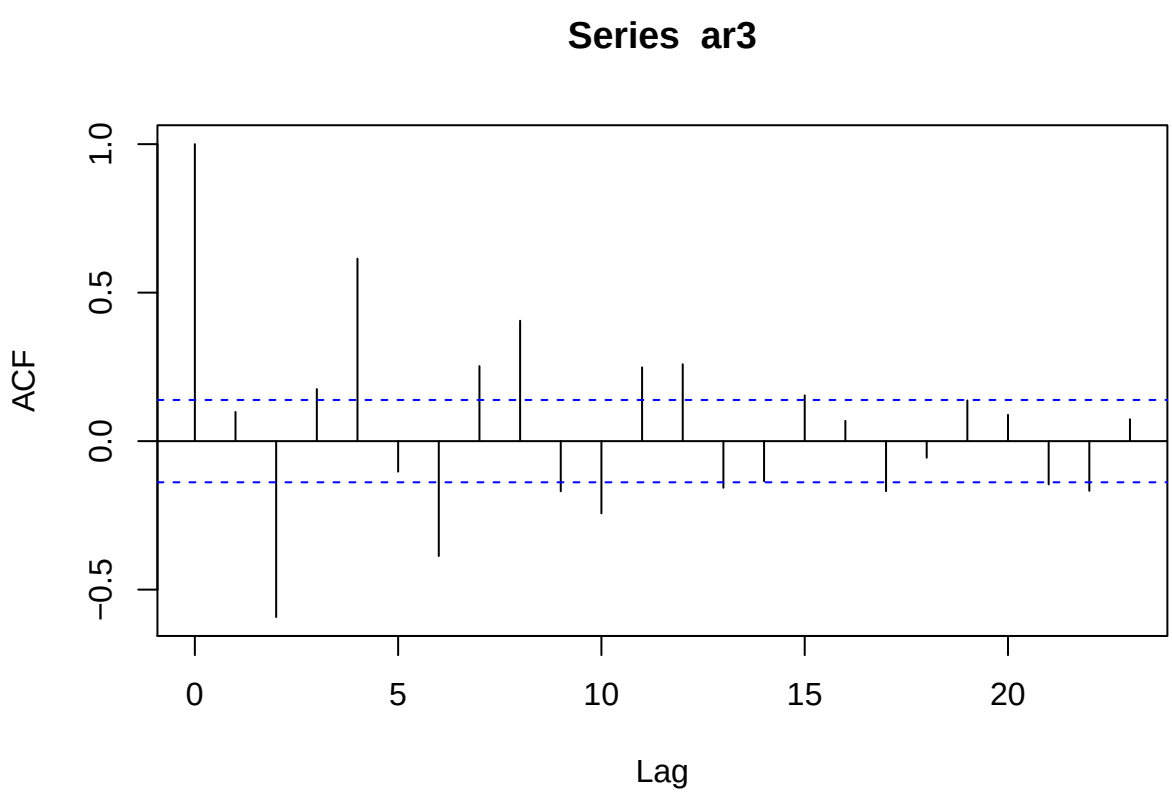
¿Cuáles son los parámetros del `arima.sim`? Hemos simulado $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} = \phi_0 + 0.99 Y_{t-1}$.

Simulemos el modelo: $Y_t = 0.5Y_{t-1} - 0.7Y_{t-2} + 0.6Y_{t-3}$

```
ar3 <- arima.sim(n=200,list(ar=c(0.5,-0.7,0.6)),sd=5)
ar3.ts = ts(ar3)
plot(ar3.ts)
```




```
acf(ar3)
```



Las autocorrelaciones decaen exponencialemente a cero

Autocorrelaciones parciales: nos ayunda a determinar el orden del modelo.

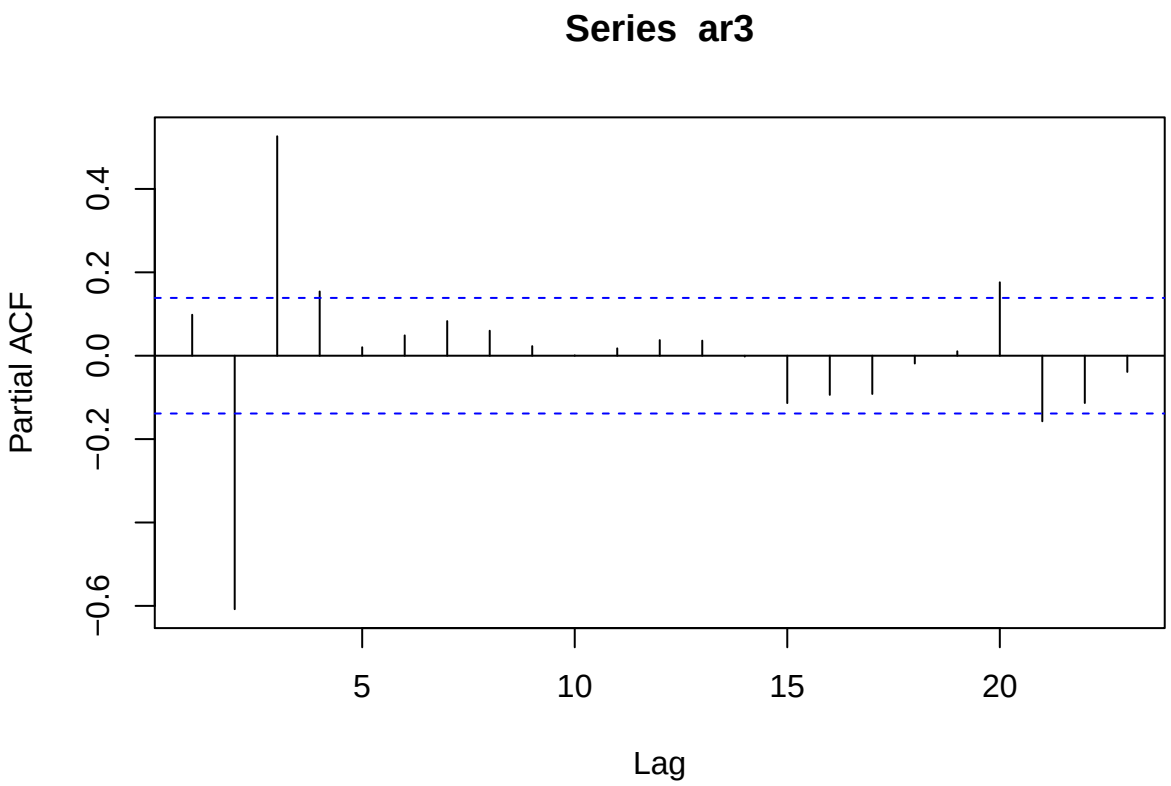
La autocorrelación parcial es la correlación entre Y_t y Y_{t-k} después de eliminar el efecto de las Y intermedias.

Definición Suponga que $(Y_t, t \in Z)$ es estacionaria. La pacf muestral es una función de k,

1. $\hat{\alpha}(1) = \hat{\rho}(1)$
2. $\hat{\alpha}(2)$: se regresa Y_t sobre Y_{t-1} y Y_{t-2} tal que $Y_t = \phi_{21}Y_{t-1} + \phi_{22}Y_{t-2} + \epsilon_t$ entonces $\hat{\alpha}(2) = \phi_{22}$
3. $\hat{\alpha}(k)$: se regresa Y_t sobre $Y_{t-1} \dots Y_{t-k}$ tal que $Y_t = \phi_{k1}Y_{t-1} + \dots + \phi_{kk}Y_{t-2} + \epsilon_t$ entonces $\hat{\alpha}(k) = \phi_{kk}$

En los datos de series de tiempo, una gran proporción de la correlación entre Y_t y Y_{t-k} puede deberse a sus correlaciones con los rezagos intermedios $Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-k+1}$. La correlación parcial elimina la influencia de estas variables intermedias.

```
pacf(ar3)
```




```
ar(ar3)$aic
```

```
##          0          1          2          3          4          5
## 155.886964 155.947373  65.677128   2.804592   0.000000   1.917522
##          6          7          8          9         10         11
##   3.441499   4.057962   5.338168   7.232556   9.232428  11.170264
##         12         13         14         15         16         17
##  12.889550  14.627866  16.627076  16.031180  16.261379  16.572490
##         18         19         20         21         22         23
##  18.502683  20.480045  16.178318  13.171431  12.583456  14.281410
```

La tercera autocorrelación es la que esta fuera de las bandas, esto indica que el modelo es un AR(3)

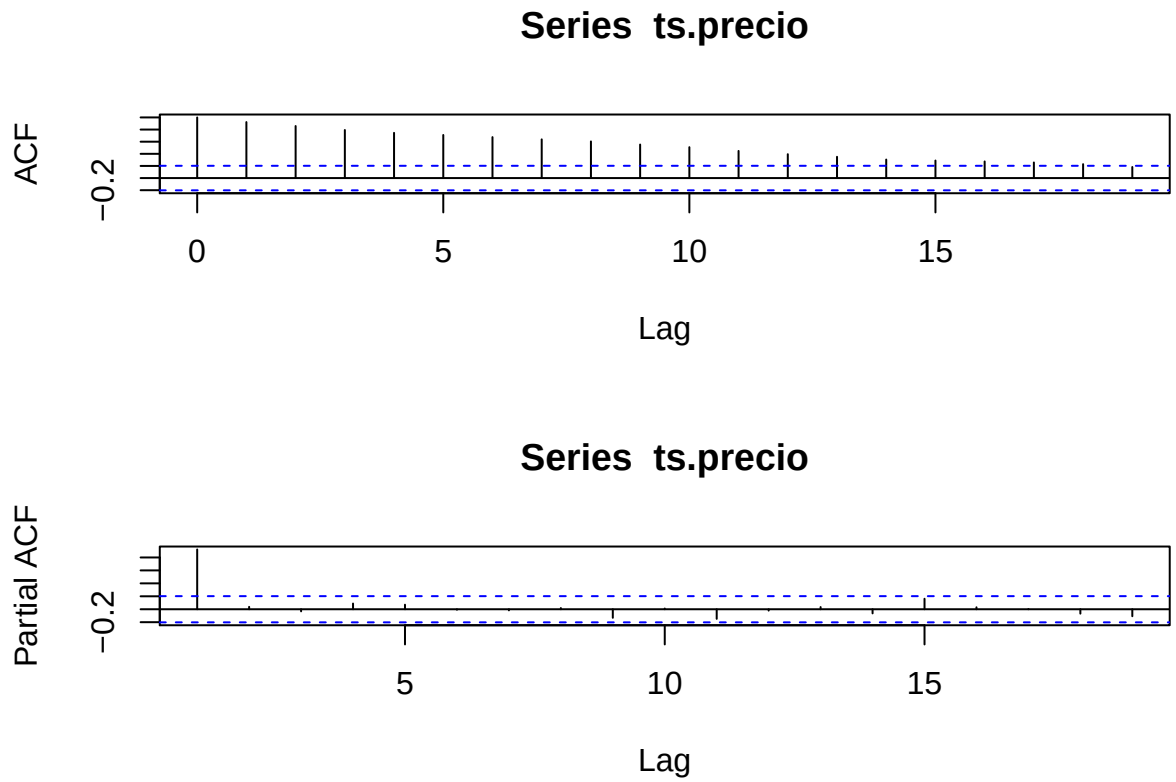
Ejemplo

Datos: precio de huevos desde 1901

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/PrecioHuevos.csv"
datos <- read.csv(url(uu),header=T,sep=";")
ts.precio <- ts(datos$precio,start=1901)
plot(ts.precio)
```

Veamos las autocorrelaciones:

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(ts.precio)
pacf(ts.precio)
```




```
par(mfrow=c(1,1))
```

Las auto si decaen, no lo hacen tan rápido. No se puede decir si es estacionario o no.

Evaluemos un modelo:

```
modelo1 <- arima(ts.precio, order=c(1,0,0))
print(modelo1)
```

```
##
## Call:
## arima(x = ts.precio, order = c(1, 0, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1  intercept
##       0.9517   195.5066
## s.e.  0.0310    48.1190
##
## sigma^2 estimated as 712.3:  log likelihood = -443.28,  aic = 892.56
```

```
modelo1$var.coef
```

```
##                      ar1    intercept
## ar1        0.0009588394   -0.1532017
## intercept -0.1532017342 2315.4371739
```

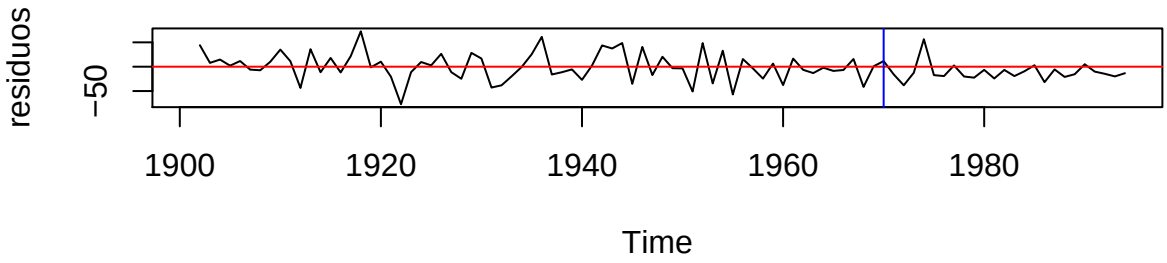
¿Qué nos recomienda R?

