INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA Y NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN

Trabajo de Fin de Grado

Jesús Octavio Raboso

Tutor: Uwe Brauer

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas

28 de febrero de 2021

Índice general

Índice general

Motivación

- Métodos numéricos para resolver problemas en otras áreas científicas.
- Métodos espectrales (*globales*) vs. métodos de diferencias finitas, métodos de elementos finitos (*locales*).

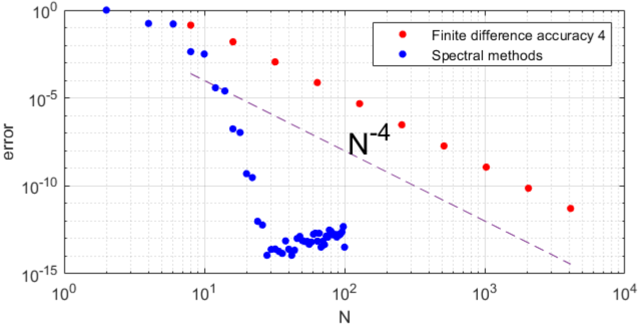


Figura: Dada $u(x) = e^{\sin(x)}$, comparación del error entre su derivada exacta $w(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ y la aproximación del método de diferencias finitas de orden 4 (rojo) y del método espectral (azul).

Índice general

Ecuación de Lane-Emden

La **ecuación de Lane-Emden** de índice politrópico $n \in [0, 5]$ consiste en un PVI para una EDO no lineal de orden dos:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \tag{1}$$

Su solución $\theta_n(\xi)$ describe:

- una familia de soluciones estáticas del sistema Euler-Poisson,
- con simetría esférica,
- con auto-gravitación,
- con equilibrio hidrostático,
- con una ecuación de estado politrópico.

Índice general

Interés de las soluciones: el primer cero positivo $\xi = \xi_1$ de $\theta_n(\xi)$ determina parámetros de la estrella como su masa y radio.

- Soluciones exactas:

n	0	1	5
$\theta_n(\xi)$	$1 - \frac{1}{6}\xi^2$	$\frac{\sin(\xi)}{\xi}$	$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$\xi = \xi_1$	$\sqrt{6}$	π	$+\infty$

- Solución en serie de potencias para ξ suficientemente pequeño:

$$\theta_n(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{15120}\xi^6 + \frac{n(122n^2 - 183n + 70)}{3265920}\xi^8 + \ldots \tag{2}$$

Índice general

Índice general

Definición: polinomios de Chebyshev

Los **polinomios de Chebyshev** se definen por la condición:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{3}$$

Definición: nodos de Chebyshev

Dado $n \in \mathbb{N}$, los $n+1$ **nodos de Chebyshev** se definen como los puntos en los que el polinomio de Chebyshev T_n en alcanza sus extremos:

$$z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq n. \tag{4}$$

Teorema: serie de Chebyshev

Si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz continua, entonces posee una representación en serie de Chebyshev:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x) \tag{5}$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_0(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \tag{6}$$

para $n \geq 1$. Además, la serie es absoluta y uniformemente convergente.

Definición: convergencia algebraica

Los coeficientes a_n poseen **convergencia algebraica** de índice k si:

$$a_n \sim \mathcal{O}\left(n^{-k}\right), \quad n \gg 1. \tag{7}$$

Definición: convergencia exponencial

Los coeficientes a_n poseen **convergencia exponencial** si:

$$a_n \sim \mathcal{O}\left(\exp(-q n^r)\right), \quad n \gg 1, \quad r > 0, \quad q \ \text{cte.} \tag{8}$$

Aproximamos mediante la serie truncada:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x). \tag{9}$$

Teorema

Si los coeficientes convergen según $\mathcal{O}(n^{-k})$, entonces las serie truncada converge según $\mathcal{O}(N^{-k+1})$.

Índice general

Los métodos pseudoespectrales se basan en interpolaciones ponderadas:

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx p_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} C_j(x) f_j, \\
f(x_i) = p_N(x_i),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

donde:

- $\{x_i\}_{i=0}^{N}$: nodos,
- $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, N$,
- $\rho(x)$: función peso no negativa. Al menos ℓ veces diferenciable,
- $C_j(x_i) = \delta_{ji}$, $i, j = 0, \ldots, N$: funciones cardinales.

