# Análisis Estadístico con R

Modelos de probabilidad

*true*

*24 de abril de 2018*

## Contents



## Probabilidad lineal

En este caso la variable dependiente es una dummy

Se trata de modelos del tipo:

$$D_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + u_i$$

Veamos un ejemplo: Abrir la base `MROZ` de Wooldridge y ajuste el modelo:

$$inlf = \beta_0 nwifeinc + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 expersq + \beta_4 age + \beta_5 kidslt6 + \beta_6 kidsge6$$

En R:

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/mroz.csv"
datos <- read.csv(url(uu),header=FALSE,na.strings = ".")
# str(datos)

# De ser necesario, quitar comentario y ejecutar:
# datos$V1[1] <- 1
# datos$V1 <- as.numeric(as.character(datos$V1))

names(datos) <- c("inlf","hours",  "kidslt6", "kidsge6",
                "age", "educ",  "wage",
                "repwage",
                "hushrs"  ,  "husage", "huseduc" ,
                "huswage"  , "faminc", "mtr","motheduc",
                "fatheduc" , "unem"    ,  "city"     , "exper"   ,  "nwifeinc" , "lwage" ,    "expersq" 
attach(datos)

reg1 <- lm(inlf~nwifeinc+educ + exper +
```

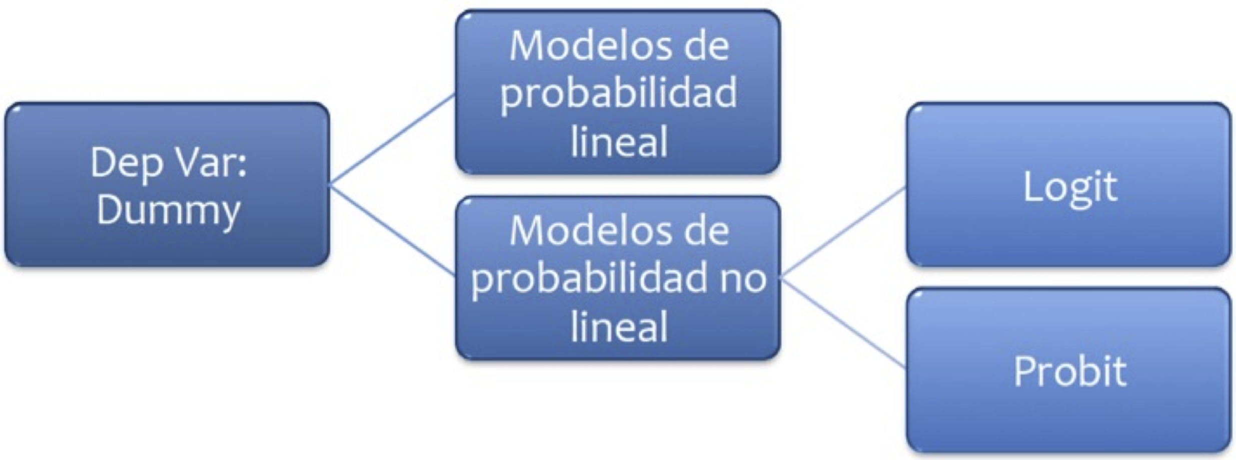

Dep Var:
Dummy
Modelos de
probabilidad
lineal
Modelos de
probabilidad no
lineal
Logit
Probit

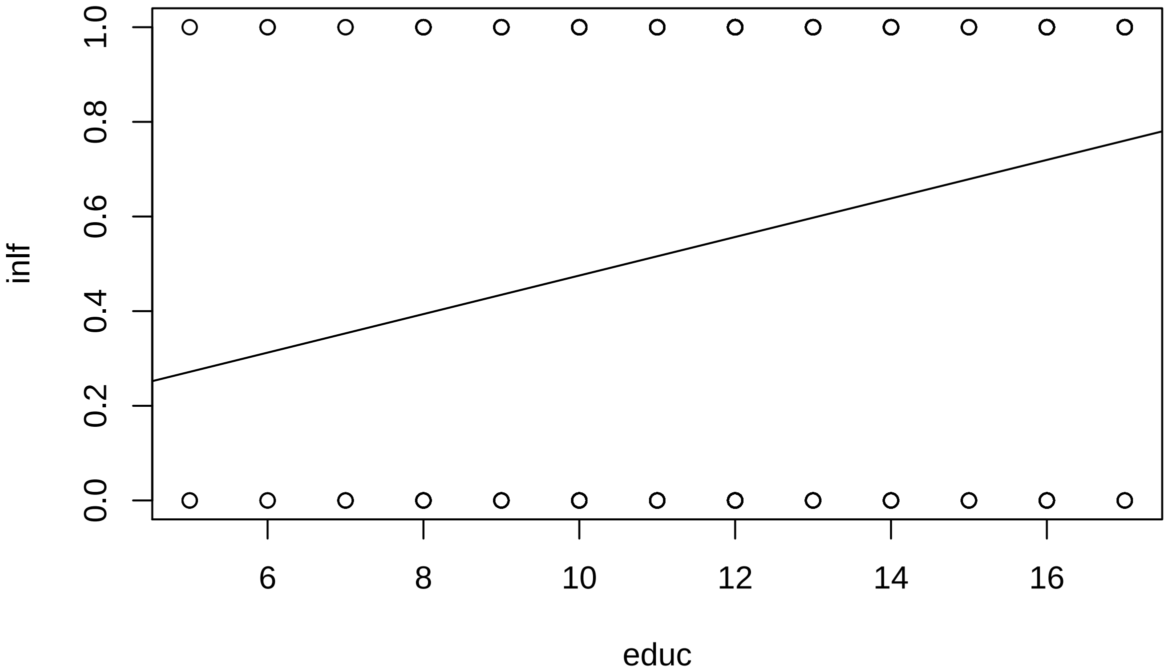
Figure 1:

```r
           expersq + age + kidslt6 +
           kidsge6)
summary(reg1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = inlf ~ nwifeinc + educ + exper + expersq + age +
##     kidslt6 + kidsge6)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.93432 -0.37526  0.08833  0.34404  0.99417
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.5855192  0.1541780   3.798 0.000158 ***
## nwifeinc    -0.0034052  0.0014485  -2.351 0.018991 *
## educ         0.0379953  0.0073760   5.151 3.32e-07 ***
## exper        0.0394924  0.0056727   6.962 7.38e-12 ***
## expersq     -0.0005963  0.0001848  -3.227 0.001306 **
## age         -0.0160908  0.0024847  -6.476 1.71e-10 ***
## kidslt6     -0.2618105  0.0335058  -7.814 1.89e-14 ***
## kidsge6      0.0130122  0.0131960   0.986 0.324415
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4271 on 745 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2642, Adjusted R-squared:  0.2573
## F-statistic: 38.22 on 7 and 745 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

¿Qué hemos ajustado?

```r
plot(inlf~educ)
abline(coef(lm(inlf~educ)))
```




- Excepto *kidsge6* los coeficientes son significativos.
- Se introdujo la experiencia cuadrática para capturar un efecto decreciente en el efecto deseado (inlf). ¿Cómo lo interpretamos?

```
.039 - 2(.0006)exper = 0.39 - .0012exper
```

- El punto en el que la experiencia ya no tiene efecto en *inlf* es $.039/.0012 = 32.5$. ¿Cuantos elementos de la muestra tienen más de 32 años de experiencia?

Se añade exper al cuadrado porque queremos dar la posibilidad que los años adicionales de expericnecia contribuyan con un efecto decreciente.

Trabajemos ahora con la predicción, y revisemos el resultado:

```r
prediccion <- predict(reg1)
head(cbind(inlf,prediccion))
```

```
##   inlf prediccion
## 1    1  0.6636123
## 2    1  0.7009166
## 3    1  0.6727286
## 4    1  0.7257441
## 5    1  0.5616358
## 6    1  0.7928528
```

```r
summary(prediccion)
```

```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
## -0.3451  0.4016  0.5880  0.5684  0.7592  1.1272
```

¿Qué podemos notar?

- Existen valores mayores a 1 e inferiores a 0.
- $R^2$ ya no es interpretable en estas regresiones
- Usaremos una probabilidad de ocurrencia, digamos 0.5

```r
prediccion.inlf <- (prediccion>=0.5)*1
head(cbind(inlf,prediccion,prediccion.inlf))
```

```
##   inlf prediccion prediccion.inlf
## 1    1  0.6636123               1
## 2    1  0.7009166               1
## 3    1  0.6727286               1
## 4    1  0.7257441               1
## 5    1  0.5616358               1
## 6    1  0.7928528               1
```

```r
sum(inlf)-sum(prediccion.inlf)
```

```
## [1] -44
```

- Viendo la tabla, ¿cuál será la tasa de predicción del modelo actual?

```r
tabla1 <- table(inlf,prediccion.inlf)
tabla1
```

```
##     prediccion.inlf
## inlf   0   1
##    0 203 122
##    1  78 350
```

```r
porcentaje.correcto <- (tabla1[1,1]+tabla1[2,2])/length(prediccion)
porcentaje.correcto
```

```
## [1] 0.7343958
```

Para resolver el problema anterior de los valores fuera del intervalo 0-1, se propone una función diferente.

## Logit

La regresión logística puede entenderse simplemente como encontrar los parámtros $\beta$ que mejor asjuten:

$$y = \begin{cases} 1 & \beta_1 + \beta_2 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + u > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde se asume que el error tiene una distribución logística estándar

$$f(x;\mu,s) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s\left(1+e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2} = \frac{1}{s\left(e^{\frac{x-\mu}{2s}}+e^{-\frac{x-\mu}{2s}}\right)^2} = \frac{1}{4s}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\mu}{2s}\right).$$

Donde $s$ es el parámetro de escala y $\mu$ el de locación (*sech* es la función secante hiperbólico).

Otra forma de entender la regresión logística es a través de la función logística:

$$\sigma(t) = \frac{e^t}{e^t+1} = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \sigma(t) \leq 1$.

Asumiento $t$ como una función lineal de una variable explicativa $x$, tenemos:

$$t = \beta_0 + \beta_1 x$$

Ahora la función logística se puede expresar:

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}$$

Ten en cuenta que $p(x)$ se interpreta como la probabilidad de que la variable dependiente iguale a *éxito* en lugar de un *fracaso*. Está claro que las variables de respuesta $Y_i$ no se distribuyen de forma idéntica: $ P (Y_ {i} = 1  mid X )$ difiere de un punto $X_i$ a otro, aunque son independientes dado que la matriz de diseño $X$ y los parámetros compartidos $\beta$.

