

INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA Y NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE LANE-EMDEN

TRABAJO FIN DE GRADO

Curso 2020/2021



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Jesús Octavio Raboso

Tutor: Uwe Brauer

Madrid, 22 de febrero de 2021

Resumen

La solución de la ecuación de Lane-Emden describe una familia de soluciones estáticas del sistema de Euler-Poisson para un cuerpo con simetría esférica, sometido a su propia gravitación newtoniana y constituido por un fluido cuya ecuación de estado es de tipo politrópico. La forma habitual de la ecuación de Lane-Emden es $\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$. Es conocido que dicha ecuación posee soluciones explícitas para $n = 0, 1, 5$. No obstante, existen diversos métodos numéricos para resolverla. Este Trabajo de Fin de Grado analiza y compara dos métodos numéricos que se apoyan en el método pseudoespectral de Chebyshev: el método de linealización sucesiva (SLM) y el método de quasi-linealización o de Newton-Kantorovich (QLM). Ambos convierten el problema original en un problema de autovalor no lineal.

Palabras clave: *Ecuación de Lane-Emden, polinomios de Chebyshev, métodos espectrales, autovalor, método de linealización sucesiva, método de quasi-linealización.*

Abstract

The solution to the Lane-Emden equation describes a family of static solutions to the Euler-Poisson system for a spherically symmetric, non-relativistic, self-gravitating, polytropic fluid. The most common form of the Lane-Emden equation is $\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$. It is well-known that exact analytic solutions can only be obtained for the case $n = 0, 1, 5$. However, there exist several numerical methods to solve this equation. The goal of this Bachelor thesis is to analyse and compare two numerical methods, that are based on the Chebyshev pseudospectral method: the successive linearisation method (SLM) and the quasi-linearisation or Newton-Kantorovich method (QLM). Both of them transform the original problem into a non-linear eigenvalue problem.

Keywords: *Lane-Emden equation, Chebyshev polynomials, spectral methods, eigenvalue, successive linearisation method, quasi-linearisation method.*

Índice general

Resumen. Abstract	III
Índice general	V
Introducción	1
1. La ecuación de Lane-Emden	3
1.1. Introducción	3
1.2. Modelo físico	4
1.2.1. Campo y potencial gravitatorio	4
1.2.2. Sistemas con simetría esférica	6
1.2.3. Ecuaciones de Euler	8
1.3. Estructura estelar	11
1.3.1. Equilibrio hidrostático	11
1.3.2. Modelos politrópicos	12
1.4. Deducción de la ecuación de Lane-Emden	13
1.4.1. Formulación de la ecuación de Lane-Emden	14
2. Soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden	15
2.1. Introducción	15
2.2. Lane-Emden para $n=0$	16
2.3. Lane-Emden para $n=1$	16
2.4. Lane-Emden para $n=5$	17
2.5. Lane-Emden para n general	19

3. Métodos espectrales	21
3.1. Introducción	21
3.2. Polinomios de Chebyshev	22
3.2.1. Definición, función generatriz y propiedades básicas	23
3.2.2. Fórmulas de recurrencia	23
3.2.3. Ecuación diferencial de Chebyshev	24
3.2.4. Ortogonalidad	25
3.2.5. Aproximación de funciones: series de Chebyshev	26
3.3. Método de los residuos ponderados	30
3.4. Métodos pseudoespectrales	32
3.4.1. Interpolación polinómica y clustering	33
3.4.2. Teoremas de precisión	34
3.4.3. Matriz de diferenciación de Chebyshev	37
4. Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden	41
4.1. Introducción	41
4.2. Método de linealización sucesiva	43
4.2.1. Resultados numéricos	45
4.3. Método de quasi-linealización	46
4.3.1. Singularidades	50
4.3.2. Convergencia de los coeficientes	51
4.3.3. Resultados numéricos	52
Conclusiones y trabajo futuro	57
Anexo	59
Bibliografía	61

Introducción

Este Trabajo de Fin de Grado pretende dar una idea de la relevancia de las Matemáticas, en especial, de los métodos numéricos, a la hora de resolver problemas en otras áreas científicas, particularmente, en Astrofísica.

Además, engloba algunos de los objetivos del Grado en Matemáticas tales como el reconocimiento de la presencia de las Matemáticas subyacentes en la Naturaleza, la validación e interpretación de modelos reales, el uso de herramientas informáticas para la resolución de problemas y el análisis de resultados.

La investigación de la estructura estelar es uno de los problemas centrales de la Astrofísica. Se han realizado arduos esfuerzos para deducir los perfiles radiales de presión, densidad y masa de las estrellas. Uno de los resultados fundamentales fue publicado por J.H. Lane en 1870: la ecuación de Lane-Emden.

En Astrofísica, siguiendo la teoría de gravitación universal de Newton, la ecuación de Lane-Emden describe la variación de la densidad desde el centro hasta la superficie de una estrella aislada, autogravitante, estática, formada por un gas adiabático y en equilibrio hidrostático. Además, la estrella se rige por una ecuación de estado de tipo politrópico. Matemáticamente, la ecuación de Lane-Emden es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de orden dos que depende de un exponente denominado *índice politrópico*.

Las soluciones de esta ecuación llamaron la atención de los astrofísicos cuando S. Chandrasekhar las incluyó en su monográfico de 1939 *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, pero el interés continuó siendo en gran medida académico, pues las estrellas reales rotan y dicha rotación destruye la simetría esférica y modifica sus características físicas. En la segunda mitad del s. XX, la solución isotérmica y sus modificaciones no singulares encontraron aplicaciones interesantes para estructuras de sistemas de colisión y para estructuras gaseosas de gran escala.

Por tanto, nuestro objetivo es doble. Primero, describir el modelo físico adecuado y deducir las ecuaciones necesarias para formular el modelo estelar de Lane-Emden. Segundo, encontrar métodos analíticos y numéricos para hallar las soluciones de la ecuación de Lane-Emden e interpretarlas.

La estructura de la memoria es la siguiente:

- En el Capítulo 1, siguiendo la teoría no relativista, deducimos la ecuación de Poisson y el potencial gravitatorio para sistemas con simetría esférica. Deducimos también la ecuación de continuidad y la ecuación del movimiento de Euler.

Para completar el sistema formado por las ecuaciones anteriores, necesitamos asumir una relación entre la presión y la densidad que debe mantenerse en toda la estrella: una ecuación de estado de tipo politrópico. Este sistema de ecuaciones puede reducirse a una única ecuación diferencial ordinaria no lineal de orden dos: la ecuación de Lane-Emden.

- En el Capítulo 2, analizamos e interpretamos las soluciones de la ecuación de Lane-Emden pues, a partir de su primer cero positivo, se deducen parámetros de la estrella tales como su radio y su masa. Dependiendo del valor de n , la ecuación de Lane-Emden posee soluciones analíticas o no: sólo para $n = 0, 1, 5$ la presenta. Si bien, es de especial interés para $n \in [0, 5]$, como el caso de $n = 3$ (modelo de Eddington), que es una buena representación de modelo solar. Una primera aproximación para hallar soluciones para n general es el desarrollo en serie de potencias. Pero, es un método con bastante limitaciones. Por ello, nos preguntamos: ¿existen métodos de resolución más precisos?

- En el Capítulo 3, estudiamos los métodos espectrales como método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una idea inicial para entenderlos consiste en llevar el método de diferencias finitas hasta el límite: en lugar de utilizar sólo la información en determinados nodos para el cálculo de la derivada de la función que queremos aproximar, emplearemos los datos de todos los nodos de la red. Es decir, buscamos un método *global* y no un método *local*. A la hora de resolver un problema, hemos de hacernos dos preguntas fundamentales según sus características: qué funciones base hemos de elegir (trigonométricas para problemas periódicos y polinomios de Jacobi para problemas no periódicos) y cuál debe ser la distribución de los nodos (redes equiespaciadas o redes irregulares, respectivamente). Dicha elección evitará los fenómenos de Runge y Gibbs.

Puesto que nuestro objetivo es resolver la ecuación de Lane-Emden nos centraremos en los métodos pseudoespectrales o de colocación, que tienen su origen en los métodos de residuos ponderados. En particular, nos valdremos de los polinomios de Chebyshev y los nodos de Chebyshev de segunda especie para construir la matriz de diferenciación de Chebyshev.

- En el Capítulo 4, proponemos dos algoritmos para resolver la ecuación de Lane-Emden. Estudiaremos el método de linealización sucesiva (SLM), un método semi-analítico que, apoyándose en el método pseudoespectral de Chebyshev, aproxima una ecuación diferencial ordinaria no lineal mediante un esquema iterativo que implica la resolución de ecuaciones lineales mediante métodos numéricos. Si bien, los resultados obtenidos con su implementación en MATLAB no son los deseados. Por ello, proponemos como alternativa el método de cuasilinealización (QLM). Manteniendo los principios del método pseudoespectral de Chebyshev, el QLM se apoya en las iteraciones de Newton-Kantorovich, una variación del método de Newton para resolver problemas de autovalor no lineales.

Capítulo 1

La ecuación de Lane-Emden

1.1. Introducción

Las estrellas son cuerpos celestes complejos sujetos no sólo a procesos químicos sino también físicos en los que la gravedad, la termodinámica, el electromagnetismo y las interacciones nucleares son las fuerzas que rigen su equilibrio o desequilibrio.

Las principales variables que caracterizan las estrellas son la temperatura, la densidad, la luminosidad, la presión, la masa y el radio, todas ellas ligadas por leyes físicas. Para encontrar un modelo manejable, asumimos las siguientes condiciones:

- (i) Seguimos la teoría no relativista. La teoría general de la relatividad es la más precisa y actual para describir el campo gravitatorio pero el carácter no lineal de sus ecuaciones y el hecho de que la geometría sea una variable más hacen que se escape de nuestros objetivos. Para modelos con campos gravitatorios débiles y velocidades lejanas a la de la luz, es suficiente con la teoría newtoniana¹. Puede comprobarse que las soluciones de las ecuaciones de Einstein convergen a las soluciones de las ecuaciones de Newton en [Oli07], que se apoya en los resultados de [Ehl91].
- (ii) La estrella está aislada y es autogravitante: está sometida a su propio campo gravitatorio, que es generado la propia estrella.
- (iii) Es estática: es independiente del tiempo y no rota, de modo que se desprecian fuerzas derivadas de la dinámica de rotación. A partir de esta condición puede deducirse que el modelo newtoniano debe poseer simetría esférica [Lin92].
- (iv) Es gaseosa: el gas que la compone satisface la ley del gas ideal y la ecuación de estado de un gas adiabático, es decir, que no intercambia calor con su

¹Para una introducción a los modelos estelares relativistas, véase [AC11].

entorno (está aislado) y todos los cambios de su energía se producen en forma de trabajo².

- (v) Está en equilibrio hidrostático: las fuerzas del gradiente vertical de presión y la gravedad están en equilibrio.

1.2. Modelo físico

El modelo estelar buscado está descrito por el sistema Euler-Poisson:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi \quad (1.2.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.2.3)$$

$$P = K \rho^\gamma \quad (1.2.4)$$

siendo ρ la densidad, \mathbf{u} el vector velocidad, P la presión, ϕ el potencial gravitatorio, G la constante de gravitación universal y $K > 0$, $\gamma > 1$ constantes.

Para el caso general, el sistema formado por la *ecuación de continuidad de la masa* de Euler (1.2.1), la *ecuación del movimiento* de Euler (1.2.2) -débilmente hiperbólicas y simétrico hiperbólicas- y la *ecuación de Poisson* (1.2.3) -elíptica- necesita ser completado por una *ecuación de estado* (1.2.4). A pesar de que existen algunos teoremas que permiten resolver el sistema bajo ciertas condiciones iniciales sobre la densidad y velocidad [Mak86], presenta problemas cuando $\rho = 0$.

A continuación, derivamos las ecuaciones anteriores y discutimos su carácter físico.

1.2.1. Campo y potencial gravitatorio

La gravedad desempeña un papel fundamental tanto en el proceso de formación estelar como durante la mayor parte de la vida de una estrella al equilibrar las fuerzas de presión del gas y la radiación. Empleando la teoría no relativista, describimos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \text{Ec. de Poisson} \quad (1.2.5)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{Ec. de Laplace} \quad (1.2.6)$$

La ecuación (1.2.5) permite obtener el potencial gravitatorio y, por tanto, la fuerza gravitatoria de una distribución de masa conocida. La ecuación (1.2.6) surge de eliminar la distribución de masa.

²Puesto que, en un proceso adiabático, el sistema termodinámico no intercambia calor con su entorno, por el primer principio de la termodinámica, $\Delta U + W = 0$ donde U es la energía interna del sistema y W el trabajo realizado por el sistema. Cualquier trabajo debe ser realizado a expensas de la energía.

Siguiendo [[BT87], Chapter 2, pp. 30-34], [[Cin], Section 2.2, pp. 44-50], introducimos el concepto de *campo gravitatorio*. En un punto \mathbf{x} del espacio, se define el campo gravitatorio generado por una masa m' situada en el punto \mathbf{x}' como la fuerza atractiva \mathbf{F} por la cual se ve afectada una masa m situada en el punto \mathbf{x} por unidad de masa:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{m} = -Gm' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad (1.2.7)$$

donde el límite se toma para que el campo sólo esté generado por m' y G es la constante de gravitación universal.

Los campos gravitatorios son aditivos: la intensidad del campo gravitatorio creado por una distribución de masa es igual a la suma de las intensidades de los campos creados por sus diferentes elementos constitutivos. Por tanto, suponiendo que cada punto de la distribución de masa está localizado por medio del vector \mathbf{x}' respecto a un origen O y siendo $\rho(\mathbf{x}')$ su densidad, el campo gravitatorio resulta:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dm' = -G \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (1.2.8)$$

siendo $d^3m' = \rho(\mathbf{x}')d^3x'$ para d^3x' el elemento de volumen de d^3m' .

Matemáticamente, el campo gravitatorio es un campo vectorial conservativo cuyas líneas de campo son abiertas. Esto significa que el trabajo realizado por el campo sólo depende de los valores que toma una cierta función escalar, el *potencial gravitatorio*, en los extremos de la trayectoria sin tener en cuenta el camino seguido [[MMT91], Section 8.3, pp. 517-526]. En la práctica, el campo gravitatorio puede calcularse empleando el siguiente teorema:

Teorema 1 (de Helmholtz). *Dado un campo vectorial continuo \mathbf{F} tal que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sea una función acotada y continua que admita derivadas parciales continuas en todo el espacio, puede descomponerse como suma de un gradiente y un rotacional:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (1.2.9)$$

donde ϕ se denomina *potencial escalar* y \mathbf{A} , *potencial vectorial*.

Demostración. Véase [[AW05], Section 1.16, pp. 95-100]. □

Su demostración es constructiva y muestra cómo hallar un campo vectorial mediante operaciones sobre un potencial escalar y un potencial vectorial. Además, permite concluir:

Corolario 1. *Un campo vectorial está unívocamente determinado por su divergencia y rotacional.*

Empleando la demostración del Teorema 1, se definen:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.2.10)$$

Particularizando para $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}$ definido según (1.2.8), se calcula la divergencia de \mathbf{g} :

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \quad (1.2.11)$$

que indica que sus fuentes solo proceden de $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ y permite obtener su potencial gravitatorio:

$$\phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.2.12)$$

Comprobando que $\nabla \times \mathbf{g} = 0$, lo cual indica que es conservativo, podemos establecer $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv 0$. Podemos comprobar que la singularidad en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ es evitable y que la integral que se emplea en (1.2.8) es uniformemente convergente para intercambiar los operadores ∇ y \int . Puesto que ∇ sólo actúa sobre las variables sin primar:

$$\mathbf{g} \propto \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = - \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = - \nabla \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (1.2.13)$$

siendo:

$$\nabla \times \nabla \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = 0. \quad (1.2.14)$$

Por tanto, según (1.2.9):

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi. \quad (1.2.15)$$

A partir de (1.2.11), (1.2.15) y empleando que $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, se deduce la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (1.2.16)$$

En los puntos \mathbf{x} del espacio en los que no exista distribución de masa, la ecuación (1.2.5) se reduce a la *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (1.2.17)$$

1.2.2. Sistemas con simetría esférica

Primero, analizamos por qué un modelo newtoniano estático debe poseer necesariamente simetría esférica. Un argumento intuitivo, base de una prueba más rigurosa, puede consultarse en [Lin92] y se resume como sigue:

La simetría esférica respecto a un punto central es equivalente a la simetría especular o de reflexión respecto a cada plano que pasa por dicho punto central. Considérese cualquier plano que pasa por el centro de masas de la estrella, que es su punto central. Si la estrella no poseyese simetría especular respecto a tal plano, entonces existiría un cierto elemento del fluido de la estrella desplazado asimétricamente respecto a ese plano situándose en un punto más lejano (respecto al centro) que el resto de elementos. La atracción gravitatoria de este

elemento asimétrico por el resto de la estrella resultaría en una fuerza que empujaría a este elemento hacia el plano. Si bien, el fluido que compone la estrella es incapaz de ejercer un esfuerzo cortante³ suficiente para equilibrar esta fuerza. Luego debe poseer simetría especular respecto a este plano y, por tanto, simetría esférica respecto al centro de masas.

A continuación, derivamos el potencial gravitatorio para sistemas con simetría esférica:

Consideremos una corteza esférica de radio r' , el cual haremos variar posteriormente. Fuera de esta corteza, es decir, fuera de $r = r'$, no existe distribución de masa y el potencial generado satisface la ecuación de Laplace (1.2.6). En coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) , el laplaciano es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.2.18)$$

Limitándonos a sistemas con simetría esférica, el potencial será independiente de (ϑ, φ) , luego podemos tomar derivadas totales y $\nabla^2 \phi$ se reduce a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0. \quad (1.2.19)$$

Siguiendo [[BT87], Section 2.1, pp 34-36], el potencial total generado por la distribución esférica de una masa en un punto \mathbf{r} se calcula sumando todas las contribuciones de las esferas concéntricas de radio r' , densidad $\rho(r')$ y espesor finito dr' . Hay que hacer variar $0 < r' < +\infty$ y separar cada contribución según esté en el exterior de la corteza esférica ($r' < r$) o en el interior de la esfera que encierra dicha corteza ($r < r'$). El potencial en un punto r en el exterior de la corteza esférica de radio r' cae según r^{-1} , mientras que en el interior de la esfera vacía que constituye dicha corteza esférica es constante e independiente de r . Por tanto:

$$\phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^{+\infty} \rho(r') r' dr' \right]. \quad (1.2.20)$$

Derivando la expresión anterior (1.2.20):

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (1.2.21)$$

donde:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (1.2.22)$$

es la masa contenida dentro de una esfera de radio r . Por tanto:

$$\mathbf{g}(r) = -\nabla \phi(r) = -\frac{d\phi}{dr} \mathbf{e}_r = -\frac{GM(r)}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.2.23)$$

donde \mathbf{e}_r es el vector radial, que coincide con la normal exterior, y el signo negativo indica que está dirigido hacia el centro de la esfera.

