



Instituto Politécnico Nacional Escuela Superior de Cómputo



Teoría computacional

Clase 02: Lenguajes

CONTENIDO

- Lenguaje
- Operaciones entre lenguajes
 - Unión o alternativa
 - Concatenación
 - Potencia de un lenguaje
 - Cierre o clausura positiva
 - Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene)
 - Reflexión de lenguajes
- Ejercicios 02: Lenguajes

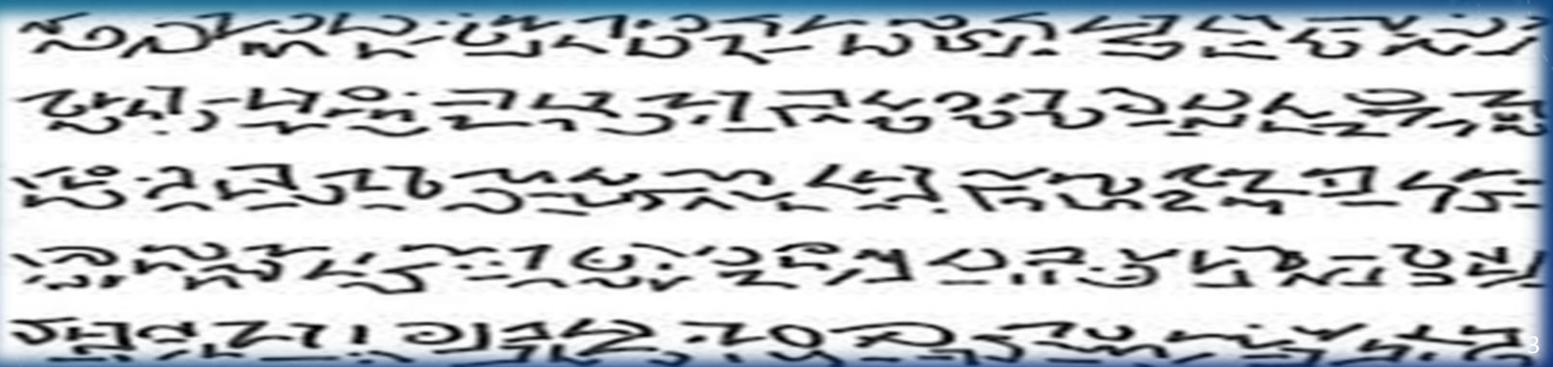


LENGUAJE

- Un lenguaje es un conjunto de palabras (*cadena*) de un determinado alfabeto Σ .

$$L \subset W(\Sigma)$$

- **Formalmente:** Se llama lenguaje sobre un alfabeto a todo subconjunto del lenguaje universal de Σ .



- En particular, el conjunto vacío Φ es un subconjunto de $W(\Sigma)$ y se llama por ello lenguaje vacío. Este lenguaje no debe confundirse con el que tiene como único elemento la palabra vacía $\{\lambda\}$, que también es un subconjunto (diferente) de $W(\Sigma)$. Para distinguirlos, hay que fijarse en su cardinalidad (número de símbolos).

$$C(\Phi)=0$$

$$C(\{\lambda\})=1$$

- Obsérvese que tanto Φ como $\{\lambda\}$ son lenguajes sobre cualquier alfabeto. Por otra parte, un alfabeto puede considerarse también como uno de los lenguajes generados por él mismo: el que contiene todas las palabras de una sola letra.

OPERACIONES ENTRE LENGUAJES

1. Unión o alternativa: Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto, $L_1 \subset W(\Sigma)$, $L_2 \subset W(\Sigma)$ se denomina unión de los dos lenguajes $L_1 \cup L_2$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan indistintamente a uno u otro de los dos lenguajes.

$$L_1 \cup L_2 = \{x | x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

- La unión de lenguajes tiene las siguientes propiedades:
 - i. **Operación cerrada:** la unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.
 - ii. **Propiedad asociativa:** $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$.
 - iii. **Existencia de un elemento neutro:** cualquiera que sea el lenguaje L , el lenguaje vacío Φ cumple que

$$\Phi \cup L = L \cup \Phi = L$$

- IV. **Propiedad conmutativa:** cualesquiera que sean L_1 y L_2 , se verifica que $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$.