Finalmente definimos la inversa de la función logística, $g$, el **logit** (log odds):

$$g(p(x)) = \ln\left(\frac{p(x)}{1 - p(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{p(x)}{1 - p(x)} = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

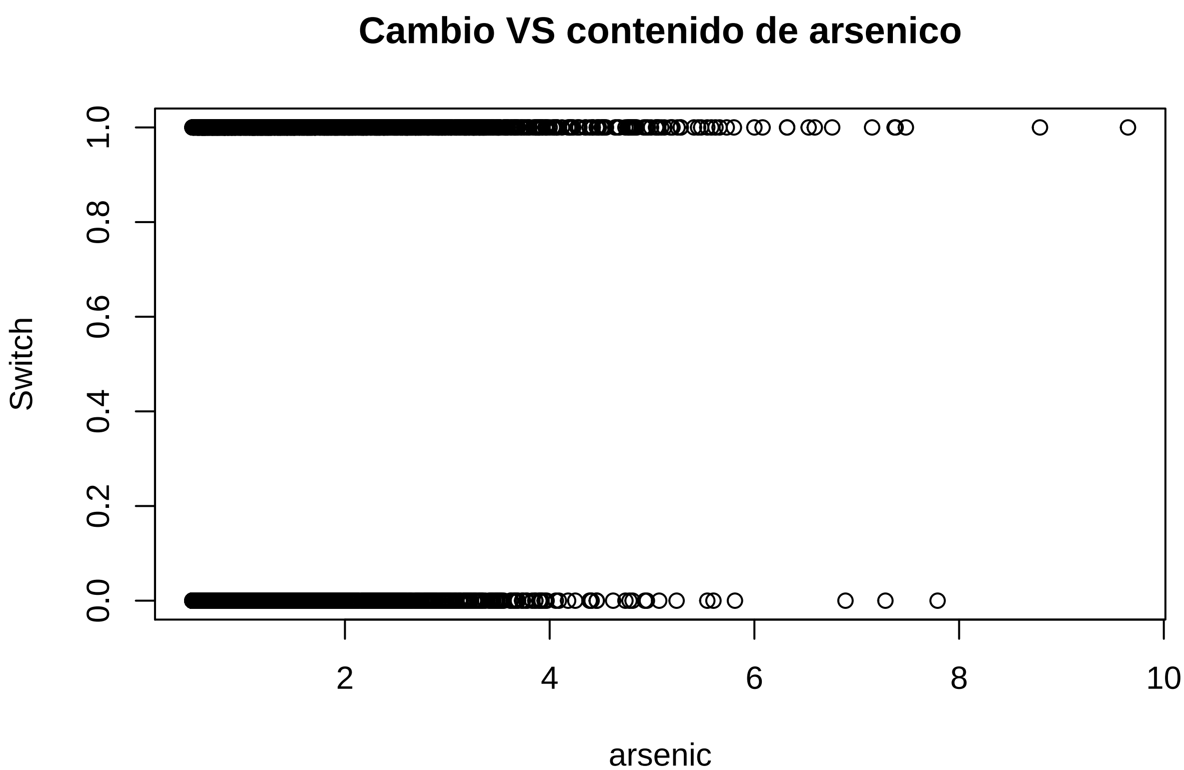
**Interpretación**:

- $g$ es la función logit. La ecuación para $g(p(x))$ ilustra que el logit (es decir, log-odds o logaritmo natural de las probabilidades) es equivalente a la expresión de regresión lineal.
- $ln$ denota el logaritmo natural.
- $p(x)$ es la probabilidad de que la variable dependiente sea igual a un caso, dada alguna combinación lineal de los predictores. La fórmula para $p(x)$ ilustra que la probabilidad de que la variable dependiente iguale un caso es igual al valor de la función logística de la expresión de regresión lineal. Esto es importante porque muestra que el valor de la expresión de regresión lineal puede variar de infinito negativo a positivo y, sin embargo, después de la transformación, la expresión resultante para la probabilidad $p(x)$ oscila entre 0 y 1.
- $\beta_0$ es la intersección de la ecuación de regresión lineal (el valor del criterio cuando el predictor es igual a cero).
- $\beta_1 x$ es el coeficiente de regresión multiplicado por algún valor del predictor.
- la base $e$ denota la función exponencial.

### Ejemplo 1

- Abra la base de datos `wells.dat`
- Note que existe una variable llamada `switch`. Dado que esta palabra es un condicional, debemos cambiar el nombre de la variable: `names(datos)[1]="Switch"`
- Realice un gráfico del cambio vs arsénico e interprete

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/wells.dat"
datos <- read.csv(url(uu),sep="",dec=".",header=TRUE)
names(datos)[1]="Switch"
attach(datos)
plot(Switch~arsenic, main="Cambio VS contenido de arsenico")
```




- Corra el siguiente modelo:`ajuste2 <- glm(Switch ~ dist1,family=binomial(link="logit"),x=T)`
- Donde: `dist1 <- dist/100`
- Interpretación: Si la distancia es cero, la probabilidad de cambio es de 0.6, es decir 60%