³Se denomina *esfuerzo cortante* o *fuerza de cizallamiento* a la fuerza interna que desarrolla un cuerpo como respuesta a una fuerza cortante y que es tangencial a la superficie sobre la que actúa.

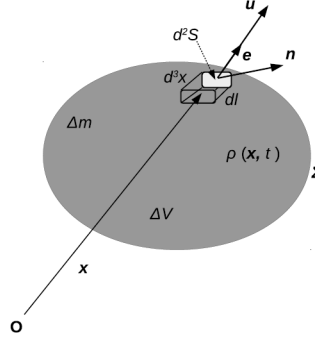


Figura 1.1: *Fluido que emerge en la dirección del vector unitario \mathbf{e} y dirección de velocidad \mathbf{u} a través del elemento de superficie d^2S de normal exterior \mathbf{n} . El elemento de volumen d^3x se construye extendiendo hacia el interior de ΔV el elemento de superficie d^2S en la dirección \mathbf{e} , siendo su longitud dl . Fuente: [\[\[Cin\], Figure 3.1\]](#).*

1.2.3. Ecuaciones de Euler

El estado de un fluido está determinado por su densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, presión $P(\mathbf{x}, t)$, el vector velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y puede quizá requerir de otras variables como la temperatura y la entropía. Las ecuaciones de Euler describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso⁴. En lo que sigue, deducimos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{Ec. de continuidad} \quad (1.2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi \quad \text{Ec. de movimiento} \quad (1.2.25)$$

Ecuación de continuidad

Siguiendo [\[\[Cin\], Section 3.1, pp. 66-69\]](#), [\[\[BT87\], Appendix 1.E, p. 671\]](#), consideremos un fluido de volumen ΔV , encerrado por una superficie Σ en una posición fija del espacio y cuya densidad es $\rho(\mathbf{x}, t)$ según muestra Fig. 1.1. La masa contenida en el instante t en este volumen es:

$$M(t) = \int_{\Delta V} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (1.2.26)$$

y su variación debida a cambios de densidad con el tiempo:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3x. \quad (1.2.27)$$

La masa contenida en el elemento de volumen d^3x que fluye hacia el exterior de ΔV a través del elemento de superficie d^2S cuya normal exterior es \mathbf{n} resulta:

$$d^3M = -\rho(\mathbf{x}, t) d^3x = -\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} dl d^2S, \quad (1.2.28)$$

⁴Se define la *viscosidad* de un fluido como la medida de su resistencia a las deformaciones graduales producidas por esfuerzos cortantes. Un fluido no viscoso se caracteriza por la ausencia de viscosidad.

pues, por construcción, $d^3x = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} d^2S$ y el signo negativo indica que el volumen ΔV pierde masa hacia el exterior si $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} > 0$. Por construcción del elemento de volumen d^3x , $d\mathbf{l}\mathbf{e} = \mathbf{u}dt$, donde \mathbf{u} es el vector velocidad en \mathbf{x} :

$$d^3M = -\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d^2S dt. \quad (1.2.29)$$

La masa total que fluye a través de toda la superficie Σ que encierra a ΔV resulta de sumar la contribución de todos los elementos de la superficie:

$$dM = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d^2S dt = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x dt, \quad (1.2.30)$$

donde hemos empleado el *teorema de la divergencia de Gauss* [[MMT91], Thm 9, pp. 531-534]. La masa que fluye hacia el exterior de ΔV por unidad de tiempo es:

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x. \quad (1.2.31)$$

El vector $\rho \mathbf{u}$ es el *flujo de masa* y describe la masa que sale de ΔV por unidad de superficie y tiempo. Si no existen fuentes ni sumideros de fluido, la masa permanece constante y las variaciones dadas en (1.2.27) y (1.2.31) deben ser iguales, por tanto:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d^3x \Rightarrow \int_{\Delta V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) d^3x = 0. \quad (1.2.32)$$

Como el volumen ΔV es arbitrario, la integral será nula cuando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.2.33)$$

La expresión anterior se denomina *ecuación de continuidad de Euler* o *ecuación de conservación de la masa*. Es la forma matemática del principio de conservación de la masa, que reza: 'En un sistema aislado, durante toda reacción química ordinaria, la masa total en el sistema permanece constante, es decir, la masa consumida de los reactivos es igual a la masa de los productos obtenidos'.

Ecuación del movimiento

Siguiendo [[Cin], Section 3.2, pp. 69-72], [[BT87], Appendix 1.E, pp. 671-672], consideremos un elemento de volumen ΔV , densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, presión $P(\mathbf{x}, t)$ y masa total Δm . Tomamos en ΔV un elemento de volumen infinitesimal d^3x , masa $d^3m = \rho d^3x$, superficie d^2S , donde \mathbf{n} es la normal exterior a dicho elemento. Supongamos la existencia de un campo gravitatorio \mathbf{g} en cada punto \mathbf{x} y cada instante t , que deriva de un potencial $\phi(\mathbf{x}, t)$. En un fluido no viscoso, las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen son:

(i) Fuerza de presión:

$$d^2\mathbf{F}_p = -P \mathbf{n} d^2S, \quad (1.2.34)$$

en la que el signo negativo significa que consideramos la fuerza debida a la presión que se ejerce sobre el elemento de volumen y que tiene dirección opuesta

a \mathbf{n} . La fuerza total sobre ΔV resulta de sumar sobre todos los elementos de la superficie d^2S :

$$\mathbf{F}_p = - \int_{\Sigma} P \mathbf{n} d^2S = - \int_{\Delta V} \nabla P d^3x, \quad (1.2.35)$$

donde usamos el *teorema de la divergencia para campos escalares*.⁵

(II) Fuerza de gravedad:

$$d^3\mathbf{F}_g = d^3m\mathbf{g} = -\rho d^3x \nabla \phi, \quad (1.2.36)$$

donde utilizamos (1.2.15). Por tanto, la fuerza gravitatoria total sobre ΔV resulta de sumar sobre todos los elementos de volumen d^3x :

$$\mathbf{F}_g = - \int_{\Delta V} \rho \nabla \phi d^3x. \quad (1.2.37)$$

Las únicas fuerzas que consideramos para el fluido son (1.2.35), (1.2.37), luego la ecuación de movimiento para ΔV resulta de la segunda ley de Newton:

$$\Delta m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \int_{\Delta V} \nabla P d^3x - \int_{\Delta V} \rho \nabla \phi d^3x. \quad (1.2.38)$$

Como ΔV es arbitrario, podemos hacer $\Delta V \rightarrow 0$ por lo que $\Delta m = \rho \Delta V$:

$$\rho \Delta V \frac{d\mathbf{u}}{dt} = - \int_{\Delta V} (\nabla P + \rho \nabla \phi) d^3x = - (\nabla P + \rho \nabla \phi) \Delta V. \quad (1.2.39)$$

Por tanto, la *ecuación del movimiento de Lagrange* resulta:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \phi. \quad (1.2.40)$$

Para expresarla en la formulación de Euler, observemos que, para la componente k de la velocidad $u_k(\mathbf{x}(t), t)$:

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_k, \quad (1.2.41)$$

relación que es válida para cada componente de \mathbf{u} , luego:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.2.42)$$

Reemplazando en (1.2.40), se obtiene la *ecuación del movimiento de Euler*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi. \quad (1.2.43)$$

⁵Se obtiene a partir del teorema de la divergencia de Gauss [[MMT91], Thm 9, pp. 531-534] suponiendo un campo vectorial de la formas $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$ siendo \mathbf{e} un vector unitario constante.

Puesto que el potencial gravitatorio es generado por la propia distribución de masa (el modelo es autogravitante), añadimos la ecuación de Poisson (1.2.5) al sistema formado por las ecuaciones de Euler (1.2.24) y (1.2.25). El sistema resultante tiene más incógnitas que ecuaciones luego necesitamos una ecuación adicional que imponga una relación entre P y ρ : una ecuación de estado. Por tanto, tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{Ec. de continuidad} \quad (1.2.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi \quad \text{Ec. de movimiento} \quad (1.2.45)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad \text{Ec. de Poisson} \quad (1.2.46)$$

$$P = P(\rho) \quad \text{Ec. de estado} \quad (1.2.47)$$

El próximo objetivo es buscar la ecuación de estado para nuestro modelo.

1.3. Estructura estelar

La evolución de la vida de una estrella puede dividirse en tres etapas: la formación estelar, la evolución durante la Secuencia Principal y la evolución terminal posterior. Durante la Secuencia Principal, la estrella presenta un delicado equilibrio entre la fuerza de gravedad y el gradiente de presión gracias a la combustión de Hidrógeno. Si bien, las fuentes de energía de la estrella se agotan. Cada cambio en la fuente energética puede hacer que la fuerza de la gravedad provoque el colapso de la estrella dando lugar a cambios irreversibles en su estructura.

En el modelo relativista, las estrellas son inestables, luego pueden colapsar o explotar, situaciones que se escapan al modelo propuesto en este trabajo. El modelo relativista obedece la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que permite identificar modelos estables e inestables a través de la relación masa-radio [AC11]. Nos limitamos a la teoría newtoniana.

1.3.1. Equilibrio hidrostático

El comportamiento general de un elemento de fluido en una estrella está descrito por las ecuaciones de continuidad (1.2.24) y movimiento (1.2.25) de Euler. La aproximación en equilibrio hidrostático implica $\mathbf{u} = 0$, luego la ecuación de continuidad (1.2.24) se satisface idénticamente y la ecuación del movimiento (1.2.25) se reduce a:

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi, \quad (1.3.1)$$

mostrando que el equilibrio es producto de un balance exacto entre la presión interna y el potencial. Siendo \mathbf{e}_r es el vector radial y suponiendo simetría esférica, resulta:

$$\nabla P = \frac{dP}{dr} \mathbf{e}_r, \quad (1.3.2)$$

$$-\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dr}\mathbf{e}_r = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r. \quad (1.3.3)$$

Por tanto, bajo estas características, (1.3.1) se reduce a las siguientes ecuaciones de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho, \quad (1.3.4)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho, \quad (1.3.5)$$

donde la segunda surge de (1.2.22).

1.3.2. Modelos politrópicos

En general, las ecuaciones de equilibrio hidrostático (1.3.4), (1.3.5) no pueden ser resueltas y requieren de una ecuación adicional para tratar las tres funciones a determinar: $\rho(r)$, $P(r)$, $M(r)$. Para ello, hay que asumir una forma específica de ecuación de estado del tipo $P = P(\rho)$.

Un ejemplo particular donde la dependencia de la presión con la densidad es conocida es el que constituyen las denominadas *estrellas politrópicas* [[BT87], Appendix 1.E, pp. 674-675].

Consideremos una estrella con simetría esférica compuesta por un gas ideal y cuyo interior es localmente adiabático, es decir, no intercambia calor con su entorno. Si el interior de la estrella consiste en un gas ideal uniforme formado por N partículas cada una de masa m , entonces las variables termodinámicas, a saber, presión P , volumen V y temperatura T , siguen la relación:

$$P = \frac{Nk_B T}{V} = nk_B T = \frac{\rho k_B T}{m}, \quad (1.3.6)$$

donde k_B es la constante de Boltzman, $n = N/V$ y $\rho = mN/V$. Puesto que se ha asumido un interior localmente adiabático:

$$PV^\gamma = cte, \quad (1.3.7)$$

donde:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (1.3.8)$$

siendo C_p y C_v los calores específicos a presión y volumen constantes, respectivamente. Despejando V de (1.3.6) y sustituyendo en (1.3.7) se tiene:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (1.3.9)$$

donde $K > 0$ y $\gamma > 1$ son constantes⁶.

Esta relación se denomina *politrópica* y los modelos resultantes, *modelos politrópicos o barotropos*.

⁶Los gases ideales satisfacen la *relación de Mayer*: $C_p = C_v + R$ siendo R la constante del gas. Por tanto, $\gamma > 1$.

1.4. Deducción de la ecuación de Lane-Emden

Como hemos visto, un ejemplo particular donde la dependencia de la presión con la densidad es conocida tiene la forma (1.3.7). Estos modelos politrópicos han sido muy relevantes desde principios del siglo XX y aún hoy son útiles como ejemplos simples que no difieren demasiado de los modelos realistas. Deducimos la ecuación de Lane-Emden.

A partir de las ecuaciones del equilibrio hidrostático, sustituyendo (1.3.4) en (1.3.5), expresamos M mediante:

$$M = -\frac{r^2}{G\rho} \frac{dP}{dr} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{G\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi r^2 \rho. \quad (1.4.1)$$

Reescribimos la expresión anterior como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (1.4.2)$$

Tomando la ecuación de estado (1.3.9):

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.4.3)$$

Reemplazando la ecuación anterior en (1.4.2):

$$\frac{K\gamma}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (1.4.4)$$

Introducimos una nueva función adimensional θ definida positiva tal que:

$$\rho = \lambda\theta^n, \quad n \in \mathbb{R}^+, \quad (1.4.5)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante y n se elige de modo que simplifique (1.4.4). Sustituyendo (1.4.5) en (1.4.4), resulta:

$$\frac{K\gamma}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 (\lambda\theta^n)^{\gamma-2} \lambda n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\lambda\theta^n. \quad (1.4.6)$$

Agrupando términos, puede escribirse como:

$$\frac{nK\gamma\lambda^{\gamma-2}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \theta^{(n\gamma-n-1)} \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\theta^n. \quad (1.4.7)$$

Elegimos n tal que $n\gamma - n - 1 = 0$ y obtenemos la siguiente relación entre el índice politrópico n y γ :

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} > 0. \quad (1.4.8)$$

Por tanto, la ecuación para θ resulta:

$$\frac{K(n+1)\lambda^{\gamma-2}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G\theta^n. \quad (1.4.9)$$

El factor $\lambda^{\gamma-2}$ en términos de n es $\lambda^{\frac{1-n}{n}}$ y podemos reescribir:

$$\frac{K(n+1)\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n. \quad (1.4.10)$$

Sea:

$$\alpha^2 = \frac{K(n+1)\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} > 0, \quad (1.4.11)$$

ya que todos los factores que intervienen en su definición son positivos. Como θ es adimensional, α^2 debe tener las mismas dimensiones que r^2 . Por tanto, según (1.4.5), adoptamos para λ dimensiones de densidad y la elegimos tal que coincida con la densidad central $\lambda = \rho_c = \rho(0)$. Especificamos la primera condición para (1.4.10):

$$\theta(0) = 1. \quad (1.4.12)$$

Teniendo α dimensiones de distancia, definimos una coordenada radial ξ :

$$r = \alpha\xi \quad (1.4.13)$$

En términos de esta nueva variable, la ecuación (1.4.10) puede reescribirse:

$$\xi^{-2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (1.4.14)$$

Para determinar la segunda condición, a partir del equilibrio hidrostático (1.3.4):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (1.4.15)$$

pues $M(r) \propto r^3$ para $r \rightarrow 0$. En términos de θ , esta condición resulta:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \propto \frac{1}{\rho} \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{n}}} \frac{d\rho}{dr} \propto \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \propto (\theta^n)^{\frac{1}{n}-1} \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \propto \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (1.4.16)$$

Por tanto:

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (1.4.17)$$

1.4.1. Formulación de la ecuación de Lane-Emden

La *ecuación de Lane-Emden* consiste en un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria no lineal de orden dos:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0 \\ \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.4.18)$$

donde $n \in [0, 5]$, ξ es una coordenada radial y θ es una función relacionada con la densidad dada por $\rho = \lambda\theta^n$ para $\lambda > 0$. Las condiciones iniciales permiten que la solución sea finita y no discontinua en el origen.

La solución $\theta_n(\xi)$ de la ecuación (1.4.18) describe una familia de soluciones estáticas del sistema de Euler-Poisson para un cuerpo con simetría esférica, sometido a su propia gravitación newtoniana y constituido por un fluido cuya ecuación de estado es de tipo politrópico.

Capítulo 2

Soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden

2.1. Introducción

La resolución la ecuación de Lane-Emden (1.4.18) permite obtener funciones para el radio, la densidad, la presión central, la temperatura y la energía potencial gravitatoria de la estrella en consideración [[Cha39], Chapter 4, pp. 84-106].

El radio del modelo queda descrito por el primer cero positivo, $\xi = \xi_1$, de la solución $\theta_n(\xi)$ ya que, a partir de la definición (1.4.11), del cambio (1.4.13) y tomando $\lambda = \rho_c$, se tiene:

$$R = \left(\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_1. \quad (2.1.1)$$

La masa total también está determinada por $\xi = \xi_1$:

$$M = -4\pi \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left(\xi^2 \frac{d\theta_n}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1}. \quad (2.1.2)$$

Es posible demostrar que todo politropo de índice $n \geq 5$ tiene radio infinito. Si bien, el caso $n = 5$ es especial, pues posee masa finita a pesar de tener radio infinito. Esto significa que sólo existen estrellas con superficie y masa finita para $n < 5$. Se han demostrado varios criterios bajo los cuales el modelo posee o no extensión finita, algunos de ellos imponen restricciones sobre la ecuación de estado (1.3.9) y sus derivadas y pueden consultarse en [Hei02].

Los casos más interesantes que describen estrellas reales se dan con politropos de índice $n = 1.5$, que aproximan estrellas muy frías mantenidas por la repulsión debida al principio de exclusión de electrones tales como las enanas blancas, y para $n = 3$ (*modelo de Eddington*), que aproxima la estructura del Sol.

Desafortunadamente, la ecuación de Lane-Emden sólo presenta soluciones exactas para $n = 0, 1, 5$. Estudiaremos detalladamente su obtención y su interpretación física. Analizaremos cómo abordar la ecuación para n general mediante el desarrollo en serie de potencias.

