taller 2

1. Encuentra los puntos fijos (reales) de $g(x)$

1) $g(x) = 3x + 2$

$3x + 2 = x$

$2x = -2$

$x = -1$

$p = -1$

2) $g(x) = x^2$

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

$p_1 = 0 \; , \; p_2 = +1$

3) $\overset{g(x)}{x^2} + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 = x$

$x^2 + x - 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-3)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x_1 = 1.302 \quad x_2 = -2.302$

$p_1 = 1.302, \; p_2 = -2.302$

4) $g(x) = \text{sen}\, x$

$\text{sen}\, x = x$

$\text{sen}(0) = 0$

$p = 0$

5) $g(x) = x + 2$

$x + 2 = x$

$2 \neq 0$

no tiene punto fijo

6) $g(x) = x$

$x = x$

$p = \mathbb{R}$

7) $g(x) = x^4$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2^3 - 1 = 0$

$x_2^3 = 1$

$x_2 = 1$

$p_1 = 0, \; p_2 = 1$

8) $g(x) = x - \ln x$

$x - \ln x = x$

$-\ln x = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

$p = 1$

9) $g(x)\, x \ln x$

$x \ln x = x$

$\ln x = 1$

$x = e$

$p_2 = e$

10) $g(x) = x\ln x^2$

$x\ln x^2 = x \rightarrow x_1 = 0$

$\ln x^2 = 1$

, $P_{2,3} = \pm\sqrt{e}$

$P_1 = 0$ $P_2 = +\sqrt{e}$

$P_3 = -\sqrt{e}$

11) $g(x) = x^2 \ln x$

$x^2 \ln x = x$

$x\ln x = 1$

$x\ln x - 1 = 0$

por bysección

en la 9na iteración

$x = 1.763$

$P = 1.763$

12) $g(x) = \cos x$

$\cos x = x$

$\cos x - x = 0$

por bisección

$p = 0.739$

11.- Sea $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)$

1) Encuentra el mínimo y el máximo de $g(x)$ en $[-1,1]$

$g'(x) = 2/3\, x$ $\qquad g(-1) = 0$ $\qquad$ mínimo es $-1/3$

$2/3\, x = 0$ $\qquad g(0) = -1/3$ $\qquad$ máximo es 0

$x = 0$ $\qquad g(1) = 0$

2) Verifica que $g(x) \in [-1,1], \forall x \in [-1,1]$

$-1 \leq -1/3 \leq g(x) \leq 0 \leq 1$

$-1 \leq g(x) \leq 1$

$g(x) \in [-1,1]$

3) Prueba que $g(x)$ tiene punto fijo en $[-1,1]$

Como $g(x) \in [-1,1], \forall x \in [-1,1]$. entonces $g(x)$ tiene punto punto fijo por Teorema de existencia.

4) Encuentra un valor K, $0 < K < 1$, tal que $|g'(x)| \leq K < 1$, $x \in [-1,1]$

$g'(x) = 2/3\, x$ $\qquad \underline{\underline{K = 1}}$

$|g'(x)| = 2/3|x|$

$2/3|x| \leq 2/3(1) = 2/3$

5) Prueba que el punto fijo de $g(x)$ en $[-1,1]$ es único.

Cómo $\exists K$, $|g'(x)| \leq K$, $\forall x$ existe el punto fijo único

6) Determina el único punto fijo de $g(x)$ en $[-1, 1]$

$$g(x) = 1/3\,(x^2 - 1)$$

$$1/3\,(p^2 - 1) = p$$

$$3\,(1/3\, p^2 - 1/3 = p)$$

$$p^2 - 1 = 3p$$

$$p^2 - 3p - 1 = 0$$

~~por bisección~~:

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$p_1 = 3.303 \;,\; \underline{\underline{p_2 = -0.303}}$$

$$\underline{\underline{p = -0.303}}$$

III - Sea $g:[3,4] \to \mathbb{R}$ definida por $\frac{1}{3}(x^2-1)$

1) Encuentra el mínimo y el máximo de $g(x)$ en [3, 4]

$g'(x) = \frac{2}{3}x$ $\qquad g(3) = \frac{8}{3} = 2.\bar{6}$

$\frac{2}{3}x = 0$ $\qquad g(4) = \frac{15}{3} = 5$

$x = 0$ $\qquad g(0) = -\frac{1}{3} \leftarrow$ fuera del dominio

mínimo $= 2.\bar{6}$

máximo $= 5$

2) ¿Es verdad que $g(x) \in [3,4], \forall x \in [3,4]$?

~~$2.6 \le g(x) \le 5$~~ No es verdad

3) Verifica que $g(x)$ tiene punto fijo en [3, 4]

$p = 3.303$

4) Existe un valor K, $0 \le K \le 1$, tal que $|g'(x)| \le K < 1$, $x \in [3,4]$

$\frac{2}{3}|x| \le K < 1$ $\qquad$ No existe K

$\frac{2}{3}|3| = 2$

5) Verifica que el punto fijo de $g(x)$ en [3, 4] es único.