Para hallar la ℓ-ésima derivada:

$$f^{(\ell)}(x_i) = \sum_{j=0}^{N} \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[\frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} C_j(x) \right]_{x=x_i} f_j; \qquad i = 0, \ldots, N. \tag{11}$$

Representamos como una matriz de diferenciación $D^{(\ell)}$:

$$D_{ij}^{(\ell)} = \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[\frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} C_j(x) \right]_{x=x_i}; \quad i, j = 0, \ldots, N. \tag{12}$$

Diferenciación como operación matricial:

$$\mathbf{f}^{(\ell)} = D^{(\ell)} \mathbf{f}. \tag{13}$$

Funciones cardinales

La definición de las funciones cardinales C_j y los pesos ρ depende de los nodos elegidos y el problema.

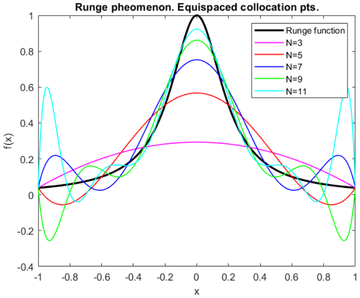
En los nodos de Chebyshev (4):

$$\rho(x) = 1,$$

$$C_j(x) = (-1)^{j+1} \frac{(1 - x^2)}{c_j N^2 (x - x_j)} \frac{dT_N}{dx}; \quad c_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N \\ 1, & j = 1, \ldots, N-1 \end{cases}. \tag{14}$$

Distribución de nodos

- Problemas periódicos $\Rightarrow$ nodos equiespaciados.
- Problemas no periódicos $\Rightarrow$ nodos en redes irregulares.



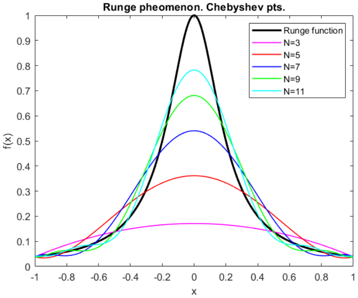


Figura: *Interpolación de* $1/(1+25x^2)$ *en* $N+1$ *nodos,* $N = 3, 5, 7, 9, 11$. *Según aumenta* N, *las oscilaciones en los extremos del intervalo* $[-1, 1]$ *se acentúan en los nodos equiespaciados y se minimizan en los nodos de Chebyshev.*

Teorema: precisión de la interpolación y derivación

Sean la función densidad $\mu(x)$ para los nodos en $[-1, 1]$ y el **potencial**:

$$\phi(z) = \int_{-1}^{1} \mu(x) \log|z - x| \, dx. \tag{15}$$

- El interpolador $p_N(z)$ de $f(z)$ en N nodos converge a $f(z)$ en el interior de la mayor curva equipotencial de $\phi(z)$ que no contiene singularidades de $f(z)$ y diverge fuera.
- Dado z_0 sobre la mayor curva equipotencial:

$$|f(z) - p_N(z)| \le C e^{-N(\phi(z_0) - \phi(z))}. \tag{16}$$

La convergencia de $f^{(\ell)} - p_N^{(\ell)}$ se mantiene para la ℓ-ésima derivada $\ell \ge 1$.

Teorema: matriz de diferenciación de Chebyshev

Las entradas de $D^{(1)}$ se definen como:

$$D^{(1)}_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \;\; i, j = 0, \ldots, N \tag{17}$$

$$D^{(1)}_{jj} = \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)}, \quad j = 1, \ldots, N-1 \tag{18}$$

$$D^{(1)}_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} = -D^{(1)}_{NN} \tag{19}$$

donde $c_j = 2$ para $j = 0, N$; $c_j = 1$ en otro caso.