2.2. Lane-Emden para $n=0$

Sustituyendo $n = 0$ en la ecuación (1.4.14) y multiplicando por ξ^2 obtenemos:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2. \quad (2.2.1)$$

Integrando respecto a ξ y dividiendo entre ξ^2 obtenemos, para una constante de integración C :

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi}{3} - \frac{C}{\xi^2}. \quad (2.2.2)$$

Esta ecuación en variables separables se resuelve integrando respecto a ξ :

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + \frac{C}{\xi} + D, \quad (2.2.3)$$

donde D es una constante de integración. La solución de (2.2.1) posee una singularidad en el origen y cuando $\xi \rightarrow 0$:

$$\theta \sim \frac{C}{\xi}. \quad (2.2.4)$$

Restringiéndonos a soluciones finitas en el origen, se tiene $C = 0$ y, empleando la condición $\theta(0) = 1$, la solución resulta:

$$\theta_0(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + 1, \quad \xi_1 = \sqrt{6}. \quad (2.2.5)$$

Se trata de un caso particular degenerado en el que la estrella posee extensión finita, pero es de escaso interés astrofísico ya que, por (1.4.5), corresponde a una esfera homogénea de densidad constante $\rho = \rho_c$.

2.3. Lane-Emden para $n=1$

Sustituyendo $n = 1$ en la ecuación (1.4.14) y multiplicando por ξ^2 obtenemos:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta. \quad (2.3.1)$$

Introducimos la variable χ dada por:

$$\chi(\xi) = \xi \theta(\xi) \iff \theta = \frac{\chi}{\xi}. \quad (2.3.2)$$

Reescribimos:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\chi}{\xi} \right) = \frac{\xi\chi' - \chi}{\xi^2} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} (\xi\chi' - \chi) = \xi\chi'', \quad (2.3.4)$$

y la ecuación (2.3.1) resulta:

$$\chi'' + \chi = 0. \quad (2.3.5)$$

Obtenemos la ecuación de un movimiento libre no amortiguado cuya solución en términos de θ se expresa como:

$$\theta(\xi) = A \frac{\sin \xi}{\xi} + B \frac{\cos \xi}{\xi}, \quad (2.3.6)$$

para A, B constantes. Imponiendo la condición $\theta(0) = 1$ tenemos:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos \xi}{\xi} = \infty \Rightarrow B = 0 \quad (2.3.7)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1 \Rightarrow A = 1. \quad (2.3.8)$$

Por tanto, la solución resulta:

$$\theta_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi_1 = \pi. \quad (2.3.9)$$

La condición $\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$ se satisface ya que, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-\xi \sin \xi + \cos \xi - \cos \xi}{2\xi} = -\frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \sin \xi = 0. \quad (2.3.10)$$

En este caso, el radio del modelo no depende de la densidad central.

2.4. Lane-Emden para $n=5$

Se exponen algunas cuestiones técnicas antes de particularizar en $n = 5$.

Para n general, realizamos el cambio de variable:

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \frac{d}{d\xi} = -x^2 \frac{d}{dx}, \quad (2.4.1)$$

de modo que reescribimos (1.4.14) como:

$$x^4 \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\theta^n. \quad (2.4.2)$$

Mediante el cambio $\theta = Ax^\omega z$ con $\omega = \frac{2}{n-1}$ y A una constante a determinar, reescribimos:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = A \left[x^\omega \frac{d^2z}{dx^2} + 2\omega x^{\omega-1} \frac{dz}{dx} + \omega(\omega-1) x^{\omega-2} z \right] \quad (2.4.3)$$

que, sustituyendo en (2.4.2) y teniendo en cuenta que $\omega + 2 = n\omega$, obtenemos:

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 2\omega x \frac{dz}{dx} + \omega(\omega-1) z + A^{n-1} z^n = 0. \quad (2.4.4)$$

Podemos eliminar x de la anterior ecuación mediante el cambio:

$$x = \frac{1}{\xi} = e^t, \quad t = \log x = -\log \xi, \quad (2.4.5)$$

con el que obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = e^{-t} \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = e^{-2t} \left[\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right]. \quad (2.4.6)$$

Sustituyendo (2.4.6) en (2.4.4):

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (2\omega - 1) \frac{dz}{dt} + \omega(\omega-1) z + A^{n-1} z^n = 0. \quad (2.4.7)$$

Para $n > 3$, $\omega < 1$, debe tomarse A tal que $A^{n-1} = \omega(1-\omega)$, de modo que (2.4.7) se expresa como:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (2\omega - 1) \frac{dz}{dt} - \omega(1-\omega) z (1 - z^{n-1}) = 0. \quad (2.4.8)$$

Empleando que $\omega = \frac{2}{n-1} = \frac{1}{2}$ para $n = 5$, la ecuación (2.4.8) se reduce a:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{4} z (1 - z^4). \quad (2.4.9)$$

Según los cambios de variable efectuados, se cumplen las relaciones:

$$\frac{1}{x} = \xi = e^{-t}, \quad \theta = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} z = \left(\frac{1}{2} e^t\right)^{\frac{1}{2}} z. \quad (2.4.10)$$

Multiplicando en ambos lados de (2.4.9) por $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} z (1 - z^4) \frac{dz}{dt}. \quad (2.4.11)$$

Integrando respecto a t , la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{24} z^6 + D, \quad (2.4.12)$$

para una constante de integración D . Separando variables:

$$\frac{dz}{\pm \left(2D + \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{12} z^6 \right)^{\frac{1}{2}}} = dt, \quad (2.4.13)$$

donde z recorre los valores entre la menor y la mayor raíz del polinomio del denominador. Consideramos $D = 0$ pues, en otro caso, se necesitan integrales elípticas. Además, hemos de elegir un signo en el denominador tal que $t \rightarrow +\infty$. Así, (2.4.13) resulta:

$$\frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{3}z^4\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}dt. \quad (2.4.14)$$

Hacemos un último cambio de variable $\frac{1}{3}z^4 = \sin^2 \zeta$ de modo que:

$$4\frac{dz}{z} = 2\frac{\cos \zeta}{\sin \zeta}d\zeta \Rightarrow \csc \zeta d\zeta = -dt \Rightarrow \tan \frac{1}{2}\zeta = Ce^{-t}. \quad (2.4.15)$$

Con todo lo anterior:

$$\frac{1}{3}z^4 = \frac{4 \tan^2 \frac{1}{2}\zeta}{(1 + \tan^2 \frac{1}{2}\zeta)^2} = \frac{4C^2 e^{-2t}}{(1 + C^2 e^{-2t})^2}. \quad (2.4.16)$$

Despejando z :

$$z = \pm \left[\frac{12C^2 e^{-2t}}{(1 + C^2 e^{-2t})^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (2.4.17)$$

Ayudándonos de (2.4.10) e imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene $C = 3^{-1/2}$ y, como resultado final:

$$\theta_5(\xi) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \xi_1 = +\infty. \quad (2.4.18)$$

Por tanto, obtenemos una estrella de radio infinito pero, puede comprobarse, cuya masa total es finita. No representa una solución física.

El desarrollo completo de esta solución se detalla en [[Cha39], Chapter 4, pp. 89-91, 93-94]. Todas las soluciones para $n = 5$ pueden verse en [Mac12].

2.5. Lane-Emden para n general

Para valores distintos de $n = 0, 1, 5$, parece que no existe solución exacta. Por ello, se hace evidente la necesidad de utilizar métodos numéricos para estudiar casos interesantes como el *modelo de Eddington* ($n = 3$), que representa con bastante precisión el modelo solar. Pero antes, planteémonos cuándo es posible el desarrollo en serie de potencias.

Buscamos un desarrollo en serie de la forma:

$$\theta_n(\xi) = 1 + c\xi^2 + d\xi^4 + \dots \quad (2.5.1)$$

Esta serie se escoge para que las condiciones (1.4.12), (1.4.17) se satisfagan. No puede haber término en ξ ya que $d\theta/d\xi$ se anula en el origen. Por tanto, sólo puede haber potencias pares de ξ . Además, es invariante bajo $\xi \rightarrow -\xi$.

Sustituyendo (2.5.1) en (1.4.18) e igualando coeficientes según las potencias ξ , puede comprobarse que la serie para ξ suficientemente pequeño resulta:

$$\theta_n(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{n}{120}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{15120}\xi^6 + \frac{n(122n^2-183n+70)}{3265920}\xi^8 + \dots \quad (2.5.2)$$

Para $n = 1$, la serie converge para todo ξ , pues la serie del seno converge para todo ξ . Sin embargo, para $n = 5$, la serie converge si $\xi < \sqrt{3}$. Una cuestión interesante sería buscar bajo qué condiciones la solución θ_n , $n \in [0, 5]$ puede representarse en serie de potencias convergente para cualquier politropo ($\theta \geq 0$).

En [MA80] y [RS99] se detalla el desarrollo en serie de las soluciones.

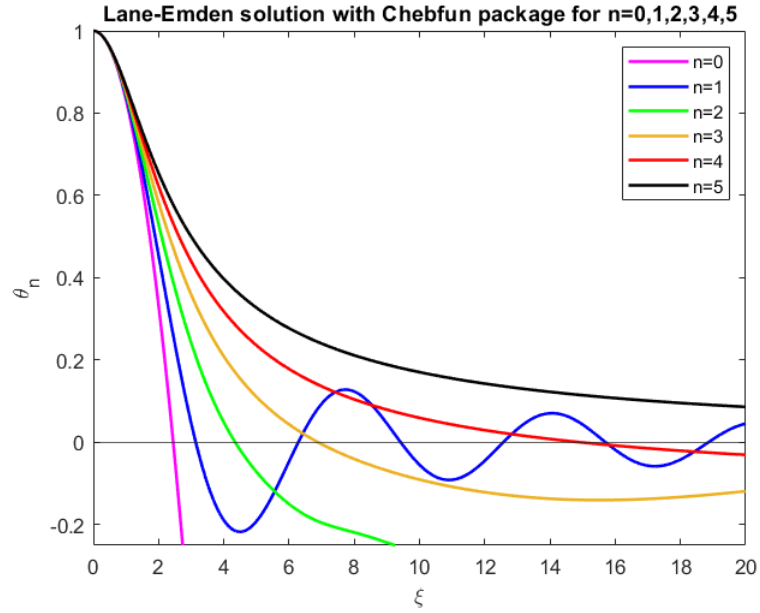


Figura 2.1: Solución de la ecuación de Lane-Emden para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Creadas con el software Chebfun [DHT14] de MATLAB.

Capítulo 3

Métodos espectrales

3.1. Introducción

Dado un problema de valor inicial (PVI) para una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = \zeta_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde $\zeta_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$ y f es Lipschitz continua, existen dos grandes categorías de métodos numéricos para resolverlo: los métodos monopaso y los métodos multipaso. Adicionalmente, puede diferenciarse entre métodos explícitos, implícitos o semi-implícitos. Por ejemplo, los métodos monopaso incluyen los θ -métodos y los métodos de Runge-Kutta, pudiendo ser ambos explícitos o implícitos e incluso semi-implícitos en el caso de los Runge-Kutta. Entre los métodos multipaso explícitos, cabe citar los de Adams-Bashforth o de Nyström, mientras que algunos de los multipaso implícitos son los de Adams-Moulton o Milne.

Sin embargo, para resolver problemas de contorno (PC) para una EDO de orden dos:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & t \in [t_0, T] \\ \mu_{11}y(t_0) - \mu_{12}y'(t_0) = \alpha, \\ \mu_{21}y(T) - \mu_{22}y'(T) = \beta, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

donde $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i, j \in \{1, 2\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(D)$ con $D \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^2$, $y \in \mathcal{C}^2([t_0, T])$, se necesitan otras herramientas. Las más conocidas son los métodos de tiro, el método de los elementos finitos y el método de las diferencias finitas. Pero, ¿existen métodos más precisos? La respuesta es afirmativa: los métodos espectrales.

El aumento de precisión se debe a que los métodos espectrales son *globales*, mientras que el método de los elementos finitos y el método en diferencias finitas son *locales* [[Boy00], Sections 1.3, 1.4, pp. 4-9]. Dada una red de nodos

$\{x_j\}_{j=0}^N$ donde $x_{j+1} - x_j = h$, para $h \rightarrow 0$, supongamos que conocemos los valores $\{u_j\}_{j=0}^N$ de la función u en los nodos. Queremos conocer los valores de su derivada $\{w_j\}_{j=0}^N$ en los nodos. El método de diferencias finitas de, por ejemplo, orden 2, garantiza el orden de convergencia $\mathcal{O}(h^2)$ con la aproximación:

$$w_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \quad (3.1.3)$$

es decir, sólo emplea la información en dos nodos (local). Sin embargo, la idea de los métodos espectrales es emplear la información en todos los nodos en la aproximación (global).

Para ilustrar la diferencia en los órdenes de convergencia, consideremos la función $u(x) = e^{\sin(x)}$, que es periódica en el dominio $[-\pi, \pi]$. Su derivada es $w(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$. Comparemos la aproximación para la derivada que ofrece el método en diferencias finitas de orden 4 con la que ofrecen los métodos espectrales [[Tre00], Chapter 1, pp. 1-8].

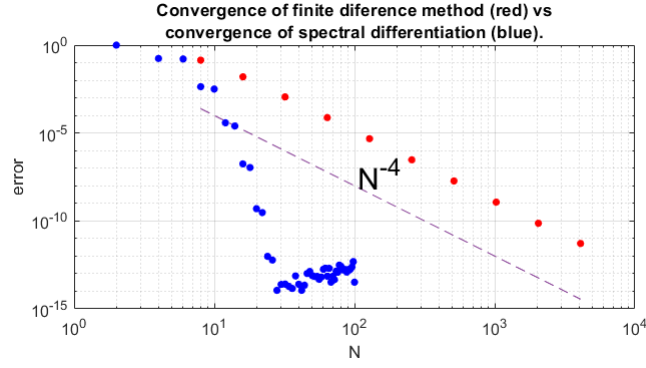


Figura 3.1: En el método de diferencias finitas de orden 4 (en rojo), la convergencia de orden 4 está garantizada. En los métodos espectrales (en azul), el error disminuye hasta 10^{-14} .

Según el número de nodos N aumenta, el error en diferencias finitas decrece según $\mathcal{O}(N^{-m})$ para cierta constante m que depende del orden de la aproximación y de la regularidad de la solución. Para los métodos espectrales, no sólo se garantiza el orden de convergencia $\mathcal{O}(N^{-m})$ sino que, cuando la solución es infinitamente diferenciable, puede alcanzarse la convergencia de orden $\mathcal{O}(c^N)$, $0 < c < 1$.

Siguiendo la clasificación de [[Boy11], Section 1.8, pp. 12-13], los métodos espectrales pueden dividirse en dos grandes tipos: los *interpoladores* o *pseudoespectrales* y los *no interpoladores*. En este capítulo nos centraremos en los primeros, particularmente en el método pseudoespectral de Chebyshev.

3.2. Polinomios de Chebyshev

A partir de los polinomios ortogonales de Jacobi [[Dav75], Chapter 10, pp. 234-256], [[Ali03], Chapter 2, pp. 5-28] pueden construirse métodos pseudoes-

pectrales [[Ali03], Section 3, pp. 29-47]. Si bien, puesto que nuestro objetivo es la resolución de la ecuación de Lane-Emden (1.4.18), nos centraremos en un caso particular de los polinomios de Jacobi: los polinomios de Chebyshev. Juegan un papel fundamental en la teoría de aproximación de funciones y su relevancia es tal, que se ha desarrollado un software libre en MATLAB, *Chebfun*, inspirado en ellos [DHT14], [Góm17].

3.2.1. Definición, función generatriz y propiedades básicas

Definición 1 (Polinomios de Chebyshev). *Los polinomios de Chebyshev pueden definirse por la condición:*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.2.1)$$

o mediante la fórmula de Rodrigues:

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3.2.2)$$

Los polinomios T_n pueden expresarse mediante la función generatriz:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) t^n, \quad (3.2.3)$$

a partir de la cual pueden reescribirse como:

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (3.2.4)$$

Mediante (3.2.3), (3.2.4) y empleando la definición trigonométrica de T_n (3.2.1), se deducen las siguientes propiedades básicas:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \quad (3.2.5)$$

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n \quad (3.2.6)$$

$$T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0 \quad (3.2.7)$$

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x) \quad (3.2.8)$$

3.2.2. Fórmulas de recurrencia

Siendo $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ conocidos, todos los demás T_n , para $n \geq 2$, pueden obtenerse mediante la fórmula de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (3.2.9)$$

Puesto que la ecuación (3.2.8) es válida para cada $n, m \in \mathbb{N}$, en particular, lo es para $n \in \mathbb{N}$, $m = 1$. Por tanto:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x)T_1(x) = 2xT_n(x) \Rightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (3.2.10)$$

La primera derivada de T_n puede construirse recursivamente mediante:

$$(1-x^2)T'_n(x) = -n x T_n(x) + n T_{n-1}(x). \quad (3.2.11)$$

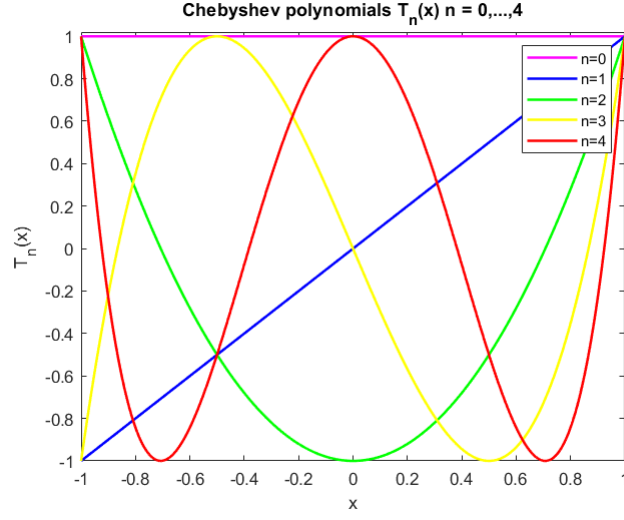


Figura 3.2: Representación gráfica de $T_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.2.3. Ecuación diferencial de Chebyshev

Empleando la definición trigonométrica (3.2.1), identificamos $y \equiv T_n(x)$ y realizamos el cambio de variable:

$$\phi = \arccos(x). \quad (3.2.12)$$

Obtenemos:

$$x = \cos(\phi) \Rightarrow 1 = -\phi' \sin(\phi) \Rightarrow \phi' = -\frac{1}{\sin(\phi)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.2.13)$$

Por tanto:

$$y'(x) = (\cos(n\phi))' = -n\phi' \sin(n\phi) = \frac{n \sin(n\phi)}{\sin(\phi)}. \quad (3.2.14)$$

Volviendo a derivar esta última expresión:

$$y''(x) = \left(\frac{n \sin(n\phi)}{\sin(\phi)} \right)' = -\frac{n^2 y(x)}{\sin^2(\phi)} + \frac{y'(x) \cos(\phi)}{\sin^2(\phi)} = -\frac{n^2 y(x)}{1-x^2} + \frac{y'(x)x}{1-x^2}, \quad (3.2.15)$$

o igualmente:

$$y''(x) = -\frac{n^2 \cos(n\phi)}{\sin^2(\phi)} + \frac{n \cos(\phi) \sin(n\phi)}{\sin^3(\phi)}. \quad (3.2.16)$$

Por tanto, los polinomios de Chebyshev son solución de la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0. \quad (3.2.17)$$

3.2.4. Ortogonalidad

Veamos que la familia de polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ es ortogonal.