Cómo ya conocemos los puntos figos de $g(x)$ en $[-\infty, \infty]$ y dentro de [3, 4] solo existe 1

IV. Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{2x^2 - 3}{5}$

1) Encuentra el minimo y el máximo de $g(x)$ en su dominio

$g'(x) = 4/5\, x$

$4/5\, x = 0$

$x = 0$

$g(-1) = -1/5 = -0.2$

$g(1) = -0.2$

$g(0) = -3/5 = -0.6$

mínimo $= -0.6$

máximo $= -0.2$

2) Verifique que $g(x) \in [-1, 1], \forall_x \in [-1, 1]$

$-1 \leq -0.6 \leq g(x) \leq -0.2 \leq 1$

$-1 \leq g(x) \leq 1$

$g(x) \in [-1, 1]$

3) Prueba que $g(x)$ tiene un punto fijo en $[-1, 1]$

$$\frac{2x^2 - 3}{5} = x$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 7}{4} = -0.5$$

$\underline{\underline{p = \cancel{3}}}$ en $[-1, 1]$

4) Encuentra tres valores K, (K_1, K_2, K_3) tales que $|g'(x)| \leq K < 1$, $\forall x \in [-1, 1]$

$$g'(x) = 4/5\, x$$

$$|g'(x)| = |4/5\, x| = 4/5\, |x| \leq 4/5(1) = 4/5, \forall x$$

$K_1 = 0.8$
$K_2 = 0.85$
$K_3 = 0.9$

5) Utilizando el algoritmo del punto fijo calcula X_{20}, iniciando con X_0 $-0.5, 0$

$$g: [a, b] \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{2x^2 - 3}{5}$$

n	x	$g(x_n)$
0	-0.5	-0.5
1	-0.5	-0.5
2	-0.5	-0.5
3	-0.5	-0.5
⋮		
20	-0.5	-0.5

$\underline{\underline{p = -0.5}}$

6) Usando la primera desigualdad, encuentra el número N tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - p| < 0.001$, para cada uno de los valores K_1, K_2, K_3 de 111 4) y para cada uno $x_0 = -1, 0.9$

$$|x_n - p| \leq K^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}, n \geq 1$$

$x_0 = -1$ $\quad K_1 = 0.8$

$a = -1$ $\quad K_2 = 0.9$

$b = 1$ $\quad K_3 = 0.9999$

$$K^n \max\{-1+1, 1+1\} < 0.001$$

$$K^n \max\{0, 2\} < 0.001$$

$0.8^n(2) < 0.001$

$\cancel{1.6^n < 0.001}$

$\cancel{n \ln(1.6) < \ln(0.001)}$

$\cancel{n > \frac{\ln(0.001)}{\ln(1.6)}}$

$\cancel{n > -14.7}$

$n \ln(0.8) < \ln(0.0005)$

$n > 34.063$

$n_1 \geq 35$

$n_2 > \frac{\ln(0.0005)}{\ln(0.9)}$

$n_2 > 72.142$

$n_2 \geq 73$

$n_3 = \frac{\ln(0.0005)}{\ln(0.9999)}$

$n_3 = 76005.224$

$n_3 \geq 76006$

$x_0 = 0.9$

$a = -1$

$b = 1$

$K_1 = 0.8$

$K_2 = 0.9$

$K_3 = 0.9999$

$K < 1$

$K^n \max\{0.9+1,\ 1-0.9\} < 0.001$

$K^n \max\{1.9,\ 0.1\} < 0.001$

$K^n (1.9) < 0.001$

$n \ln(K) < \ln\left(\frac{0.001}{1.9}\right)$

$n > \dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{1.9}\right)}{\ln(K)}$

$n_1 > \dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{1.9}\right)}{\ln(0.8)}$

$n_1 > 33.833$

$\underline{\underline{n_1 \geq 34}}$

$n_2 > \dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{1.9}\right)}{\ln(0.9)}$

$n_2 > 71.655$

$\underline{\underline{n_2 \geq 72}}$

$n_3 > \dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{1.9}\right)}{\ln(0.9999)}$

$n_3 > 75492.317$

$\underline{\underline{n_3 \geq 75493}}$

7) Usando el segundo teorema

$$|x_n - p| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_0 - x_1|, \; n \geq 1$$

$x_0 = -1$
$x_1 = -1/5$

$$\frac{K^n}{1-K} |x_0 - x_1| < 0.001$$

$$\frac{K^n}{1-K} |-1 + 1/5| < 0.001$$

$$\frac{K^n}{1-K} < \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{4}{5}}$$

$$\boxed{\frac{K^n}{1-K} < \frac{5}{4000}}$$

$K = 0.9999$

$$n \ln(0.9999) < \ln\left(\frac{5}{4000} \frac{1}{10000}\right)$$

$n < 158941.57$

$n = 158942$

$\cancel{K}$

$K = 0.8$

$$\frac{0.8^n}{1-0.8} < \frac{5}{4000}$$

$$0.8^n < \frac{5}{20000}$$

$$n \ln(0.8) < \ln\left(\frac{5}{20000}\right)$$

$n > 37.16 \quad n = 38$

$K = 0.9$

$$\frac{0.9^n}{1-0.9} < \frac{5}{4000}$$

$$n \ln(0.9) < \ln\left(\frac{5}{4000}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

$n > 85.29$

$n = 86$