Se verifica:

$$D^{(\ell)} = \left(D^{(1)}\right)^{\ell}, \quad \ell \geq 2. \tag{20}$$

Índice general

Consideremos un PVI de tipo Lane-Emden para $n \in [0, 5]$:

$$y''(r) + \frac{2}{r}y'(r) + y^n(r) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{21}$$

Mediante el cambio $r = \xi x$, obtenemos un PC. Los puntos denotan las derivadas con respecto a x:

$$\begin{gathered} \ddot{y} + \frac{2}{x}\dot{y} + \xi^2 y^n = 0, \\ y(0) = 1, \;\; y(1) = 0, \;\; \dot{y}(0) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Algunas observaciones sobre el problema (22):

- Singular en $x = 0$.
- Punto de ramificación en $x = 1$ cuando n no es entero.
- Problema de autovalor no lineal $\rightarrow$ método de Newton-Kantorivich.
- EDO de orden dos pero tres condiciones de contorno.

Aplicando el SLM a (22) con $n \in [0, 5)$, aproximamos mediante:

$$
\begin{gathered}
y(x) \approx y_k(x) + \sum_{m=0}^{k-1} y_m(x); \quad y_0(x) = 1 - x^2, \\
\xi \approx \xi_k + \sum_{m=0}^{k-1} \xi_m; \quad \xi_0^2 = 6\left(\frac{4}{3}\right)^n,
\end{gathered}
\tag{23}
$$

donde y_k, ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$ se calcula en cada iteración.

Sustituyendo en (22) y despreciando términos no lineales en y_k, ξ_k :

$$\begin{gathered}\ddot{y}_k + \frac{2}{x}\dot{y}_k + a_{1,k-1}y_k + a_{2,k-1}\xi_k = r_{k-1}, \\ y_k(0) = 0,\ \ y_k(1) = 0,\ \ \dot{y}_k(0) = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

donde:

$$\begin{gathered}a_{1,k-1} = n\left(\sum_{m=0}^{k-1}\xi_m\right)^2\left(\sum_{m=0}^{k-1}y_m\right)^{n-1};\ \ a_{2,k-1} = 2\left(\sum_{m=0}^{k-1}\xi_m\right)\left(\sum_{m=0}^{k-1}y_m\right)^{n}; \\ r_{k-1} = -\left[\sum_{m=0}^{k-1}\ddot{y}_m + \frac{2}{x}\sum_{m=0}^{k-1}\dot{y}_m + \left(\sum_{m=0}^{k-1}\xi_m\right)^2\left(\sum_{m=0}^{k-1}y_m\right)^{n}\right].\end{gathered} \tag{25}$$

Empleamos $N + 1$ nodos de Chebyshev:

$$z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq N. \tag{26}$$

Transformamos $[-1, 1]$ en $[0, 1]$ mediante:

$$x = \frac{z+1}{2}, \quad -1 \leq z \leq 1. \tag{27}$$

Las derivadas en los nodos se calculan mediante:

$$\dot{y}_k(z_i) = \sum_{j=0}^{N} D_{ij}^{(1)} y_k(z_j) = D^{(1)}\mathbf{y_k}; \quad \ddot{y}_k(z_i) = \sum_{j=0}^{N} D_{ij}^{(2)} y_k(z_j) = D^{(2)}\mathbf{y_k},$$
$$\mathbf{y_k} = (y_k(z_0), y_k(z_1), \ldots, y_k(z_{N-1}), y_k(z_N))^T. \tag{28}$$

Aplicando el método pseudoespectral de Chebyshev:

$$A_{k-1}\mathbf{y_k} + B_{k-1}\xi_k = \mathbf{r_{k-1}},$$
$$y_k(z_0) = 0, \quad y_k(z_N) = 0, \quad \sum_{j=0}^{N} D^{(1)}_{Nj} y_k(z_j) = 0. \tag{29}$$

Los componentes del sistema son:

$$\mathbf{r_{k-1}} = [r_{k-1}(z_0), r_{k-1}(z_1), \ldots, r_{k-1}(z_{N-1}), r_{k-1}(z_N)]^T,$$
$$A_{k-1} = 4D^{(2)} + \left[\frac{4}{x}\right]_d D^{(1)} + \mathcal{A}_{1,k-1},$$
$$\mathcal{A}_{1,k-1} = diag[a_{1,k-1}(x_0), a_{1,k-1}(x_1), \ldots, a_{1,k-1}(x_N)], \tag{30}$$
$$\left[\frac{4}{x}\right]_d = diag\left[\frac{4}{x_0}, \frac{4}{x_1}, \ldots, \frac{4}{x_N}\right],$$
$$B_{k-1} = \mathbf{a_{2,k-1}} = [a_{2,k-1}(x_0), a_{2,k-1}(x_1), \ldots, a_{2,k-1}(x_N)]^T.$$

