

诚信应考,考试作弊将带来严重后果!

考试中心填写:

____年____月____日
考 试 用

# 湖南大学课程考试试卷

课程名称: 线性代数 A 课程编码: \_\_\_\_\_ 试卷编号: A; 考试时间: 120 分钟

题 号	1~6	7	8	9	10	11	12	13	14		总分
应得分	24	8	8	10	10	10	12	12	6		100
实得分											
评卷人											

## ●填空题(第 1~6 题各 4 分, 共 24 分)

1. 向量组  $\alpha_1 = [1, -2, 2, 3]^T$ ,  $\alpha_2 = [-2, 4, -1, 3]^T$ ,  $\alpha_3 = [-1, 2, 0, 3]^T$ ,  $\alpha_4 = [0, 6, 2, 3]^T$ ,  $\alpha_5 = [2, -6, 3, 4]^T$  的一个最大线性无关组为\_\_\_\_\_.

2. 已知 3 阶方阵  $A$ , 有  $|A| = \frac{1}{2}$ ,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则行列式  $|(3A)^{-1} - A^*| =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 满足  $A^2 = E$  和  $B^2 = E$ , 且  $|A| + |B| = 0$ , 则  $|A+B| =$ \_\_\_\_\_.

4. 若 3 阶方阵  $A$  有特征值 1, 1, 5, 则方阵  $E+A^{-1}$  的特征值为\_\_\_\_\_.

5. 设  $A=(a_{ij})$  是一个 3 阶的实正交矩阵, 且  $a_{11}=1$ . 若有  $b=(1, 0, 0)^T$ , 则线性方程组  $Ax=b$  的解为\_\_\_\_\_.

6. 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$  是正定的, 则常数  $t$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

---

●计算题 ( 第 7~8 题各 8 分,第 9~11 题各 10 分,第 12、13 题各 12 分,共 70 分 )

7. 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

求矩阵  $A^6$  和行列式  $|A^8|$ .

9. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$ , 且满足  $A^{-1}BA = 6A + BA$ , 求矩阵  $B$ .

10. 设有向量组  $\alpha_1 = [0, 1, -1]^T$ ,  $\alpha_2 = [a, 2, 1]^T$ ,  $\alpha_3 = [b, 1, 0]^T$  和向量组  $\beta_1 = [1, 2, -3]^T$ ,  $\beta_2 = [3, 0, 1]^T$ ,  $\beta_3 = [9, 6, -7]^T$ . 若这两个向量组有相同的秩, 且  $\alpha_3$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性表示, 求常数  $a, b$  的值.

---

11. 设三维向量空间  $\mathbf{R}^3$  中的两组基分别为  $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$ ,  $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$ ,  $\alpha_3 = [1, 0, 1]^T$  和  $\beta_1 = [1, 0, 0]^T$ ,  $\beta_2 = [1, 1, 0]^T$ ,  $\beta_3 = [1, 1, 1]^T$ . (1) 求由基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵; (2) 求基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的向量  $\eta = [3, 1, 2]^T$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标.

12. 设线性方程组 
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$
 当  $\lambda$  取何值时它无解? 当  $\lambda$  取何值时它有

解? 有解时求出它的解.

13. 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ , 用正交变换将其化为标准形, 并写出这个正交变换; 试指出  $f(x_1, x_2, x_3) = 4$  是怎样的二次曲面?

---

●讨论题 ( 第 14 题 6 分 , 共 6 分 )

14. 若矩阵  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  满秩, 则空间的两条直线  $L_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$

和  $L_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$  是平行、重叠、异面还是会交于一点? 试给出结论

并证明之.