Teorema 2 (Ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev). *La familia de polinomios $\{T_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ es ortogonal con respecto a la función peso $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $[-1, 1]$:*

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Demostración. Siguiendo [[Dav75], Section 10.3, pp. 245-255], [[Ali03], Section 2.3, pp. 21-23], puede comprobarse que los polinomios de Chebyshev definidos según (3.2.2) son un caso particular para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Jacobi:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}], \quad (3.2.19)$$

siendo $\alpha, \beta > -1$. Los polinomios de Jacobi son ortogonales en $[-1, 1]$ respecto de la función peso:

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (3.2.20)$$

en el sentido de:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx = \mathcal{N}_n^2 \delta_{nm} \quad (3.2.21)$$

siendo δ_{nm} la Delta de Kronecker y:

$$\mathcal{N}_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad (3.2.22)$$

para la función Gamma Γ . En el caso particular de los polinomios de Chebyshev, se tiene:

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathcal{N}_n^2 \delta_{nm}, \quad (3.2.23)$$

siendo:

$$\mathcal{N}_n^2 = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n > 0 \end{cases}. \quad (3.2.24)$$

□

Estas relaciones serán importantes en el desarrollo de una función en serie de Chebyshev como se verá en la siguiente sección. Además, entendiendo la ortogonalidad como un producto interno, podremos desarrollar los métodos de los residuos ponderados, que constituyen el pilar de los métodos pseudoespectrales.

3.2.5. Aproximación de funciones: series de Chebyshev

La interpolación polinómica de una función f consiste en, a partir de un conjunto de $N + 1$ datos $\{(x_j, f_j)\}_{j=0}^N$ donde $f_j = f(x_j)$ en nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, calcular el polinomio $p(x)$ de grado $\leq N$ que verifica $p(x_j) = f_j$ para $j = 0, 1, \dots, N$. Al tratar con aproximaciones, se produce un error en la interpolación. Supongamos que empleamos la interpolación de Lagrange [[Dav75], Section 2.5, pp. 33-39] en el intervalo $[-1, 1]$:

Teorema 3 (Error de interpolación). *Sea f una función en $\mathcal{C}^{N+1}[-1, 1]$ y $p(x)$ el polinomio de grado $\leq N$ que interpola la función f en $N + 1$ nodos distintos x_0, x_1, \dots, x_N en el intervalo $[-1, 1]$. Para cada $x \in [-1, 1]$ existe un punto $\xi_x \in (-1, 1)$ tal que:*

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|f^{(N+1)}(\xi_x)|}{(N+1)!} \left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|. \quad (3.2.25)$$

Demostración. Véase [[Dav75], Thm 3.1.1, p. 56]. □

En la expresión (3.2.25), en general, nada se puede hacer sobre $f^{(N+1)}(\xi_x)$, pues depende de la función a aproximar. Sin embargo, escogiendo de manera adecuada los nodos, podemos reducir el factor $\left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|$ y minimizar el error. Es aquí donde entran en juego los polinomios de Chebyshev. Mediante (3.2.9), puede comprobarse que el coeficiente principal de T_n es 2^{n-1} , luego:

Teorema 4 (Norma mínima de Chebyshev). *Para cualquier polinomio mónico $p(x)$ de grado N se verifica:*

$$\max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{T_N(x)}{2^{N-1}} \right| = \frac{1}{2^{N-1}} \leq \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|. \quad (3.2.26)$$

Demostración. Véase [[Dav75], Thm 3.3.4, pp. 62-64]. □

Por el *teorema fundamental del álgebra* [[Dav75], Thms 1.11.1, 1.11.2, p. 16], podemos descomponer T_{N+1} como producto de factores lineales $(x - x_j)$ siendo x_j una de sus $N + 1$ raíces:

$$\frac{1}{2^N} T_{N+1}(x) = \prod_{j=0}^N (x - x_j). \quad (3.2.27)$$

Para minimizar el error (3.2.25), el factor $\left| \prod_{j=0}^N (x - x_j) \right|$ debe ser proporcional a T_{N+1} . Esto implica que los nodos óptimos se corresponden con las $N + 1$ raíces del polinomio de Chebyshev T_{N+1} . Estos puntos se definen como:

Definición 2 (Nodos de Chebyshev de primera especie). *Dado $n \in \mathbb{N}$, los n nodos de Chebyshev de primera especie se definen como las raíces del polinomio de Chebyshev T_n :*

$$x_j = \cos \left(\pi \frac{2j-1}{2n} \right), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.2.28)$$

Dado \mathcal{P}_N el espacio de polinomios de grado $\leq N$, es habitual usar la base formada por los monomios para su representación. Sin embargo también puede utilizarse la base formada por los polinomios de Chebyshev:

Teorema 5. Dado $p(x) \in \mathcal{P}_N$, existen únicos coeficientes $\{a_k\}_{k=0}^N$ tales que:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N, \quad (3.2.29)$$

y existen únicos $\{b_k\}_{k=0}^N$ tales que:

$$p(x) = b_0T_0(x) + b_1T_1(x) + \dots + b_NT_N(x). \quad (3.2.30)$$

Demostración. Véase [[Góm17], Prop 2.2.2, pp. 19-20]. \square

Así como cada polinomio posee una representación en serie de Chebyshev, nos preguntamos si una función más general f puede ser representada como una serie de Chebyshev infinita. Asumiendo que f es Lipschitz continua en $[-1, 1]$, es decir, existe $C \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in [-1, 1]$, podemos concluir:

Teorema 6 (Serie de Chebyshev). Si $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Lipschitz continua, entonces posee una representación en serie de Chebyshev:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x) \quad (3.2.31)$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3.2.32)$$

para $n \geq 1$. Además, la serie es absoluta y uniformemente convergente.

Demostración. Véase [[Tre19], Thm 3.1, p. 16-17]. \square

Siguiendo [[Boy00], Section 2.3, pp. 25-27], podemos clasificar la convergencia de los coeficientes de la serie (3.2.31) para n muy grande mediante las siguientes definiciones sobre su *comportamiento asintótico*:

Definición 3 (Convergencia algebraica). ¹ Se dice que los coeficientes a_n de la serie (3.2.31) poseen *convergencia algebraica* de índice k si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|n^k < +\infty, \quad n \gg 1. \quad (3.2.33)$$

Alternativamente, si:

$$a_n \sim \mathcal{O}(n^{-k}). \quad (3.2.34)$$

¹ La interpretación geométrica de estas definiciones puede consultarse en [[Boy00], Section 2.4, pp. 27-30].

Definición 4 (Convergencia exponencial). ¹ Se dice que los coeficientes a_n de la serie (3.2.31) poseen **convergencia exponencial** si:

$$a_n \sim \mathcal{O}(\exp(-qn^r)), \quad n \gg 1, \quad (3.2.35)$$

para cierta constante q y cierto $r > 0$ conocido como 'índice de convergencia exponencial'. Es decir, el orden de convergencia algebraico no está acotado.

Definición 5 (Convergencia geométrica). ¹ Se dice que los coeficientes a_n de la serie (3.2.31) poseen **convergencia geométrica** si

$$a_n \sim \mathcal{O}(\exp(-qn)), \quad n \gg 1. \quad (3.2.36)$$

Es decir, posee convergencia geométrica si su índice de convergencia exponencial es $r = 1$.

En la práctica, lo habitual es aproximarla mediante la serie truncada que verifica:

Teorema 7. Si la función f puede expresarse en serie de Chebyshev (3.2.31) y es aproximada mediante la serie truncada:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad (3.2.37)$$

entonces:

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \quad (3.2.38)$$

para todo $f(x)$, todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [-1, 1]$.

Demostración. Véase [[Boy00], Thm 6, p. 47]. □

Desafortunadamente, el error para una serie truncada de Chebyshev (3.2.37) con coeficientes algebraicamente convergentes según $\mathcal{O}(n^{-k})$ implica un error que decrece sólo según $\mathcal{O}(N^{-k+1})$ debido a la siguiente desigualdad:

Teorema 8. Para $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k-1)(N+1)^{k-1}} < \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-k} < \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}. \quad (3.2.39)$$

Demostración. Véase [Bas88]. □

Sin embargo, los nodos que emplea *Chebfun* y los que usaremos en los métodos pseudoespectrales no están dados por las $N+1$ raíces de T_{N+1} sino por los $N+1$ puntos donde T_N alcanza sus extremos:

Definición 6 (Nodos de Chebyshev de segunda especie). Dado $n \in \mathbb{N}$, los $n + 1$ **nodos de Chebyshev de segunda especie** se definen como los puntos en los que el polinomio de Chebyshev T_n alcanza sus extremos:

$$z_j = \cos\left(\pi \frac{j}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.2.40)$$

En lo que sigue, nos referiremos a ellos como 'nodos de Chebyshev'.

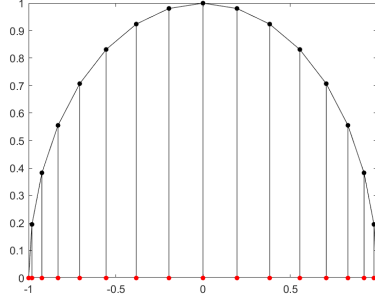


Figura 3.3: Geométricamente, los nodos de Chebyshev (3.2.40) son las proyecciones sobre el eje x de puntos equiespaciados sobre la semicircunferencia unidad. En este caso, se ha tomado $n = 16$.

Una aproximación de la función f en \mathcal{P}_N está dada por el polinomio interpolador evaluado en $N + 1$ nodos de Chebyshev (3.2.40):

$$p_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n T_n(x). \quad (3.2.41)$$

para ciertos coeficientes $\{c_n\}_{n=0}^N$.

Computacionalmente, la aproximación (3.2.41) es casi tan buena como la aproximación (3.2.37) y tiene la ventaja de no evaluar las integrales (3.2.32). La clave para entender los coeficientes $\{c_n\}_{n=0}^N$ es el fenómeno conocido como *aliasing*.

En una red de $n + 1$ nodos de Chebyshev, cualquier función es indistinguible de un polinomio de grado n . Es más, cualquier polinomio T_n es indistinguible de ciertos T_m para $0 \leq m \leq n$:

Teorema 9 (Aliasing). Para cualquier $n \geq 1$ y $0 \leq m \leq n$, los siguientes polinomios de Chebyshev toman los mismos valores en los $n + 1$ nodos de Chebyshev:

$$T_m, T_{2n-m}, T_{2n+m}, T_{4n-m}, T_{4n+m}, T_{6n-m}, \dots \quad (3.2.42)$$

Demostración. Véase [[Tre19], Thm 4.1, p. 25]. □

Así, concluimos que los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de (3.2.31) y $\{c_n\}_{n=0}^N$ de (3.2.41) se relacionan mediante:

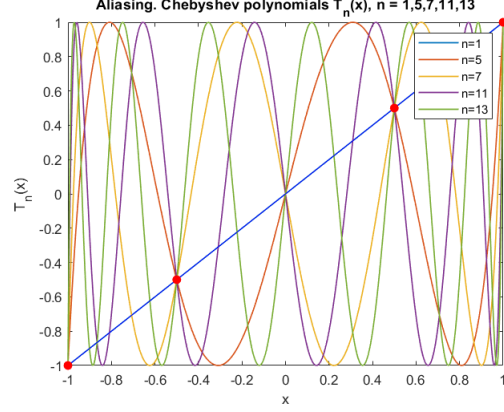


Figura 3.4: En rojo, los $N = 4$ nodos en los que se confunden los polinomios T_n , $n = 1, 5, 7, 11, 13$.

Teorema 10. Sean $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua y $p_N \in \mathcal{P}_N$ el polinomio interpolador en $N+1$ nodos de Chebyshev para $N \geq 1$. Si $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{c_n\}_{n=0}^N$ son los coeficientes de Chebyshev de f y p_N respectivamente, entonces:

$$c_0 = a_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} a_{2Ns}, \quad (3.2.43)$$

$$c_n = a_n + \sum_{s=1}^{+\infty} a_{n+2Ns} + \sum_{s=1}^{+\infty} a_{-n+2Ns}, \quad 1 \leq k \leq N-1 \quad (3.2.44)$$

$$c_N = a_N + \sum_{s=1}^{+\infty} a_{(2s+1)N}. \quad (3.2.45)$$

Demostración. Véase [[Tre19], Thm 4.2 p. 26] o [[Góm17], Thm 3.3.3, pp. 32-34]. \square

3.3. Método de los residuos ponderados

La idea básica del método de los residuos ponderados consiste en asumir que la función desconocida $u(x)$ puede aproximarse como la *serie espectral*:

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n \varphi_n(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (3.3.1)$$

donde las *funciones base* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^N$ son conocidas y los *coeficientes espectrales* $\{\hat{u}_n\}_{n=0}^N$ deben ser determinados.

Así, la primera cuestión fundamental que debemos resolver es qué funciones base escoger en función del problema a resolver. Es obvio que deben cumplir ciertas propiedades:

- (i) fáciles de computar,
- (ii) convergencia rápida,
- (iii) completitud, es decir, que cualquier solución pueda ser representada con gran precisión para un N suficientemente grande.

Por ello:

- Para problemas periódicos, se emplean funciones trigonométricas.
- Para problemas no periódicos, se emplean polinomios de Jacobi.

Nos centraremos en el segundo caso empleando polinomios de Chebyshev. Un análisis más amplio sobre qué funciones base escoger en función del tipo de problema se encuentra en [[Boy11], Appendix A, Table A.1, pp. 495-513].

Definimos el producto interno dado por:

$$(u, v)_\rho = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)\rho(x)dx, \quad (3.3.2)$$

donde $u(x)$, $v(x)$ son funciones en $[\alpha, \beta]$ y $\rho(x)$ es una función peso no negativa conocida. Las funciones base en (3.3.1) deben ser escogidas de modo que sean ortogonales respecto de cierto peso ρ :

$$(\varphi_n, \varphi_m)_\rho = c_n \delta_{nm}, \quad (3.3.3)$$

siendo c_n cierta constante y δ_{nm} la Delta de Kronecker. Es por ello que los polinomios de Chebyshev son una elección posible en $[-1, 1]$ (Teorema 2).

Al tratar con aproximaciones, surge la noción de *residuo*. Cuando la serie (3.3.1) se sustituye en la ecuación diferencial:

$$Lu = f, \quad (3.3.4)$$

siendo L un operador diferencial, se obtiene una función residuo:

$$R_N(x) = Lu_N - f. \quad (3.3.5)$$

Puesto que el residuo $R_N(x)$ es idénticamente nulo para la solución exacta, el reto es escoger los coeficientes $\{\hat{u}_n\}_{n=0}^N$ adecuados para minimizarlo. Para ello, busquemos que se anule en cada nodo el producto interno:

$$(R_N, \psi_j)_{\rho_*} = \int_\alpha^\beta R_N(x)\psi_j(x)\rho_*(x)dx = 0 \quad (3.3.6)$$

donde $\{\psi_j\}_{j=0}^N$ son determinadas *funciones test* y el peso ρ_* está asociado con las funciones base escogidas y el método de solución. La elección de las funciones test y los pesos ρ_* determinan el método de solución [[Boy00], Section 3.1, pp. 61.64]. En los métodos pseudoespectrales se tiene:

$$\psi_j = \delta(x - x_j), \quad \rho_*(x) = 1, \quad (3.3.7)$$

donde los nodos $\{x_j\}_{j=0}^N$ deben ser escogidos según el problema y δ es la distribución Delta de Dirac. Mediante (3.3.6), (3.3.7) obtenemos:

$$R_N(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.3.8)$$

En los métodos pseudoespectrales, podemos expresar los coeficientes $\{\hat{u}_k\}_{k=0}^N$ en función de $\{u_N(x_j)\}_{j=0}^N$. Es decir, las $N + 1$ incógnitas son $\{u_N(x_j)\}_{j=0}^N$.

3.4. Métodos pseudoespectrales

Los métodos pseudoespectrales se basan en interpolaciones ponderadas:

$$f(x) \approx p_N(x) = \sum_{j=0}^N \frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} \phi_j(x) f_j, \quad (3.4.1)$$

donde $\{x_j\}_{j=0}^N$ es un conjunto de nodos interpoladores; $f_j = f(x_j)$, $j = 0, \dots, N$; $\rho(x)$ es una función peso no negativa y, al menos, ℓ veces diferenciable, $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^N$ satisface $\phi_j(x_i) = \delta_{ji}$ para la delta de Kronecker, $i = 0, \dots, N$. Por tanto, $p_N(x)$ definido como (3.4.1) es un interpolador de $f(x)$ tal que:

$$f(x_i) = p_N(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (3.4.2)$$

El operador derivada se genera tomando la ℓ -ésima derivada de (3.4.1) y evaluando el resultado en los nodos:

$$f^{(\ell)}(x_i) = \sum_{j=0}^N \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[\frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} \phi_j(x) \right]_{x=x_i} f_j, \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.4.3)$$

que puede representarse como una matriz de diferenciación $D^{(\ell)}$ de entradas:

$$D_{ij}^{(\ell)} = \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[\frac{\rho(x)}{\rho(x_j)} \phi_j(x) \right]_{x=x_i}, \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (3.4.4)$$

Por tanto, el proceso de diferenciación puede entenderse como el producto:

$$\mathbf{f}^{(\ell)} = D^{(\ell)} \mathbf{f} \quad (3.4.5)$$

siendo \mathbf{f} , respectivamente $\mathbf{f}^{(\ell)}$, el vector de los valores de la función, respectivamente los valores de la ℓ -ésima derivada, en los nodos.

Para la interpolación polinómica en $[a, b]$ arbitrario, se escoge $\rho(x) = 1$ y las *funciones cardinales* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^N$ como los interpoladores de Lagrange:

$$\phi_j(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^N \left(\frac{x - x_m}{x_j - x_m} \right), \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.4.6)$$

Empleando los nodos de Chebyshev (3.2.40) en $[-1, 1]$, las funciones cardinales resultan:

$$\phi_j(x) = (-1)^{j+1} \frac{(1-x^2)}{c_j N^2 (x-x_j)} \frac{d}{dx} T_N(x), \quad (3.4.7)$$

donde $c_j = 2$ para $j = 0, N$; $c_i = 1$ en otro caso. Pero, ¿por qué utilizar los nodos de Chebyshev (3.2.40)?

