Problema E – Empaquetamiento perfecto

Autor: Fidel I. Schaposnik - Universidad Nacional de La Plata

Una de las etapas más difíciles de automatizar en una línea de producción industrial de galletitas es la del empaquetado. El objetivo es diseñar un aparato capaz de contar un número preciso G de galletitas para colocar en un paquete, y la dificultad reside en que estas pueden tener formas a veces muy distintas, por ejemplo de diversos animales.

En la fábrica de galletitas en la que trabajan el equipo de diseño no ha podido sobreponerse a estas dificultades. Lo mejor que ha conseguido lograr es una máquina de conteo que al ser activada puede seleccionar C_i galletitas con probabilidad P_i, para $i = 1, 2, \ldots, K$. Habiendo gastado ya todo el presupuesto destinado a esta tarea, tendrán que buscar la manera de hacer algo útil con esto.

Afortunadamente, se les ocurrió la siguiente idea para llevar a buen puerto el proyecto. Para construir el empaquetador automático utilizarán N máquinas de conteo como la arriba descripta, junto con un programa regulador especial que llevará a cabo el siguiente proceso de manera iterada. Antes de comenzar la primera iteración se activan las N máquinas de conteo, seleccionando cada una cierta cantidad de galletitas. En cada iteración, el programa elige de las N máquinas el subconjunto no vacío S para el que la suma de las galletitas seleccionadas sea lo más cercana posible al valor deseado G (en el sentido de que el valor absoluto de la diferencia entre dicha cantidad y G sea mínimo). De haber más de un subconjunto que cumpla con esta condición, el programa elige como S a cualquiera de ellos con probabilidad uniforme. A continuación, las galletitas seleccionadas por las máquinas de S se retiran de las mismas para ser empaquetadas en un solo paquete. Finalmente, cada una de las máquinas de S se activa nuevamente para seleccionar cierta cantidad de galletitas, mientras que las máquinas que no pertenecen a S permanecen inalteradas (es decir, con la cantidad de galletitas seleccionadas en la iteración anterior). Este proceso se repite hasta obtener la cantidad deseada M de paquetes.

Por ejemplo, supongamos que hay $N = 3$ máquinas a las que llamamos m_1, m_2 y m_3, pudiendo cada una de ellas seleccionar $C_1 = 1$ ó $C_2 = 2$ galletitas con probabilidad $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$. Si se desea producir $M = 2$ paquetes con $G = 5$ galletitas por paquete, un posible desarrollo del proceso sería el siguiente. Antes de comenzar, las tres máquinas seleccionan $C_2 = 2$ galletitas cada una (esto ocurrirá con probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$). En la primera iteración, el programa puede entonces elegir los subconjuntos $\{m_1, m_2, m_3\}$, $\{m_1, m_2\}$, $\{m_1, m_3\}$ y $\{m_2, m_3\}$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{4}$ ya que todos ellos tienen una diferencia de una galletita con la cantidad deseada. Si suponemos que se elige el subconjunto $S = \{m_2, m_3\}$, a continuación se empaquetan las cuatro galletitas seleccionadas por las máquinas m_2 y m_3. Estas máquinas volverán a activarse, por ejemplo obteniendo que m_2 selecciona $C_1 = 1$ galletita y m_3 selecciona $C_2 = 2$ galletitas (lo cual ocurrirá con probabilidad $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). En este punto termina la primera iteración, con las galletitas seleccionadas por las tres máquinas m_1, m_2 y m_3 siendo 2, 1 y 2, respectivamente. En la segunda iteración el programa debe seleccionar necesariamente el subconjunto $S = \{m_1, m_2, m_3\}$, pues éste contiene exactamente cinco galletitas, las cuales pasarán a formar parte de un nuevo paquete. Finalmente, se activan una vez más las tres máquinas y termina el proceso habiéndose producido los $M = 2$ paquetes deseados. Nótese que la probabilidad neta de que ocurra el proceso aquí descripto es $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{128}$, y que la cantidad media de galletitas por paquete resultó ser en este caso de 4.5 galletitas (porque se produjeron dos paquetes, uno de cuatro y otro de cinco galletitas).

Su jefe no está completamente convencido de que este sistema vaya a funcionar, de modo que les exige una prueba concreta de la idea. Para convencerlo, bastará que calculen la cantidad esperada de galletitas que hay por paquete luego de producir M paquetes consecutivamente, si suponen que las N máquinas del aparato seleccionan siempre cantidades de galletitas según las probabilidades dadas.

Entrada

La primera línea contiene cuatro enteros N, K, G y M. El valor N representa la cantidad de máquinas de conteo a utilizar ($1 \leq N \leq 4$), K representa el número de posibles cantidades de galletitas que dichas máquinas pueden seleccionar ($1 \leq K \leq 6$), G representa la cantidad deseada de galletitas por paquete ($1 \leq G \leq 100$), y M representa la cantidad total de paquetes a producir ($1 \leq M \leq 10^7$). Cada una de las siguientes K líneas contiene un entero C_i y un racional P_i, indicando que la máquina de conteo seleccionará C_i galletitas con probabilidad P_i ($1 \leq C_i \leq 100$ y $0 < P_i \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots K$, siendo dado P_i con exactamente dos dígitos después del punto decimal). Nótese que $C_i \neq C_j$ para $i \neq j$, y que además $\sum_{i=1}^{K} P_i = 1$.

Salida

Imprimir en la salida una línea conteniendo un racional que representa la cantidad esperada de galletitas por paquete habiendo producido M paquetes como se describe en el enunciado. Imprimir el resultado con exactamente 6 dígitos luego del punto decimal, redondeando de ser necesario.

Entrada de ejemplo	Salida para la entrada de ejemplo

`3 2 5 1`
`1 0.50`
`2 0.50`
	`4.312500`

Entrada de ejemplo	Salida para la entrada de ejemplo

`3 2 5 2`
`1 0.50`
`2 0.50`
	`4.327148`

Entrada de ejemplo	Salida para la entrada de ejemplo

`1 2 1 1`
`1 0.40`
`2 0.60`
	`1.600000`