Notas de Probabilidad

Claudia Cristina Reyes y César Gal

8 de junio de 2024

Índice

1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria la podemos pensar como sigue:

- Una asignación numérica de una valor (número) a un posible resultado.
- Una función del espacio muestral a los números reales, la cual puede tener valores discretos o valores continuos.
- Podemos tener varias variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad.

Notación:

- X: variable aleatoria, con $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función.
- x: valor numérico, con $x \in \mathbb{R}$.
- $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$: conjunto de posibles resultados de X.

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ cualquier espacio de probabilidad. Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, donde es la mas chica de las σ-álgebras generadas por las topologias de $\mathbb{R}$.

Definición 1 (Variable Aleatoria)**.** Una variable aleatoria real es una función (medible) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto boreliano $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se cumple que $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

Ejemplo 2. Consideremos el experimento de lanzar una moneda equilibrada. Sean $\Omega = \{\text{Cara }, \text{Cruz}\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ y $\mathbb{P}(\text{Cara}) = \mathbb{P}(\text{Cruz}) = 1/2$. Entonces $X(\text{Cara}) = 1$ y $X(\text{Cruz}) = 0$:

$$
\text{Variables aleatorias}\begin{cases}\text{Discretas: si la v.a. puede tomar a lo más un número finito de valores}\\ \qquad\qquad\text{o un número infinito pero numerable de valores}\\ \text{Continuas: si la v.a. puede tomar todos sus valores es un intervalo de } \mathbb{R}\end{cases}
$$

Ejemplo 3 (Variable aleatoria)**.** Sea $\mathcal{E}$ = Lanzamiento de un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ y $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ para $i = 1, \ldots, 6$. Definamos las variables aleatorias:

- $X(\omega) = \omega \in \{1, \ldots, 6\}$
- $Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \text{ es par} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ es impar} \end{cases}$
- $Z(\omega) = 5$ (una variable aleatoria constante)

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in \{4, 5\}) = 2/6 \\
&\mathbb{P}(Y = 1) = 3/5 = 1/2 \\
&\mathbb{P}(Z = 2) = 0 \text{ y } \mathbb{P}(Z = 5) = 1
\end{aligned}
$$

1.1. Función de densidad de una variable aleatoria

La función de densidad, o también llamada función de masa de probabilidad nos ayuda a representar los valores que toma la variable aleatoria y sus probabilidades.

Definición 4. Sea X una variable aleatoria discreta con valores $x_1, x_2, \ldots$ y probabilidades $p_1 = \mathbb{P}(X = x_1), p_2 = \mathbb{P}(X = x_2), \ldots$. La función de densidad de X es una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta definida por

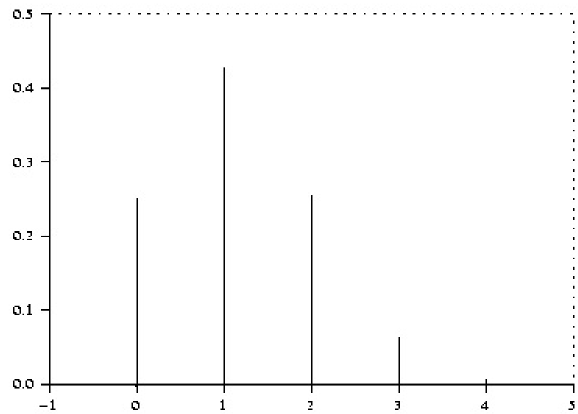
$$
f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x), \text{si } x = x_1, x_2, \ldots \\ \qquad 0, \qquad \text{e.o.c.} \end{cases}
$$

y gráficamente se representa como

Propiedades:

1. $0 \leq f_X(x) \leq 1$ para toda x.
2. $\displaystyle\sum_x f_X(x) = 1$
3. Para todo conjunto $A \subset R_X$, entonces podemos encontrar la probabilidad de que $X \in A$ usando la función de densidad:

$$
\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} f_X(x)
$$



1.2. Función de distribución de una variable aleatoria

Como sabemos la defunción de la función de densidad depende de que el objeto aleatorio sea discreto o continuo, teniendo:

- caso discreto: $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$ con $k \in R_X$.
- caso continuo: $f_X(x)$ tal que $\mathbb{P}(X \in A) = \displaystyle\int_A f_X(x)dx$.

No obstante, ninguna de las anteriores es una condición en la definición de variable aleatoria:

$$X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad : \quad \forall\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \{X \in A\} \in \mathscr{F}$$

Por lo cual es conveniente trabajar con alguna otra función F

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{F} [0,1]$$

que nos ayude a explicarnos el comportamiento de X en un caso general. Está función será llamada *función de distribución* y más adelante se dirá que es lo que explica de X.

Definición 5. Dada una variable aleatoria X (cualquiera) definimos su función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mediante

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que para cualquier variable aleatoria X y $x \in \mathbb{R}$, la función F_X está bien definida ya que

1. $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, para toda $x \in \mathbb{R}$,
2. entonces $\{X \in (-\infty, x]\} \in \mathscr{F}$,
3. entonces se puede calcular $\mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = F_X(x)$.

Antes de utilizar F_X para conocer a la variable aleatoria, estudiaremos sus propiedades más generales.