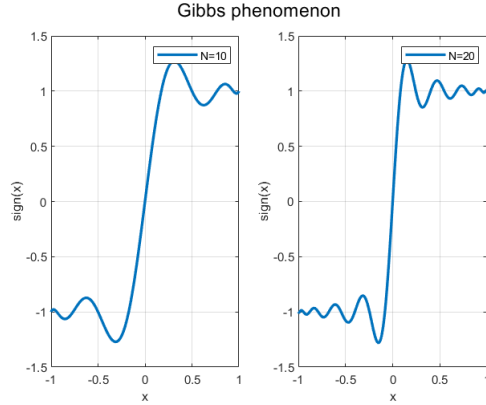


Figura 3.5: Interpolación la función signo, $\text{sign}(x)$, en 10 y 20 puntos, tomando N par para evitar un nodo en 0. El sobreimpulso en los extremos muestra el fenómeno de Gibbs, que no desaparece cuando $N \rightarrow +\infty$.

3.4.1. Interpolación polinómica y clustering

La siguiente cuestión clave es cómo elegir la distribución de los nodos según el tipo de problema:

- Para problemas periódicos, se emplean nodos equiespaciados.
- Para problemas no periódicos, se emplean redes irregulares.

En lo que sigue, nos basamos principalmente en los desarrollos de [[Tre00], Chapters 5,6,7; pp. 41-75] y [[For98], Chapters 2,3; pp. 4-35]. Puesto que nuestro objetivo es resolver la ecuación de Lane-Emden (1.4.18), consideramos un dominio no periódico y acotado.

Supongamos que queremos trabajar en $[-1, 1]$ con funciones no periódicas. Podríamos suponer que la función es periódica y emplear polinomios trigonométricos en nodos equiespaciados, pero esta aproximación, en general, sacrificaría la precisión de los métodos espectrales. Si extendemos una función suave periódicamente, el resultado, en general, no es otra función suave. Esto acabaría con la alta precisión de los métodos espectrales y produciría un sobreimpulso conocido como *fenómeno de Gibbs* (Fig. 3.5). De este modo, el error en la interpolación será $\mathcal{O}(1)$, el error en la primera derivada será $\mathcal{O}(N)$ y así sucesivamente.

Sin embargo, podemos emplear polinomios algebraicos $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$. En nuestro caso, los polinomios de Chebyshev. Inicialmente, podríamos pensar en usar nodos equiespaciados, pero esto favorecería la aparición de oscilaciones de amplitud cada vez mayor en los extremos debidas al *fenómeno de Runge* (Fig. 3.6). Al interpolar funciones suaves con polinomios en $N + 1$ nodos equiespaciados, las aproximaciones no sólo no convergen cuando $N \rightarrow +\infty$ sino que empeoran al ritmo de 2^N .

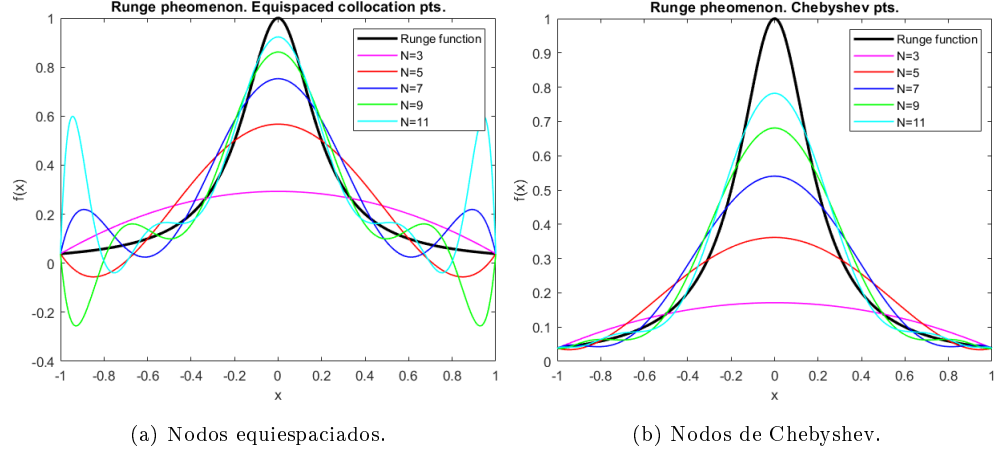


Figura 3.6: Interpolación de la función de Runge $1/(1 + 25x^2)$ en $N + 1$ puntos, $N = 3, 5, 7, 9, 11$. Según aumenta N , las oscilaciones en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ se acentúan en (3.6a), mientras que en (3.6b) las oscilaciones se minimizan.

La elección adecuada es la interpolación en nodos distribuidos de manera desigual. Asintóticamente cuando $N \rightarrow +\infty$, los nodos deben distribuirse con la siguiente densidad por unidad de longitud:

$$\text{densidad} \sim \frac{N}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.4.8)$$

Es decir, la separación media entre los nodos es $\mathcal{O}(N^{-2})$ cuando $x \approx \pm 1$ y $\mathcal{O}(N^{-1})$ en el interior, siendo la separación media entre nodos cercanos a 0 asintótica a $\frac{\pi}{N}$. Por ello, emplearemos los nodos de Chebyshev (3.2.40).

3.4.2. Teoremas de precisión

Sea $p(z)$ un polinomio mónico de grado N . Por el *teorema fundamental del álgebra* [[Dav75], Thms 1.11.1, 1.11.2, p. 16], podemos reescribirlo como:

$$p(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j) \quad (3.4.9)$$

donde $\{z_j\}_{j=1}^N$ son sus raíces, que pueden ser complejas, contadas con su multiplicidad. Tomando valor absoluto:

$$|p(z)| = \prod_{j=1}^N |z - z_j|, \quad (3.4.10)$$

que, tomando logaritmo, se convierte en:

$$\log |p(z)| = \sum_{j=1}^N \log |z - z_j|. \quad (3.4.11)$$

Sea

$$\phi_N(z) = N^{-1} \sum_{j=1}^N \log |z - z_j|. \quad (3.4.12)$$

Esta función es armónica en todo el plano complejo salvo en $\{z_j\}_{j=1}^N$. Podemos interpretarla como un potencial electrostático:

$$\phi_N(z) \text{ es el potencial en } z \text{ debido a cargas } \{z_j\}_{j=1}^N \text{ de potencial } N^{-1} \log |z - z_j|.$$

Por construcción, existe una relación entre $p(z)$ y $\phi_N(z)$:

$$|p(z)| = e^{N\phi_N(z)}. \quad (3.4.13)$$

A partir de (3.4.13), podemos observar el comportamiento del fenómeno de Runge. Si $\phi_N(z)$ es aproximadamente constante para $z \in [-1, 1]$, entonces $p(z)$ también lo es. Si $\phi_N(z)$ varía en $[-1, 1]$, el efecto sobre $|p(z)|$ se manifestará en forma de oscilaciones que crecerán exponencialmente con N . Sería natural tomar el límite cuando $N \rightarrow +\infty$ y pensar en los puntos $\{x_j\}$ distribuidos en $[-1, 1]$ según una función de densidad $\mu(x)$ tal que $\int_{-1}^1 \mu(x) dx = 1$. Por ello, el número de nodos en $[a, b]$ sería:

$$\int_a^b N\mu(x) dx. \quad (3.4.14)$$

En caso de considerar nodos equiespaciados:

$$\mu(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3.4.15)$$

El correspondiente potencial ϕ está definido por:

$$\phi(z) = \int_{-1}^1 \mu(x) \log |z - x| dx. \quad (3.4.16)$$

A partir de aquí, puede deducirse que el potencial para nodos equiespaciados tomando el límite $N \rightarrow +\infty$ es:

$$\phi(z) = -1 + \operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{2} \log(z+1) + \frac{z-1}{2} \log(z-1) \right). \quad (3.4.17)$$

Prestemos atención a los valores $\phi(0) = -1$, $\phi(\pm 1) = -1 + \log 2$, a partir de los cuales podemos concluir que si $p \in \mathcal{P}_N$ tiene raíces equiespaciadas en $[-1, 1]$, entonces tomará valores 2^N veces mas grandes al aproximarse a los extremos ± 1 que cerca de 0:

$$|p(x)| \simeq e^{N\phi(x)} = \begin{cases} \left(\frac{2}{e}\right)^N, & \text{cerca de } x = \pm 1 \\ \left(\frac{1}{e}\right)^N, & \text{cerca de } x = 0 \end{cases}. \quad (3.4.18)$$

Sin embargo, si consideramos la distribución (3.4.8) correspondiente a los nodos de Chebyshev:

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.4.19)$$

obtenemos el potencial:

$$\phi(z) = \log \frac{|z - \sqrt{z^2 - 1}|}{2}. \quad (3.4.20)$$

Esto significa que las curvas de nivel de $\phi(z)$ son elipses de focos ± 1 de modo que los valores de $\phi(z)$ en la elipse son el logaritmo de la mitad de la suma de los semiejes mayor y menor. En particular, la elipse degenerada en $[-1, 1]$ es una curva de nivel en la que $\phi(z)$ toma el valor constante $-\log 2$. Luego, si un polinomio mónico p posee N raíces distribuidas según la función de densidad de Chebyshev (3.4.8) en $[-1, 1]$, entonces oscilará entre valores del orden de 2^{-N} en $[-1, 1]$:

$$|p(x)| \simeq e^{N\phi(x)} = 2^{-N}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (3.4.21)$$

A partir de este análisis, podemos concluir:

Teorema 11 (Precisión de la interpolación polinómica). *Dada una función u y una secuencia de conjuntos de nodos de interpolación $\{x_j\}_N$, $N = 1, 2, \dots$, que convergen a una función de densidad μ cuando $N \rightarrow +\infty$ con su correspondiente función potencial ϕ (3.4.16), se define:*

$$\phi_{[-1,1]} = \sup_{x \in [-1,1]} \phi(x). \quad (3.4.22)$$

Para cada N , sea p_N el polinomio de grado $\leq N$ que interpola u en $\{x_j\}_N$. Si existe una constante $\phi_u > \phi_{[-1,1]}$ tal que u sea analítica en la región cerrada:

$$\{z \in \mathbb{C} : \phi(z) \leq \phi_u\}, \quad (3.4.23)$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x \in [-1, 1]$ y todo N :

$$|u(x) - p_N(x)| \leq Ce^{-N(\phi_u - \phi_{[-1,1]})}. \quad (3.4.24)$$

Análogamente, existe una nueva constante C independiente de x y N para la ℓ -ésima derivada, $u^{(\ell)} - p_N^{(\ell)}$, $\ell \geq 1$.

Demostración. Véase [[For98], Appendix E, pp. 173-174]. □

Es decir, la interpolación polinómica y los métodos espectrales convergen geoméricamente (en ausencia de errores de redondeo) suponiendo que u es analítica en un entorno de la región acotada por la menor curva equipotencial que contiene $[-1, 1]$. Centrándonos en el método pseudoespectral de Chebyshev, estas curvas equipotenciales son elipses:

Teorema 12 (Precisión de la diferenciación psudoespectral de Chebyshev). Sea u analítica en el interior de la elipse de focos ± 1 en la que el potencial de Chebyshev toma el valor ϕ_f , es decir, la elipse cuyos semiejes mayor y menor suman $K = e^{\phi_f + \log 2}$. Sea w la ℓ -ésima derivada espectral de Chebyshev ($\ell \geq 1$). Entonces:

$$\left| w_j - u^{(\ell)}(x_j) \right| = \mathcal{O}(e^{-N(\phi_f + \log 2)}) = \mathcal{O}(K^{-N}) \quad (3.4.25)$$

cuando $N \rightarrow +\infty$.

El factor de convergencia asintótica es tan pequeño como K^{-1} :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup |w_j - u^{(\ell)}(x_j)|^{\frac{1}{N}} \leq K^{-1}. \quad (3.4.26)$$

Pensando en el gradiente del potencial, $\phi'(x)$, como la fuerza ejercida sobre una unidad de carga, concluimos que la función de densidad de Chebyshev (3.4.8) es una configuración de equilibrio y mínima energía por unidad de carga en $[-1, 1]$. Es decir, los nodos deben estar aproximadamente en una configuración de mínima energía asociada con la repulsión lineal inversa entre puntos.

3.4.3. Matriz de diferenciación de Chebyshev

Conocidos los valores de una función u en $N + 1$ nodos de Chebyshev, $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_N)^T$, obtendremos su derivada w en los nodos, $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_N)^T$, en dos pasos:

- Sea p el único polinomio de grado $\leq N$ tal que $p(x_j) = u_j$, $0 \leq j \leq N$.
- Sea $w_j = p'(x_j)$ la aproximación espectral de la derivada en los nodos.

Este proceso puede representarse como el producto de una matriz de tamaño $(N + 1) \times (N + 1)$ que denotaremos $D^{(1)}$ por aproximar la primera derivada:

$$\mathbf{w} = D^{(1)} \mathbf{u} \quad (3.4.27)$$

Ejemplo 1. Dado $N = 1$, los nodos de Chebyshev (3.2.40) son $x_0 = 1$, $x_1 = -1$. El polinomio interpolador de Lagrange y su derivada son, respectivamente:

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)u_0 + \frac{1}{2}(1-x)u_1, \quad (3.4.28)$$

$$p'(x) = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}u_1, \quad (3.4.29)$$

lo cual nos lleva a obtener una matriz (2×2) :

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4.30)$$

Ejemplo 2. Dado $N = 2$, los nodos de Chebyshev (3.2.40) son $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. El polinomio interpolador de Lagrange y su derivada son, respectivamente:

$$p(x) = \frac{1}{2}x(1+x)u_0 + (1+x)(1-x)u_1 + \frac{1}{2}x(x-1)u_2 \quad (3.4.31)$$

$$p'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)u_0 - 2xu_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)u_2, \quad (3.4.32)$$

lo cual nos lleva a obtener una matriz (3×3) , en cuya j -ésima columna se colocan los términos j de la expresión derivada en $x = 1, 0, -1$:

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4.33)$$

Veamos las fórmulas generales para las entradas de $D^{(1)}$ para N arbitrario:

Teorema 13 (Matriz de diferenciación de Chebyshev). Para cada $N \geq 1$, sea $D^{(1)}$ la matriz de diferenciación de Chebyshev de primer orden cuyas filas y columnas están numeradas desde 0 hasta N . Las entradas de $D^{(1)}$ son:

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, N \quad (3.4.34)$$

$$D_{jj}^{(1)} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.4.35)$$

$$D_{00}^{(1)} = \frac{2N^2 + 1}{6} = -D_{NN}^{(1)} \quad (3.4.36)$$

donde $c_i = 2$ para $i = 0, N$; $c_i = 1$ en otro caso.

Demostración. Puede deducirse como caso particular de los teoremas de Welfert [[Ali03], Thms 3.2.1, 3.2.2, pp. 37, 41]. \square

Veamos algunos ejemplos sobre cómo emplear la matriz de Chebyshev:

Ejemplo 3. El problema descrito por la ecuación de Poisson:

$$u_{xx} = e^{4x}, \quad -1 < x < 1, \quad u(\pm 1) = 0 \quad (3.4.37)$$

tiene por solución exacta:

$$u(x) = \frac{e^{4x} - x \sinh(4) - \cosh(4)}{16} \quad (3.4.38)$$

Para la matriz de diferenciación de Chebyshev $D^{(\ell)} = (D^{(1)})^\ell$, $\ell \geq 2$, pero podemos mejorar el coste computacional con las fórmulas descritas en [EE16]:

$$D_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 2D_{ij}^{(1)}(D_{ii}^{(1)} - \frac{1}{z_i - z_j}), & i \neq j \\ -\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (D_{ij}^{(1)})^2, & i = j = 0 \end{cases} \quad (3.4.39)$$

Tomemos los nodos interiores x_1, \dots, x_{N-1} , con $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$ el vector de incógnitas. Procedemos como sigue:

- Sea $p(x)$ el único polinomio de grado $\leq N$ tal que $p(\pm 1) = 0$ y $p(x_j) = u_j$, $1 \leq j \leq N-1$.
- Sea $w_j = p''(x_j)$, $1 \leq j \leq N-1$.

Ahora $D^{(2)}$ es una matriz $(N+1) \times (N+1)$ que convierte el vector \mathbf{u} en el vector $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_N)^T$. El proceso descrito toma las siguientes decisiones:

- Fijar $u_0 = u_N = 0$.
- Ignorar w_0 y w_N .

Esto implica que ni la primera y la última columna, ni la primera y última fila de $D^{(2)}$ tienen efecto. Es decir, podemos usar la matriz $\tilde{D}^{(2)}$ de tamaño $(N-1) \times (N-1)$ que se obtiene despreciando tales filas y columnas. Por tanto, la solución numérica consiste en resolver el sistema:

$$\tilde{D}^{(2)} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (3.4.40)$$

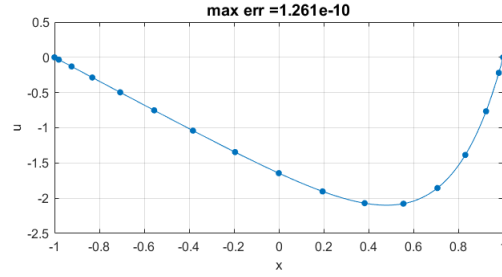


Figura 3.7: Solución de Ejemplo 3 para $N = 16$. Marcados los valores en los nodos.

Ejemplo 4. Consideremos un problema no lineal:

$$u_{xx} = e^u, \quad -1 < x < 1, \quad u(\pm 1) = 0. \quad (3.4.41)$$

Puesto que el problema es no lineal, no podemos invertir $\tilde{D}^{(2)}$. Si bien, podemos resolverlo iterativamente. Consideramos una aproximación inicial, como el vector de ceros, e iteramos repetidamente resolviendo el sistema:

$$\tilde{D}^{(2)} \mathbf{u}_{new} = \exp(\mathbf{u}_{old}) \quad (3.4.42)$$

donde $\exp(\mathbf{u})$ es el vector columna $(\exp(\mathbf{u}))_j = e^{u_j}$.