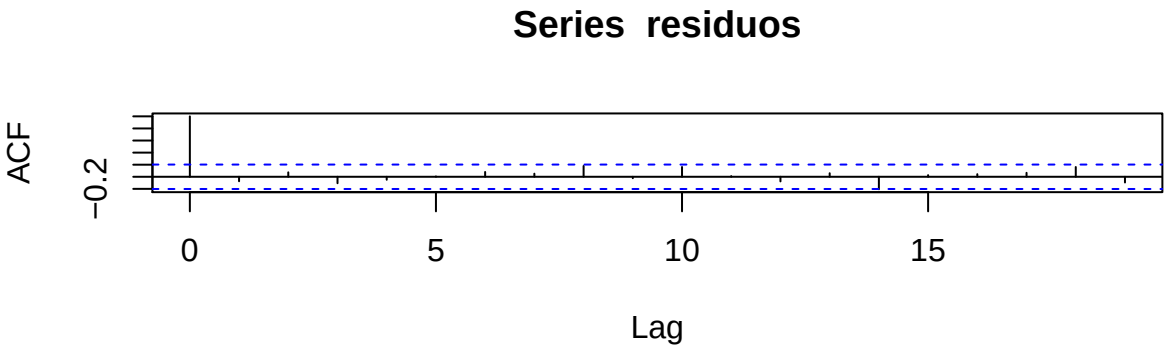
```
ar.precio <- ar(ts.precio)
ar.precio
```

```
##
## Call:
## ar(x = ts.precio)
##
## Coefficients:
##      1
## 0.9237
##
## Order selected 1  sigma^2 estimated as  975.9
```

Analicemos los residuos

```
residuos = ar.precio$resid
# Los residuos debe estar sin ninguna estructura
par(mfrow = c(2,1))
plot(residuos)
abline(h=0,col="red")
abline(v=1970,col="blue")
acf(residuos,na.action=na.pass)
```





Prueba de Ljung-Box

La prueba de Ljung-Box se puede definir de la siguiente manera.

H_0: Los datos se distribuyen de forma independiente (es decir, las correlaciones en la población de la que se toma la muestra son 0, de modo que cualquier correlación observada en los datos es el resultado de la aleatoriedad del proceso de muestreo).

H_a: Los datos no se distribuyen de forma independiente.

La estadística de prueba es:

$$Q = n\,(n+2)\sum_{k=1}^{h}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

donde n es el tamaño de la muestra, $\hat{\rho}_k$ es la autocorrelación de la muestra en el retraso k y h es el número de retardos que se están probando. Por nivel de significación α, la región crítica para el rechazo de la hipótesis de aleatoriedad es

$$Q > \chi^2_{1-\alpha,h}$$

donde $\chi^2_{1-\alpha,h}$ es la α-cuantil de la distribución chi-cuadrado con m grados de libertad.

La prueba de Ljung-Box se utiliza comúnmente en autorregresivo integrado de media móvil de modelado (ARIMA). Tenga en cuenta que se aplica a los residuos de un modelo ARIMA equipada, no en la serie original, y en tales aplicaciones, la hipótesis de hecho objeto del ensayo es que los residuos del modelo ARIMA no tienen autocorrelación. Al probar los residuales de un modelo ARIMA estimado, los grados de libertad deben ser ajustados para reflejar la estimación de parámetros. Por ejemplo, para un modelo $ARIMA(p,0,q)$, los grados de libertad se debe establecer en $h-p-q$.

```
Box.test(residuos,lag=20,type="Ljung")
```

```
##
##  Box-Ljung test
```

```
##
## data:  residuos
## X-squared = 20.526, df = 20, p-value = 0.4255
```

Ho: Ruido Blanco ¿Es ruido blanco?

Probemos un segundo modelo

```
modelo2 <- arima(ts.precio, order=c(2,0,0))
print(modelo2)
```

```
##
## Call:
## arima(x = ts.precio, order = c(2, 0, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1     ar2  intercept
##       0.8456  0.1134   193.5287
## s.e.  0.1026  0.1046    53.9009
##
## sigma^2 estimated as 703:  log likelihood = -442.7,  aic = 893.4
```

Comparemos los resultados:

```
ar2.precio <- ar(ts.precio,FALSE,2)
ar2.precio$aic
```

```
##          0          1          2
## 178.338243   0.000000   1.869475
```

```
modelo2$aic
```

```
## [1] 893.401
```

```
modelo1$aic
```

```
## [1] 892.563
```

Se escoge el modelo de menor AIC.

Proceso de Medias Móviles (MA)

Recordemos el polinomio de rezagos:

$$B_p(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + + \beta_p L^p$$

combinados con una serie de tiempo:

$$B_p(L)(Y_t) = (\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + + \beta_p L^p)(Y_t)$$

$$B_p(L)(Y_t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j L^j Y_t$$

$$B_p(L)(Y_t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j L^j Y_t$$

Definición

Se dice que una serie Y_t sigue un proceso $MA(q)$, $q = 1, 2, \ldots$ de media móvil de orden q, si se cumple que

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

para constantes $\theta_1, \ldots, \theta_p$ y $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. La expresión con el operador L es, si se define el polinomio.

$$\theta_p(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$$

entonces la ecuación queda $Y_t = \theta_q(L)(\epsilon_t)$

Propiedades

1. $E(Y_t) = 0$
2. $Var(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$

luego $Var(Y_t) > Var(\epsilon_t)$, en general. 3. $Cov(Y_t, Y_{t+k}) = R(k)$, donde

$$R(K) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}$$

donde $\theta_0 = 1$ y $k < q + 1$. $R(K) = 0$ si $k \geq q + 1$.

4. Un $MA(q)$ siempre es un proceso estacionario con ACF, $p(k) = \frac{R(k)}{R(0)}$

La ecuación () se puede interpretar como una indicación de que un $MA(q)$ es un proceso d´ebilmente correlacionado, ya que su autocovarianza es cero a partir de un valor. Por esta razón se puede ver los procesos $MA(q)$ como alternativas al Ruido Blanco completamente incorrelacionado.

Ejemplo

Sea $Y_t \sim MA(2)$ dado por:

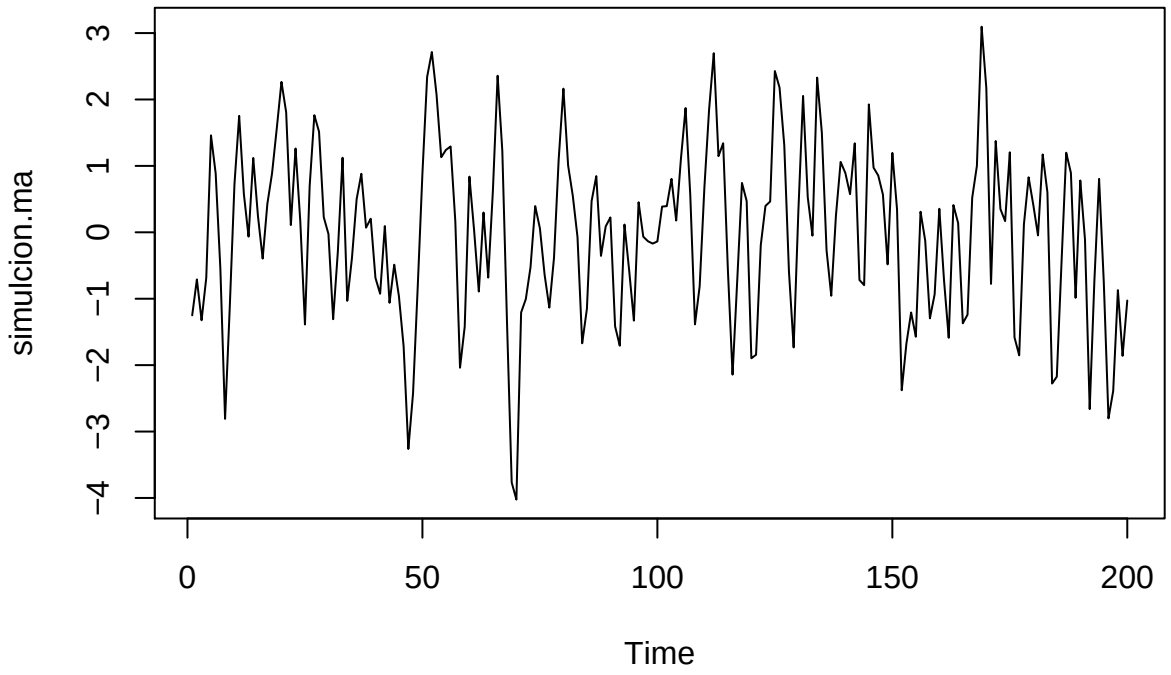
$$y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

donde $\epsilon_t \sim N(0, 9)$, con $\theta_1 = -0.4$,$\theta_2 = 0.4$.

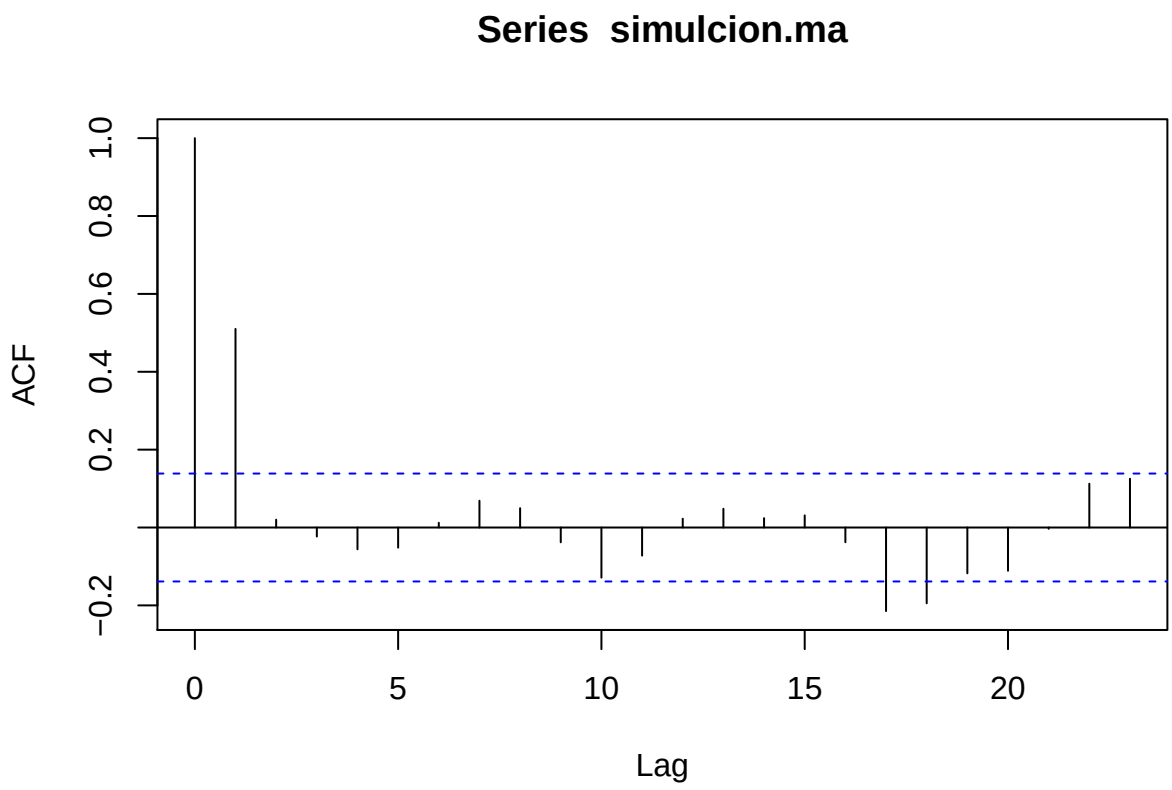
De acuerdo con (), si la fac muestral de una serie Yt termina abruptamente puede tratarse de un $MA(q)$.

Simulemos un modelo:

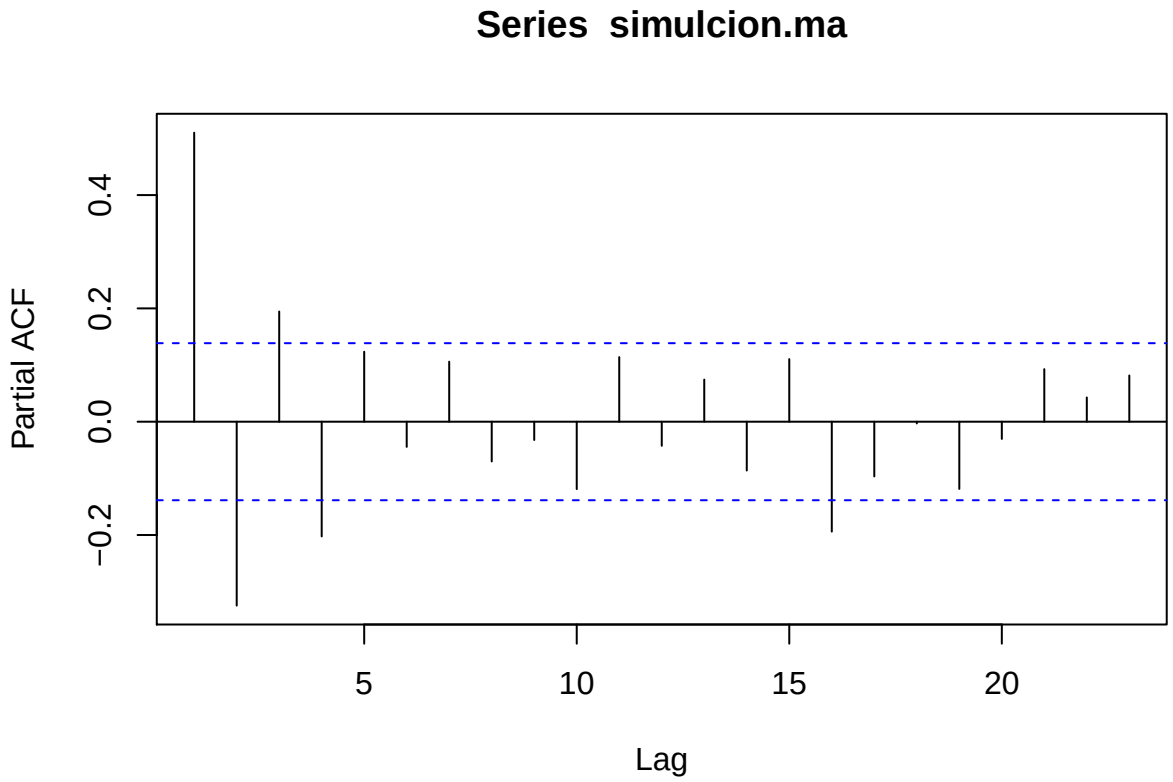
```
simulcion.ma <- arima.sim(200,model=list(ma=c(0.8)))
plot(simulcion.ma)
```




```
acf(simulcion.ma)
```



