UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
CÁTEDRA DE VARIABLE COMPLEJA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

GRUPO: VIRTUAL 4

PRESENTADO POR:

JESÚS ANTONIO RIVAS CALLEJAS	RC16076
JOSÉ FRANCISCO VASQUEZ NAVARRO	VN16005
JUANA FÁTIMA CÓRDOVA DE VILLANUEVA	CA16099

ASIGNATURA:
VARIABLE COMPLEJA

TUTOR:
LIC. VICTOR EDGARDO LÓPEZ SANDOVAL

CICLO: II, 2020

Ciudad universitaria, 16 de enero de 2021

Índice

1. Introducción

Un asunto importante del cual se ocupan las funciones complejas es el problema de la transformación conforme, se busca que en la transformación de un gráfico a otro, el ángulo de intersección de las curvas permanezca sin cambios tanto en el sentido como en la magnitud.

Intuitivamente se dice que una función f es conforme en z_0 si conserva la magnitud y el sentido de los ángulos en z_0, es decir, si se verifica que para dos curvas cualesquiera γ y σ que pasen por z_0, se tiene que sus curvas imágenes $(f \circ \gamma)$ y $(f \circ \sigma)$ forman en $f(z_0)$ el mismo ángulo que γ y σ formaban en z_0.

Las transformaciones conformes tienen varias aplicaciones en el campo de lo matemático como una forma de resolver ecuaciones de Laplace, en el campo físico en hidrodinámica, conducción de calor, electrostática; además de algunos usos en la cartografía al estudiar representaciones conformes de la tierra sobre planos. En este artículo se revisan las aplicaciones a una de las ramas importantes de la física: la hidrodinámica o dinámica de fluidos.

En este articulo se hace una reseña del significado de mapeo conforme, su comportamiento mediante la aplicación de transformación en forma general, para profundizar en las aplicaciones en las que se pueda aplicar un mapeo conforme específicamente para el campo de la hidrodinámica.

En este trabajo se revisan dichas aplicaciones, no obstante, a lo largo de todo el artículo se hace un estudio sobre las transformaciones conformes de manera general, esto desde sus posibles orígenes. También se encuentra los conceptos de la temática junto con teoremas e información de vital importancia; y para dar un panorama más claro a la investigación, se prosigue a dar una definición corta de hidrodinámica.

En último apartado contiene información específica sobre la aplicación a la hidrodinámica. Aquí se dan definiciones útiles para comprender los ejemplos detallados a medida que se avanza en el artículo. Al final, se brinda una bibliografía en la cual se encuentran los materiales y libros muy importantes que dieron pie a la investigación.

2. Desarrollo

2.1. Reseña Histórica

El origen de los mapeos conformes se remonta a la época en la que se inicia la navegación y con esta la necesidad de representar porciones de la superficie terrestre en planos, es decir dibujar mapas. Aunque en un principio la construcción de mapas debió tenerse como pura intuición, dando inicio a la cartografía. Dicha intuición llevó seguramente a manejar el concepto de proporcionalidad: el mapa debía representar las superficies terrestres de manera que preservase la proporción y la forma; la proporción de las costas, por ejemplo, se preservaría si se lograba reducir cada parte representada en una misma razón, mientras que la forma se mantendría sólo si los ángulos entre los trozos del mapa y los de la superficie representada era invariantes.

Sin proponérselo quizás los cartógrafos empezaron a usar relaciones uno a uno en sus mapas; su deseo que cada punto en el mapa representara un único punto de la superficie terrestres. Aunque en la actualidad un mapa proporcionado, con igual forma y manteniendo una relación inyectiva es siempre posible, con cierto margen de error; en la antigüedad esto no era posible por el desconocimiento que se tenía sobre el planeta (dimensión y forma). Debido a esto los sistemas de navegación y por lo tanto los mapas se desarrollaron en términos de la preservación de ángulos, o sea de la conformidad.

De manera similar que en la cartografía, la propiedad de conformidad puede ser útil en diversos problemas geométrica permite su representación en el plano, dicha representación es un modelo de la realidad la cual nos interesa comprender.[2]

2.2. Mapeo Conforme

De la teoría de las funciones analíticas se sabe cómo se transforma una función en otra al modificarse, de acuerdo con ciertas normas, el contorno sobre el cual se asigna la condición que determina la función. Estas transformaciones se denominan conformes las cuales preservan ángulos para un mapeo $w = f(z)$, y permiten, una vez determinado el potencial complejo w para un contorno sencillo (por ejemplo formado por tramos rectos o circulares), obtener el potencial complejo para otras configuraciones cuyos contornos se obtienen transformando el contorno simple original.