- V. **Propiedad idempotente:** cualquiera que sea L , se verifica que $L \cup L = L$.



2. Concatenación: Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto $L_1 \subset W(\Sigma)$, $L_2 \subset W(\Sigma)$, se denomina concatenación de los dos lenguajes $L_1 \cap L_2$ ($L_1 L_2$) al conjunto de todas las cadenas formadas concatenando una palabra del primer lenguaje con una del segundo.

$$L_1 L_2 = \{x_1 x_2 \mid x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2\}$$

- La definición anterior sólo es valida si L_1 y L_2 contienen al menos un elemento. Para la concatenación de L con el lenguaje vacío ϕ se tiene que: $\phi L = L \phi = \phi$



- La concatenación de lenguajes tiene las siguientes propiedades:
 - Operación cerrada:** la concatenación de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre el mismo alfabeto.
 - Propiedad asociativa:** $(L_1 L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$.
 - Existencia de un elemento neutro:** cualquiera que sea el lenguaje L , el lenguaje de la palabra vacía cumple que: $\{\lambda\}L = L\{\lambda\} = L$



3. Potencia de un lenguaje: Desde el punto de vista estricto esta no es una nueva operación, sino un caso particular de la anterior, Se denomina potencia *i-ésima* de un lenguaje a la operación que consiste en concatenarlo consigo mismo *i*-veces.

$$L^i = LLL...L \text{ (i veces)}$$

- Definiremos también:
 - $L^1 = L$
 - $L^{i+1} = L^i L = L L^i \text{ (} i > 0 \text{)}$
 - $L^i L^j = L^{i+j} \text{ (} i, j > 0 \text{)}$
 - $L^0 = \{\lambda\}$

4. Cierre o clausura positiva: La operación de cierre positivo de un lenguaje L es otro lenguaje L^+ obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, excepto L^0 .

$$L^+ = \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

- Ninguna clausura positiva contiene la palabra vacía, a menos que dicha palabra este en L .
- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ , puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^+ = W(\Sigma) - \{\lambda\}$$



5. Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene): La operación cierre de un lenguaje L es otro L^* obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, incluso L^0 .

$$L^* = \{\lambda\} \cup \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \dots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

- Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ , puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^* = W(\Sigma)$$

- Son evidentes las siguientes identidades:

- $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

- $L^+ = L L^* = L^* L$



6. Reflexión de lenguajes: Sea L un lenguaje cualquiera. Se llama *lenguaje reflejo* o *inverso* de L , y se representa con L^{-1} : $\{x^{-1} \mid x \in L\}$

- i.e. es el lenguaje que contiene todas las palabras inversas de L .



EJERCICIOS 02: LENGUAJES

1. Sea:

- $\Sigma_1 = \{a, b, c, d, \dots, z\}$
- $L_1 = \{anita, lava, la, tina\}$
- $L_2 = \{hola, como, estas, amigo\}$
- $L_3 = \{a, arca, amor, amigo, animo, teoria, grupo, salon, cara\}$
- **Obtener:**
 - $(L_1 \cup L_2) L_3$
 - $(L_1 L_2) \cup L_3$
 - L_1^2
 - L_2^+ (hasta la potencia 2)
 - L_2^* (hasta la potencia 2)
 - L_2^{-1}

2. Sea:

- $\Sigma_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F\}$
- $L_1 = \{001AF,10FFAA,109012,667800\}$
- $L_2 = \{00,10,12,45,66,77\}$
- $L_3 = \{1,0,3,5,6,F,A,B,C\}$
- **Obtener:**
 - $(L_1 \cup L_2) L_3$
 - $(L_1 L_2) \cup L_3$
 - L_1^2
 - L_2^+ (hasta la potencia 2)
 - L_2^{-1}
 - $L_2^{-1} \cup (L_1 \cup L_3)$