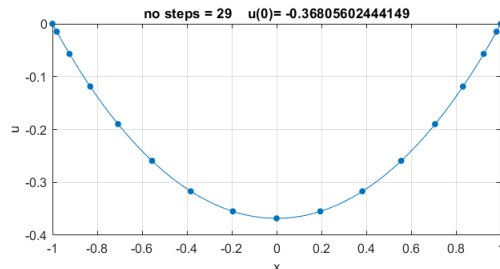


Figura 3.8: Solución de Ejemplo 4 para $N = 16$. Marcados los valores en los nodos.

Capítulo 4

Soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden

4.1. Introducción

Consideremos un PVI de tipo Lane-Emden:

$$\begin{cases} y''(r) + \frac{2}{r}y'(r) + y^n(r) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

donde $n \in [0, 5]$ es un parámetro constante. Puesto que el objetivo astrofísico es integrar el problema desde el origen hasta el primer cero positivo $r = \xi$ de y , reescalamos el dominio mediante:

$$r = \xi x. \quad (4.1.2)$$

Sustituyendo (4.1.2) en (4.1.1) y simplificando obtenemos un PC:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \frac{2}{x}\dot{y} + \xi^2 y^n &= 0, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad \dot{y}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

donde los puntos denotan las derivadas con respecto a la variable escalada x .

Hemos de hacer algunas observaciones sobre el problema anterior:

- (i) Es singular en $x = 0$ y posee un punto de ramificación en el extremo derecho de su dominio ($y(1) = 0$) cuando n no es entero. En general, las singularidades degradan la convergencia exponencial (Definición 4) de los métodos espectrales hasta un orden finito de convergencia algebraica (Definición 3). Esto es consecuencia del *Principio de Darboux*, que establece que la convergencia de la serie espectral depende de las singularidades en el plano complejo de la función aproximada, es decir, aquellos puntos en los que la función deja de ser analítica.

- (II) Se trata de un problema de autovalor no lineal.

Definición 7 (Autovalor no lineal). *Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, el **problema de autovalor no lineal** consiste en hallar los escalares $\lambda \in \Omega$ (autovalores) y los vectores no triviales $v \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^n$ (autovectores derecho e izquierdo resp.) tales que:*

$$F(\lambda)v = 0, \quad w^* F(\lambda) = 0^*, \quad (4.1.4)$$

donde 0 denota el vector columna trivial de \mathbb{C}^n y $(\cdot)^*$ denota el vector traspuesto conjugado.

Los problemas del tipo $F(\lambda)v = 0$ suelen resolverse con variaciones del método de Newton que pueden aplicarse sobre funciones escalares $f(z) = 0$ cuyas raíces son los autovalores de F o directamente sobre $F(\lambda)v = 0$ [[GT17], Section 4, pp. 37-52].

- (III) A pesar de que la EDO es de orden dos, necesitamos satisfacer tres condiciones de contorno: dos condiciones homogéneas ($y(1) = 0, \dot{y}(0) = 0$) y una condición no homogénea ($y(0) = 1$). Esto es posible ya que ξ será determinado a la vez que la solución de la EDO.

En general, los métodos semi-analíticos buscan soluciones en serie de potencias truncadas que convergen en $0 < r < 1$. Para $r > 1$, la convergencia es muy lenta y son poco precisos cuando se emplean muchos términos en el desarrollo. Además, su región de convergencia no suele abarcar el primer cero positivo ξ de y , que es el valor que buscamos. Sin embargo, los algoritmos que proponemos, basados en el método pseudoespectral de Chebyshev, ofrecen una precisión de, al menos, 12 cifras en el método de linealización sucesiva (SLM) [MS12], y 10 en el caso del método de quasi-linealización (QLM) [Boy11]. Otros métodos empleados para resolver (4.1.1) pueden verse en [[MS12], Introduction], [[Boy11], Table 2].

El SLM, de carácter ingenieril, no demuestra la convergencia de las iteraciones y se limita a mostrar tablas con los resultados. Al implementar el SLM en MATLAB, no hemos conseguido los resultados esperados y no hemos sido capaces de encontrar errores en el código, de modo que intentamos, sin éxito, establecer comunicación con los autores. Más tarde, analizaremos las diferencias obtenidas. Como alternativa, presentamos el QLM, que se justifica con una base más sólida y muestra tablas con los resultados obtenidos para el autovalor ξ y para el valor $\frac{dy}{dx}(1)$ para distintos n . También muestra el efecto de las singularidades en el orden de convergencia y analiza la convergencia de los coeficientes de la serie de Chebyshev.

A la hora de plantear el SLM y el QLM, tenemos que hacernos algunas preguntas. Ambos parten de una aproximación inicial que hemos de comprobar si es suficientemente precisa. Además, hemos de asegurarnos de que existe solución para el problema no lineal y de que es única. Por último, hemos de comprobar que no existen errores en la implementación de los métodos.

4.2. Método de linealización sucesiva

Estudiamos el SLM propuesto por S.S. Motsa y S. Shateyi en [MS12].

El SLM transforma una EDO no lineal en un esquema iterativo compuesto por ecuaciones lineales que son resueltas mediante métodos numéricos, en este caso, el método pseudoespectral de Chebyshev.

Aplicando el SLM a (4.1.3), asumimos que $y(x)$ puede aproximarse como:

$$y(x) = y_k(x) + \sum_{m=0}^{k-1} y_m(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.1)$$

donde y_k son funciones desconocidas que se obtienen resolviendo iterativamente la versión linealizada de las ecuaciones de gobierno asumiendo que y_m , $0 \leq m \leq k-1$, se conocen de previas iteraciones. La técnica de linealización se basa en asumir que y_k decrece según aumenta el número de iteraciones k :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0. \quad (4.2.2)$$

El algoritmo empieza considerando un aproximación inicial $y_0(x)$ que satisfaga las tres condiciones de contorno de (4.1.3):

$$y_0(x) = 1 - x^2. \quad (4.2.3)$$

Como el autovalor ξ también es desconocido, aplicamos el SLM mediante:

$$\xi = \xi_k + \sum_{m=0}^{k-1} \xi_m, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2.4)$$

Una aproximación inicial adecuada para $n \in (0, 5)$ es:

$$\xi_0^2 = 6 \left(\frac{4}{3} \right)^n, \quad (4.2.5)$$

que se obtiene sustituyendo (4.2.3) en (4.1.3) y resolviendo para $x = 1/2$. Sustituyendo (4.2.3) y (4.2.5) en (4.1.3) y despreciando términos no lineales en y_k , ξ_k resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_k + \frac{2}{x} \dot{y}_k + a_{1,k-1} y_k + a_{2,k-1} \xi_k &= r_{k-1}, \\ y_k(0) = 0, \quad y_k(1) = 0, \quad \dot{y}_k(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_{1,k-1} &= n \left(\sum_{m=0}^{k-1} \xi_m \right)^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} y_m \right)^{n-1}, \quad a_{2,k-1} = 2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} \xi_m \right) \left(\sum_{m=0}^{k-1} y_m \right)^n, \\ r_{k-1} &= - \left[\sum_{m=0}^{k-1} \ddot{y}_m + \frac{2}{x} \sum_{m=0}^{k-1} \dot{y}_m + \left(\sum_{m=0}^{k-1} \xi_m \right)^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} y_m \right)^n \right], \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

donde los puntos denotan la derivada respecto de la variable escalada x . El sistema (4.2.6) se resuelve con el método pseudoespectral de Chebyshev, en el cual las funciones y_k se aproximan por polinomios de interpolación de Chebyshev (3.2.1) evaluados en los nodos de Chebyshev $\{z_j\}_{j=0}^N$ (3.2.40) definidos en $[-1, 1]$. Para ello, transformamos el intervalo $[-1, 1]$ en $[0, 1]$ mediante:

$$x = \frac{z+1}{2}, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (4.2.8)$$

Las derivadas de y_k en los nodos pueden escribirse como:

$$\dot{y}_k(z_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^{(1)} y_k(z_j) = D^{(1)} \mathbf{y}_k, \quad \ddot{y}_k(z_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^{(2)} y_k(z_j) = D^{(2)} \mathbf{y}_k, \quad (4.2.9)$$

donde $\mathbf{y}_k = (y_k(z_0), y_k(z_1), \dots, y_k(z_{N-1}), y_k(z_N))^T$, $D^{(1)}$ es la matriz de diferenciación de Chebyshev de primer orden (Teorema 13) y $D^{(2)}$ es la matriz de diferenciación de Chebyshev de orden dos (3.4.39). Aplicando el método pseudoespectral de Chebyshev a (4.2.6), se obtiene:

$$A_{k-1} \mathbf{y}_k + B_{k-1} \xi_k = \mathbf{r}_{k-1}, \quad (4.2.10)$$

sujeto a:

$$y_k(z_0) = 0, \quad y_k(z_N) = 0, \quad (4.2.11)$$

$$\sum_{j=0}^N D_{Nj}^{(1)} y_k(z_j) = 0. \quad (4.2.12)$$

Los componentes de (4.2.10) se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{k-1} &= (r_{k-1}(z_0), r_{k-1}(z_1), \dots, r_{k-1}(z_{N-1}), r_{k-1}(z_N))^T \\ A_{k-1} &= 4D^{(2)} + \left[\frac{4}{x} \right]_d D^{(1)} + \mathcal{A}_{1,k-1} \\ \mathcal{A}_{1,k-1} &= \begin{pmatrix} a_{1,k-1}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,k-1}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1,k-1}(x_N) \end{pmatrix}, \quad \left[\frac{4}{x} \right]_d = \begin{pmatrix} \frac{4}{x_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4}{x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{4}{x_N} \end{pmatrix} \\ B_{k-1} &= \mathbf{a}_{2,k-1}, \quad \mathbf{a}_{2,k-1} = \begin{pmatrix} a_{2,k-1}(x_0) \\ a_{2,k-1}(x_1) \\ \vdots \\ a_{2,k-1}(x_N) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

El sistema (4.2.10) consiste en $(N+1)$ incógnitas en \mathbf{y}_k , y el parámetro desconocido ξ_k . Para resolver estas $(N+2)$ incógnitas, introducimos una nueva fila en (4.2.10) en la que se impone la condición de Neumann (4.2.12):

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & B_{k-1} \\ \hline D_{N,0}^{(1)} \dots D_{N,N}^{(1)} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k \\ \xi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.14)$$

Las condiciones de Dirichlet (4.2.11) pueden imponerse en (4.2.14) eliminando las filas 1 y $(N + 1)$ de la matriz de coeficientes y los vectores, y las columnas 1 y $(N + 1)$ de la matriz de coeficientes. Denotaremos las matrices y vectores resultantes de estas eliminaciones mediante $\tilde{\cdot}$. Por tanto, partiendo de las aproximaciones iniciales \mathbf{y}_0, ξ_0 , pueden hallarse las soluciones $\mathbf{y}_k, \xi_k, k = 1, 2, 3, \dots$ mediante:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_k \\ \xi_k \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & B_{k-1} \\ \hline D_{N,1}^{(1)} \dots D_{N,N-1}^{(1)} & 0 \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.15)$$

4.2.1. Resultados numéricos

Analizamos los resultados numéricos para el SLM.

Según el artículo [MS12], los resultados expuestos en el Cuadro 4.1 se generan con $N = 40$ nodos para $n = 1, 2$ y $N = 70$ para $n = 3, 4$. Los resultados obtenidos por los autores convergen rápidamente. Se consiguen 15 cifras decimales tras sólo 4 iteraciones para $n = 1$; 5 iteraciones para $n = 2$; 6 iteraciones para $n = 3$; 8 iteraciones para $n = 4$. Si bien, los resultados que nosotros hemos obtenido con la implementación del SLM en MATLAB son bastantes diferentes. Tras revisarlo detenidamente y realizar ejemplos calculados a mano, no hemos detectado ningún error en el código. Por ello, intentamos establecer una comunicación con los autores pero no recibimos respuesta alguna.

De hecho, incluso el primer término de la iteración es diferente de nuestros cálculos. Para $n = 1, N = 40, \text{Iters} = 1$, la comparación de resultados en el Cuadro 4.2 muestra que hay un problema con el algoritmo.

Tablas análogas con los resultados obtenidos por los autores para valores no enteros de n y para $\frac{dy}{dx}(1)$ pueden encontrarse en [MS12].

Referencia	Iters	Índice politrópico n			
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
SLM [MS12]	1	3.103790966018498	4.035737655330261	5.557521240863945	8.688676175146224
	2	3.141338575299632	4.330814323152805	6.592739714660735	11.771827678456009
	3	3.141592635714092	4.352749271550132	6.877461391335034	13.886237798409815
	4	3.141592653589793	4.352874592230670	6.896766842576802	14.817460536386396
	5	3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848617928429	14.967975594173165
	6	3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848619376960	14.971544376671904
	7	3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848619376960	14.971546348837493
	8	3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848619376960	14.971546348838095
MATLAB	1	2.11820414722535	2.6341367008033	3.41557773220568	4.89038753219843
	2	2.01679115247478	2.60213962196307	3.53091936494581	5.54919237281599
	3	2.06038310399701	2.7767744772013	4.00267731564179	6.9533215991505
	4	2.10071943349562	2.96012873489967	4.59792894444896	9.09147362718468
	5	2.13292298989233	3.13757800588699	5.310071850998	12.2995094590568
	6	2.15852417936487	3.30945992557257	6.179856077854	17.2260580659467
	7	2.17877469252874	3.47608443713469	7.26709262432531	24.9366702246662
	8	2.19470259217691	3.63753587669435	8.65477199053801	37.0798854921755

Cuadro 4.1: Comparación del primer cero (ξ) de la ecuación de Lane-Emden para diferentes iteraciones y valores de n entre [MS12] y la implementación en MATLAB del SLM.

MATLAB results	Table 1 [MS12]
$\xi_0 = 2.82843, \xi_1 = -0.71022; \xi_0 + \xi_1 = 2.11821$	$\xi_0 + \xi_1 = 3.1037$

Cuadro 4.2: Diferencia entre la implementación en MATLAB del SLM y los resultados presentados en [MS12].

4.3. Método de quasi-linealización

Estudiamos el método QLM propuesto por J.P. Boyd en [Boy11].

La mayoría de algoritmos para resolver EDOs no lineales son una variación del *método de Newton* [[GT17], Section 4, pp. 37-52]. Cuando aplicamos un método espectral a una EDO no lineal, el resultado es un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas compuesto por tantas ecuaciones como grados de libertad tiene el problema (independientemente de si los grados de libertad son los valores de la solución en los nodos o los coeficientes de la serie espectral). Es entonces cuando, partiendo de una aproximación inicial, se aplica el método de Newton hasta que la solución numérica es suficientemente precisa. Cuando el método de Newton se aplica directamente a la ecuación diferencial, se denomina *método de Newton-Kantorovich* [[Boy00], Appendix C, pp. 526-535].

En la práctica, existen varias dificultades:

- (I) Necesitamos una aproximación inicial adecuada.
- (II) Necesitamos conocer la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones.

Si escribimos el sistema como:

$$f_i(a_0, \dots, a_N) = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (4.3.1)$$

entonces los elementos de la matriz jacobiana J son:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}, \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (4.3.2)$$

El cálculo de la matriz J es muy costoso y debe ser actualizada en cada iteración.

- (III) En cada iteración hay que resolver un sistema lineal del tipo $J\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Si denotamos por \mathbf{a}_i el vector de coeficientes espectrales en la i -ésima iteración, entonces:

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i - J^{-1}\mathbf{f}, \quad (4.3.3)$$

donde \mathbf{f} es el vector cuyos elementos son las ecuaciones del sistema y tanto J como \mathbf{f} están evaluados en \mathbf{a}_i . Para resolver dicho sistema, se recomienda la eliminación gaussiana. Dado un sistema de n ecuaciones lineales y n variables para n suficientemente grande, la eliminación de Gauss-Jordan transforma la matriz de coeficientes en una matriz diagonal empleando, aproximadamente, n^3 operaciones mientras que la eliminación gaussiana transforma la matriz de

coeficientes en una matriz triangular superior empleando, aproximadamente, $\frac{2n^3}{3}$ operaciones. Es decir, la eliminación gaussiana es, aproximadamente, un 50% más eficiente que el método de Gauss-Jordan.

El QLM propuesto para resolver (4.1.3) se basa en el siguiente teorema:

Teorema 14. Si $w(x, \xi)$ resuelve:

$$\begin{cases} \ddot{w} + \frac{2}{x}\dot{w} + \xi^2 w^n = 0 \\ w(0) = 1 \\ \dot{w}(0) = 0 \\ w(1) = 0, \end{cases} \quad (4.3.4)$$

entonces $v(x, \xi) := \omega w(x, \xi)$ resuelve:

$$\begin{cases} \ddot{v} + \frac{2}{x}\dot{v} + \Theta^2 v^n = 0 \\ v(0) = \omega \\ \dot{v}(0) = 0 \\ v(1) = 0, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

con:

$$\omega = \left(\frac{\xi^2}{\Theta^2} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (4.3.6)$$

Demostración. Las condiciones de contorno se cumplen:

$$\begin{aligned} v(0) &= \omega w(0) = \omega \cdot 1 = \omega \\ \dot{v}(0) &= \omega \dot{w}(0) = \omega \cdot 0 = 0 \\ v(1) &= \omega w(1) = \omega \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Sustituyendo v en $\ddot{v} + \frac{2}{x}\dot{v} + \Theta^2 v^n = 0$ y eliminando factores comunes:

$$\begin{aligned} \omega \ddot{w} + \frac{2}{x}\omega \dot{w} + \Theta^2 \omega^n w^n &= 0 \\ \ddot{w} + \frac{2}{x}\dot{w} + \Theta^2 \omega^{n-1} w^n &= 0 \\ \ddot{w} + \frac{2}{x}\dot{w} + \xi^2 w^n &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

□

Esto implica que el problema de tipo Lane-Emden puede resolverse como un PC con $\xi > 0$ como una constante arbitraria y con condiciones homogéneas de Dirichlet. Sin embargo, la condición de Neumann sobre el origen no se satisfaría. Pero podemos hacer que se satisfaga empleando el Teorema 14 para reescalar la amplitud de la solución, y a la vez del parámetro ξ , para determinar simultáneamente el autovalor ξ .

Emplearemos el método pseudoespectral de Chebyshev en N nodos de modo que se tienen como incógnitas los N coeficientes espectrales de la serie truncada y el autovalor ξ . Por ello, imponemos $N + 1$ condiciones:

- $(N - 2)$ condiciones en los nodos interiores para anular el residuo.
- $y(0) = 1$.
- $\dot{y}(0) = 0$.
- $y(1) = 0$.

