诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

湖南大学课程考试试卷

课程名称：线性代数 A；课程编码：GE03003；试卷编号：A；考试时间：120 分钟

姓名：__________；学号：__________；专业班级：__________

一、计算题 I （第 1-5 题，每题 6 分，共 30 分）

1、设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\3&-2&-1\\5&1&2\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示矩阵 A 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式 $(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$，求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}$；

2、设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，求 AA^*；

3、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$ 的秩及 A^n；

4、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{pmatrix}$ 的特征值，判断其是否可对角化并说明理由；

5、设矩阵 A 是三阶可逆矩阵，将 A 的第二列元素加至第一列对应元素上去，其余元素不变，得到矩阵 B，请说明矩阵 B 可逆，并求 $B^{-1}A$.

二、计算题 II（第 6-9 题，每题 10 分，共 40 分）

6、计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$；

7、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$, 求 A^n (n为正整数)；

8、对于列向量组 $\alpha_1=(1,3,2,0)^T$, $\alpha_2=(7,0,14,3)^T$, $\alpha_3=(2,-1,0,1)^T$, $\alpha_4=(5,1,6,2)^T$, $\alpha_5=(2,-1,4,1)^T$,

(1) 求向量组的秩；

(2) 求向量组的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示。

9、设矩阵 A 为三阶方阵，其特征值为 1，2，3，每个特征值对应的特征向量分别为 $\alpha_1=(-2,1,0)^T, \alpha_2=(2,0,1)^T, \alpha_3=(1,2,-2)^T$，求矩阵 A;

三、讨论与证明题（第 10-11 题，每题 12 分，第 12 题 6 分，共 30 分）

10、对于非齐次线性方程组 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$

当 λ 为何值时，方程组有唯一解、无解或无穷多解？并且在有无穷多组解时求其通解；

11、对于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$，

(1) 若二次型的秩为 2，求参数 a 的值；

(2) 利用正交变换，化二次型为标准型, 并判断 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何形状；

12、设矩阵 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $|A|<0$，证明：必存在 n 维非零列向量 X，使得 $X^TAX<0$.