Añadimos una fila para imponer la condición de Neumann:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & B_{k-1} \\ \hline D^{(1)}_{N,0} \dots D^{(1)}_{N,N} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{y_k} \\ \hline \xi_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{r_{k-1}} \\ \hline 0 \end{array}\right). \tag{31}$$

Sistema reducido imponiendo $y_k(z_0) = 0$, $y_k(z_N) = 0$:

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{y_k}} \\ \hline \xi_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A_{k-1}} & \tilde{B_{k-1}} \\ \hline D^{(1)}_{N,1} \dots D^{(1)}_{N,N-1} & 0 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{r_{k-1}}} \\ \hline 0 \end{array}\right). \tag{32}$$

	$n = 1, \quad N = 40$		$n = 4, \quad N = 70$	
Iters	[MS12]	MATLAB	[MS12]	MATLAB
1	3.103790966018498	2.6341367008033	8.688676175146224	4.89038753219843
2	3.141338575299632	2.60213962196307	11.771827678456009	5.54919237281599
3	3.141592635714092	2.7767744772013	13.886237798409815	6.9533215991505
4	3.141592653589793	2.96012873489967	14.817460536386396	9.09147362718468
5	3.141592653589793	3.13757800588699	14.967975594173165	12.2995094590568
6	3.141592653589793	3.30945992557257	14.971544376671904	17.2260580659467
7	3.141592653589793	3.47608443713469	14.971546348837493	24.9366702246662
8	3.141592653589793	3.63753587669435	14.971546348838095	37.0798854921755

Cuadro: Comparación del autovalor (ξ) entre [MS12] y la implementación en MATLAB del SLM.

Índice general

Asumimos que la solución de (22) puede aproximarse como:

$$y(x) \approx y_k(x) + \delta_k(x), \quad \xi \approx \xi_k + \epsilon_k,$$
$$\left|\delta_k(x)\right|_\infty \ll \left|y_k(x)\right|_\infty, \quad |\epsilon_k| \ll \xi_k. \tag{33}$$

Sustituyendo en (22) y despreciando términos no lineales en δ_k obtenemos un PC asumiendo que $y_k(x)$ se conoce de iteraciones previas:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{2}{x}\dot{\delta}_k + n\xi_k^2 y_k^{n-1}\delta_k = -\left\{\ddot{y}_k + \frac{2}{x}\dot{y}_k + \xi^2 y_k^n\right\},$$
$$\delta_k(0) = 0,\ \delta_k(1) = 0,\ \dot{\delta}_k(0) = 0. \tag{34}$$

Para $n \in [0,5)$, escogemos la aproximación inicial:

$$y_0(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad \xi_0 = 3. \tag{35}$$

Discretizamos $[0,1]$ tomando N nodos $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$:

$$x_j = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(t_j\right)\right], \qquad t_j = \pi\frac{j}{N-1}. \tag{36}$$

Aproximamos mediante la serie truncada de Chebyshev:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m T_m(x). \tag{37}$$

Definimos las matrices de diferenciación en $[0,1]$:

$$D_{ij}^{(0)} = T_j(2x_i - 1) = \cos(j \cdot t_i), \tag{38}$$

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{d}{dx} T_j(2x_i - 1) = 2j \frac{\sin(j \cdot t_i)}{\sin(t_i)}, \tag{39}$$

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} T_j(2x_i - 1) = 4 \left[-j^2 \frac{\cos(j \cdot t_i)}{\sin^2(t_i)} + j \frac{\sin(j \cdot t_i)\cos(t_i)}{\sin^3(t_i)} \right]. \tag{40}$$

para $i = 1, \ldots, N-2$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Cuando $|x| \to 1$:

$$D_{0,j}^{(0)} = 1 \qquad D_{N-1,j}^{(0)} = (-1)^j$$

$$D_{0,j}^{(1)} = 2j^2 \qquad D_{N-1,j}^{(1)} = 2(-1)^j j^2$$

$$D_{0,j}^{(2)} = \frac{4j^2(j^2-1)}{3} \qquad D_{N-1,j}^{(2)} = \frac{4(-1)^j j^2(j^2-1)}{3}.$$

para $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Sean:

- $\mathbf{a_k} = (a_{k,0}, a_{k,1}, \ldots, a_{k,N-1})$: vector que contiene los coeficientes en la iteración k,
- ξ_k: autovalor en la iteración k,
- $\boldsymbol{\delta_k} = (\mathbf{a_k}, \xi_k)^T$: vector de incógnitas,
- J: matriz jacobiana,
- $\mathbf{r}$: vector residuo.