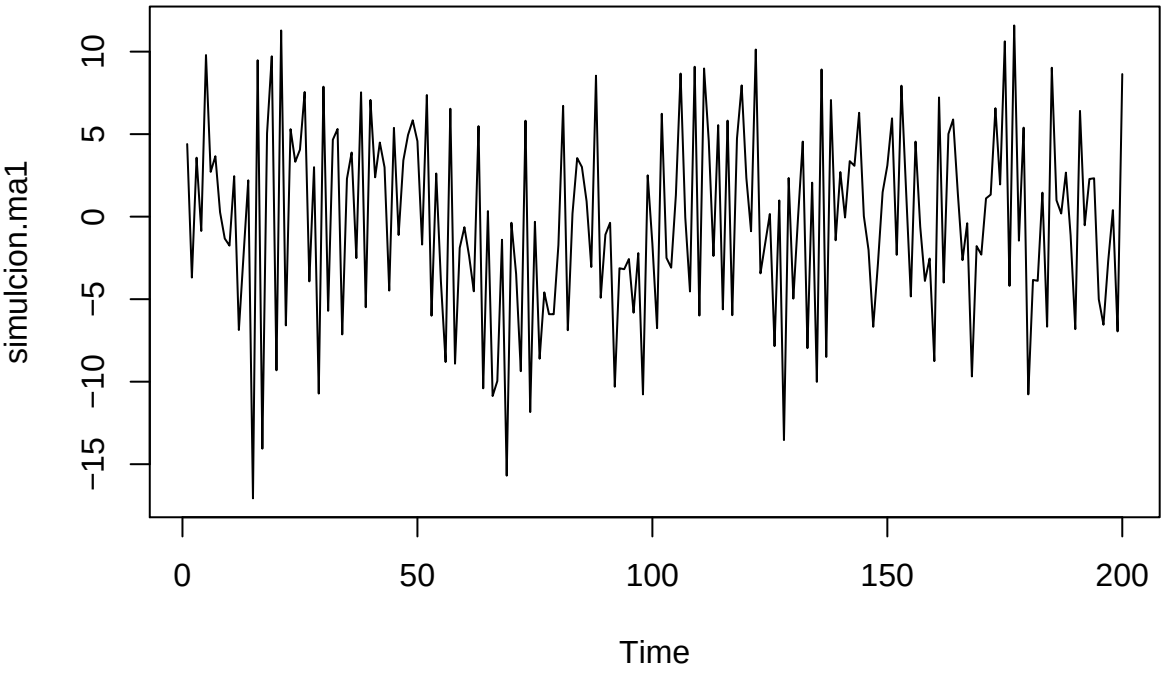

```
pacf(simulcion.ma)
```



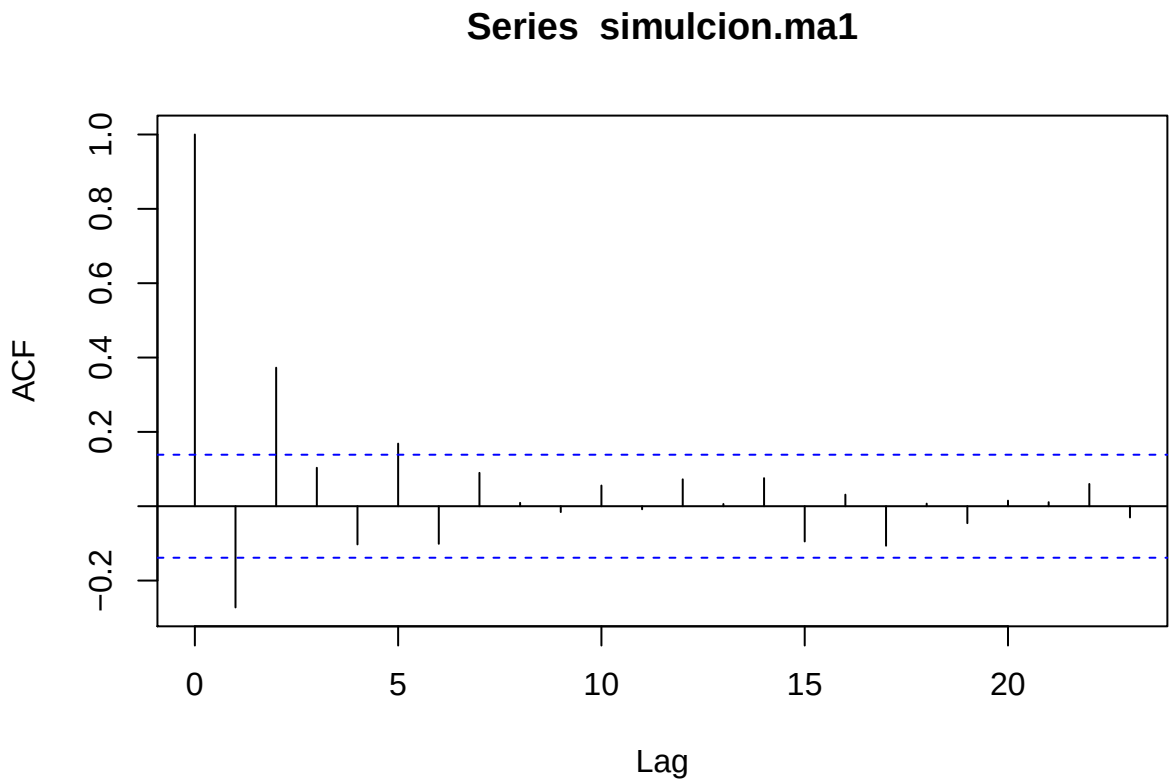
- Las p primeras autocorrelaciones van a ser diferentes de cero
- La autocorrelación parcial decae exponencialmente

Veamos otro ejemplo

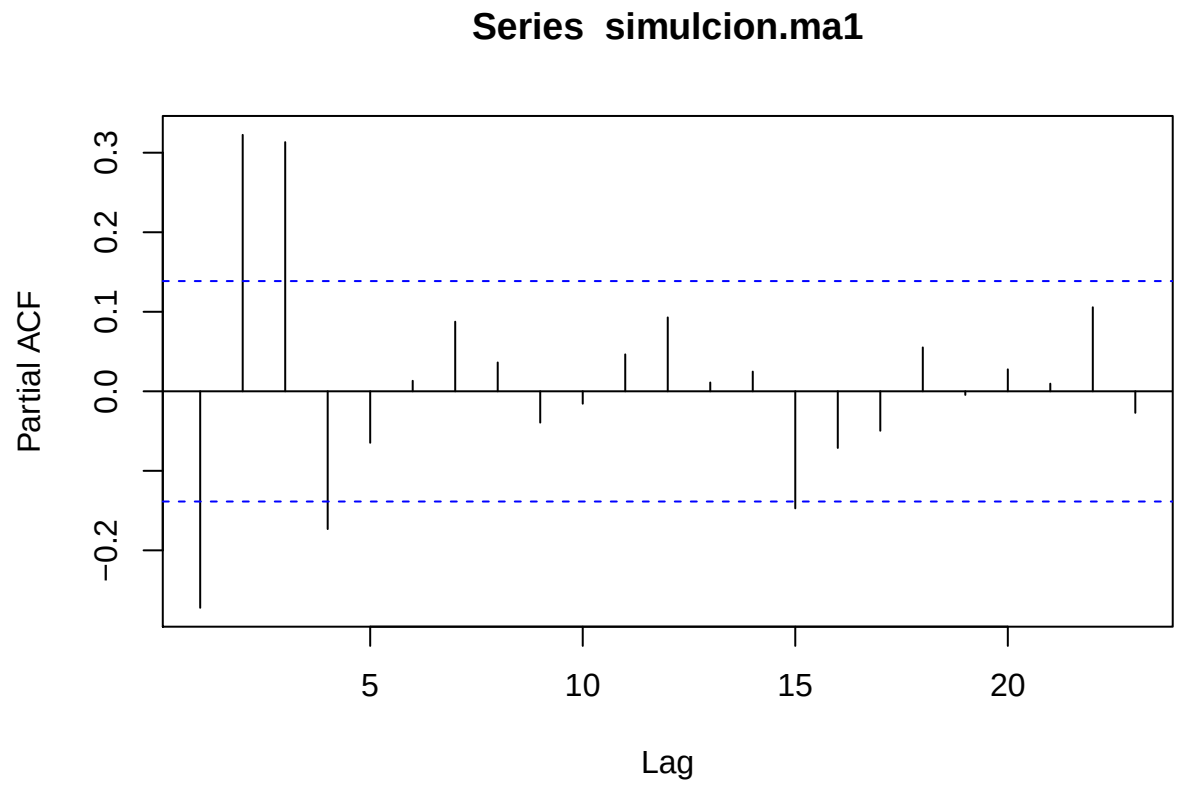
```
simulcion.ma1 <- arima.sim(200, model =list(ma=c(2.1,-0.9,4.7)))
plot(simulcion.ma1)
```



```
acf(simulcion.ma1)
```




```
pacf(simulcion.ma1)
```



Proceso ARMA

Definición

Un proceso $Yt \sim ARMA(p,q)$ se define mediante

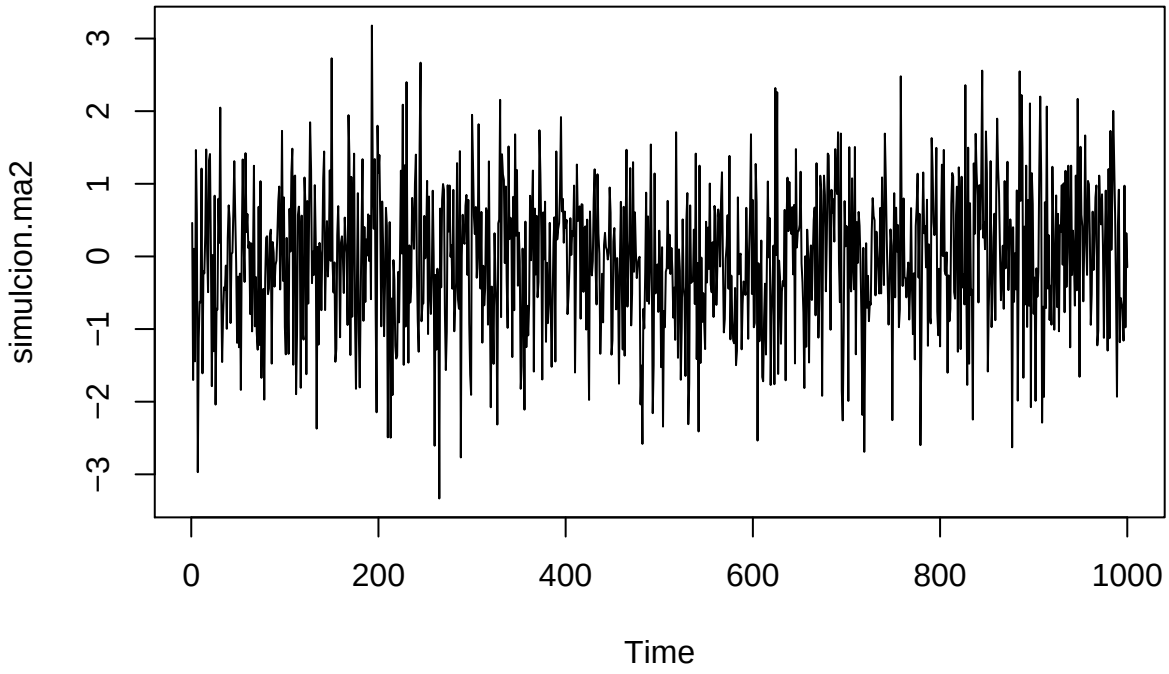
$$\phi_p(L)(Y_t) = \theta_q(L)\epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim RB(0,\sigma^2)$ y $\phi_p(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j z^j$, $\theta_q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j z^j$ son los polinomios autoregresivo y de media móvil respectivamente.

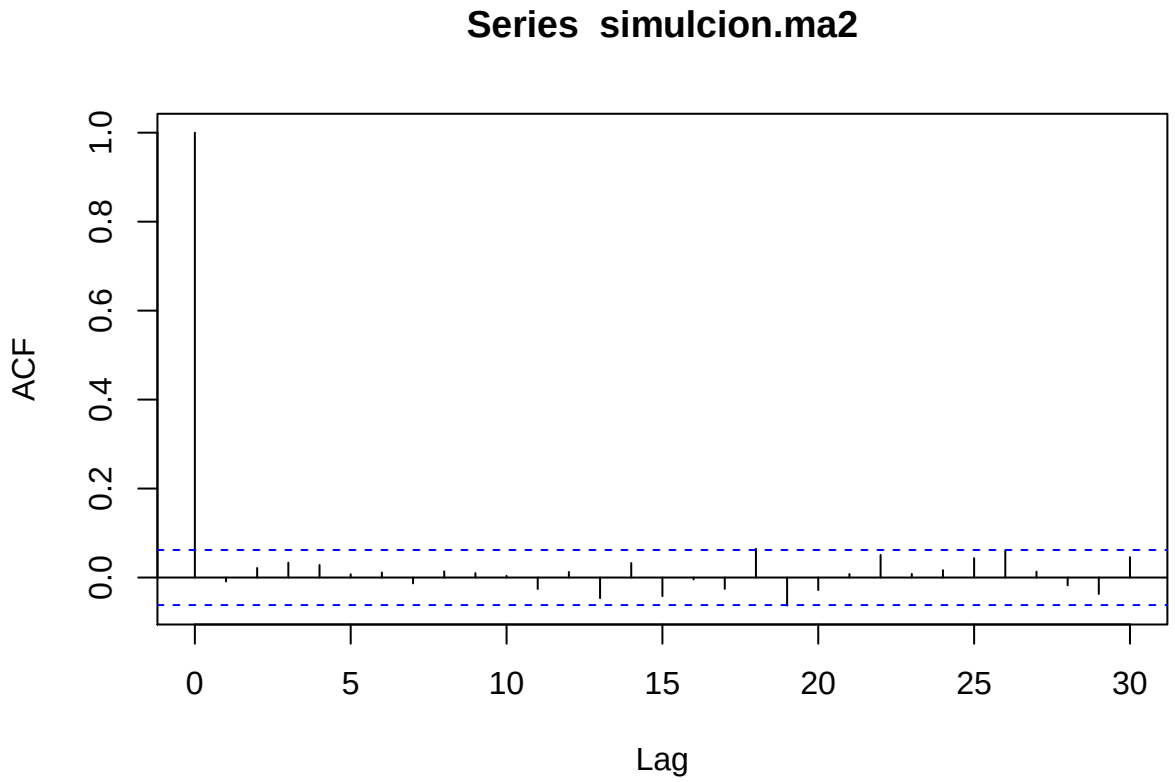
se asume que las raíces de las ecuaciones $\phi_p(z) = 0$ y $\theta_q(z) = 0$ están fuera del círculo unitario. Además se asume que estos polinomios no tienen raíces en común. Si se cumplen estas condiciones el proceso $Yt \sim ARMA(p,q)$ es estacionario e identificable.