```
dist1 <- dist/100
ajuste2 <- glm(Switch~dist1,family=binomial(link="logit"), x = T)
summary(ajuste2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = Switch ~ dist1, family = binomial(link = "logit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.4406  -1.3058   0.9669   1.0308   1.6603
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  0.60596    0.06031  10.047  < 2e-16 ***
## dist1       -0.62188    0.09743  -6.383 1.74e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 4118.1  on 3019  degrees of freedom
## Residual deviance: 4076.2  on 3018  degrees of freedom
## AIC: 4080.2
##
```

```
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

- Para la interpretación se suele usar los *efectos marginales*.
- Instalar el paquete *erer*
- Correr el comando:

`ea <- maBina(w = ajuste2, x.mean = T, rev.dum = TRUE) ea$out`

- Interpretación: La probabilidad de que se cambien a un pozo seguro disminuye 15% en una familia que est? a una distancia de una unidad respecto a la distancia promedio (0.48)

```
library(erer)
ea <- maBina(w = ajuste2, x.mean = TRUE, rev.dum = TRUE)
ea$out
```

```
##             effect error t.value p.value
## (Intercept)  0.148 0.014  10.404       0
## dist1       -0.152 0.024  -6.382       0
```

- Aunque no tan exacto, una forma de obtener los efectos marginales (aunque sin tanta precisión), es:

`coef(ajuste2)/4` - Interpretación: La probabilidad de que se cambien a un pozo seguro disminuye 15% en una familia que está a una distancia de una unidad respecto a la distancia promedio (0.48)

```
coef(ajuste2)/4
```

```
## (Intercept)       dist1
##   0.1514898  -0.1554705
```

- Ajuste un nuevo modelo incluyendo la variable *arsenic*
- Calcule los efectos marginales
- Interpretación:
  - cambio disminuye 22% para una casa que está a una unidad adicional de la distancia promedio.
  - a una distancia fija, comparando un pozo de contenido de arsénico promedio más una unidad, la probabilidad aumenta un 11%

```
ajuste3 <- glm(Switch~dist1+arsenic,family=binomial(link="logit"), x = T)
summary(ajuste3)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = Switch ~ dist1 + arsenic, family = binomial(link = "logit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.6351  -1.2139   0.7786   1.0702   1.7085
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  0.002749   0.079448   0.035    0.972
## dist1       -0.896644   0.104347  -8.593   <2e-16 ***
## arsenic      0.460775   0.041385  11.134   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 4118.1  on 3019  degrees of freedom
```

```
## Residual deviance: 3930.7  on 3017  degrees of freedom
## AIC: 3936.7
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

```
ea <- maBina(w = ajuste3, x.mean = TRUE, rev.dum = TRUE)
ea$out
```

```
##             effect error t.value p.value
## (Intercept)  0.001 0.019   0.035   0.972
## dist1       -0.218 0.025  -8.598   0.000
## arsenic      0.112 0.010  11.217   0.000
```

¿Cual de las dos variables es más importante en la decisión de cambio?

- Se debe calcular los coeficientes estandarizados.

```
#este es el coeficiente estandarizado de la distancia
d <- sd(dist1)*(-0.896644)
# este es el coeficiente estandarizado del ars?nico
a <- sd(arsenic)*(0.460775)
abs(a);abs(d)
```

```
## [1] 0.5102563
```

```
## [1] 0.3450167
```

```
# de modo que el arsénico es mas importante,
# pero para decirlo por probabilidades:
```

#### Ejemplo 2

Abra la tabla 15.7

- Los datos son el efecto del Sistema de Enseñanza Personalizada (PSI) sobre las calificaciones.
  - Calificación $Y = 1$ si la calificación final fue A
  - $Y = 0$ si la calificación final fue B o C
  - `TUCE` = calificación en un examen presentado al comienzo del curso para evaluar los conocimientos previos de macroeconomía
  - `PSI` = 1 con el nuevo método de enseñanza, 0 en otro caso
  - `GPA` = promedio de puntos de calificación inicial
- Ajuste el siguiente modelo: `ajuste1 <- glm(GRADE~GPA+TUCE+PSI, family=binomial(link="logit"),x=T)`
- Interprete el modelo

En los modelos cuya variable regresada binaria, la bondad del ajuste tiene una importancia secundaria. Lo que interesa son los signos esperados de los coeficientes de la regresión y su importancia práctica y/o estadística

Importamos los datos y revisamos la variable dependiente:

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/tabla15_7.csv"
datos <- read.csv(url(uu),sep=";",dec=".",header=TRUE)
attach(datos)
table(GRADE)
```

```
## GRADE
##  0  1
## 21 11
```

Ajustamos el modelo:

```r
ajuste1 <- glm(GRADE~GPA+TUCE+PSI,family=binomial(link="logit"),x=T)
summary(ajuste1)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = GRADE ~ GPA + TUCE + PSI, family = binomial(link = "logit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9551  -0.6453  -0.2570   0.5888   2.0966
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -13.02135    4.93127  -2.641  0.00828 **
## GPA           2.82611    1.26293   2.238  0.02524 *
## TUCE          0.09516    0.14155   0.672  0.50143
## PSI           2.37869    1.06456   2.234  0.02545 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 41.183  on 31  degrees of freedom
## Residual deviance: 25.779  on 28  degrees of freedom
## AIC: 33.779
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Para la interpretación:

```r
ea <- maBina(w = ajuste1, x.mean = TRUE, rev.dum = TRUE)
ea$out
```

```
##             effect error t.value p.value
## (Intercept) -2.460 0.818  -3.008   0.006
## GPA          0.534 0.237   2.252   0.032
## TUCE         0.018 0.026   0.685   0.499
## PSI          0.456 0.181   2.521   0.018
```

¿Son, en conjunto, los coeficientes significativos?: Test de razón de verosimilitud

with(ajuste1, pchisq(null.deviance - deviance,      df.null - df.residual, lower.tail = FALSE))

- Odds Ratio:

exp(coef(ajuste1))

```r
# el análogo de la prueba F
with(ajuste1, pchisq(null.deviance - deviance, df.null - df.residual, lower.tail = FALSE))
```

```
## [1] 0.001501879
```

```r
# Odds ratio:
exp(coef(ajuste1))
```

```
##  (Intercept)          GPA         TUCE          PSI
## 2.212590e-06 1.687971e+01 1.099832e+00 1.079073e+01
```

Esto indica que los estudiantes expuestos al nuevo método de enseñanza son por encima de 10 veces más propensos a obtener una A que quienes no están expuestos al nuevo método, en tanto no cambien los demás factores.

# Probit

En los modelos logia se propuso la logística, en este caso se propone la Función de Distribución Acumulada Normal. Suponga que la variable de respuesta es binaria, 1 o 0. $Y$ podría representar la presencia/ausencia de una condición, éxito/fracaso, si/no. Se tiene también un vector de regresoras $X$, el modelo toma la forma:

$$\Pr(Y=1\mid X)=\Phi(X^T\beta),$$

donde $Pr$ es la prbabilidad y $\Phi$ distribución acumulada de la normal estándar $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$. Los parámetros $\beta$ se estiman típicamente con el método de máxima verosimilitud.

### Ejemplo 1

- Realizamos el mismo procedimiento que en el logit
- Abra la tabla 15.7
- Los datos son el efecto del Sistema de Ense?anza Personalizada (PSI) sobre las calificaciones.
- Ajuste el siguiente modelo:

```
ajuste1 <- glm(GRADE~GPA+TUCE+PSI, family=binomial(link="probit"),x=T)
```

- Interprete el modelo

```
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/tabla15_7.csv"
datos <- read.csv(url(uu),sep=";",dec=".",header=TRUE)
attach(datos)
```

```
ajuste2 <- glm(GRADE~GPA+TUCE+PSI,family=binomial(link="probit"),x=T)
summary(ajuste2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = GRADE ~ GPA + TUCE + PSI, family = binomial(link = "probit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9392  -0.6508  -0.2229   0.5934   2.0451
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -7.45231    2.57152  -2.898  0.00376 **
## GPA          1.62581    0.68973   2.357  0.01841 *
## TUCE         0.05173    0.08119   0.637  0.52406
## PSI          1.42633    0.58695   2.430  0.01510 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
```

```
##     Null deviance: 41.183  on 31  degrees of freedom
## Residual deviance: 25.638  on 28  degrees of freedom
## AIC: 33.638
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

```r
ajuste3 <- glm(GRADE~GPA+PSI,family=binomial(link="probit"),x=T)
summary(ajuste2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = GRADE ~ GPA + TUCE + PSI, family = binomial(link = "probit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9392  -0.6508  -0.2229   0.5934   2.0451
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -7.45231    2.57152  -2.898  0.00376 **
## GPA          1.62581    0.68973   2.357  0.01841 *
## TUCE         0.05173    0.08119   0.637  0.52406
## PSI          1.42633    0.58695   2.430  0.01510 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 41.183  on 31  degrees of freedom
## Residual deviance: 25.638  on 28  degrees of freedom
## AIC: 33.638
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

En la media muestral de $GPA$ de 3.117, el efecto de $PSI$ sobre la probabilidad es 0.465.

```r
library(erer)
ea1 <- maBina(w = ajuste2, x.mean = TRUE, rev.dum = TRUE)
ea1$out
```

```
##             effect error t.value p.value
## (Intercept) -2.445 0.765  -3.198   0.003
## GPA          0.533 0.227   2.353   0.026
## TUCE         0.017 0.026   0.645   0.524
## PSI          0.464 0.171   2.712   0.011
```

En el caso actual, el efecto marginal para PSI de 0.456 nos dice que, para dos individuos hipotéticos con valores promedio en $GPA$ (3.12) y $TUCE$ (21.94), la probabilidad de éxito prevista es 0.456 mayor para el individuo en $PSI$ que para alguien que está en un aula tradicional.

Los efectos marginales para variables continuas miden la tasa de cambio instantáneo, que puede o no estar cerca del efecto en $P(Y = 1)$ de un aumento de una unidad en $X_k$. Lo que el efecto marginal más o menos le dice es que, si, por ejemplo, $X_k$ aumentara en una cantidad muy pequeña (por ejemplo, 0.001), entonces $P(Y = 1)$ aumentaría en aproximadamente $0.001 * 0.534 = .000534$, por ejemplo.

**Ejemplo 2**

Volvamos al ejemplo del cambio debido al arsénico

```r
uu <- "https://raw.githubusercontent.com/vmoprojs/DataLectures/master/wells.dat"
datos <- read.csv(url(uu),sep="",dec=".",header=TRUE)
names(datos)[1]="Switch"
datos$dist1 <- datos$dist/100
ajuste1 <- glm(Switch~dist1,family=binomial(link="probit"),x=T,data = datos)
ea <- maBina(w = ajuste1, x.mean = T, rev.dum = TRUE)
ea$out
```

```
##             effect error t.value p.value
## (Intercept)  0.148 0.014  10.410       0
## dist1       -0.152 0.024  -6.419       0
```

Se puede apreciar que no siempre deseamos evaluar las cosas en la *media*. En `R` se puede programar una función para este caso. Comprobemos los resultados de la media funcionalmente.

