

EXERCICES 4

Noyau Gaussian

a) $\int k^2(u) du$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} \right]^2 du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{a}u)^2} du$$

- Par un changement de variables, posons

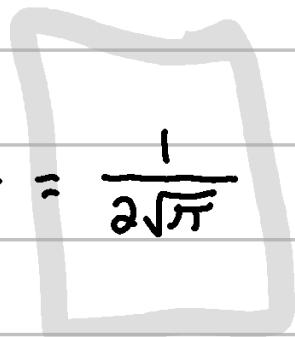
$$\sqrt{a}u = v \Rightarrow \sqrt{a}du = dv \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{a}}dv$$

d'anc

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) dv$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{a}} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{a}} dv}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$



$$\underline{b)} \int u^2 K(u) du$$

$$= \int u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Posons

$$w = u$$

$$dw = du$$

$$dv = u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$v = \int u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\text{si } s = -\frac{u^2}{2} \quad ds = -u du$$

$$v = - \int e^s ds = -e^s = -e^{-\frac{u^2}{2}}$$

donc par l'intégration par partie $\int w dv = wv - \int v dw$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int w dv = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[u e^{-\frac{u^2}{2}} + \int e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

en évaluant l'intégrale de $-\infty$ à ∞

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\left(u e^{-\frac{u^2}{2}} \right)}_{(1)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] +$$

Prenons la partie (1) de l'équation précédente

$$(1) \lim_{u \rightarrow \infty} u e^{-u^2/2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indéfini}$$

Par la règle de l'hôpital

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{d(u)/du}{d(e^{-u^2/2})/du} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{ue^{-u^2/2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du \right]$$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1$

Noyau Epanechnikov

$$Q) \int_{-\infty}^{\infty} k^2(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{4} (1-u^2) \right]^2 du \quad * \text{évalué entre } -1 \text{ et } 1, \\ \text{car } u \in [-1, 1]$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{9}{16} (1-2u^2+u^4) du$$



$$= \frac{9}{16} \int_{-1}^1 1 du - \frac{18}{16} \int_{-1}^1 u^3 du + \frac{9}{16} \int_{-1}^1 u^4 du$$

$$= \left(\frac{9}{16} u - \frac{3}{8} u^3 + \frac{9}{80} u^5 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{8} + \frac{9}{80} \right) - \left(-\frac{9}{16} + \frac{3}{8} - \frac{9}{80} \right)$$

$$= \frac{3}{5}$$

donc $\int_{-1}^1 k^3(u) du = \frac{3}{5}$ avec le noyau Epanechnikov

$$\underline{\underline{b)} \int u^3 k(u) du}$$

$$= \int_{-1}^1 u^3 \frac{3}{4} (1-u^2) du$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{3}{4} u^3 du - \int_{-1}^1 \frac{3}{4} u^5 du$$

$$= \left(\frac{3}{4} u^4 \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{3}{20} u^6 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} - -\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{3}{20} - -\frac{3}{20} \right) = \frac{1}{5}$$

donc $\int_{-1}^1 u^3 k(u) du = \frac{1}{5}$ pour le noyau Epanechnikov

Noyau Quadratique

$$a) \int k^2(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{15}{16} (1-u^2)^2 \right] du \quad * \text{évalue entre } -1 \text{ et } 1, \\ \text{car } u \in [-1, 1]$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{225}{256} (1-2u^2+u^4)^2 du$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{225}{256} (1-4u^2+6u^4-4u^6+u^8) du$$

$$= \frac{225}{256} \left[u - \frac{4}{3}u^3 + \frac{6}{5}u^5 - \frac{4}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 \right] \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{225}{256} \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9} \right) - \frac{225}{256} \left(-1 + \frac{4}{3} - \frac{6}{5} + \frac{4}{7} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= 5/7$$

Donc, $\int_{-1}^1 k^2(u) du = 5/7$ avec le noyau quadratique

$$\frac{b)}{\pi} \int u^2 k(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 u^2 \frac{15}{16} (1-u^2)^3 du$$

$$= \int_{-1}^1 u^2 \frac{15}{16} (1-2u^2+u^4) du$$

$$= \frac{15}{16} \int_{-1}^1 (u^2 - 2u^4 + u^6) du$$

$$= \frac{15}{16} \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{15}{16} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) - \frac{15}{16} \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$= \frac{1}{17}$$

donc $\int_{-1}^1 u^2 k(u) du = \frac{1}{17}$ pour le noyau quadratique

EXERCICE 5

Montrer que $E(p_{AA}) = p(x) + \lambda \left\{ \frac{1 - cp(x)}{c-1} \right\}$

$$P_{AA}(x_i=x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(X_i, x, \lambda)$$

$$\text{où } L(X_i, x, \lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{si } X_i = x \quad (p(x)) \\ \frac{\lambda}{c-1} & \text{sinon} \quad (1-p(x)) \end{cases}$$

Donc

$$E[p_{AA}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(X_i, x, \lambda)\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[L(X_i, x, \lambda)]$$

$$= \frac{1}{n} n \left((1-\lambda)p(x) + \left(\frac{\lambda}{c-1}\right)(1-p(x)) \right)$$

$$= p(x) - \lambda p(x) + \frac{\lambda}{c-1} - \frac{\lambda}{c-1} p(x)$$

$$= p(x) + \lambda \left[-\frac{(c-1)p(x)}{c-1} + \frac{1}{c-1} - \frac{p(x)}{c-1} \right]$$

$$= p(x) + \lambda \left[\frac{p(x) - cp(x) + 1 - p(x)}{c-1} \right] \rightarrow$$

$$= p(x) + \lambda \left[\frac{p(x) - c p(x) + 1 - p(x)}{c-1} \right]$$

$$E[p_{AA}] = p(x) + \lambda \left[\frac{1 - c p(x)}{c-1} \right]$$

