线性代数B参考答案及评分标准 2013.6

一、填空题（每题4分，共20分）

1. $\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$；　　2. $\frac{27}{2}$；　　3. $k(2,-1,0,-1)^T, k\in\mathbb{R}$；　　4. $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$；

5. (1) $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$；　(2) $a\neq\sqrt{2}$

二、将行列式的第 $2,3,\cdots,n+1$ 列依次加到第1列，得

$$D=\begin{vmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad (5\text{ 分})$$

将上式按第1列展开得

$$D=(-1)^{(n+1)+1}(n+1)a_1a_2\cdots a_n=(-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i. \qquad (8\text{ 分})$$

三、1. 由$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.　(1分)

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ (3\text{ 分})\ \rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$$

因此，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}. \qquad (6\text{ 分})$$

2. 经观察 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1\ \ -1\ \ 1)$，　(9分)

因此，$\boldsymbol{\alpha}^T=(1\ \ -1\ \ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=3$.　(11分)

【注】 1. 本题可先求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，再由$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$得$\boldsymbol{B}$.

2. 本题可先得 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T=(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}$，再直接计算得 $\boldsymbol{A}^2=3\boldsymbol{A}$. 比较两式即得 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=3$.

四、构作矩阵$\boldsymbol{A}$，并对它仅施行初等行变换化为行阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\2&1&5&6\\1&-1&-2&0\\3&0&7&k\end{pmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}\ (2\text{ 分})\ \to\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\0&3&5&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&0&k-14\end{pmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\\\boldsymbol{\beta}_4\end{matrix}=\boldsymbol{B}\qquad(6\text{ 分})$$

则有 $$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

从而，当$k=14$时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，(8 分)
并且由变换过程可知$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.
因此，向量$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组. (11 分)

五、1. 可求得 $|\boldsymbol{A}|=-a(b+1)$， (2 分)

于是 (1) 当$a\neq 0$且$b\neq -1$时，有唯一解； (3 分)

(2) 当$a=0$时，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-b&1&4\\0&1&1&3\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-b&1&4\\0&1&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解； (5 分)

(3) 当$b=-1$时，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\a&1&1&3\\2a&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-1&-1&-2\\0&0&0&1-2a\end{pmatrix}$

若$a=\frac{1}{2}$，则$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$，方程组有无穷多解，否则无解.

总之，当$a\neq 0$且$b\neq -1$时，方程组有唯一解；当$a=\frac{1}{2}$, $b=-1$时，方程组有无穷多解，其余情形方程组无解. (8 分)

2. 由3元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为1知，对应齐次线性方程组的基础解系含 $3-1=2$个解向量. (10 分)

又可求得齐次线性方程组的两个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(1,3,2)^T$$

$$\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1)=(0,2,4)^T$$

且它们线性无关，故为基础解系. (12 分)

由于$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)^T$是非齐次线性方程组的一个特解， (13 分)

从而其通解为

$$X=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)^T+k_1(1,3,2)^T+k_2(0,2,4)^T,\ \ k_1,k_2\in\mathbb{R}. \qquad (14\text{ 分})$$

【注】 第 1 题可以把方程组的增广矩阵化为下面的行阶梯形后进行讨论：

$$\begin{pmatrix}1 & -b & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a(b+1) & 4a+2ab-1\end{pmatrix}.$$

六、1. 设向量$X=(x_1,x_2,x_3)^T$与向量α正交，则

$$\alpha^TX=(1,2,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+x_3=0. \qquad (2\text{ 分})$$

解方程$x_1+2x_2+x_3=0$得与α正交的向量

$$\alpha_1=(-2,1,0)^T,\ \ \alpha_2=(-1,0,1)^T. \qquad (4\text{ 分})$$

将上述向量组正交化可得

$$\beta_1=\alpha_1=(-2,1,0)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=(-1,0,1)^T-\frac{2}{5}(-2,1,0)^T=\frac{1}{5}(-1,-2,5)^T$$

不妨取$\beta=\beta_1=(-2,1,0)^T$, $\gamma=5\beta_2=(-1,-2,5)^T$，则$\alpha,\beta,\gamma$为正交向量组. (7 分)

2. 因为$\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}\neq 0$，所以$\alpha,\beta,\gamma$线性无关，从而构成$\mathbb{R}^3$的基. (9 分)

设$\eta=(1,1,1)^T$在基α,β,γ下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\eta=x_1\alpha+x_2\beta+x_3\gamma\ \ 即\ \ \eta=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \qquad (10\text{ 分})$$

其中(α,β,γ)为可逆矩阵，故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}\eta=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}10\\-3\\1\end{pmatrix}$$

即 $\eta=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{5}\beta+\frac{1}{15}\gamma$. (13 分)

【注】 第 1 题的答案不唯一.

七、二次型f的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{pmatrix}$， (2 分)

由f经正交变换所得的标准形为$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，得$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5. \qquad (4\text{ 分})$$

由特征值的性质可得 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{vmatrix}=2(9-\lambda^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=10$ (7 分)

于是，有 $\lambda=\pm 2$. 由题设已知$\lambda>0$，故$\lambda=2$. (8 分)

对于$\lambda_1=1$，解线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})X=0$，得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1)^T$；

对于$\lambda_2=2$，解线性方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})X=0$，得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^T$；

对于$\lambda_3=5$，解线性方程组$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})X=0$，得特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^T$；(11 分)

特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$已是正交向量， (12 分)

将其单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, (14 分)

作正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

则经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，$f$可化为标准形$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. (15 分)

八、1. 因为

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, \qquad (3\text{ 分})$$

若$a=0$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解$(1,\cdots,1)^T$，这与$\boldsymbol{A}$可逆矛盾.

因此，$a\neq 0$. (5 分)

2. 上式左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

因此，$\boldsymbol{A}^{-1}$的每行元素之和为$\frac{1}{a}$. (8 分)