```r
punt_eval<-function(x){
    t = coef(ajuste1)[1] +
        coef(ajuste1)[2]*x
    t
}
# Si quiero evaluar en la media como comprobación:
x <- as.numeric(punt_eval(mean(datos$dist1)))
dnorm(x,0,1)*coef(ajuste1)[2]
```

```
##      dist1
## -0.1517748
```

```r
# Si quiero evaluar en el máximo:
x <- as.numeric(punt_eval(max(datos$dist1)))
dnorm(x,0,1)*coef(ajuste1)[2]
```

```
##      dist1
## -0.0995863
```

**Ejemplo 3**

Se desea saber si la variable ranking es significativa en la admisión.

```r
rm(list=ls())
admisiones <- read.csv(file="https://stats.idre.ucla.edu/stat/data/binary.csv",
                       header=T, sep=",", dec=".")
head(admisiones)
```

```
##   admit gre  gpa rank
## 1     0 380 3.61    3
## 2     1 660 3.67    3
## 3     1 800 4.00    1
## 4     1 640 3.19    4
## 5     0 520 2.93    4
## 6     1 760 3.00    2
```

```r
attach(admisiones)
# estudiantes aplicando a un posgrado 1 si es admitido 0 si no
aj.adm <- glm(admit~gre+gpa+factor(rank),
```

```r
             family = binomial(link="probit"),x=T)           #modelo probit
summary(aj.adm)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = admit ~ gre + gpa + factor(rank), family = binomial(link = "probit"),
##     x = T)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.6163  -0.8710  -0.6389   1.1560   2.1035
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)   -2.386836   0.673946  -3.542 0.000398 ***
## gre            0.001376   0.000650   2.116 0.034329 *
## gpa            0.477730   0.197197   2.423 0.015410 *
## factor(rank)2 -0.415399   0.194977  -2.131 0.033130 *
## factor(rank)3 -0.812138   0.208358  -3.898 9.71e-05 ***
## factor(rank)4 -0.935899   0.245272  -3.816 0.000136 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 499.98  on 399  degrees of freedom
## Residual deviance: 458.41  on 394  degrees of freedom
## AIC: 470.41
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Para dos individuos hipotéticos con valores promedio en *gre* (580) y *gpa* (3.39), la probabilidad de éxito prevista es 0.4153 menor para el individuo en el ranking 2 que para alguien que está en el ranking 1.

### Test de Wald

Se usa para ver la significancia de uno o varios coeficientes del modelo de manera conjunta. En el caso univariado, el Wald estadística es

$$\frac{(\widehat{\theta}-\theta_0)^2}{\mathrm{var}(\hat{\theta})}$$

que se compara contra una distribución de chi-cuadrada.

```r
library(aod)
wald.test(b=coef(aj.adm), Sigma = vcov(aj.adm), Term=4:6)
```

```
## Wald test:
## ----------
##
## Chi-squared test:
## X2 = 21.4, df = 3, P(> X2) = 8.9e-05
```

La variable es significativa.

Encontremos las probabilidades de ser aceptado en función de algunos datos, se obtienen de la siguiente manera:

```r
nuevos.datos <- data.frame(gre=c(350,450,550,650),
                           gpa=c(2.5,3,3.5,3.99), rank=factor(c(1,1,2,2)))
nuevos.datos
```

```
##   gre  gpa rank
## 1 350 2.50    1
## 2 450 3.00    1
## 3 550 3.50    2
## 4 650 3.99    2
```

```r
predict(aj.adm, nuevos.datos, type="response",se.fit=T)
```

```
## $fit
##         1         2         3         4
## 0.2385252 0.3689520 0.3543489 0.4992185
##
## $se.fit
##          1          2          3          4
## 0.08062956 0.07428600 0.04308419 0.06150729
##
## $residual.scale
## [1] 1
```

**Conclusiones:**

- Los modelos probit y logit arrojan probabilidades semejantes (en términos marginales)
- La diferencia principal es que la distribución logística tiene las colas un poco más anchas
- En general se prefiere usar modelos logit por su facilidad de implementación matemática e interpretación más rápida

# Tobit

Una extensión del modelo probit es el modelo tobit, desarrollado por James Tobin, economista laureado con el Nobel.

- Se lo conoce también como *modelos de datos censurados*
- Se persigue el mismo objetivo que la regresión lineal, pero tomando en cuenta toda la muestra.