Simulemos el proceso:

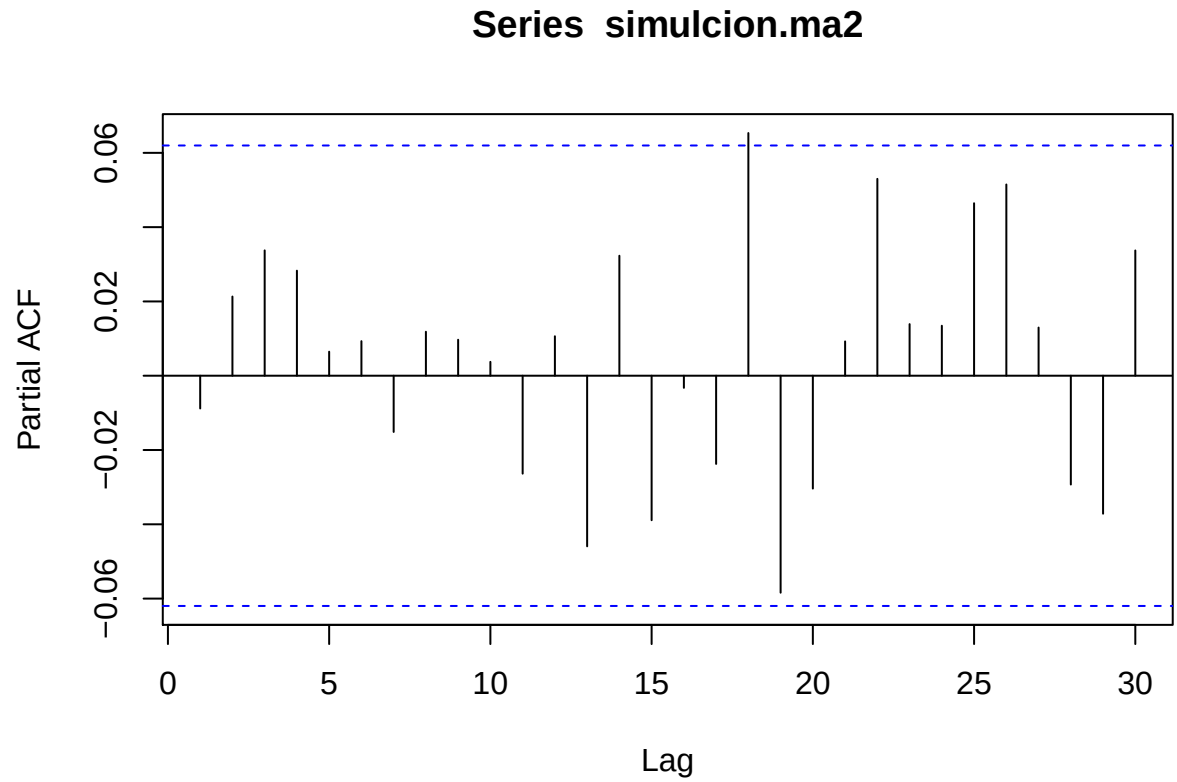
```
simulcion.ma2 <- arima.sim(1000, model=list(order=c(1,0,1),ar=c(-0.1),ma=c(0.1)))
plot(simulcion.ma2)
```




```
acf(simulcion.ma2)
```




```
pacf(simulcion.ma2)
```



Buscando el *mejor* modelo

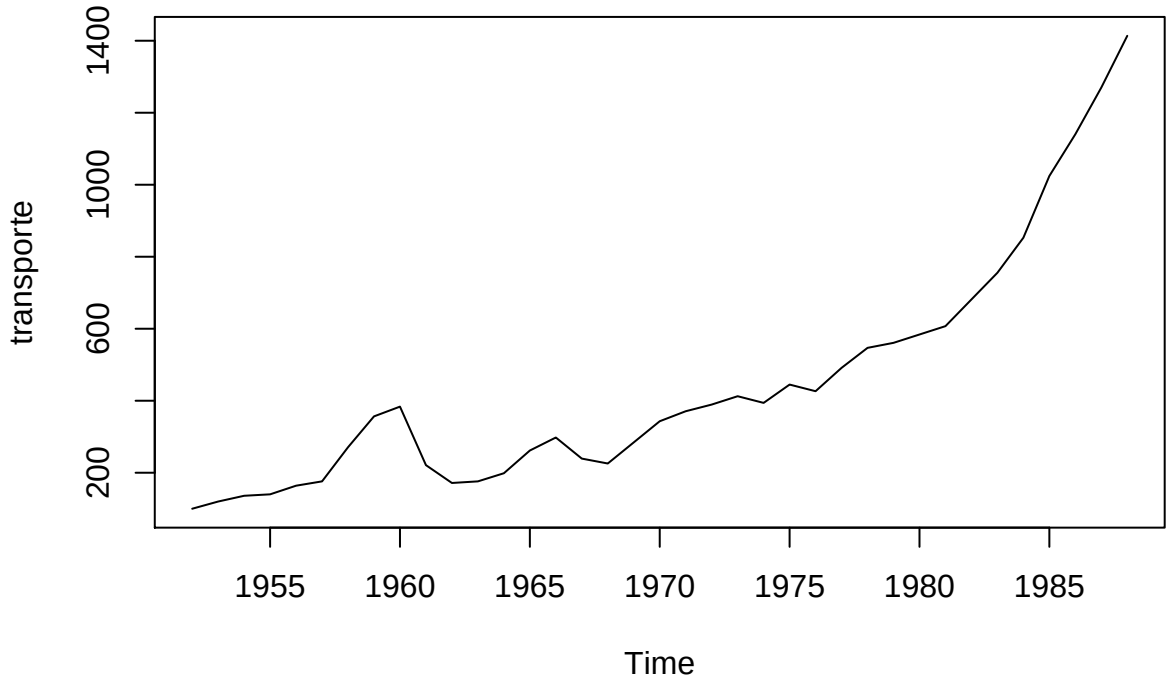
Ejemplo 1

Datos: Serie de tiempo (1952-1988) del ingreso nacional real en China por sector (año base: 1952)

```
library(AER)
data(ChinaIncome)
str(ChinaIncome)
```

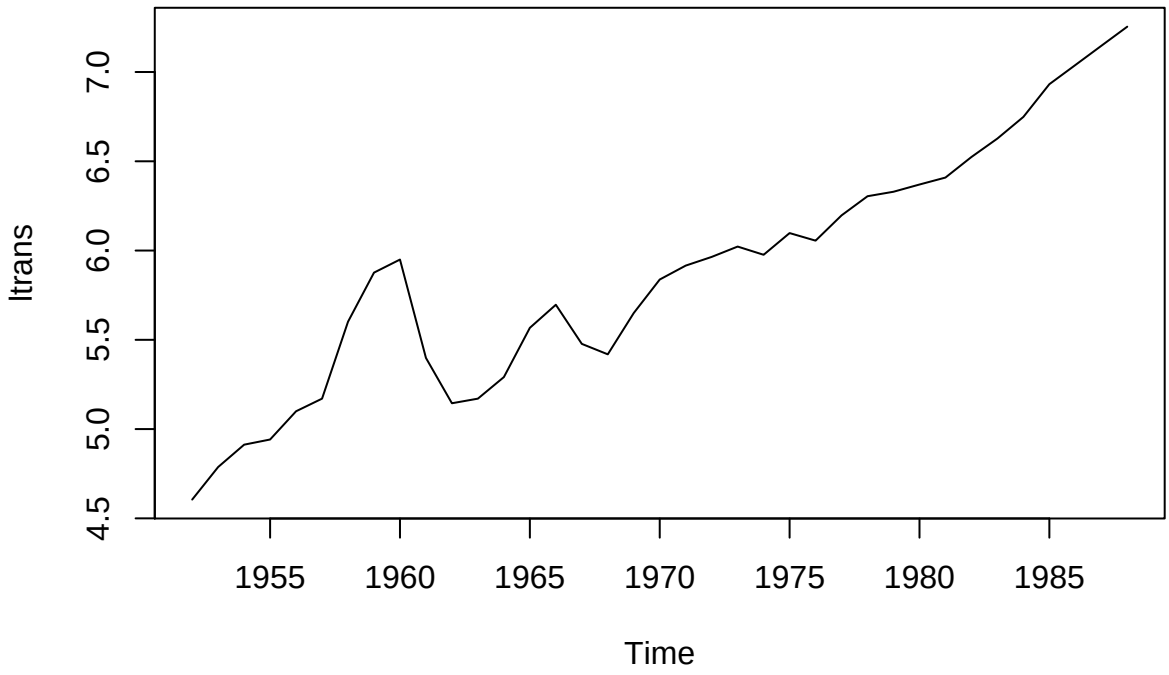
```
##  Time-Series [1:37, 1:5] from 1952 to 1988: 100 102 103 112 116 ...
##  - attr(*, "dimnames")=List of 2
##   ..$ : NULL
##   ..$ : chr [1:5] "agriculture" "commerce" "construction" "industry" ...
```

```
transporte <- ChinaIncome[,"transport"]
ts.plot(transporte)
```



Parece no ser estacionario. Hacemos una transformación para tratar de confirmar la estacionariedad.

```
ltrans <- log(transporte)
ts.plot(ltrans)
```



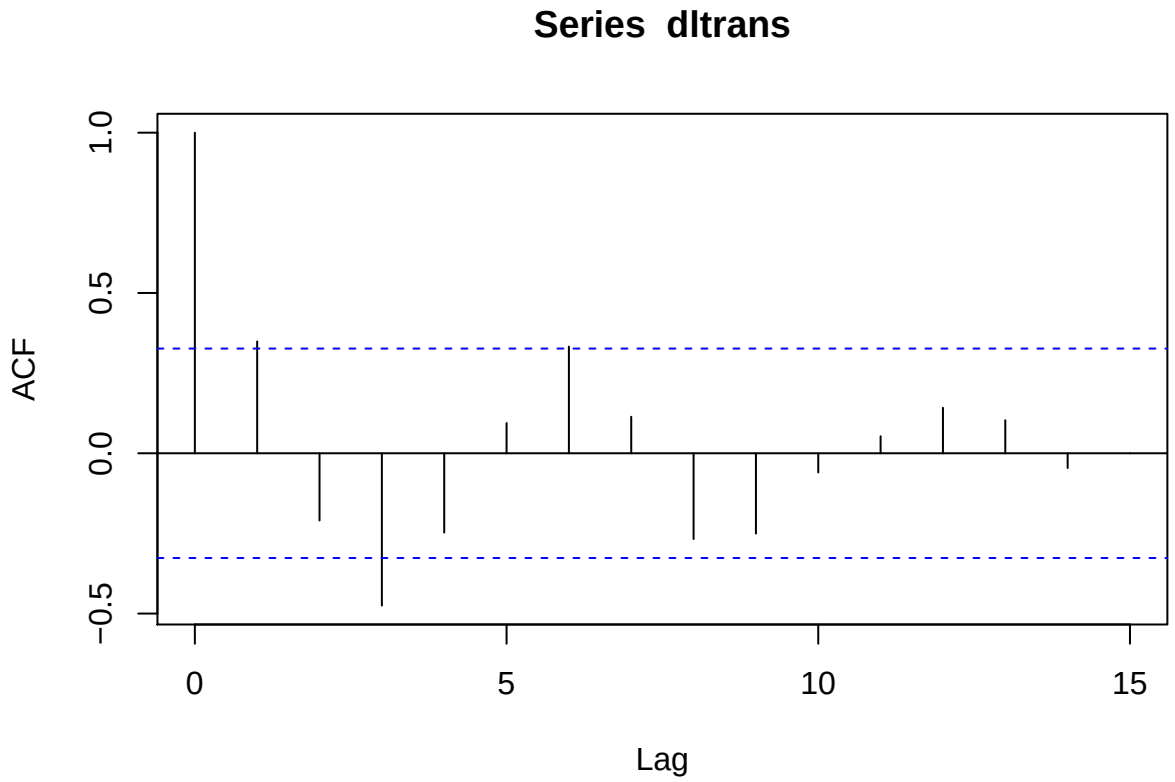
Notamos que persiste el porblema, sigue sin ser estacionario. Probemos con la diferencia:

```
dltrans <- diff(ltrans)
ts.plot(dltrans)
abline(h=0)
```

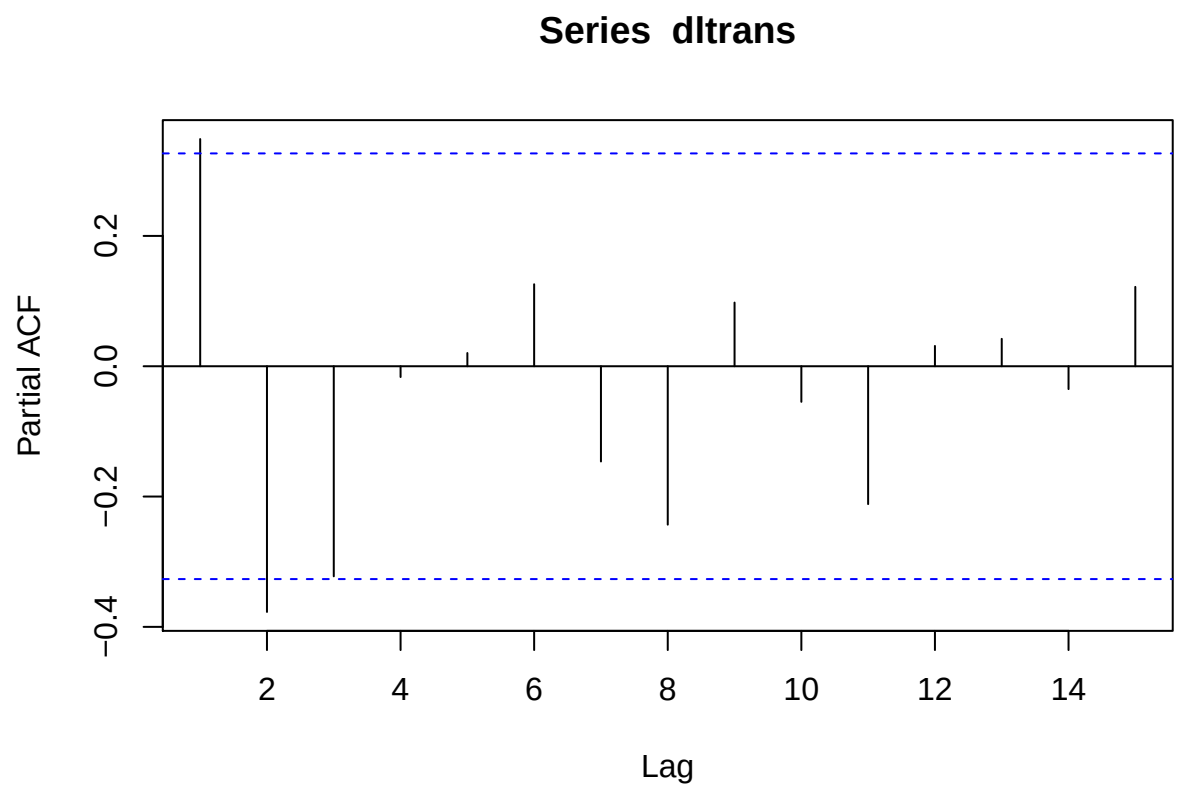
Asumamos estacionariedad (después haremos una prueba específica para verificar estacionariedad) y busquemos el mejor modelo.

