湖南大学期末考试试卷

课程名称：线性代数 A；课程编码：GE03003；考试时间：120 分钟

注意：请在答题纸规定的地方答题，否则计零分.

一、(此题答在答题纸第 1 页) 填空题 (每小题 3 分，共 12 分)

1. 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} t & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}$ 为 3×4 矩阵，且秩 $(\mathbf{B})=3$，若秩 $(\mathbf{AB})=2$，则 $t=$ ____.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{101}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{100}=$ ____________ .

3. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素全为 1，则 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值是__________________.

4. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\mathbf{A}|=2$，则 $\left|(2\mathbf{A})^{-1}-5\mathbf{A}^*\right|=$ __________.

二、(此题答在答题纸第 1 页) 将矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **化为行最简形矩阵.（8 分）**

三、(此题答在答题纸第 2 页) (1) 已知 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，**求** $A_{41}+A_{42}+A_{43}$

和 $A_{44}+A_{45}$，**其中** $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ **为** D_5 **中第 4 行第** j **列元素的代数余子式.（8 分）**

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ **是三维列向量, 矩阵** $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_2),\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)$,

$\mathbf{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+3\boldsymbol{\alpha}_1)$, **若** $|\mathbf{B}|=-5,|\mathbf{C}|=40$, **求** $|\mathbf{A}|$. **(8 分)**

四、(此题答在答题纸第 3 页) (1) 已知四阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵为 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，**试求其伴随矩阵** $\mathbf{A}^*$ **的逆矩阵.（8 分）**

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\beta}=(1,-1,2)^T,\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，**且** $\left|k\mathbf{E}-\mathbf{A}^5\right|=k^3+1$，**试求** k. **(8 分)**

五、(此题答在答题纸第 4 页) 在 R^3 中求一非零向量使之在标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标相同，其中 $\alpha_1=(1,-1,2)^T,\alpha_2=(2,1,-1)^T,\alpha_3=(-4,1,1)^T$.(8 分)

六、(此题答在答题纸第 4 页) 设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,k)^T$ 线性表示. (1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组；(2) 求 k 的值；(3) 将向量 β_1 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. (8 分)

七、(此题答在答题纸第 5 页) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geq 2)$ 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间 V 中线性无关的向量组，任取 $k_1,k_2,\cdots k_{r-1}\in\mathbf{P}$，求证：$\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_r,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_r,...,\beta_{r-1}=\alpha_{r-1}+k_{r-1}\alpha_r$ 线性无关.(10 分)

八、(此题答在答题纸第 6 页)已知二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换 $(x,y,z)^T=P(\xi,\eta,\zeta)^T$ 化为椭圆柱面 $\eta^2+4\zeta^2=4$. 求 a,b 的值和正交矩阵 P.(12 分)

九、(此题答在答题纸第 7 页)非齐次线性方程组 $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$，当 λ 取何值时有解？并求出它的解.(10 分)