Tarea 2

Jesua Villacis

Tabla de Contenidos

Ejericio 1

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de por *

a) $p = \pi, \quad p* = \frac{22}{7}$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |\pi - \frac{22}{7}|$$
$$= 0,00126448927$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{\pi - \frac{22}{7}}{\pi}\right|$$
$$= \left|\frac{0,00126448927}{\pi}\right|$$
$$= 0,000402994356$$

b) $p = \pi, \quad p* = 3,1416$ - ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |\pi - 3,1416|$$
$$= 7,34641 \times 10^{-6}$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{\pi - 3,1416}{\pi}\right|$$
$$= \left|\frac{7,34641 \times 10^{-6}}{\pi}\right|$$
$$= 2,338434931 \times 10^{-6}$$

c)

$$p = ep* = 2,718$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |e - 2,718|$$
$$= 2,8182846 \times 10^{-4}$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{e - 2,718}{e}\right|$$
$$= \left|\frac{2,8182846}{e}\right|$$
$$= 1,036788964 \times 10^{-4}$$

d) $p = \sqrt{2}, \quad p* = 1,414$ - ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |\sqrt{2} - 1,414|$$
$$= 2,1356237 \times 10^{-4}$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2} - 1.414}{\sqrt{2}}\right|$$
$$= \left|\frac{2.1356237 \times 10^{-4}}{\sqrt{2}}\right|$$
$$= 0.000151011402$$

Ejercicio 2

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de por *

a) $p = e^{10}$ $p* = 22000$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |e^{10} - 22000|$$
$$= 26.4657948$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{10} - 22000}{e^{10}}\right|$$
$$= \left|\frac{26.4657948}{e^{10}}\right|$$
$$= 0.00120154522$$

b) $p = 10^{\pi}$ $p* = 1400$ - ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |10^{\pi} - 1400|$$
$$= 14.5442686$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{10^{\pi} - 1400}{10^{\pi}}\right|$$
$$= \left|\frac{14.5442686}{10^{\pi}}\right|$$
$$= 0.010497822$$

c) $p = 8!, \quad p* = 39900$ - ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |8! - 39900|$$
$$= 420 \times 10^{-4}$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{8! - 39900}{8!}\right|$$
$$= \left|\frac{420}{8!}\right|$$
$$= 0.01041666666$$

d) $p = 9!, \quad p* = \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9$ - ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |9! - \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9|$$
$$= 3343.12715805$$

- ***Error relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{9! - \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9}{9!}\right|$$
$$= \left|\frac{3343.12715805}{9!}\right|$$
$$= 0.00921276223$$

Ejercicio 3

Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar * para aproximarse a con error relativo máximo de $10^{-4} $para cada valor de .

a) π

$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| \leq 10^{-4}$$
$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| \cdot |p| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$
$$|p-p*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$
$$p-10^{-4} \cdot p \leq p* \leq p+10^{-4} \cdot p$$
$$\pi-10^{-4} \cdot \pi \leq p* \leq \pi+10^{-4} \cdot \pi$$
$$3.141278494324434 \leq p* \leq 3.141906812855152$$

Intervalo=[3.141278494324434; 3.141906812855152]

b) e

$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| \leq 10^{-4}$$
$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| \cdot |p| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$
$$|p-p*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$
$$p-10^{-4} \cdot p \leq p* \leq p+10^{-4} \cdot p$$
$$e-10^{-4} \cdot e \leq p* \leq e+10^{-4} \cdot e$$
$$2.718010000276199 \leq p* \leq 2,718553656641891$$

Intervalo=[2.718010000276199; 2,718553656641891]

c) $\sqrt{2}$

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{p-p*}{p}\right| \leq 10^{-4}\\
\left|\frac{p-p*}{p}\right| \cdot |p| \leq 10^{-4} \cdot |p|\\
|p-p*| \leq 10^{-4} \cdot |p|\\
p-10^{-4} \cdot p \leq p* \leq p+10^{-4} \cdot p\\
\sqrt{2}-10^{-4} \cdot \sqrt{2} \leq p* \leq \sqrt{2}+10^{-4} \cdot \sqrt{2}\\
1.4140721410168577 \leq p* \leq 1.4143549837293325
\end{gathered}
$$

Intervalo= [1,4140721410168577; 1,4143549837293325]

d) $\sqrt{7}$

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{p-p*}{p}\right| \leq 10^{-4}\\
\left|\frac{p-p*}{p}\right| \cdot |p| \leq 10^{-4} \cdot |p|\\
|p-p*| \leq 10^{-4} \cdot |p|\\
p-10^{-4} \cdot p \leq p* \leq p+10^{-4} \cdot p\\
\sqrt{7}-10^{-4} \cdot \sqrt{7} \leq p* \leq \sqrt{7}+10^{-4} \cdot \sqrt{7}\\
2.6454867359334844 \leq p* \leq 2.646015886195697
\end{gathered}
$$

Intervalo=[2,6454867359334844; 2,646015886195697]