Recordemos, es posible imponer tres condiciones de contorno sobre una ecuación diferencial de orden dos ya que el autovalor ξ se determina simultáneamente a la solución de la ecuación diferencial. Empleando el QLM, asumimos que la solución puede aproximarse mediante:

$$y(x) \approx y_k(x) + \delta_k(x), \quad \xi \approx \xi_k + \epsilon_k, \quad (4.3.9)$$

para $|\delta_k(x)|_\infty \ll |y_k(x)|_\infty$ y $|\epsilon_k| \ll \xi_k$. Sustituyendo en (4.1.3), despreciando términos no lineales en el espacio de corrección δ_k y reagrupando, se obtiene un PC asumiendo que $y_k(x)$ se conoce de iteraciones previas:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{2}{x}\dot{\delta}_k + n\xi_k^2 y_k^{n-1}\delta_k = -\left\{\ddot{y}_k + \frac{2}{x}\dot{y}_k + \xi^2 y_k^n\right\}, \quad (4.3.10)$$

$$\delta_k(0) = 0, \quad \delta_k(1) = 0, \quad \dot{\delta}_k(0) = 0.$$

Para $n \in [0, 5)$, escogemos la aproximación inicial:

$$y_0(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad \xi_0 = 3. \quad (4.3.11)$$

Para discretizar el dominio, tomamos N nodos definidos mediante:

$$x_j = \frac{1}{2}[1 + \cos(t_j)], \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.3.12)$$

siendo:

$$t_j = \pi \frac{j}{N-1}, \quad (4.3.13)$$

y así poder aproximar mediante series truncadas de Chebyshev:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m T_m(x), \quad \delta_k(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k,j} T_j(x) \quad (4.3.14)$$

Por tanto, tenemos N relaciones imponiendo condiciones sobre los $(N-2)$ puntos interiores y mediante las condiciones homogéneas de Dirichlet en los extremos. Lo que hace que se convierta en un problema de autovalor es que ξ se incorpora para obtener la relación $N+1$ mediante la tercera condición de contorno $y(0) = 1$.

Definimos las matrices de diferenciación $D^{(0)}$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}$. Empleando el cambio (3.2.12) en la definición (3.2.1) de T_n y las fórmulas para las derivadas (3.2.14), (3.2.16), resultan:

$$D_{ij}^{(0)} = T_j(2x_i - 1) = \cos(j \cdot t_i), \quad (4.3.15)$$

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{d}{dx} T_j(2x_i - 1) = 2j \frac{\sin(j \cdot t_i)}{\sin(t_i)}, \quad (4.3.16)$$

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} T_j(2x_i - 1) = 4 \left[-j^2 \frac{\cos(j \cdot t_i)}{\sin^2(t_i)} + j \frac{\sin(j \cdot t_i) \cos(t_i)}{\sin^3(t_i)} \right], \quad (4.3.17)$$

para $j = 0, 1, \dots, N-1$. Las fórmulas anteriores poseen expresiones conocidas cuando $|x| \rightarrow 1$:

$$D_{0,j}^{(0)} = 1 \quad (4.3.18)$$

$$D_{N-1,j}^{(0)} = (-1)^j \quad (4.3.19)$$

$$D_{0,j}^{(1)} = 2j^2 \quad (4.3.20)$$

$$D_{N-1,j}^{(1)} = 2(-1)^j j^2 \quad (4.3.21)$$

$$D_{0,j}^{(2)} = \frac{4j^2(j^2 - 1)}{3} \quad (4.3.22)$$

$$D_{N-1,j}^{(2)} = \frac{4(-1)^j j^2(j^2 - 1)}{3}. \quad (4.3.23)$$

para $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Dado $\mathbf{a}_k = (a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,N-1})$ el vector de dimensión N que contiene los coeficientes espectrales de Chebyshev en la iteración k , sea $\boldsymbol{\delta}_k = (\mathbf{a}_k, \xi_k)^T$ el vector de dimensión $N+1$ tal que sus primeros N elementos son los coeficientes espectrales de Chebyshev y su último elemento es ξ_k . En cada iteración hay que resolver el sistema del tipo:

$$J\boldsymbol{\delta}_k = -\mathbf{r}, \quad (4.3.24)$$

siendo J una matriz jacobiana y \mathbf{r} el vector residuo.

Empezamos evaluando la aproximación inicial $\mathbf{y}_0 = (y_0(x_0), y_0(x_1), \dots, \dots, y_0(x_{N-1}))^T$ mediante (4.3.11) y resolviendo el sistema:

$$D^{(0)}\mathbf{a}_0 = \mathbf{y}_0 \quad (4.3.25)$$

para calcular los coeficientes espectrales de Chebyshev \mathbf{a}_0 correspondientes a \mathbf{y}_0 . De este modo, el vector con los coeficientes espectrales de Chebyshev \mathbf{a} que busca el algoritmo, se inicializa con $\mathbf{a} := \mathbf{a}_0$ y el autovalor ξ se inicializa con $\xi := \xi_0$ (4.3.11).

Sean \mathbf{y} , $\dot{\mathbf{y}}$, $\ddot{\mathbf{y}}$ los vectores de dimensión N que contienen los valores de $y(x)$ y sus dos primeras derivadas, respectivamente, en los nodos (4.3.12):

$$\mathbf{y} = (y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_{N-1}))^T = D^{(0)}\mathbf{a} \quad (4.3.26)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}(x_0), \dot{y}(x_1), \dots, \dot{y}(x_{N-1}))^T = D^{(1)}\mathbf{a} \quad (4.3.27)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = (\ddot{y}(x_0), \ddot{y}(x_1), \dots, \ddot{y}(x_{N-1}))^T = D^{(2)}\mathbf{a}. \quad (4.3.28)$$

A continuación, se inician las iteraciones de Newton-Kantorovich. En cada iteración, en primer lugar se calcula $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}$. Seguidamente, se calculan los componentes del sistema (4.3.24), en el que el jacobiano J está dado por:

$$J_{ij} = D_{i+1,j}^{(2)} + \frac{2}{x_{i+1}} D_{i+1,j}^{(1)} + \xi^2 n y(x_{i+1})^{n-1} D_{i+1,j}^{(0)} \quad (4.3.29)$$

$$J_{N-2,j} = D_{0,j}^{(0)} \quad (4.3.30)$$

$$J_{N-1,j} = D_{N-1,j}^{(1)} \quad (4.3.31)$$

$$J_{N,j} = D_{N-1,j}^{(0)} \quad (4.3.32)$$

$$J_{i,N} = 2\xi_m y(x_{i+1})^n \quad (4.3.33)$$

$$J_{N-2,N} = J_{N-1,N} = J_{N,N} = 0, \quad (4.3.34)$$

para $i = 0, \dots, N-3$; $j = 0, \dots, N-1$.

Por otra parte, el vector residuo $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1}, r_N)^T$ está dado por:

$$r_j = \ddot{y}_{j+1} + \frac{2}{x_{j+1}} \dot{y}(x_{j+1}) + \xi^2 y(x_{j+1})^n, \quad j = 0, \dots, N-3 \quad (4.3.35)$$

para imponer las condiciones sobre los nodos interiores;

$$r_{N-2} = r_{N-1} = 0 \quad (4.3.36)$$

para satisfacer las condiciones de contorno homogéneas sobre $\delta_k(x)$;

$$r_N = y(x_{N-1}) - 1 \quad (4.3.37)$$

para imponer la condición de contorno no homogénea $y(0) = 1$.

Resuelto el sistema (4.3.24), se actualizan los coeficientes espectrales de Chebyshev y el autovalor ξ mediante:

$$\mathbf{a} := \mathbf{a} + \mathbf{a}_k \quad (4.3.38)$$

$$\xi := \xi + \xi_k. \quad (4.3.39)$$

4.3.1. Singularidades

Cuando el exponente n es entero, la solución $y(x)$ es regular en todo el dominio. Cuando n no es entero, el término $y^n(x)$ posee un *punto de ramificación* en $x = 1$ donde se requiere $y(1) = 0$. Si $y(x)$ posee un cero simple en $x = 1$:

$$y(x) \approx Az + \text{términos de mayor grado en } z, \quad z \equiv x - 1, \quad (4.3.40)$$

para cierta constante A (negativa para $n \in [0, 5]$), entonces:

$$y^n(x) \sim (-A)^n (-z)^n + \text{términos de mayor grado en } z, \quad (4.3.41)$$

donde hemos escogido la rama para obtener los valores reales adecuados cuando $A < 0$, $z < 0$ ya que están a la izquierda de $x = 1$. Es decir, cuando n no es entero, $y(x)$ posee un punto de ramificación de orden $n + 2$ en $x = 1$ ya que la segunda derivada de $y(x)$ debe compensar $y^n(x)$:

$$y(x) \sim Az - \frac{\xi^2 (-A)^n}{(n+1)(n+2)} (-z)^{n+2} + \text{términos de mayor grado en } z. \quad (4.3.42)$$

4.3.2. Convergencia de los coeficientes

El resultado principal para analizar la convergencia de los coeficientes es el Principio de Darboux [[Boy00], Section 2.6, pp. 32-35]:

Teorema 15 (Principio de Darboux: singularidades y convergencia). *Para cualquier desarrollo en serie espectral (y en serie de potencias) de una función f , tanto el dominio de convergencia en el plano complejo como el orden de convergencia de la serie dependen de la localización y la "fuerza" de las singularidades más "fuertes" de f en el plano complejo.*

En este contexto, se entiende por "singularidad" cualquier punto del plano complejo en el que la función deja de ser analítica en el sentido de la teoría de variable compleja.

Cada singularidad contribuye con cierto valor en el cómputo de los coeficientes a_m en el límite asintótico $m \rightarrow +\infty$. La singularidad más "fuerte" es aquella cuya aportación es mayor que la del resto al hacer $m \rightarrow +\infty$.

Esto justifica que cuanto más suave sea la función que queremos aproximar, más rápida será la convergencia de la serie espectral. Además, permite establecer relaciones entre el tipo de singularidad y el comportamiento asintótico de los coeficientes de la serie espectral [[Boy00], Table 2.2, p. 60]. En particular, si una función posee un punto de ramificación de la forma $(1-x)^\psi$ en un extremo de su dominio, entonces, dada una constante C , los coeficientes espectrales a_m se aproximan asintóticamente a:

$$a_m \sim \frac{C}{m^{2\psi+1}}, \quad m \gg 1. \quad (4.3.43)$$

Sin embargo, cuando una función no posee singularidades en el intervalo en el que se expande como serie espectral, siguiendo la Definición 5, los coeficientes decrecen como los términos de una serie geométrica asintóticamente proporcional a p^m para $|p| < 1$:

$$a_m \sim C \exp(-m \log(p)). \quad (4.3.44)$$

Es decir, la constante q de la Definición 5 se corresponde con el logaritmo del radio de convergencia de la serie.

Si bien, cuando las singularidades son "débiles", es habitual observar que los coeficientes convergen exponencialmente hasta cierto *punto de cruce* para luego converger algebraicamente. En muchas ocasiones, los coeficientes espectrales son la suma de dos o más valores. Las singularidades en los extremos, puesto que su contribución decrece sólo algebraicamente cuando $m \rightarrow +\infty$, deben ser las más "fuertes" en el límite $m \rightarrow +\infty$. Pero, si, como es nuestro caso, los puntos de ramificación son "débiles" y las contribuciones de los puntos interiores son más "fuertes", entonces la contribución de estos últimos puede ser mayor y así hacer que la convergencia sea exponencial hasta cierto punto de cruce y después sea algebraica [[Boy00], Section 19.3, pp. 446-448].

Ejemplo 5. Para ilustrar lo anterior, supongamos que los coeficientes espectrales de cierta serie son del tipo:

$$b_m \sim 10 \exp\left(-\frac{m}{3}\right) + \frac{0.000001}{m^5}. \quad (4.3.45)$$

La convergencia es exponencial para $m < 120$ y, a partir de ahí, algebraica. Esto se debe a que la contribución del primer término es mayor hasta el punto de cruce, momento en el que pasa a ser menor que la contribución del segundo término.

Según vimos en la subsección anterior 4.3.1, $y(x)$ posee un punto de ramificación de orden $\psi = n + 2$ en $x = 1$ cuando el índice politrópico n no es entero. Por tanto, empleando (4.3.43), cuando n no es entero, los coeficientes de Chebyshev de la solución de Lane-Emden poseen convergencia algebraica de orden $2n + 5$:

$$a_m \sim \frac{C}{m^{2n+5}}. \quad (4.3.46)$$

4.3.3. Resultados numéricos

En esta sección, se comparan los resultados obtenidos por [Boy11] mediante el QLM y por la implementación en MATLAB del QLM.

En el Cuadro 4.3, se compara el valor del autovalor y primer cero positivo ξ de $y(x)$ para índices politropicos n enteros. Se emplean $N = 40$ nodos para $n = 1, 2$ y $N = 70$ nodos para $n = 3, 4$. Se obtienen resultados similares en el Cuadro 4.4 para valores de n no enteros. En esta segunda tabla, se ha empleado $N = 100$ en la implementación en MATLAB del QLM.

En el Cuadro 4.5, se compara el valor $\frac{dy}{dx}(1)$. Se ha empleado $N = 100$ en la implementación en MATLAB del QLM.

Referencia	Iters	Índice politrópico n			
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
[Boy11]		3.141592653589793	4.352874595946125	6.896848619376960	14.971546348838095
QLM	1	3.128573972912787	4.000000521321349	4.950346675383282	5.929841151541709
	2	3.128573972912787	4.321055828745427	6.258900686749319	9.075857237855471
	4	3.141567726328371	4.352874580809430	6.895421554523372	14.014461246986226
	6	3.141592653589793	4.352874595946108	6.896848619376213	14.969287289066294
MATLAB	8	3.141592653589793	4.352874595946108	6.896848619376255	14.971546348837167
	10	3.141592653589793	4.352874595946109	6.896848619376251	14.971546348837277

Cuadro 4.3: Comparación del primer cero (ξ) de la ecuación de Lane-Emden para diferentes iteraciones y valores de n entre [Boy11] y la implementación en MATLAB del QLM.

Referencia	Iters	Índice politrópico n			
		$n = 0.5$	$n = 1.5$	$n = 2.5$	$n = 3.5$
[Boy11]		2.752698054065	3.653753736219	5.355275459011	9.535805344245
	1	2.764907047865	3.548547731473	4.469676508449	5.437888458530
	2	2.752720845990	3.650936363678	5.184239176776	7.553914111076
QLM	4	2.752698054120	3.653753736218	5.355264327308	9.479272390195
MATLAB	6	2.752698054120	3.653753736219	5.355275459011	9.535805274034
	8	2.752698054120	3.653753736219	5.355275459011	9.535805344246
	10	2.752698054120	3.653753736219	5.355275459011	9.535805344246

Cuadro 4.4: Comparación del primer cero (ξ) de la ecuación de Lane-Emden para diferentes iteraciones y valores de n entre [Boy11] y la implementación en MATLAB del QLM.

Referencia	Iters	Índice politrópico n			
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
[Boy11]		-1.0000000000000000	-0.553897420877304	-0.292631615154770	-0.120043038478703
	1	-1.009719451055463	-0.651813728374975	-0.486484802671189	-0.393594473637808
	2	-1.000025359219728	-0.559745965297467	-0.326480808263697	-0.199271965432848
QLM	4	-1.0000000000000000	-0.553897423396854	-0.292690551880995	-0.127368192155232
MATLAB	6	-1.0000000000000000	-0.553897420877335	-0.292631615154781	-0.120058080073843
	8	-1.0000000000000000	-0.553897420877334	-0.292631615154779	-0.120043038478720
	10	-1.0000000000000000	-0.553897420877334	-0.292631615154779	-0.120043038478719

Cuadro 4.5: Comparación del valor $\frac{dy}{dx}(1)$ de la ecuación de Lane-Emden para diferentes iteraciones y valores de n entre [Boy11] y la implementación en MATLAB del QLM.

La solución exacta de (4.1.1) para $n = 0$ es la parábola dada por:

$$y(x) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}T_1(2x-1) - \frac{1}{8}T_2(2x-1) = 1 - x^2. \quad (4.3.47)$$

Fig. 4.1 muestra la solución numérica para $n = 1/10000$. La convergencia de orden 5 prevista se observa ya que:

$$a_m \sim \frac{0.001}{m^5} \quad (4.3.48)$$

para m suficientemente grande. De hecho, puesto que $a_{100} \sim 10^{-13}$, es obvio que la aproximación del método pseudoespectral de Chebyshev para 100 nodos es muy alta.

Cuando $n = 5/2$, los primeros 27 coeficientes convergen geoméricamente según se ve en la parte izquierda de Fig 4.2. Tras este punto, decrecen proporcionalmente a m^{-10} .

Fig 4.3 compara los coeficientes espectrales de Chebyshev para n desde 0 hasta 4.5 en incrementos de 0.5. Según aumenta n , la convergencia geométrica se ralentiza. Sin embargo, cuando n no es entero, converge algebraicamente pasado el denominado punto de cruce. Esta cola converge más lento cuanto menor sea n ; así, sólo $n = 1/2$ posee coeficientes mayores que 10^{-11} para $m = 100$. Para n muy grande, como por ejemplo, $n = 4.5$, la convergencia geométrica es mucho más lenta y el punto de cruce se escapa de los límites del gráfico; si bien, su cola algebraica es proporcional a m^{-14} .

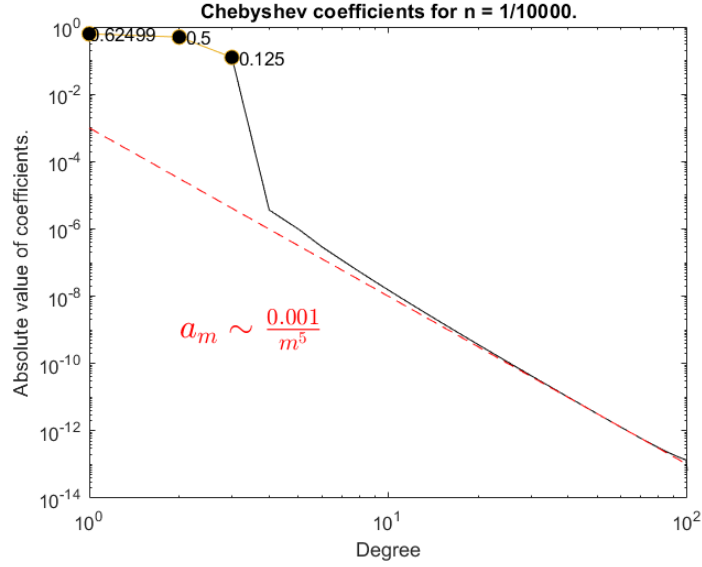


Figura 4.1: Coeficientes espectrales de Chebyshev para $n = 1/10000$. Se aproximan asintóticamente a $0.001/m^5$. La solución exacta para $n = 0$ es una parábola cuyos coeficientes espectrales de Chebyshev están marcados en discos negros. La perturbación causada al hacer $n = 1/10000$ hace que los coeficientes de Chebyshev a partir de grado 3 no sean cero. Sin embargo, la suma $\sum_{n=3}^{+\infty} |a_n|$ modificará $y(x)$ menos de 0^{-4} .