En cada iteración hay que resolver el sistema:

$$J\boldsymbol{\delta_k} = -\mathbf{r}. \tag{41}$$

Dado $\mathbf{y_0} = (y_0(x_0), y_0(x_1), \ldots, y_0(x_{N-1}))^T$, calculamos $\mathbf{a_0}$ resolviendo:

$$D^{(0)}\mathbf{a_0} = \mathbf{y_0}. \tag{42}$$

Inicializamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= \mathbf{a_0} \\ \xi &:= \xi_0. \end{aligned} \tag{43}$$

Los vectores de dimensión N que contienen los valores de $y(x)$ y sus dos primeras derivadas en los nodos (36) resultan:

$$\mathbf{y} = (y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_{N-1}))^T = D^{(0)}\mathbf{a}, \tag{44}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}(x_0), \dot{y}(x_1), \ldots, \dot{y}(x_{N-1}))^T = D^{(1)}\mathbf{a}, \tag{45}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = (\ddot{y}(x_0), \ddot{y}(x_1), \ldots, \ddot{y}(x_{N-1}))^T = D^{(2)}\mathbf{a}. \tag{46}$$

El jacobiano en el sistema (41) se define como:

$$J_{ij} = D^{(2)}_{i+1,j} + \frac{2}{x_{i+1}} D^{(1)}_{i+1,j} + \xi^2 n y(x_{i+1})^{n-1} D^{(0)}_{i+1,j} \tag{47}$$

$$J_{N-2,j} = D^{(0)}_{0,j} \tag{48}$$

$$J_{N-1,j} = D^{(1)}_{N-1,j} \tag{49}$$

$$J_{N,j} = D^{(0)}_{N-1,j} \tag{50}$$

$$J_{i,N} = 2\xi_m y(x_{i+1})^n \tag{51}$$

$$J_{N-2,N} = J_{N-1,N} = J_{N,N} = 0, \tag{52}$$

para $i = 0, \ldots, N-3$; $j = 0, \ldots, N-1$.

El vector residuo $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{N-1}, r_N)^T$ se define como:

$$r_j = \ddot{y}_{j+1} + \frac{2}{x_{j+1}}\dot{y}(x_{j+1}) + \xi^2 y(x_{j+1})^n, \quad j = 0, \ldots, N-3,$$

$$r_{N-2} = r_{N-1} = 0, \tag{53}$$

$$r_N = y(x_{N-1}) - 1.$$

Resuelto (41) en cada iteración, actualizamos mediante:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= \mathbf{a} + \mathbf{a_k} \\ \xi &:= \xi + \xi_k. \end{aligned} \tag{54}$$

Referencia	Iters	$n = 1,\ N = 40$	$n = 2,\ N = 40$	$n = 3,\ N = 70$	$n = 4,\ N = 70$
[Boy11]		3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848619376960	14.971546348838095
	1	3.128573972912787	4.000000521321349	4.950346675383282	5.929841151541709
	2	3.128573972912787	4.321055828745427	6.258900686749319	9.075857237855471
QLM	4	3.141567726328371	4.352874580809430	6.895421554523372	14.014461246986226
MATLAB	6	3.141592653589793	4.352874595946108	6.896848619376213	14.969287289066294
	8	3.141592653589793	4.352874595946108	6.896848619376255	14.971546348837167
	10	3.141592653589793	4.352874595946109	6.896848619376251	14.971546348837277

Cuadro: Comparación del autovalor (ξ) entre [Boy11] y la implementación en MATLAB del QLM.

Teorema: principio de Darboux

Para cualquier desarrollo en serie espectral de una función f, el comportamiento asíntotico de sus coeficientes a_m cuando $m \to +\infty$ está determinado por las singulares de f en el plano complejo.