Definición 2.2. *Sea $f(z)$ una aplicación $C \to C$ y sea $w = f(z)$ una transformación en el plano complejo, entonces se dice que es una transformación conforme en un punto z_0 en el dominio, si se conserva el ángulo entre dos curvas cualesquiera que se intersecan en z_0.* [3]

El conocimiento de que $f(z) \neq 0$ es suficiente para llegar a la conclusión de que la transformación es inyectiva (uno a uno) si se restringe a un entorno de z_0 suficientemente pequeño. Pero aun cuando sea $f(z) \neq 0$ en todos los puntos de un dominio no se puede afirmar que la aplicación sea inyectiva en ese dominio. Por eso diferenciamos en decir cuando una aplicación es conforme en cada uno de los puntos de un dominio y cuando es todo el dominio.

Teorema 2.2. *Si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ en una región R, entonces la aplicación $w = f(z)$ es conforme en todos los puntos de R.*

Del teorema podemos deducir en palabras simples que función conforme se refiere a ser analítica (cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann) y con derivada distinta de cero. Entonces un mapeo conforme aplicado a la hidrodinámica; se puede relacionar tomando en cuenta las famosas ecuaciones de Cauchy Riemann para variable compleja.

Tomando la relación entre el potencial de velocidad Φ y la función de corriente de flujo ψ está dado por las ecuaciones de Cauchy Rieman:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Nótese que las componentes de velocidad u y v pueden ser expresadas en términos del potencial de velocidad o la función de corriente:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Consideremos un potencial complejo $F(z)$ definido de la forma:

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Si F es una función analítica se sigue entonces que tanto Φ como Ψ satisfacen automáticamente las ecuaciones de Cauchy Riemann. Además se satisface que:

$$\bigtriangledown^2 \phi = 0 \qquad \bigtriangledown^2 \psi = 0$$

Algunas transformaciones útiles

- Traslación: $w = z + b$
- Rotación: $w = e^{i\theta} * z$
- Dilatación $w = az$
- Inversión $w = 1/z$
- Bilineal o racional: $w = az + b$
- Transformación de Joukowsky
- Aplicación de un semi-plano superior

- Aplicación de Riemann: $w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0$
- La función $w = z^2$

2.3. Hidrodinámica

Definición 2.3. *Se define como parte de la hidráulica que estudia el comportamiento de los líquidos en movimiento en la cual se considera la velocidad, la presión, el flujo y el gasto líquido.*

Luego que hemos definido la aplicación transforme de variable compleja y el concepto de hidrodinámica, estudiaremos la aplicación de una transformación conforme al movimiento de fluidos, es decir, al campo de la hidrodinámica.

2.4. Aplicación del Mapeo Conforme a la Hidrodinámica

Líneas de corrientes. Veremos un método de uso de los mapeos conformes con el modelo del fijo planar de un fluido ideal. Recordemos que un fluido ideal es un fluido incomprensible no viscoso cuyo flujo es irrotacional. Si $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es el potencial de velocidad compleja de la corriente de un fluido ideal en un dominio D, entonces $\Omega(z)$ es analítica en D y $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja del campo de velocidades. Además, las líneas de corriente del flujo de un fluido son las curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$, y, por esta razón, ψ se llama función de corriente del flujo.[4]

El proceso de construcción de un flujo de un fluido ideal que se queda dentro de un dominio dado D se llama líneas de corriente. Si C es una curva frontera de D, entonces el requisito de que el flujo permanezca en el interior de D significa que no hay flujo a través de C, o, equivalentemente, que la derivada direccional de ψ, en la dirección del vector normal n a C es 0. Ya que el vector gradiente ψ es siempre normal a la curva de nivel $\psi(x, y)$ esta condición es equivalente a que ψ sea constante en C. Dicho de otra manera, la frontera de D debe ser una línea de corriente del flujo. A continuación se resume este análisis.

Definición 3.1 (Líneas de corriente). *Supongamos que el potencial de velocidad complejo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en un dominio D y que ϕ es constante en la frontera de D. Entonces $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja del campo de velocidades de un flujo de un fluido ideal en D. Además, si una partícula se coloca en D y se deja fluir con el fluido, entonces su trayectoria z(t) pertenece a D.*[1]

Solución de un problema de líneas de corrientes

Si $w = \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es un mapeo conforme unívoco del dominio D en el plano z sobre un dominio D' en el plano W tal que la imagen de la frontera C de D es una recta horizontal en el plano w, entonces $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja de un fluido ideal en D.