Usaremos el `acf` y el `pacf` para evaluar si es MA o AR.

```
acf(dltrans)
```




```
pacf(dltrans)
```



Ajustando según la gráfica, tendríamos un proceso $MA(2)$

¿Qué recomienda R?

```r
ar(dltrans)$aic
```

```
##         0         1         2         3         4         5         6
##  8.140754  5.473906  1.951624  0.000000  1.990078  3.975236  5.400529
##         7         8         9        10        11        12        13
##  6.622877  6.428684  8.083145  9.975465 10.326488 12.291432 14.227677
##        14        15
## 16.183322 17.644775
```

Según esta recomendación, estamos ante un proceso $AR(3)$.

```r
modelo1 <- arima(dltrans,order = c(3,0,0))
modelo1$aic
```

```
## [1] -32.75694
```

Ajustemos el $MA(2)$ y comparemos:

```r
modelo2 <- arima(dltrans,order = c(0,0,2))
modelo2$aic
```

```
## [1] -28.01574
```

Recuerda: Un menor AIC es mejor. ¿Con qué modelo te quedas?

Ajustemos un $MA(3)$:

```r
modelo3 <- arima(dltrans,order = c(0,0,3))
print(modelo3)
```

```
##
## Call:
## arima(x = dltrans, order = c(0, 0, 3))
##
## Coefficients:
##          ma1      ma2      ma3  intercept
##       0.1763  -0.4596  -0.7167     0.0621
## s.e.  0.1883   0.1640   0.1925     0.0053
##
## sigma^2 estimated as 0.01625:  log likelihood = 21.26,  aic = -32.53
```

```r
modelo3$aic
```

```
## [1] -32.52547
```

Este modelo es mejor que el $MA(2)$, pero peor que $AR(3)$.

Probemos algunas combinaciones

```r
# Ajustando un ARMA(1,1)
modelo4 <- arima(dltrans,order = c(1,0,1))
modelo4$aic
```

```
## [1] -27.49033
```

```r
# Ajustando un ARMA(2,1)
modelo5 <- arima(dltrans,order = c(2,0,1))
modelo5$aic
```

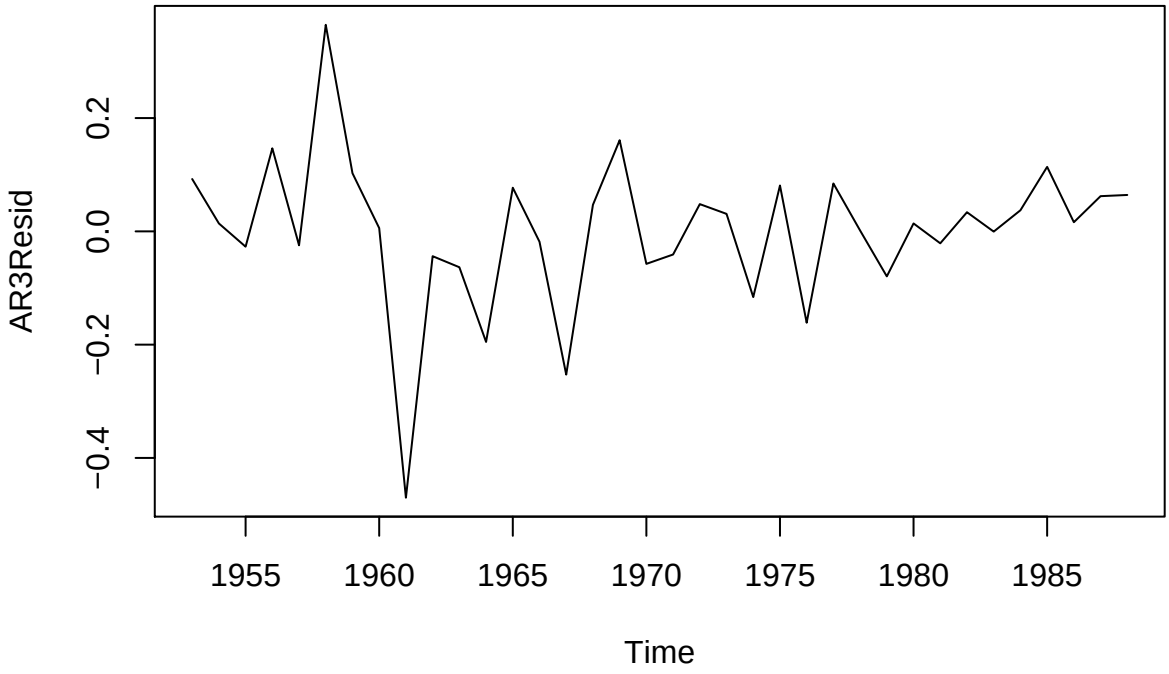
```
## [1] -32.45195
```

```r
# Ajustando un ARMA(1,2)
modelo6 <- arima(dltrans,order = c(1,0,2))
modelo6$aic
```

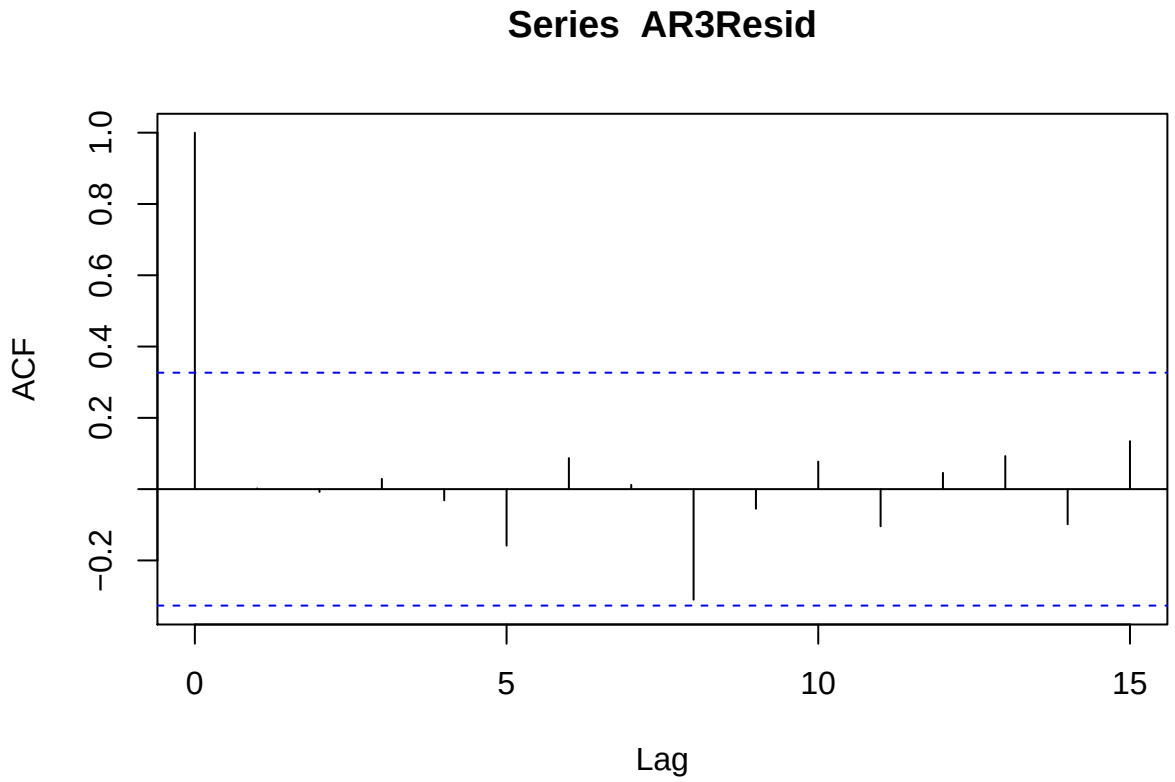
```
## [1] -29.86264
```

Nos quedamos con el $AR(3)$. Revisemos los residuos:

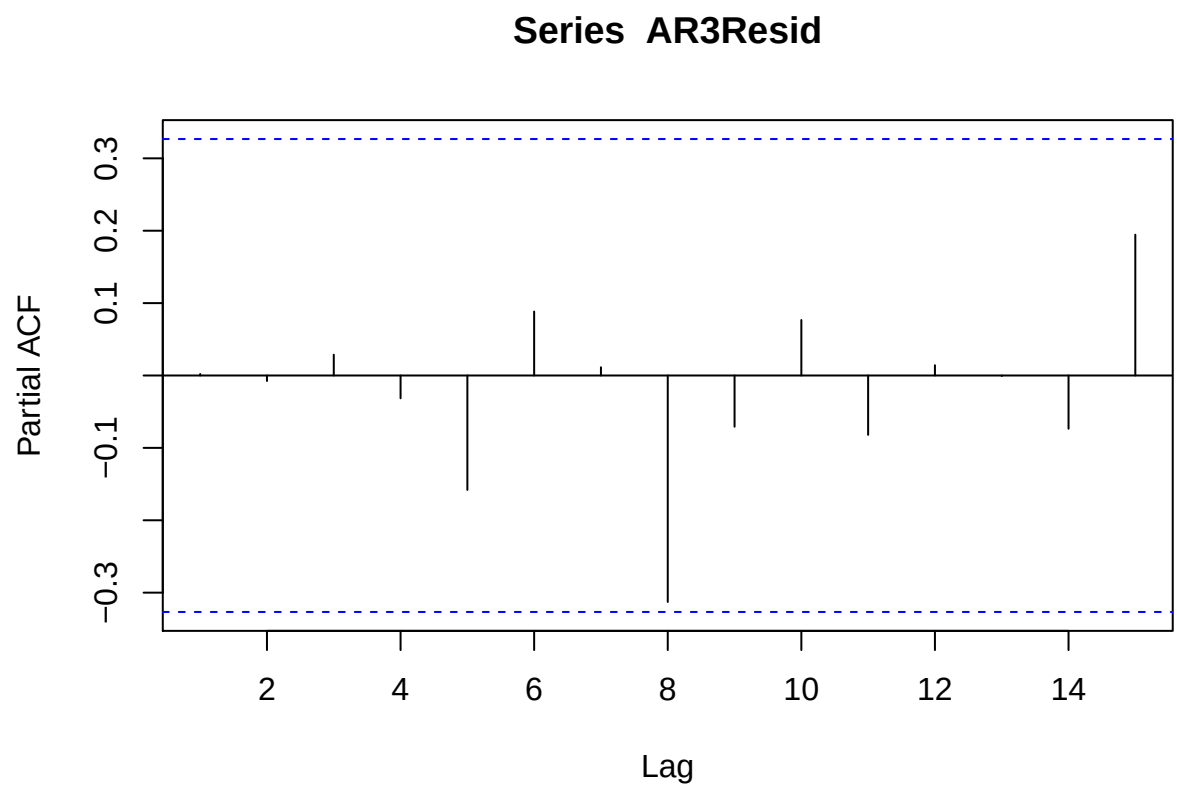
```r
AR3Resid <- (modelo1$resid)
ts.plot(AR3Resid)
```




```r
acf(AR3Resid)
```




```
pacf(AR3Resid)
```



No hay autocorrelación, No hay autocorrelación parcial.

Veamos si se trata de un ruido blanco

```
Box.test(AR3Resid)
```

```
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  AR3Resid
## X-squared = 0.00015103, df = 1, p-value = 0.9902
```

¿Es ruido blanco?