- Si no posee singularidades:

$$a_m \sim C \exp(-m \log(p)). \tag{55}$$

- $y(x)$ posee un punto de ramificación de orden $n+2$ en $x = 1$ si n no es entero:

$$a_m \sim \frac{C}{m^{2n+5}}. \tag{56}$$

Solución exacta de (22) para $n = 0$:

$$y(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}T_1(2x-1) - \frac{1}{8}T_2(2x-1) = 1 - x^2. \tag{57}$$

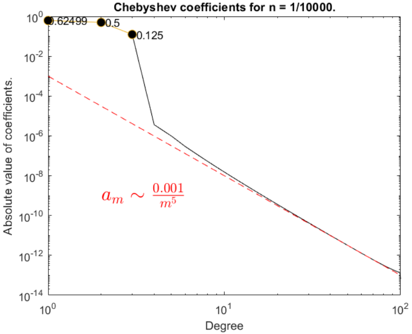


Figura: Coeficientes de Chebyshev para $n = 1/10000$. Los primeros coeficientes están marcados en discos negros. La perturbación causada por $n = 1/10000$ hace que los coeficientes de Chebyshev a partir de grado 3 no sean cero.

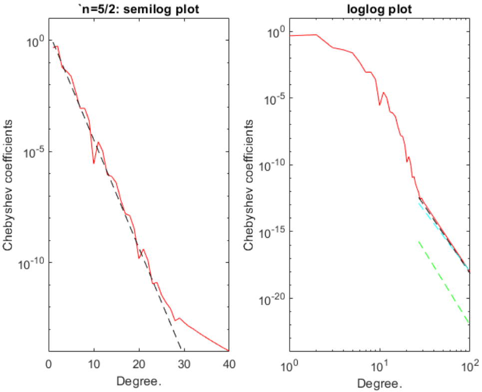


Figura: Coeficientes de Chebyshev para $n = 5/2$. El gráfico izquierdo usa escala lineal en *grados* y logarítmica para los coeficientes. El gráfico derecho es análogo pero con escala logarítmica en ambos ejes. Los coeficientes desde grado 27 a 400 son indistinguibles de $75m^{-10}$ (negro). Las otras líneas discontinuas son proporcionales a m^{-9} (azul), m^{-11} (verde).

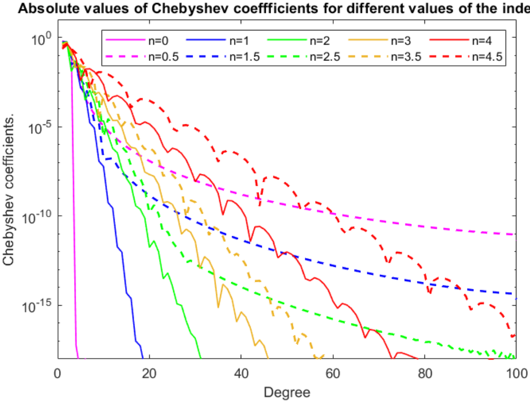


Figura: Valor absoluto de los coeficientes de Chebyshev para diez valores de n. Si n es entero, no hay singularidad y se mantiene la convergencia exponencial. Si n no es entero, poseen una cola algebraica proporcional a $m^{-(2n+5)}$.

Índice general

- El algoritmo SLM.
- Otros métodos numéricos para resolver la ecuación de Lane-Emden.
- El método pseudoespectral de Chebyshev y el Análisis de Fourier.
- Otros métodos espectrales. Otras matrices de diferenciación.
- Profundización en la ecuación de Lane-Emden. Modelos relativistas.

Índice general

Bibliografía seleccionada I

- J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2000.
- J.P. Boyd. "Chebyshev Spectral Methods and the Lane-Emden Problem". En: *Numer. Math. Theory Methods Appl.* 4.2 (2011), págs. 142-157. ISSN: 1004-8979 (vid. pág. 42).
- J. Binney y S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. The University of Chicago Press, 1939.
- B. Fornberg. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- S.S. Motsa y S. Shateyi. "A Successive Linearization Method Approach to Solve Lane-Emden Type of Equations". En: *Mathematical Problems in Engineering* 2012 (oct. de 2012). DOI: 10.1155/2012/280702 (vid. pág. 31).
- L.N. Trefethen. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, 2000.