Ejemplo 1. Considere un plano complejo, mostrado en la figura 1. Las coordenadas de este plano están definidas por la función compleja: $z = x + iy$ [5]

Esta figura muestra un sencillo flujo de fluido uniforme con líneas de corriente horizontales dado por:

$$\psi = iy \qquad \text{y} \qquad \phi = x$$

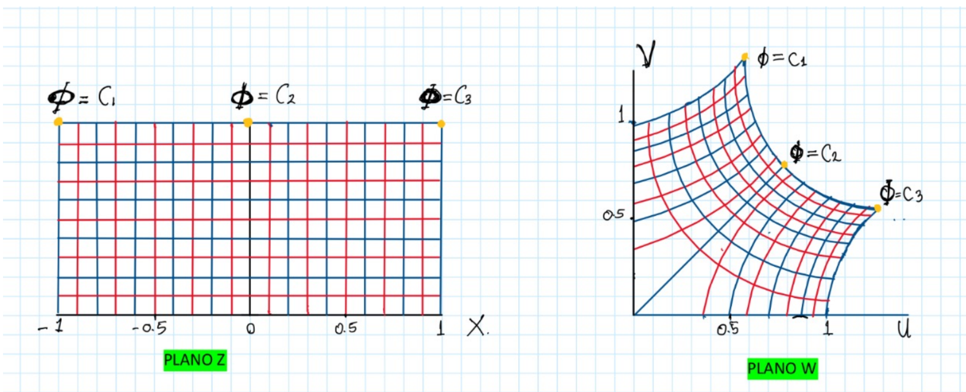

Figura 1: Flujo de un fluido con líneas corrientes horizontales

$$w = f(z) = \sqrt{z}$$

Ejemplo 2 (flujo al rededor de una esquina). *Construya un flujo de un fluido ideal en el primer cuadrante*

Solución. Sea D el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$. De la figura 2 se identificado $\alpha = 2$,

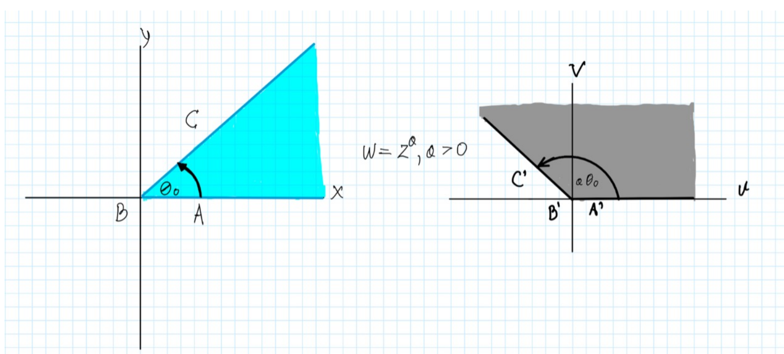

Figura 2: Transformación Elemental

vemos que $w = \Omega(z) = z^2$ es un mapeo conforme uno a uno del dominio D sobre el semiplano superior $v > 0$ y que la imagen de la frontera de D bajo este mapeo es el eje real $v = 0$. Por tanto, $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = 2\bar{z}$ es una representación compleja del flujo ideal en el primer cuadrante. Ya que $\Omega(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, las líneas de corriente de este flujo son las curvas $2xy = c_2$.

En la figura 3 se han dibujado algunas líneas de corriente. [6]

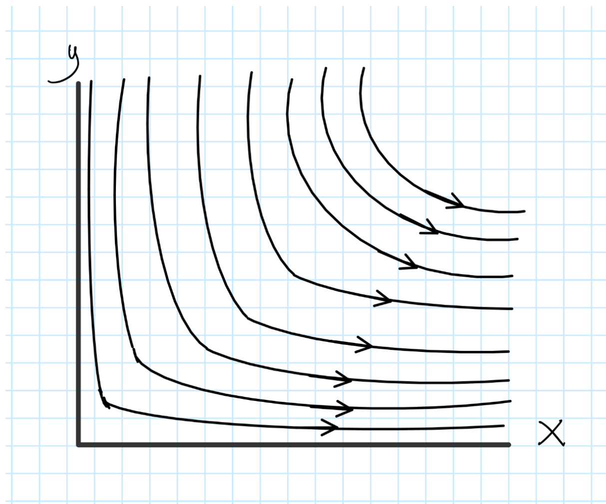

Figura 3: Flujo al rededor de una esquina

Ejemplo 3 (Flujo alrededor de un cilindro). *Construya un flujo de un fluido ideal en el dominio que consiste de todos los puntos fuera de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y en el semiplano superior $y > 0$ que se muestra en la figura 4*