Realicemos una proyección a 5 años

```
pred5 <- predict(modelo1, n.ahead=5,se=T)
pred5se <- pred5$se
```

intervalos de confianza:

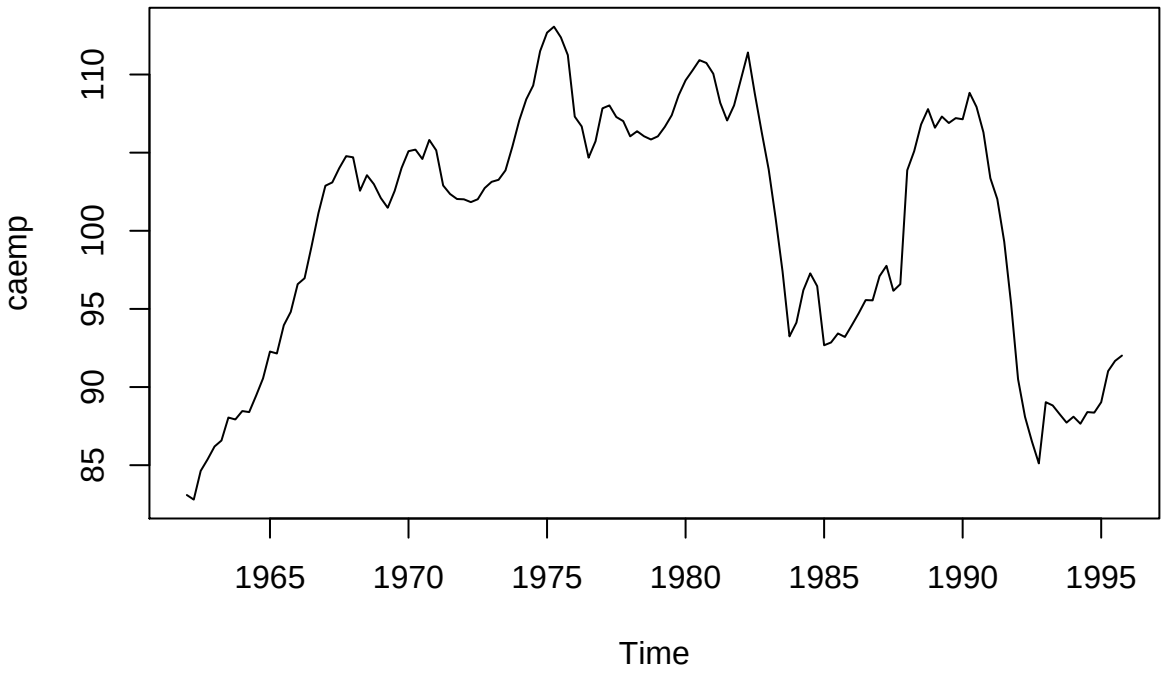
```
ic = pred5$pred + cbind(-2*pred5$se,2*pred5$se)
ts.plot(dltrans,pred5$pred,ic,
col=c("black","blue","red","red"))
```

Los intervalos son grandes, podría ser por la cantidad de datos

Ejemplo 2

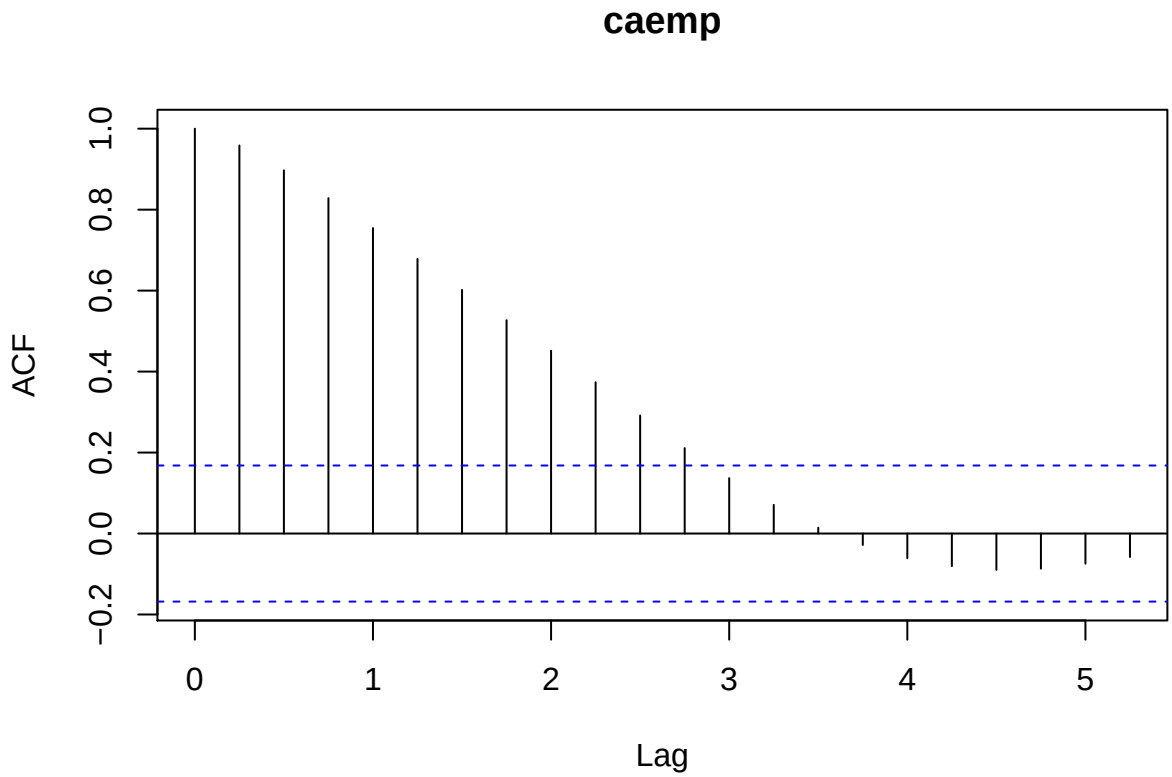
Datos: Índice de desempleo trimestal en Canada desde el 62

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/CAEMP.DAT"
datos <- read.csv(url(uu),sep=",",header=T)
emp.ts <- ts(datos,st=1962,fr=4)
plot(emp.ts)
```

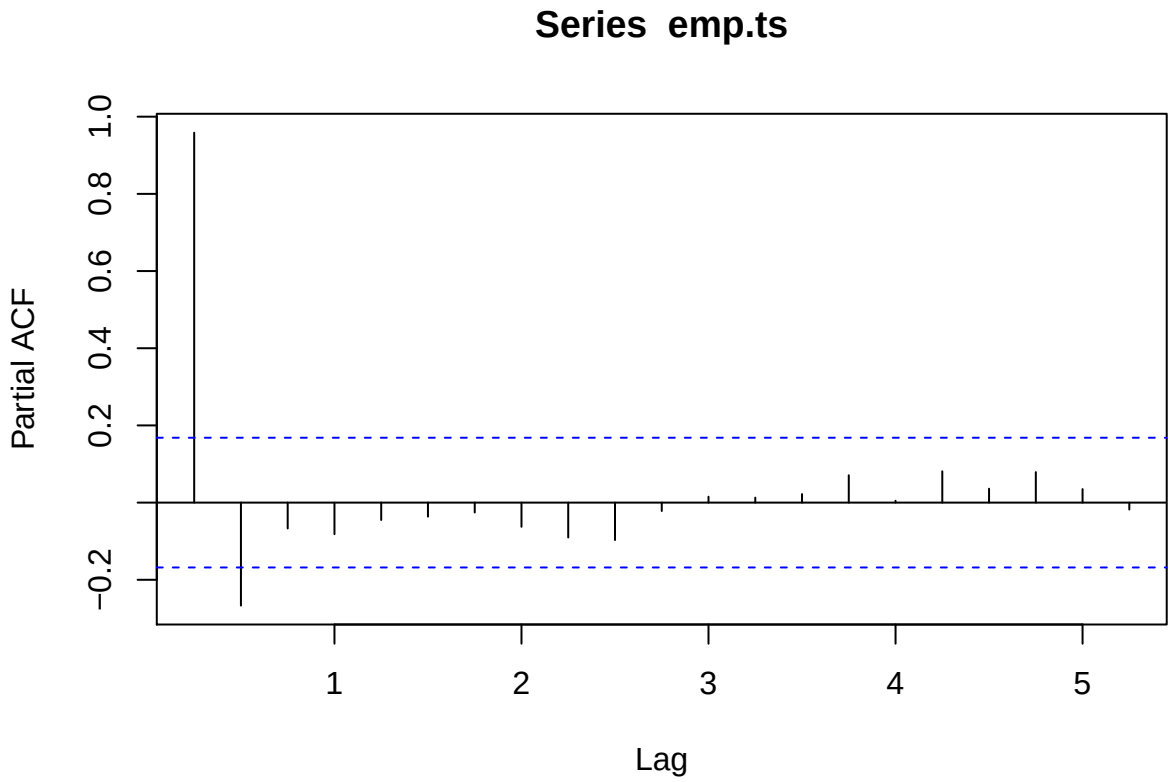


Veamos sus autocorrelaciones y AIC:

```
acf(emp.ts)
```




```
pacf(emp.ts)
```




```
ar(emp.ts)$aic
```

```
##          0          1          2          3          4          5
## 347.493734   8.048336   0.000000   1.386627   2.471906   4.195572
##          6          7          8          9         10         11
##   6.015058   7.925583   9.390454  10.273560  10.989316  12.924608
##         12         13         14         15         16         17
##  14.892737  16.870041  18.803523  20.117383  22.114279  23.215372
##         18         19         20         21
##  25.038216  26.186319  28.019605  29.975609
```

Decae linealmente el ACF, esto es señal de que no es un proceso AR

Comparemos modelos:

```
mode1 <- arima(emp.ts,order=c(2,0,0))
mode2 <- arima(emp.ts,order=c(0,0,4))
Box.test(mode1$resid,t="Ljung",lag=20)
```

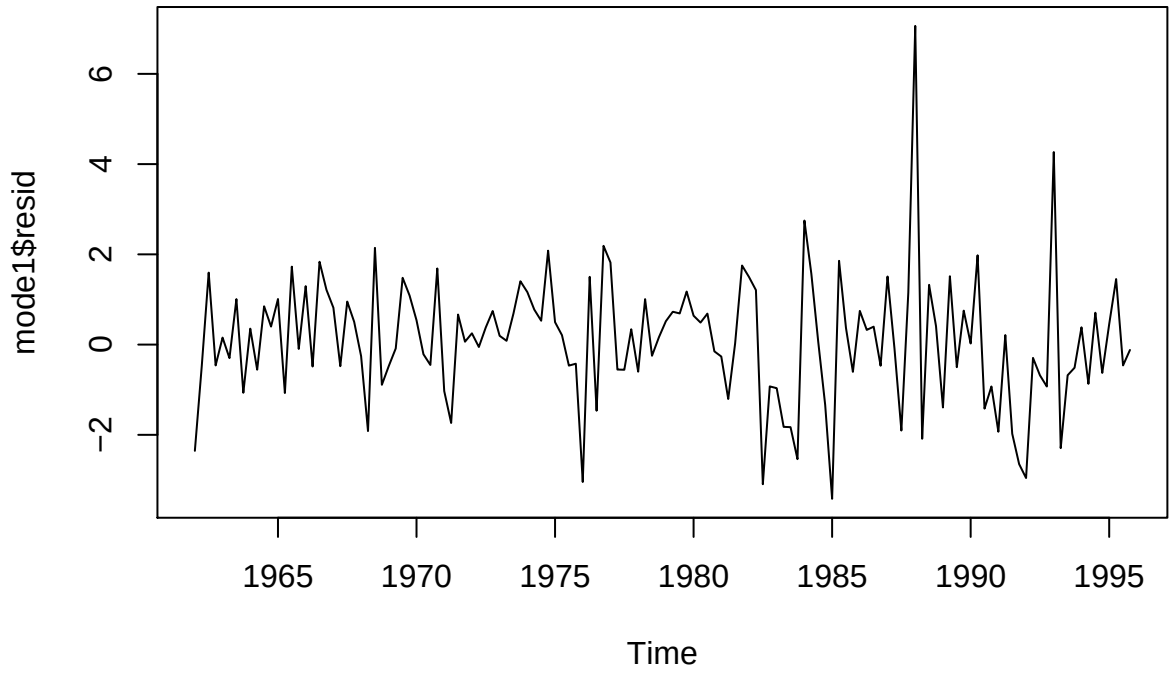
```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  mode1$resid
## X-squared = 16.546, df = 20, p-value = 0.6822
```