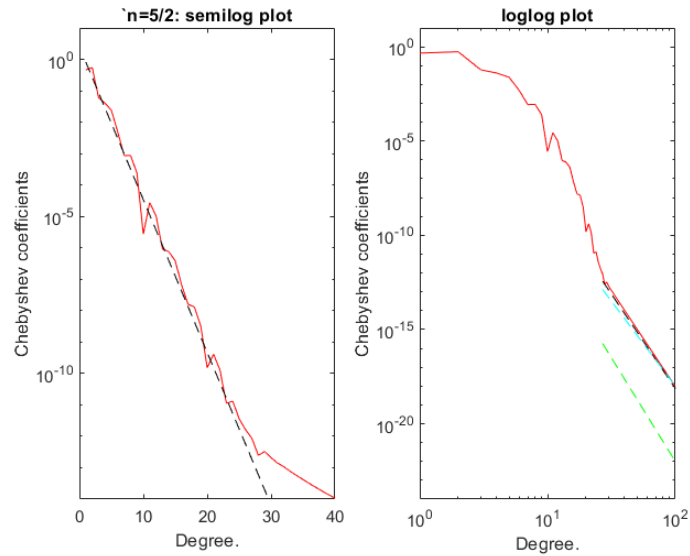


Figura 4.2: Coeficientes espectrales de Chebyshev para $n = 5/2$. El gráfico izquierdo usa escala lineal en grados y logarítmica para los coeficientes. El gráfico derecho es análogo pero con escala logarítmica en ambos ejes. Los coeficientes desde grado 27 a 400 son indistinguibles de $75m^{-10}$ (negro). Las otras líneas discontinuas, con pendientes distintas, son proporcionales a m^{-9} (azul), m^{-11} (verde).

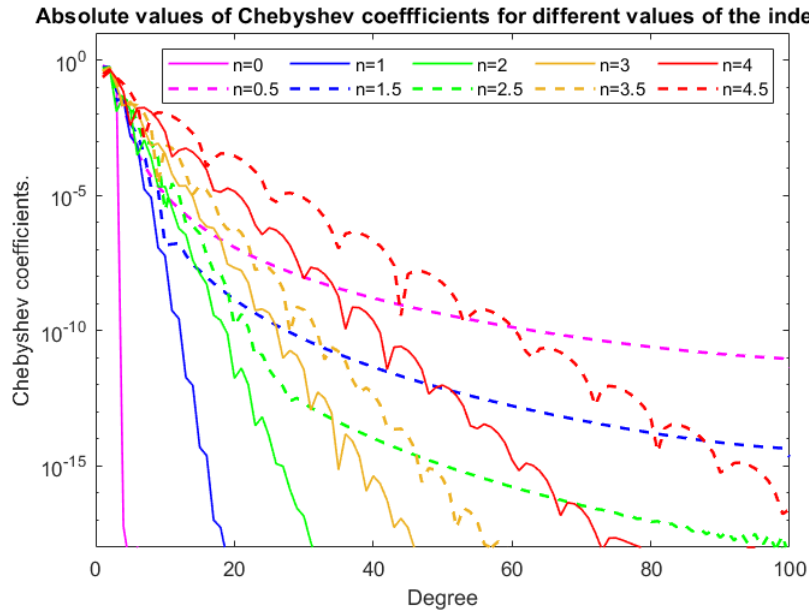


Figura 4.3: Valor absoluto de los coeficientes espectrales de Chebyshev para diez valores del índice politrópico n . Si n es entero, no hay singularidad y se mantiene la convergencia exponencial. Si n no es entero, poseen una cola algebraica que decrece proporcionalmente a $m^{-(2n+5)}$.

Conclusiones y trabajo futuro

Durante el desarrollo de esta memoria, han surgido diversas cuestiones que pueden resultar interesantes de cara a un futuro trabajo:

- El algoritmo SLM.

Hemos sido incapaces de obtener resultados adecuados en la resolución de la ecuación de Lane-Emden mediante el método SLM. Tampoco hemos detectado errores en el código implementado en MATLAB. Por tanto, sería interesante estudiar la aplicación del SLM en otros problemas con el fin de detectar posibles errores y comprobar su efectividad.

- Otros métodos numéricos para resolver la ecuación de Lane-Emden.

Tan sólo hemos considerado los algoritmos SLM y QLM para su resolución. Si bien, son muchos los métodos históricamente aplicados para resolverla. Una posibilidad de trabajo futuro consiste en estudiar otros métodos y comprobar su precisión.

- El método pseudoespectral de Chebyshev y el Análisis de Fourier.

Hemos optado por construir la matriz de diferenciación de Chebyshev siguiendo el método de los residuos ponderados, pero también es posible hacerlo mediante la *transformada rápida de Fourier*. La clave de este desarrollo está en la equivalencia entre el desarrollo en serie de Chebyshev en $x \in [-1, 1]$, el desarrollo en serie de Laurent para z sobre la circunferencia unidad y el desarrollo en serie de Fourier en $\theta \in \mathbb{R}$. Por tanto, cualquier polinomio de grado n podrá expresarse como combinación única de polinomios de Chebyshev, como desarrollo de Laurent, o mediante un polinomio trigonométrico y par de período 2π . Siguiendo una idea similar, una función arbitraria $f(x)$ definida en $[-1, 1]$ tendría una función recíproca $f(z)$ sobre la circunferencia unidad y una función periódica $F(\theta)$ en \mathbb{R} .

Dos de las referencias principales para el desarrollo de esta memoria abordan este punto: el libro [Boy00] se basa en la equivalencia entre el desarrollo en serie de Fourier y el desarrollo en serie de Chebyshev y el manual [Tre00] analiza el método pseudoespectral de Chebyshev desde esta doble perspectiva.

Además, tales referencias abordan el empleo de la matriz de diferenciación de Chebyshev para resolver problemas en derivadas parciales, otra posible vía de trabajo.

- Otros métodos pseudoespectrales y matrices de diferenciación.

En [[Ali03], Section 3.2, pp. 35-41] encontramos los *teoremas de Welfert*, que describen las entradas de una matriz de diferenciación $D^{(\ell)}$. Siguiendo su desarrollo, pueden obtenerse, por ejemplo, la matriz de diferenciación de Legendre o emplear los polinomios de Laguerre para obtener el método pseudoespectral del mismo nombre, útil para resolver PCs en $[0, \infty)$. También en [[Boy00], Appendix A, pp. 495-513], se aborda la elección de otras funciones base y se estudian los dominios de convergencia en el plano complejo.

- Profundización en la ecuación de Lane-Emden.

La interpretación física del modelo estelar es otra posible vía de trabajo. Hemos seguido la teoría no relativista para modelar la estructura interna de polítropos newtonianos de manera simple gracias a la ecuación de Lane-Emden. Resolviéndola, aparte de funciones para la densidad, presión central, energía potencial gravitatoria e incluso temperatura de la estrella en consideración, las soluciones permiten hallar el límite de Chandrasekhar para una enana blanca. Esta es la máxima masa posible de una enana blanca: si se supera, colapsará. Sin embargo, la teoría de Newton no se ajusta a objetos muy compactos y masivos. Existe un límite superior para la masa de estrellas de neutrones que no puede predecirse con las ecuaciones newtonianas pero sí en el marco de la relatividad general. Para las estrellas relativistas que permiten identificar modelos estables y no estables a través de la relación masa-radio, la ecuación (1.3.4) se reemplaza por la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Haciendo un estudio similar, puede deducirse la ecuación de Lane-Emden relativista.

Anexo

Todos los códigos empleados pueden consultarse en <https://sourceforge.net/p/tfg-lane-emden/code/ci/default/tree/>. Adjuntamos el pseudocódigo de los algoritmos SLM y QLM. En cuanto a la notación:

- (I) El símbolo \leftarrow significa que se necesitan los miembros de la derecha para el cómputo del miembro de la izquierda. Por ejemplo, $A \leftarrow B, C$ indica que para calcular A se necesitan B y C .
- (II) El símbolo $:=$ denota la asignación. Por ejemplo, $z := x + y$ significa que la variable z toma el valor $x + y$.

Algorithm 1 SLM

```

1: function  $[\mathbf{y}, \xi] = \text{slm}(N, n, \text{iters})$  ▷ Input. Output
2:    $\mathbf{z} \leftarrow N$  ▷ Grid points (3.2.40)
3:    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{z}, N$  ▷ Domain transformation (4.2.8)
4:    $D^{(1)} \leftarrow \mathbf{z}, N$  ▷ Diff matrix (Teorema 13)
5:    $D^{(2)} \leftarrow D^{(1)}, \mathbf{z}, N$  ▷ 2nd order diff matrix (3.4.39)
6:    $D \leftarrow \mathbf{x}$  ▷ Matrix  $[4/x]_d$  (4.2.13)
7:    $\mathbf{y} := \mathbf{y}_0$  ▷ Initialise (4.2.3)
8:    $\xi := \xi_0$  ▷ Initialise (4.2.5)
9:   for  $k = 1 : \text{iters}$  do
10:     $R \leftarrow \mathbf{y}, N, n, k, \xi$  ▷ Matrix  $R_{k-1}$  (4.2.13)
11:     $B \leftarrow \mathbf{y}, N, n, k, \xi$  ▷ Matrix  $B_{k-1}$  (4.2.13)
12:     $A \leftarrow D^{(1)}, D^{(2)}, D, \mathbf{y}, N, n, k, \xi$  ▷ Matrix  $A_{k-1}$  (4.2.13)
13:     $C \leftarrow A, B, D^{(1)}$  ▷ Coefficient matrix (4.2.15)
14:     $\mathbf{b} \leftarrow R$  ▷ Vector (4.2.15)
15:     $\mathbf{y}_k, \xi_k \leftarrow C, \mathbf{b}$  ▷ Solve (4.2.15)
16:     $\mathbf{y} := \mathbf{y} + \mathbf{y}_k$  ▷ Update (4.2.1)
17:     $\xi := \xi + \xi_k$  ▷ Update (4.2.4)
18:   end for
19: end function

```

Algorithm 2 QLM.

```

1: function  $[\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{a}, \xi] = \text{qlm}(N, n, \text{iters})$  ▷ Input. Output
2:    $\mathbf{x} \leftarrow N$  ▷ Grid points (4.3.12)
3:    $D^{(0)} \leftarrow N$  ▷ Diff matrix (4.3.15), (4.3.18), (4.3.19)
4:    $D^{(1)} \leftarrow N$  ▷ Diff matrix (4.3.16), (4.3.20), (4.3.21)
5:    $D^{(2)} \leftarrow N$  ▷ Diff matrix (4.3.17), (4.3.22), (4.3.23)
6:    $\mathbf{y}_0 \leftarrow \mathbf{x}$  ▷ Initialise (4.3.11)
7:    $\xi := \xi_0$  ▷ Initialise (4.3.11)
8:    $\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{y}_0, D^{(0)}$  ▷ Initialise Cheb coeffs. Solve (4.3.25)
9:   for  $k = 1 : \text{iters}$  do
10:      $\mathbf{y} := D^{(0)} * \mathbf{a}$  ▷ Update (4.3.26)
11:      $J \leftarrow D^{(0)}, D^{(1)}, D^{(2)},$   

        $\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{a}, n, \xi$  ▷ Jacobian (4.3.29)-(4.3.34)
12:      $\mathbf{r} \leftarrow D^{(1)}, D^{(2)} \mathbf{y}, \mathbf{x},$   

        $\mathbf{a}, n, \xi$  ▷ Residual (4.3.35)-(4.3.37)
13:      $\mathbf{a}_k, \xi_k \leftarrow J, \mathbf{r}$  ▷ Solve (4.3.24)
14:      $\mathbf{a} := \mathbf{a} + \mathbf{a}_k$  ▷ Update (4.3.38)
15:      $\xi := \xi + \xi_k$  ▷ Update (4.3.39)
16:   end for
17:    $\mathbf{y} := D^{(0)} * \mathbf{a}$  ▷ Update (4.3.26)
18: end function

```

Bibliografía

- [AC11] F. M. Araujo y C. B. M. H. Chirenti. *Newtonian and Relativistic Polytropes*. 2011. arXiv: [1102.2393 \[gr-qc\]](#) (vid. págs. [3](#), [11](#)).
- [Ali03] H. Alici. «Pseudospectral Methods for Differential Equations: Application to the Schrödinger Type Eigenvalue Problems». Tesis doct. Masters thesis, Dept. of Math., Middle East Technical University, 2003 (vid. págs. [22](#), [23](#), [25](#), [38](#), [58](#)).
- [AW05] G.B. Arfken y H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Science, 2005 (vid. págs. [5](#)).
- [Bas88] G. Baszenski. «Error Estimates for Sine Series Expansions». En: *Mathematische Nachrichten* 139.1 (1988), págs. 155-166 (vid. págs. [28](#)).
- [Boy00] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2000 (vid. págs. [21](#), [27](#), [28](#), [31](#), [46](#), [51](#), [57](#), [58](#)).
- [Boy11] J.P. Boyd. «Chebyshev Spectral Methods and the Lane-Emden Problem». En: *Numer. Math. Theory Methods Appl.* 4.2 (2011), págs. 142-157. issn: 1004-8979 (vid. págs. [22](#), [31](#), [42](#), [46](#), [52](#), [53](#)).
- [BT87] J. Binney y S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987 (vid. págs. [5](#), [7-9](#), [12](#)).
- [Cha39] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. The University of Chicago Press, 1939 (vid. págs. [15](#), [19](#)).
- [Cin] P. Cintotta. *Notas de Elementos de Astrofísica Teórica*. Universidad Nacional de la Plata, Argentina. URL: <http://fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar/~pmc/EAT/index.html> (vid. págs. [5](#), [8](#), [9](#)).
- [Dav75] P.J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, 1975 (vid. págs. [22](#), [25](#), [26](#), [34](#)).
- [DHT14] T.A. Driscoll, N. Hale y L.N. Trefethen. *Chebfun Guide*. Pafnuty Publications, Oxford, 2014 (vid. págs. [20](#), [23](#)).
- [EE16] M. El-Azab y G. El-Baghdady. «Chebyshev–Gauss–Lobatto Pseudo-Spectral Method for One-Dimensional Advection-Diffusion Equation with Variable Coefficients». En: *Sohag Journal of Mathematics* 3 (ene. de 2016), págs. 7-14. DOI: [10.18576/sjm/030102](#) (vid. págs. [38](#)).
- [Ehl91] J. Ehlers. «The Newtonian Limit of General Relativity». En: *Classical Mechanics and Relativity: Relationship and Consistency*. Ed. por G Ferrarese. Naples: Bibliopolis, 1991, págs. 95-106 (vid. págs. [3](#)).

- [For98] B. Fornberg. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998 (vid. págs. 33, 36).
- [Góm17] J. Gómez González. *Interpolación Numérica. ¿Qué hay detrás de Chebfun?* Jun. de 2017. URL: <http://hdl.handle.net/10902/12331> (vid. págs. 23, 27, 30).
- [GT17] S. Güttel y F. Tisseur. *The Nonlinear Eigenvalue Problem*. Manchester Institute for Mathematical Sciences, University of Manchester, 2017 (vid. págs. 42, 46).
- [Hei02] J.M. Heinzle. «(In)finiteness of Spherically Symmetric Static Perfect Fluids». En: *Classical Quantum Gravity* 19.11 (2002), págs. 2835-2851. ISSN: 0264 - 9381. DOI: [10.1088/0264-9381/19/11/307](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/11/307) (vid. pág. 15).
- [Lin92] L. Lindblom. «On the Symmetries of Equilibrium Stellar Models». En: *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 340.1658 (1992), págs. 353-364. ISSN: 0962-8428. DOI: [10.1098/rsta.1992.0072](https://doi.org/10.1098/rsta.1992.0072) (vid. págs. 3, 6).
- [MA80] C. Mohan y A.R. Al-Bayat. «Power-Series Solutions of the Lane-Emden Equation». En: *Astrophysics and Space Science* 73.1 (1980), págs. 227-239 (vid. pág. 20).
- [Mac12] P. Mach. «All Solutions of the n= 5 Lane-Emden Equation». En: *Journal of Mathematical Physics* 53.6 (2012), pág. 062503 (vid. pág. 19).
- [Mak86] T. Makino. «On a Local Existence Theorem for the Evolution Equation of Gaseous Stars». En: *Patterns and Waves*. Ed. por T. Nishida, M. Mimura y H. Fujii. Amsterdam: North-Holland, 1986, págs. 459-479 (vid. pág. 4).
- [MMT91] J.E. Marsden, M.L. Mateos y A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991 (vid. págs. 5, 9, 10).
- [MS12] S.S. Motsa y S. Shateyi. «A Successive Linearization Method Approach to Solve Lane-Emden Type of Equations». En: *Mathematical Problems in Engineering* 2012 (oct. de 2012). DOI: [10.1155/2012/280702](https://doi.org/10.1155/2012/280702) (vid. págs. 42, 43, 45, 46).
- [Oli07] T. A. Oliynyk. «The Newtonian Limit for Perfect Fluids». En: *Comm. Math. Phys.* 276.1 (2007), págs. 131-188. ISSN: 0010-3616. DOI: [10.1007/s00220-007-0334-z](https://doi.org/10.1007/s00220-007-0334-z) (vid. pág. 3).
- [RS99] I.W. Roxburgh y L.M. Stockman. «Power Series Solutions of the Polytrope Equations». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 303.3 (1999), págs. 466-470 (vid. pág. 20).
- [Tre00] L.N. Trefethen. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, 2000 (vid. págs. 22, 33, 57).
- [Tre19] L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, 2019 (vid. págs. 27, 29, 30).
- [WS00] J. A. C. Weideman y S.C. Satish. «A MATLAB Differentiation Matrix Suite». En: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 26.4 (2000), págs. 465-519.
- [Yos60] K. Yoshida. *Lectures on Differential and Integral Equations*. Vol. 10. Interscience Publishers, 1960.