

EXERCICES 4

Noyau Gaussien

$$\underline{a)} \int k^2(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2\right\} \right]^2 du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\sqrt{2} u)^2} du$$

• Par un changement de variables, posons

$$\sqrt{2} u = v \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} du = dv \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{2}} dv$$

donc

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) dv$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
 b) \int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du
 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 w &= u \\
 dw &= du
 \end{aligned}$$

$$dv = u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$V = \int u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\text{si } s = -\frac{u^2}{2} \quad ds = -u du$$

$$V = - \int e^s ds = -e^s = -e^{-\frac{u^2}{2}}$$

donc par l'intégration par partie $\int w dv = wv - \int v dw$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int w dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[u e^{-\frac{u^2}{2}} + \int e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

en évaluant l'intégrale de $-\infty$ à ∞

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\left(u e^{-\frac{u^2}{2}} \right)}_{(1)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

+

Prenons la partie (1) de l'équation précédente

$$(1) \lim_{u \rightarrow \infty} u e^{-u^2/2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indéfini}$$

Par la règle de l'hôpital

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{d(u)/du}{d(e^{-u^2/2})/du} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u e^{u^2/2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u dv = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1$$

Noyau Epanechnikov

$$a) \int_{\mathbb{R}} K^2(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{4} (1 - u^2) \right]^2 du$$

* évalué entre -1 et 1,
car $u \in [-1, 1]$

$$= \int_{-1}^1 \frac{9}{16} (1 - 2u^2 + u^4) du \quad \rightarrow$$

$$= 9/16 \int_{-1}^1 1 du - 18/16 \int_{-1}^1 u^2 du + 9/16 \int_{-1}^1 u^4 du$$

$$= \left(9/16 u - 3/8 u^3 + 9/80 u^5 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(9/16 - 3/8 + 9/80 \right) - \left(-9/16 + 3/8 - 9/80 \right)$$

$$= 3/5$$

donc $\int_{-1}^1 k^2(u) du = 3/5$ avec le noyau Epanechnikov

b) $\int u^2 k(u) du$

$$= \int_{-1}^1 u^2 \cdot 3/4 (1-u^2) du$$

$$= \int_{-1}^1 3/4 u^2 du - \int_{-1}^1 3/4 u^4 du$$

$$= \left(\frac{1}{4} u^3 \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{3}{20} u^5 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} - -\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{3}{20} - -\frac{3}{20} \right) = 1/5$$

donc $\int_{-1}^1 u^2 k(u) du = 1/5$ pour le noyau Epanechnikov

Noyau Quadratique

$$a) \int_{-1}^1 k^2(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{15}{16} (1-u^2)^2 \right] du \quad \begin{array}{l} * \text{évalué entre } -1 \text{ et } 1, \\ \text{car } u \in [-1, 1] \end{array}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{225}{256} (1-2u^2+u^4)^2 du$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{225}{256} (1-4u^2+6u^4-4u^6+u^8) du$$

$$= \frac{225}{256} \left[u - \frac{4}{3}u^3 + \frac{6}{5}u^5 - \frac{4}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 \right] \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{225}{256} \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9} \right) - \frac{225}{256} \left(-1 + \frac{4}{3} - \frac{6}{5} + \frac{4}{7} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= 5/7$$

Donc, $\int_{-1}^1 k^2(u) du = 5/7$ avec le noyau quadratique

$$b) \int_{-1}^1 u^2 k(u) du$$

$$= \int_{-1}^1 u^2 \frac{15}{16} (1-u^2)^2 du$$

$$= \int_{-1}^1 u^2 \frac{15}{16} (1-2u^2+u^4) du$$

$$= \frac{15}{16} \int_{-1}^1 (u^2 - 2u^4 + u^6) du$$

$$= \frac{15}{16} \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{15}{16} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) - \frac{15}{16} \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$= \frac{1}{7}$$

donc $\int_{-1}^1 u^2 k(u) du = \frac{1}{7}$ pour le noyau quadratique

EXERCICE 5

Montrer que $E(p_{AA}) = p(x) + \lambda \left\{ \frac{1 - cp(x)}{c-1} \right\}$

$$p_{AA}(x_i = x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(x_i, x, \lambda)$$

$$\text{où } L(x_i, x, \lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{si } x_i = x \quad (p(x)) \\ \frac{\lambda}{c-1} & \text{sinon} \quad (1 - p(x)) \end{cases}$$

Donc

$$E[p_{AA}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(x_i, x, \lambda)\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[L(x_i, x, \lambda)]$$

$$= \frac{1}{n} n \left((1 - \lambda) p(x) + \left(\frac{\lambda}{c-1}\right) (1 - p(x)) \right)$$

$$= p(x) - \lambda p(x) + \frac{\lambda}{c-1} - \frac{\lambda}{c-1} p(x)$$

$$= p(x) + \lambda \left[-\frac{(c-1)p(x)}{c-1} + \frac{1}{c-1} - \frac{p(x)}{c-1} \right]$$

$$= p(x) + \lambda \left[\frac{p(x) - cp(x) + 1 - p(x)}{c-1} \right] \rightarrow$$

$$= p(x) + \lambda \left[\frac{\cancel{p(x)} - cp(x) + 1 - \cancel{p(x)}}{c-1} \right]$$

$$E[p_{AA}] = p(x) + \lambda \left[\frac{1 - cp(x)}{c-1} \right]$$