```
Box.test(mode2$resid,t="Ljung",lag=20)
```

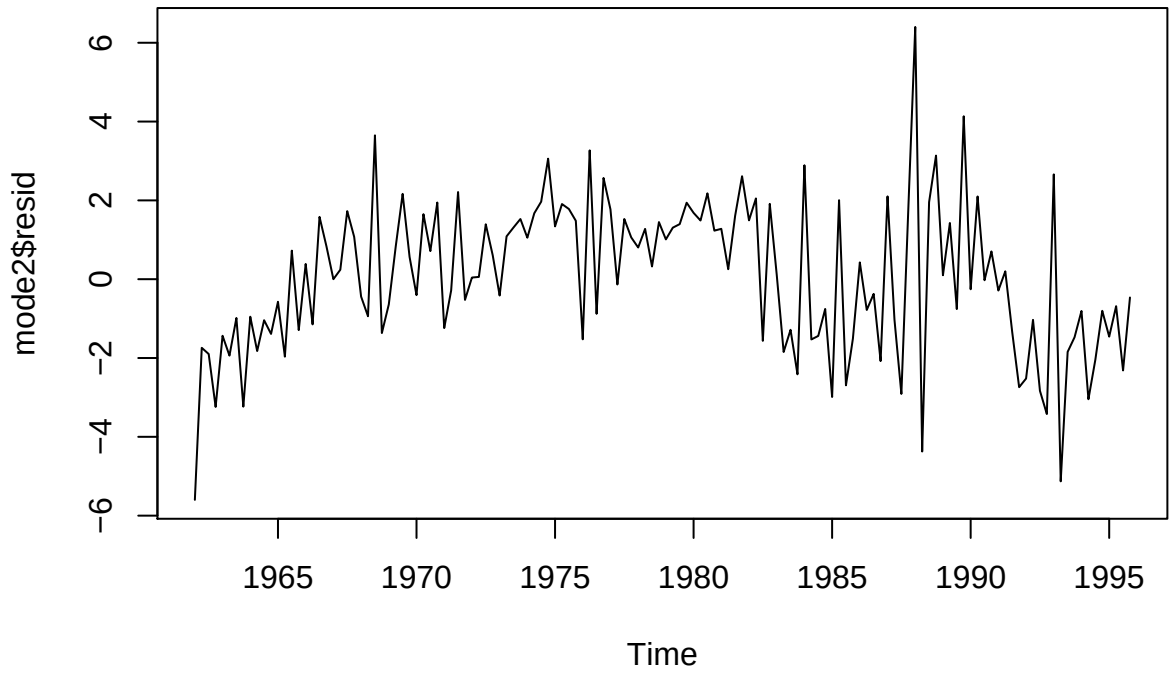
```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  mode2$resid
## X-squared = 113.23, df = 20, p-value = 4.996e-15
```

mode1 es ruido, pero mode2 no lo es. Analicemos los resíduos:

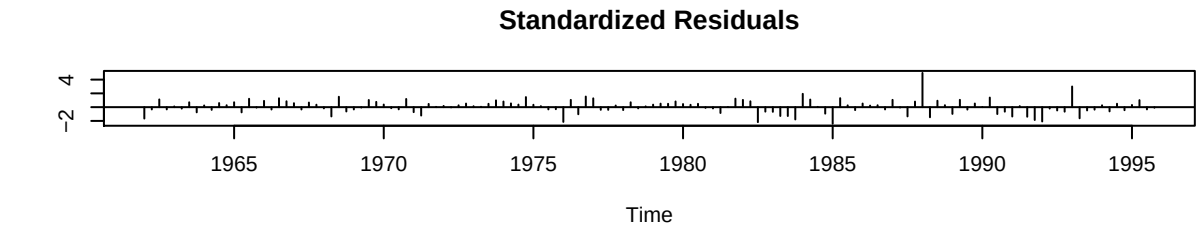
```
ts.plot(mode1$resid)
```

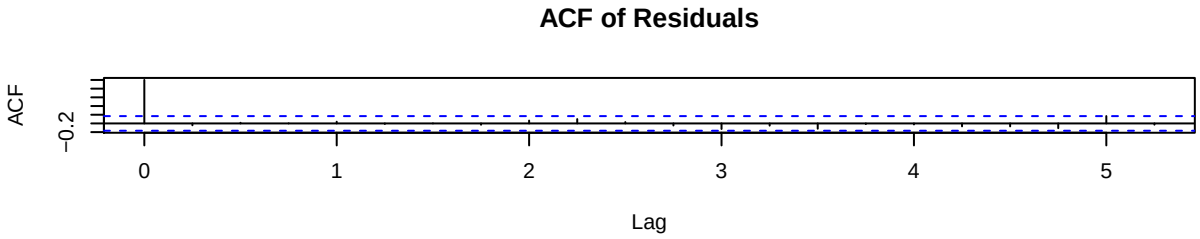


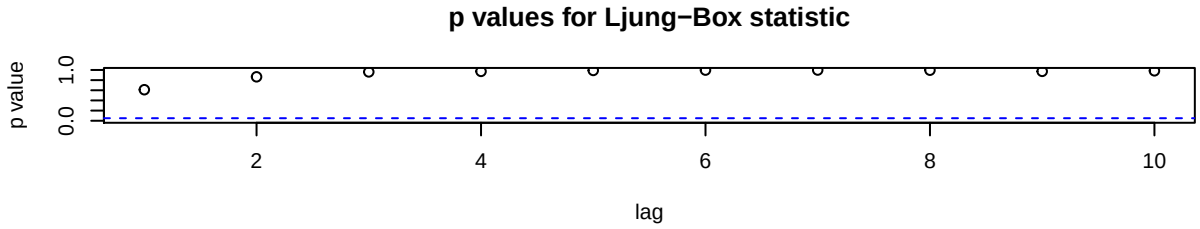

```
ts.plot(mode2$resid)
```




```
tsdiag(mode1)
```







Probemos un modelo ARMA

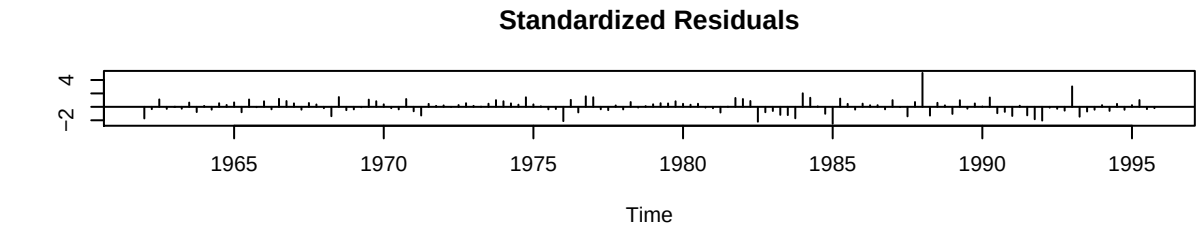
```
arma.21 <- arima(emp.ts,order=c(2,0,1))
arma.21$aic
```

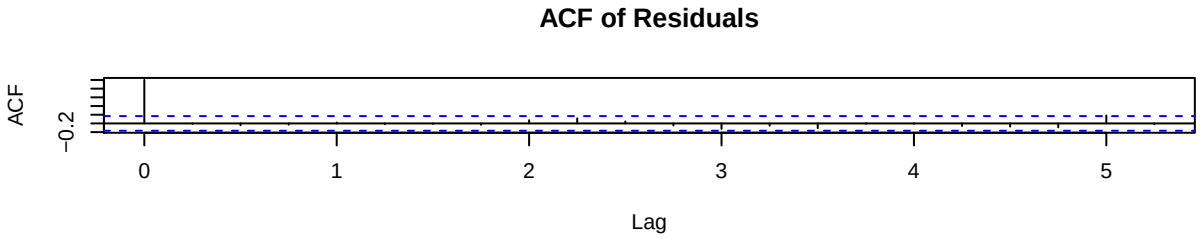
```
## [1] 494.8726
```

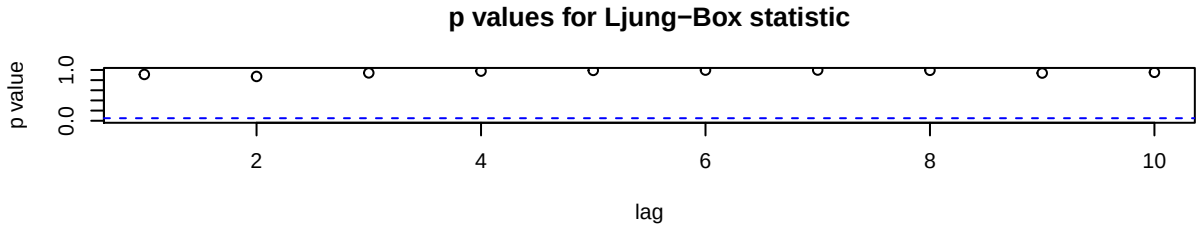
```
arma.21
```

```
##
## Call:
## arima(x = emp.ts, order = c(2, 0, 1))
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ma1  intercept
##       1.5745  -0.5987  -0.1612    97.9320
## s.e.  0.1534   0.1522   0.1922     4.0145
##
## sigma^2 estimated as 2.011:  log likelihood = -242.44,  aic = 494.87
```

```
tsdiag(arma.21)
```








```
arma.21$coef
```

```
##        ar1        ar2        ma1  intercept
##  1.5744680 -0.5986826 -0.1612365 97.9320375
```

```
arma.21$var.coef
```

```
##                   ar1         ar2         ma1   intercept
## ar1        0.02353470 -0.02327060 -0.02640964  0.09975805
## ar2       -0.02327060  0.02316479  0.02602775 -0.11240983
## ma1       -0.02640964  0.02602775  0.03693592 -0.10423546
## intercept  0.09975805 -0.11240983 -0.10423546 16.11644493
```

```
polyroot(c(1,-1.57,0.59)) # Estacionario (Las raíces son |x|>1)
```

```
## [1] 1.056032+0i 1.604985-0i
```

```
polyroot(c(1,-0.16)) # Invertible
```

```
## [1] 6.25+0i
```

```
# Si se cumplen ambas, el proceso ARMA es estacionario.
```

Condición de invertibilidad del Proceso $MA(q)$

Dado un proceso $MA(q)$, $Y_t = \theta q(L)(\epsilon_t)$ donde $\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$, entonces considerando el polinomio en $z \in \mathbb{C}, \theta_q(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ y sus q raíces $(z_1, z_2, \ldots, z_q) \in \mathbb{C}$, es decir, valores $z \in \mathbb{C}$ tales que $\theta_q(z) = 0$, se dice que el proceso Y_t es invertible si se cumple

$$|z_j| > 1, \quad \forall j = 1, \ldots, q$$

o también, si $\theta_q(z) \neq 0, \forall z, |z| \leq 1$. Note que () es equivalente a

$$\frac{1}{z_j} < 1, \quad \forall j = 1, \ldots, q$$

es decir, los inversos de las raíces deben caer dentro del círculo unitario complejo.

Test de Dickey Fuller

> La Prueba de Dickey-Fuller busca determinar la existencia o no de raíces unitarias en una serie de tiempo. La hipótesis nula de esta prueba es que existe una raíz unitaria en la serie.

```
library(tseries)
adf.test(emp.ts)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  emp.ts
## Dickey-Fuller = -2.6391, Lag order = 5, p-value = 0.3106
## alternative hypothesis: stationary
```

```
adf.test(diff(emp.ts))
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  diff(emp.ts)
## Dickey-Fuller = -4.0972, Lag order = 5, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

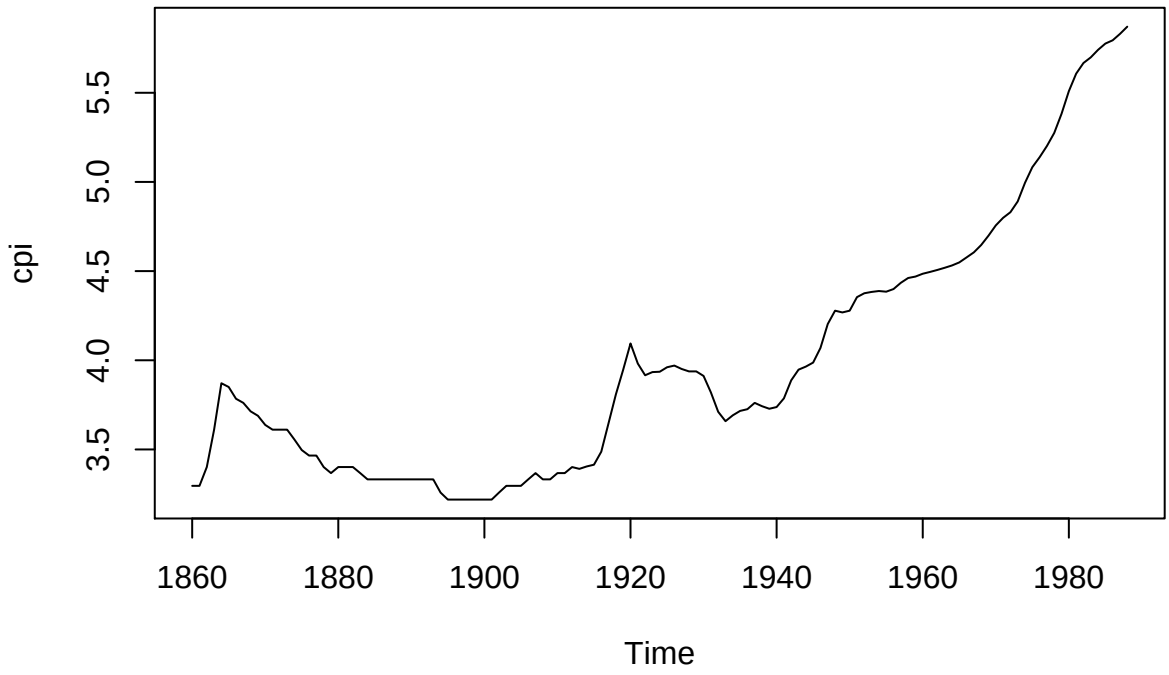
Ejemplo 3

Datos: 14 series macroeconómicas:

- indice de precios del consumidor (`cpi`),
- producción industrial (`ip`),
- PNB Nominal (`gnp.nom`),
- Velocidad (`vel`),
- Empleo (`emp`),
- Tasa de interés (`int.rate`),
- Sueldos nominales (`nom.wages`),
- Deflactor del PIB (`gnp.def`),
- Stock de dinero (`money.stock`),
- PNB real (`gnp.real`),
- Precios de stock (`stock.prices`),
- PNB per cápita (`gnp.capita`),
- Salario real (`real.wages`), y
- Desempleo (`unemp`).

Tienen diferentes longitudes pero todas terminan en 1988. Trabajaremos con `cpi`

```
data(NelPlo)
plot(cpi)
```



La serie parece no ser estacionaria ni lineal.

Veamos las raíces unitarias:

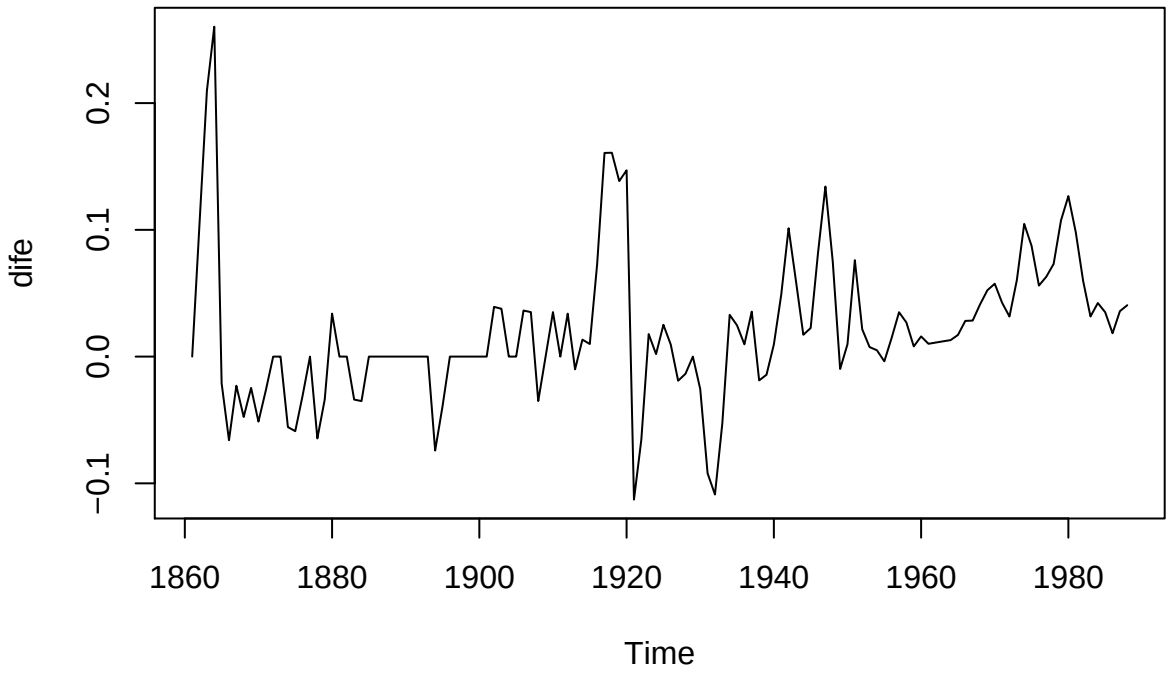
```
adf.test(cpi)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  cpi
## Dickey-Fuller = -1.6131, Lag order = 5, p-value = 0.7374
## alternative hypothesis: stationary
```

¿Es estacionaria?