### Ejemplo

Las variables del modelo son:

- $Y$: Num de relaciones extramaritales durante el año anterior
- $Z1$: 0 para mujer y 1 hombre; $Z2$: edad
- $Z3$: Número de años de matrimonio
- $Z4$: 0 si no tienen hijos, 1 si tienen
- $Z5$: religiosidad en escala ascendente
- $Z6$: escolaridad; $Z7$:ocupación; $Z8$: autoevaluación del matrimonio (1 muy infeliz 5 muy feliz)

Abramos y exploremos los datos:

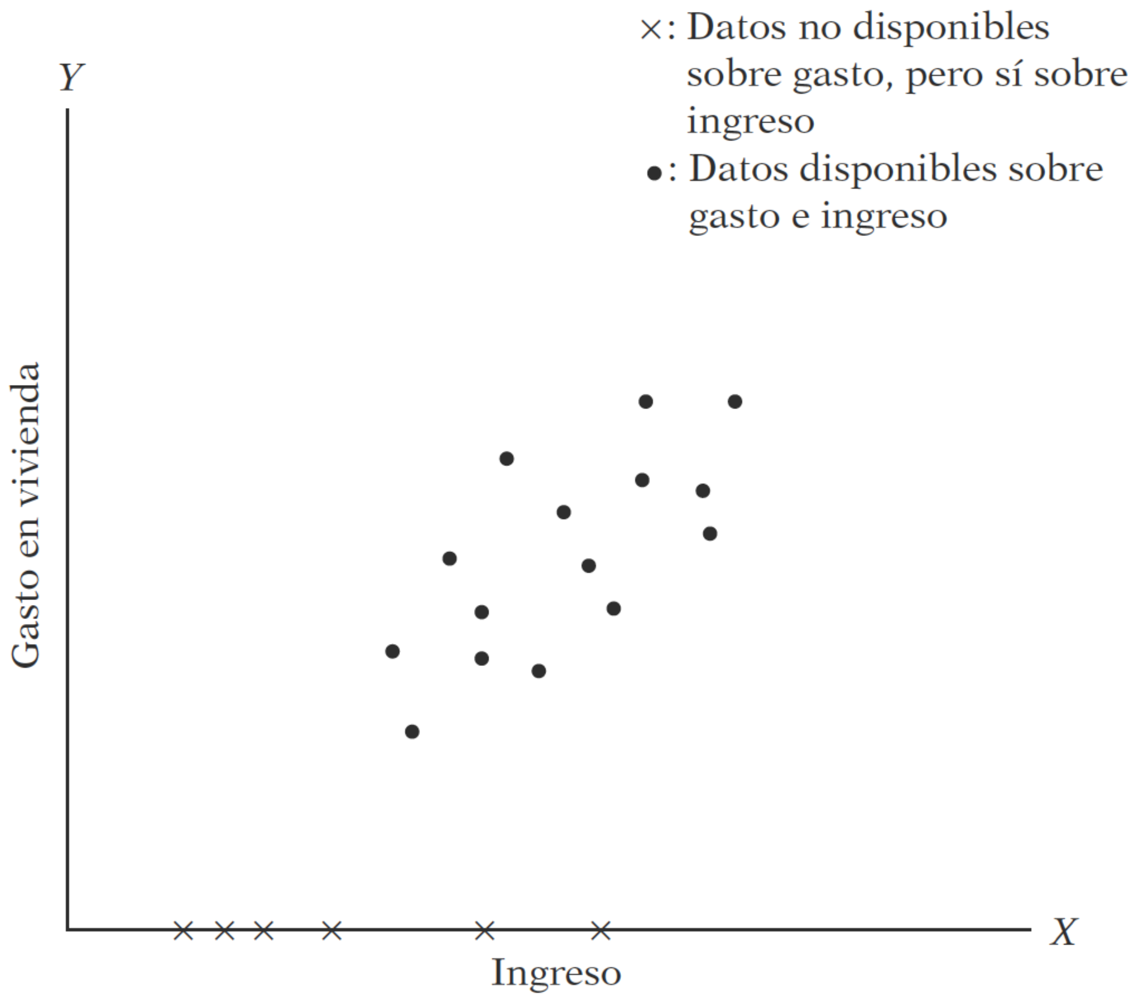

×: Datos no disponibles sobre gasto, pero sí sobre ingreso
•: Datos disponibles sobre gasto e ingreso
Y
Gasto en vivienda
X
Ingreso

Figure 2:

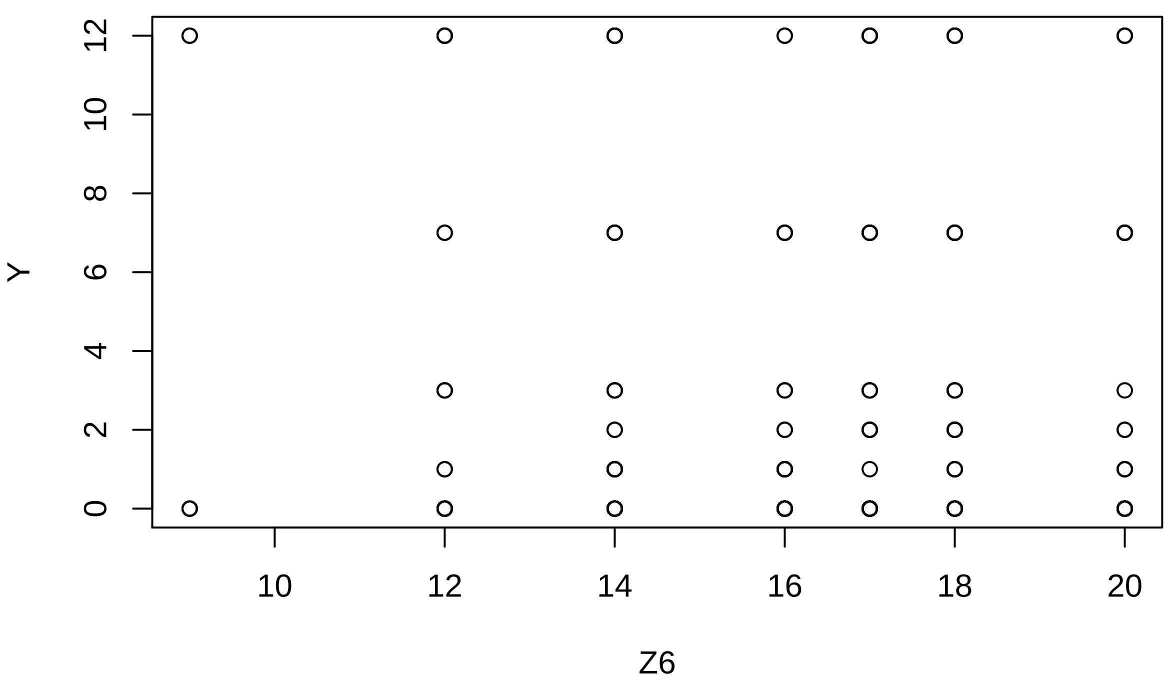
```
rm(list=ls())
a <- "http://people.stern.nyu.edu/wgreene/Text/Edition7/TableF18-1.txt"
rex <- read.csv(file=a, sep="", dec=".")
attach(rex)
head(rex)
```

```
##   ID X1 X2 Z1 Z2    Z3 Z4 Z5 Z6   X3 Z7 Z8 Y X4 X5
## 1  4  0  1  1 37 10.00  0  3 18 40.0  7  4 0  0  1
## 2  5  0  1  0 27  4.00  0  4 14 20.0  6  4 0  0  1
## 3 11  0  1  0 32 15.00  1  1 12 12.5  1  4 0  0  1
## 4 16  0  1  1 57 15.00  1  5 18 12.5  6  5 0  0  1
## 5 23  0  1  1 22  0.75  0  2 17  7.5  6  3 0  0  1
## 6 29  0  1  0 32  1.50  0  2 17  7.5  5  5 0  0  1
```

```
# 7 es una codificacion [4,10]
table(Y)
```

```
## Y
##   0   1   2   3   7  12
## 451  34  17  19  42  38
```

```
plot(Y~Z6) # Z6 es escolaridad
```




Ajustemos el modelo:

```
library(AER)
aj.rex = tobit(Y ~ Z1+Z2+Z3+Z4+Z5+Z6+Z7+Z8,
               left=0,right=Inf,dist = "gaussian")
summary(aj.rex)
```

```
##
## Call:
## tobit(formula = Y ~ Z1 + Z2 + Z3 + Z4 + Z5 + Z6 + Z7 + Z8, left = 0,
##     right = Inf, dist = "gaussian")
##
```

```
## Observations:
##          Total  Left-censored     Uncensored Right-censored
##            601            451            150              0
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  7.60849    3.90599   1.948 0.051426 .
## Z1           0.94579    1.06287   0.890 0.373548
## Z2          -0.19270    0.08097  -2.380 0.017316 *
## Z3           0.53319    0.14661   3.637 0.000276 ***
## Z4           1.01918    1.27957   0.797 0.425741
## Z5          -1.69900    0.40548  -4.190 2.79e-05 ***
## Z6           0.02536    0.22767   0.111 0.911304
## Z7           0.21298    0.32116   0.663 0.507220
## Z8          -2.27328    0.41541  -5.472 4.44e-08 ***
## Log(scale)   2.11123    0.06715  31.439  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Scale: 8.258
##
## Gaussian distribution
## Number of Newton-Raphson Iterations: 4
## Log-likelihood: -704.7 on 10 Df
## Wald-statistic: 68.13 on 8 Df, p-value: 1.1547e-11
```

Dejemos únicamente las variables significativas:

```r
aj.rex2 = tobit(Y ~ Z2+Z3+Z5+Z8,left=0,right=Inf,dist = "gaussian")
summary(aj.rex2)
```

```
##
## Call:
## tobit(formula = Y ~ Z2 + Z3 + Z5 + Z8, left = 0, right = Inf,
##     dist = "gaussian")
##
## Observations:
##          Total  Left-censored     Uncensored Right-censored
##            601            451            150              0
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  9.08289    2.65881   3.416 0.000635 ***
## Z2          -0.16034    0.07772  -2.063 0.039095 *
## Z3           0.53890    0.13417   4.016 5.91e-05 ***
## Z5          -1.72337    0.40471  -4.258 2.06e-05 ***
## Z8          -2.26735    0.40813  -5.556 2.77e-08 ***
## Log(scale)   2.11310    0.06712  31.482  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Scale: 8.274
##
## Gaussian distribution
## Number of Newton-Raphson Iterations: 4
```

```
## Log-likelihood: -706.4 on 6 Df
## Wald-statistic:  66.4 on 4 Df, p-value: 1.3044e-13
```

Interpretación: El coeficiente negativo de $Z8$ (felicidad marital) significa que mientras más feliz se es, menor es la incidencia de las relaciones extramaritales.

# Referencias