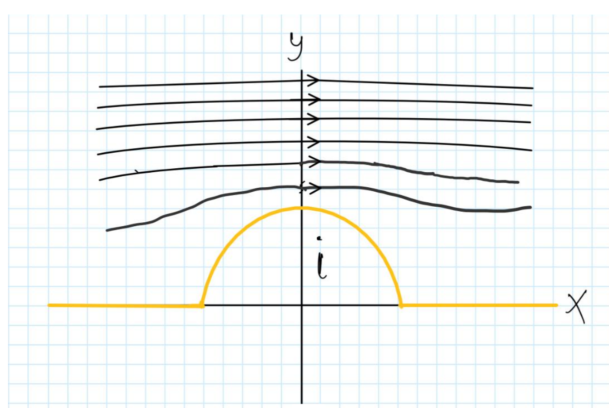

Figura 4: Flujo al rededor de un fluido

Solución. Sea D el dominio que se muestra en la figura 4. Identificando $\alpha = 2$ en la figura 5, se obtiene el mapeo conforme uno a uno

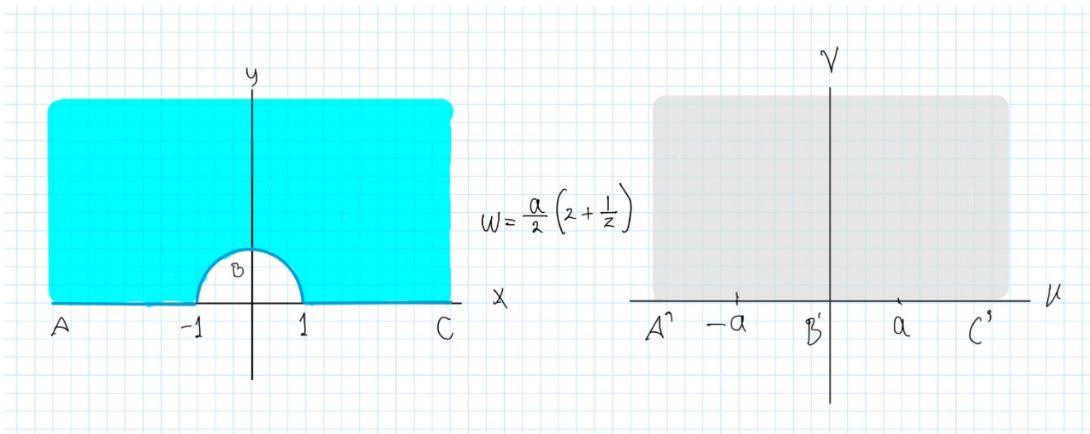

Figura 5: Transformación sobre Semiplanos

$$w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z}$$

de D sobre el semiplano superior $v > 0$. Además, la figura 5 indica que la frontera de D es mapeada sobre el eje real $v = 0$. Por lo tanto,

$$f(z) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1^2}{z}$$

es una representación compleja de un flujo ideal en D. Ya que

$$\Omega(z) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

las líneas corrientes de este flujo son las curvas

$$\psi(x, y) = c_2 \qquad \text{o} \qquad y - \tfrac{y}{x^2+y^2} = c_2$$

Algunas líneas de corrientes de este flujo se han dibujado en la figura 3.

3. Referencias Bibliográficas

Referencias

[1] E. A. C. Benítez. Transformaciones conformes y algunas de sus aplicaciones. 2017.

[2] J. G. P. Bernal. Aplicaciones de los mapeos conformes a la física utilizando funciones analíticas. 2004.

[3] F. Chamizo. Aplicaciones conformes.

[4] W. R. Derrick and M. A. R. M. *Variable compleja con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.

[5] A. Manhattan. Aplicación del mapeo conforme en hidrodinámica. 2014.

[6] S. Terrazas. Variable compleja con aplicaciones. *Instituto de Ingeniería y Tecnología*, 2018.