Probemos con las diferencias

```
dife <- diff(cpi)
plot(dife)
```




```
adf.test(dife)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  dife
## Dickey-Fuller = -4.4814, Lag order = 5, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

La serie en diferencias si es estacionaria. Veamos qué modelo sugiere R:

```
ar(dife)
```

```
##
## Call:
## ar(x = dife)
##
## Coefficients:
##       1        2        3
##  0.8067  -0.3494   0.1412
##
## Order selected 3  sigma^2 estimated as  0.001875
```

Hasta mi última revisión, no existe una función `ma` como `ar`, pero:

```
#### Busquemos el mejor MA #####
N=10
AICMA=matrix(0,ncol=1,nrow=N)
for (i in 1:N){
AICMA[i] = arima(diff(cpi),order=c(0,0,i))$aic
}
which.min(AICMA)
```

```
## [1] 3
```

```
AICMA
```

```
##            [,1]
##  [1,] -432.7692
##  [2,] -435.4208
##  [3,] -436.1922
##  [4,] -434.4117
##  [5,] -432.4410
##  [6,] -432.1389
##  [7,] -432.3631
##  [8,] -430.4594
##  [9,] -428.4612
## [10,] -429.8065
```

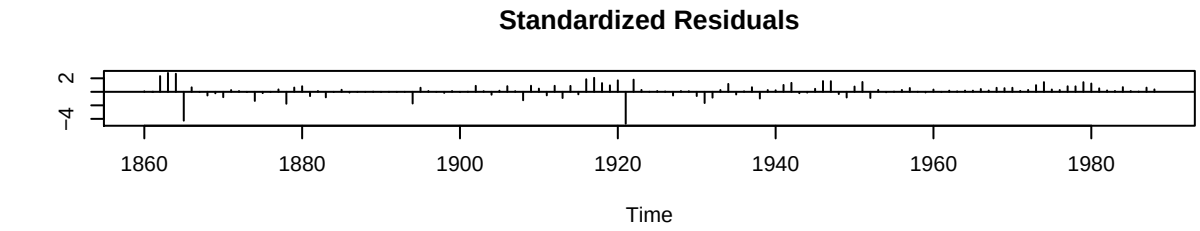
Se sugiere un $MA(3)$.

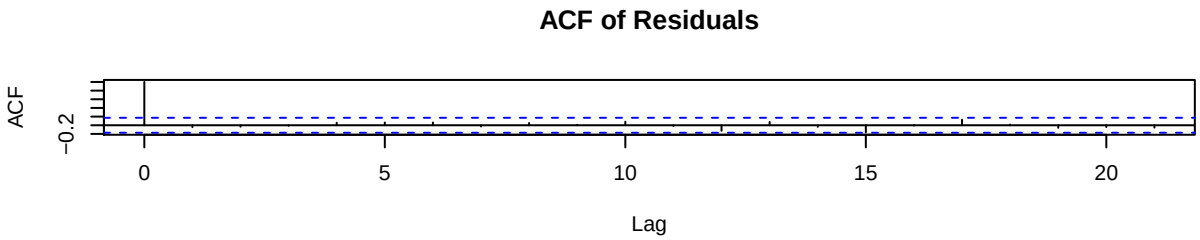
Evaluemos el modelo MA con una diferencia:

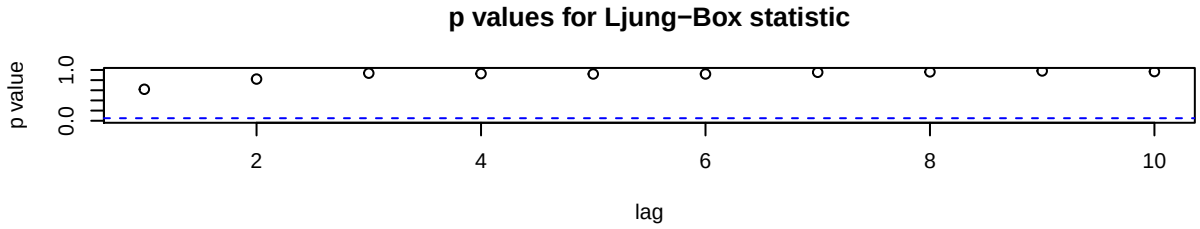
```
mode1 <- arima(cpi,order=c(0,1,3))
mode1
```

```
##
## Call:
## arima(x = cpi, order = c(0, 1, 3))
##
## Coefficients:
##          ma1     ma2     ma3
##       0.8782  0.3754  0.1898
## s.e.  0.0876  0.1172  0.0890
##
## sigma^2 estimated as 0.00185:  log likelihood = 220.67,  aic = -433.34
```

```
tsdiag(mode1)
```







Cointegración:

Datos: tasas de cambio mensuales de Estados Unidos, Inglaterra y Nueva Zelanda desde 2004.

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/us_rates.txt"
datos <- read.csv(url(uu),sep="",header=T)
```

```
# Tasas de cambio, datos mensuales
uk.ts <- ts(datos$UK,st=2004,fr=12)
eu.ts <- ts(datos$EU,st=2004,fr=12)
```

Revisemos si las series son estacionarias:

```
# Tets de Phillips Perron
pp.test(uk.ts)
```

```
##
##  Phillips-Perron Unit Root Test
##
## data:  uk.ts
## Dickey-Fuller Z(alpha) = -10.554, Truncation lag parameter = 7,
## p-value = 0.521
## alternative hypothesis: stationary
```

```
pp.test(eu.ts)
```

```
##
##  Phillips-Perron Unit Root Test
##
```

```
## data:  eu.ts
## Dickey-Fuller Z(alpha) = -6.812, Truncation lag parameter = 7,
## p-value = 0.7297
## alternative hypothesis: stationary
```

Tienen raíces unitarias

Objetivo: Se piensa que la libra esterlina y el euro tienen alguna relación

```
#Test de Phillips Ollearis
po.test(cbind(uk.ts,eu.ts))
```

```
##
##  Phillips-Ouliaris Cointegration Test
##
## data:  cbind(uk.ts, eu.ts)
## Phillips-Ouliaris demeaned = -21.662, Truncation lag parameter =
## 10, p-value = 0.04118
```

La *Ho*: NO COINTEGRADAS.

Si son cointegradas, es decir que hay una tendencia a largo plazo.

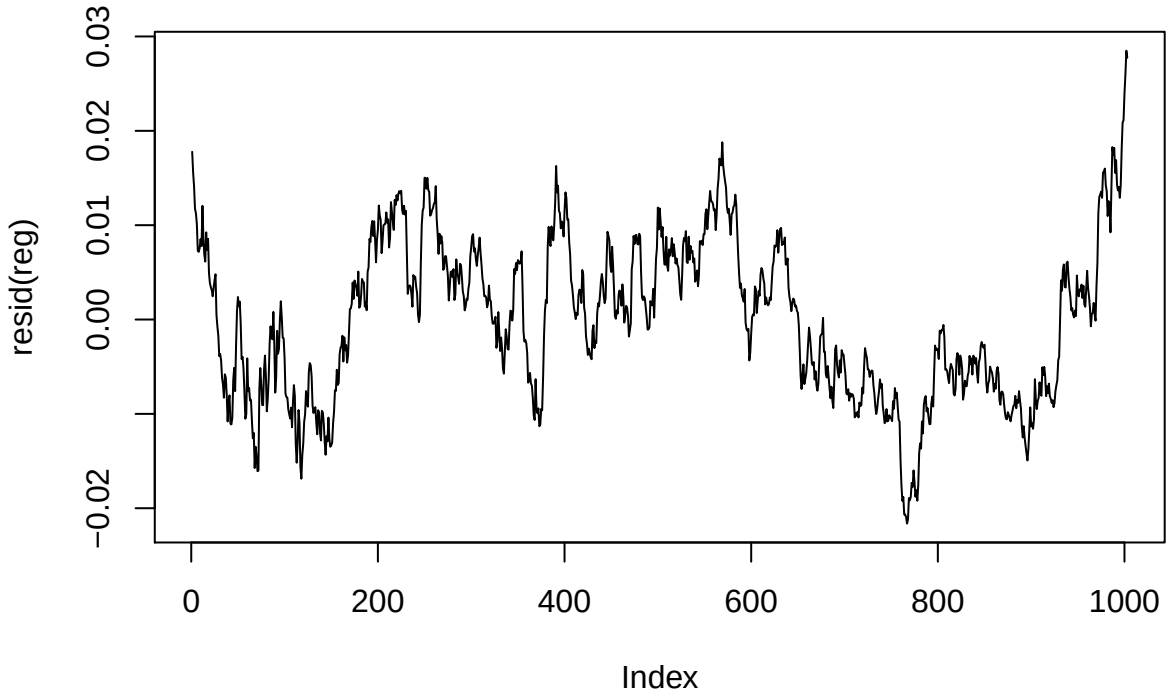
Veamos la relación:

```
reg <- lm(uk.ts~eu.ts)
summary(reg)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = uk.ts ~ eu.ts)
##
## Residuals:
##        Min         1Q     Median         3Q        Max
## -0.0216256 -0.0068351  0.0004963  0.0061439  0.0284938
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 0.074372   0.004983   14.92   <2e-16 ***
## eu.ts       0.587004   0.006344   92.53   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.008377 on 1001 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8953, Adjusted R-squared:  0.8952
## F-statistic:  8561 on 1 and 1001 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Analicemos los resíduos:

```
residuos = resid(reg)
plot(resid(reg),t="l")
```

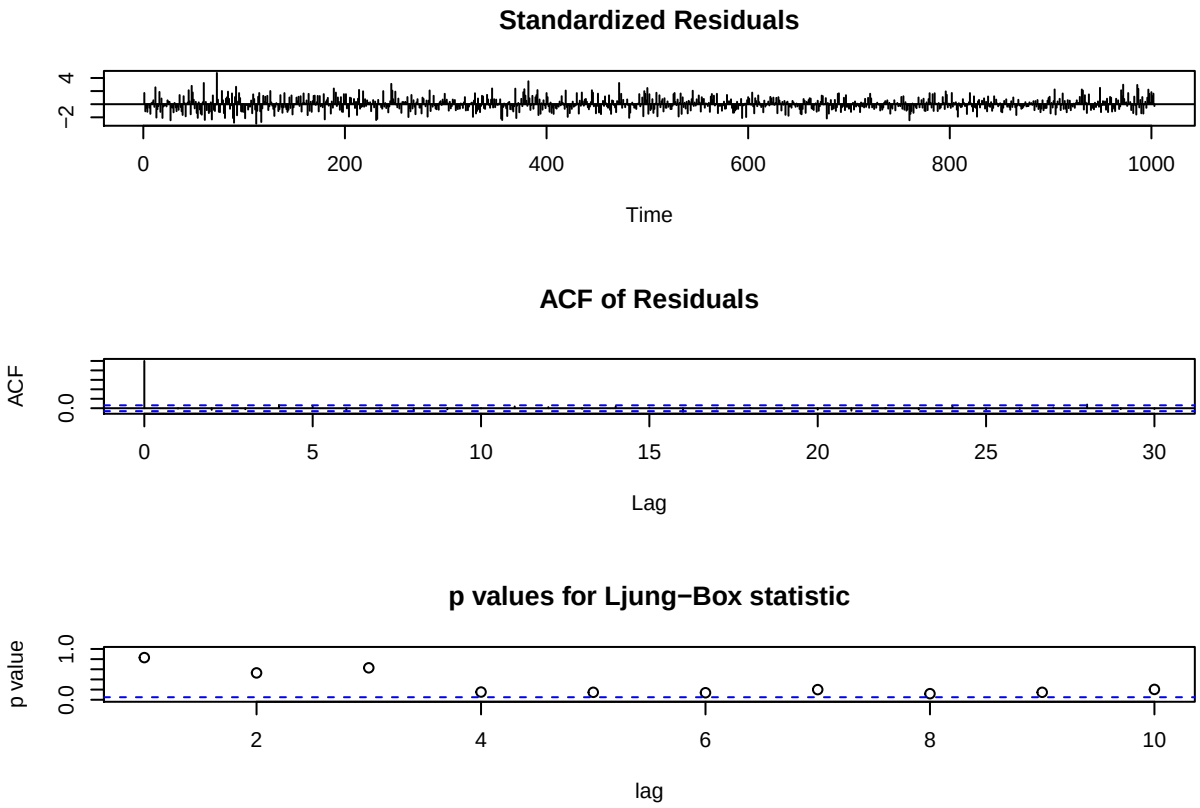


Presentan una estructura, debemos modelizarlos.

```
arma11 <- arima(residuos,order=c(1,0,1))
arma11
```

```
##
## Call:
## arima(x = residuos, order = c(1, 0, 1))
##
## Coefficients:
##          ar1     ma1  intercept
##       0.9797  0.1013     0.0015
## s.e.  0.0072  0.0331     0.0029
##
## sigma^2 estimated as 3.031e-06:  log likelihood = 4947.45,  aic = -9886.9
```

```
tsdiag(arma11)
```



Encontramos un modelo en los errores que si es estacionario, la relación a largo plazo entonces es el coeficiente de la regresión: 0.58.

Referencias