Ejercicio 4

Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a) $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$$\frac{13}{14} = 0.928571420 \approx 0.929$$
$$\frac{5}{7} = 0.714285714 \approx 0.714$$
$$\frac{13}{14} \oplus \frac{5}{7} = 0.215$$
$$2 \cdot e = 5.43656365 \approx 5.44$$
$$2e \ominus 5.4 = 0.04$$
$$\frac{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}}{2e - 5.4} \approx 5.81$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |5.86062 - 5.81|$$
$$= 0.0506$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{5.86062 - 5.81}{5.86062}\right|$$
$$= \left|\frac{0.0506}{5.86062}\right|$$
$$= 0.0086373114$$

b) $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$$-10\pi = -31.41592653589 \approx -31.4$$
$$6\cdot = 16,30969097075 \approx 16.3$$
$$\frac{3}{61} = 0,04918032786 \approx 0.0492$$
$$-10\pi \oplus 6e \ominus \frac{3}{61} = -15.1$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |-15.15542 - (-15.1)|$$
$$= 0.055542$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{-15.15542 - (-15.1)}{-15.15542}\right|$$
$$= \left|\frac{0.055542}{-15.15542}\right|$$
$$= 0.00365677$$

c) $(\frac{2}{9}) \cdot (\frac{9}{11})$

$$\frac{2}{9} = 0.222222222222 \approx 0.222$$
$$\frac{9}{11} = 0.8181818181 \approx 0.818$$
$$(\frac{2}{9}) \odot (\frac{9}{11}) = 0.181596 \approx 0.182$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |0.1818182 - 0.182|$$
$$= 0.00018181$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{0.1818182 - 0.182}{0.1818182}\right| \\
&= \left|\frac{0.00018181}{0.1818182}\right| \\
&= 0.000999954
\end{aligned}$$

d) $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{13} &= 3.605551275 \approx 3.61 \\
\sqrt{11} &= 3.316624790 \approx 3.32 \\
\sqrt{13} \oplus \sqrt{11} &= 6.69 \\
\sqrt{13} \ominus \sqrt{11} &= 0.29 \\
\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} &= 23.95501730 \approx 23.9
\end{aligned}$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p *|$$

$$\begin{aligned}
&= |23.95501730 - 23.9| \\
&= 0.055017
\end{aligned}$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{23.95501730 - 23.9}{23.95501730}\right| \\
&= \left|\frac{0.055017}{23.95501730}\right| \\
&= 0.00013606
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ .Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a)$4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})]$

$$arctan = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$$
$$arctan(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{2})^5$$
$$arctan(\frac{1}{2}) = 0.4645833333$$
$$arctan(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{3})^5$$
$$arctan(\frac{1}{3}) = 0,32181069958$$
$$arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3}) = 0.7863940329218$$
$$4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})] = 3.145576131687$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |\pi - 3.145576131687|$$
$$= 0.00398347809$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{\pi - 3.145576131687}{\pi}\right|$$
$$= \left|\frac{0.00398347809}{\pi}\right|$$
$$= 0.00126798045$$

a)$[16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})]$

$$arctan = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$$
$$arctan(\frac{1}{5}) = (\frac{1}{5}) - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5})^5$$
$$arctan(\frac{1}{5}) == 0.19739733333$$
$$arctan(\frac{1}{239}) = (\frac{1}{239}) - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{239})^3 + \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{3})^{239}$$
$$arctan(\frac{1}{239}) = 0.0041840760020$$
$$16arctan(\frac{1}{5}) = 3.15835733$$
$$4arctan(\frac{1}{239}) = 3,141621029325$$
$$[16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})]$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |\pi - 3,14162102932|$$
$$= 2.8375735242 \times 10^{-5}$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{\pi - 3,14162102932}{\pi}\right|$$
$$= \left|\frac{2.8375735242 \times 10^{-5}}{\pi}\right|$$
$$= 9.0322770551 \times 10^{-6}$$

Ejercicio 6

El número se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ donde ! = (− 1) 2 1para 0 y 0! = 1. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de :

a) $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$
$$= 2.71666666666$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |e - 2.71666666666|$$
$$= 0.00161516179$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{e - 2.71666666666}{e}\right|$$
$$= \left|\frac{0.00161516179}{e}\right|$$
$$= 0.0005941848175$$

b) $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$
$$= 2.718281801146$$

- ***Error Absoluto***

$$\text{Error absoluto} = |p - p*|$$

$$= |e - 2.718281801146|$$
$$= 2.731266057 \times 10^{-8}$$

- ***Error Relativo***

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{p - p*}{p}\right|$$

$$= \left|\frac{e - 2.718281801146}{e}\right|$$
$$= \left|\frac{2.731266057 \times 10^{-8}}{e}\right|$$
$$= 1.004777631 \times 10^{-8}$$

Ejercicio 7

Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección de la línea: $X = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ y $X = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

b) Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31;\ 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93;\ 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

- ***Metodo 1***

$$x_0 \cdot y_1 = 1.31 \odot 5.76 \approx 7.55$$
$$x_1 \cdot y_0 = 1.93 \odot 3.24 \approx 6.25$$
$$x_0 \cdot y_1 \ominus x_1 \cdot y_0 = 1.3$$
$$y_1 - y_0 = 5.76 \ominus 3.24 \approx 2.52$$
$$\frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 y_0} = 0.516$$

- ***Metodo 2***

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= 1.93 \ominus 1.31 \approx 0.62 \\
(x_1 - x_0)y_0 &= 0.62 \odot 3.24 \approx 2.01 \\
y_1 - y_0 &= 5.76 \ominus 3.24 \approx 2.52 \\
\frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0} &= 2.01 \div 2.52 \approx 0.798 \\
x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0} &= 1.31 \ominus 0.798 \approx 0.512
\end{aligned}
$$

Respuesta: Ambos métodos llegaron a un resultado muy similar, pero el segundo es mucho mas fácil y mas estable aritmeticamente que el primero debido a que realiza menos multiplicaciones y por eso se reduce la propagación de erroes.