Continuidad de la función de probabilidad

Proposición 6. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de eventos, es decir, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$. Entonces

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

donde

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Es decir, la función de probabilidad es continua con respecto a sucesiones crecientes de evetos.

Proposición 7. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de eventos, es decir, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$. Entonces

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

donde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Es decir, la función de probabilidad es continua con respecto a sucesiones decrecientes de evetos.

Teorema 8 (Continuidad de probabilidad)**.** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos que convergen a un evento A. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

Es decir, la función de probabilidad es una función continua.

Propiedades de la función de distribución

Propiedad 9. F_X es monótona creciente.

Demostración. Si $x \leq y$, entonces $\{X \leq x\} \subseteq \{Y \leq y\}$ y por monotonía de la función de probabilidad tenemos que $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(Y \leq y)$. Por lo tanto si $x \leq y$ entonces $F_X(x) \leq F_Y(y)$. ■

Propiedad 10. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $x_n \leq x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $x_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned}\{X < \infty\} &= \{\text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ talque } X \leq x_n\} \quad (\text{porque } x_n \uparrow \infty)\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} \quad (\text{porque existe} = \cup)\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbb{P}(X < \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right)$$

Como $x_n \leq x_{n+1}$, entonces $\{X \leq x_n\} \subseteq \{X \leq x_{n+1}\}$, es decir, si definimos $A_n = \{X \leq x_{n+1}\}$ tenemos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathscr{F}$ y su límite es $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ que como ya vimos antes satisface que $A = \{X < \infty\}$. Aplicando el teorema de continuidad de la probabilidad, podemos concluir que

$$\mathbb{P}(X < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{x\to\infty} F_X(x),$$

donde $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n)$, y la última igualdad $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{x\to\infty} F_X(x)$ se debe a que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es arbitraria.
Hemos probado que

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} F_X(x)$$

y claro está que $\{X \in \mathbb{R}\} = \Omega$, por lo que podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Ahora, para el otro límite, sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $y_n \geq y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $y_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Como $y_n \geq y_{n+1}$, entonces $\{X \leq y_n\} \supseteq \{X \leq y_{n+1}\}$, es decir, si definimos $B_n = \{X \leq y_n\}$ tenemos que la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de $\mathscr{F}$ (es decir, $B_n \supseteq B_{n+1}$), y su límite es $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ (que $B = \emptyset$ se sigue de que en realidad $B = \{X = -\infty\} = \emptyset$). Aplicando el teorema de continuidad de la probabilidad, tenemos que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = -\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq y_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(y_n) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x),$$

Hemos probado que $\mathbb{P}(X = -\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x)$ y claro está que $\{X = -\infty\} = \emptyset$, por lo que podemos concluir que $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$. ■

Propiedad 11. F_X es continua por la derecha, con límites por la izquierda.

Demostración. Los límites por la izquierda existen ya que

$$0 \leq \lim_{x\to x_0^-} F_X(x) \leq F_X(x_0) \leq 1$$

y F_X es monótona. Ahora, para comprobar la continuidad por la derecha, sea $y \in \mathbb{R}$ y sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que tiende a y por la derecha, es decir, es tal que $y \leq y_{n+1} \leq y_n$ y tal que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Probaremos que $F_X(y_n) \to F_X(y)$, donde $F_X(y_n) = \mathbb{P}(X \leq y_n)$ por definición.

Para tomar el límite, usaremos el teorema de continuidad de la probabilidad. Observemos que

$$C_{n+1} = \{X \leq y_{n+1}\} \subseteq \{X \leq y_n\} = C_n,$$

así que $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ conforma una sucesión decreciente de eventos. Ahora,

$$\begin{aligned} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n &= \{\forall\, n \in \mathbb{N} : X \leq y_n\} \\ &= \{X \leq \lim_{n\to\infty} y_n\} \quad \text{(porque } y_n \downarrow y \text{ cuando } n \to \infty) \\ &= \{X \leq y\} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

pero por otro lado, tenemos que $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X \leq y)$ y que $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(X \leq y_n)$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(X \leq y) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq y_n),$$

con lo cual queda demostrada la continuidad por la derecha. ■

Llamamos a $F_X(x_-) = \lim_{y\to x} F_X(y)$ el límite por la izquierda de F en x. Tenemos que

$$P(X < x) = F_X(x_-).$$

Calculo de probabilidades utilizando F_X

Sean X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, F_X su función de distribución y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:

1. $\mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a)$.
2. $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$.
3. $\mathbb{P}(X < a) = F_X(a_-)$.
4. $\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a_-)$.
5. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
6. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a_-)$.
7. $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b_-) - F_X(a_-)$.
8. $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b_-) - F_X(a)$.
9. $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a_-)$, de modo que la función de distribución es continua en x si y sólo si $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Observaciones:

1. Analíticamente, si X es discreta, entonces

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f_X(u)$$

y si X es continua con función de densidad $f_X(x)$, entonces

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy.$$

2. Kolmogorov demostró que cada función F es una función

    - monótona no decreciente
    - continua por la derecha, con limites por la izquierda
    - $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

    Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Por eso es lo mismo hablar de variables aleatorias o de funciones de distribución.

Ejemplo 12. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

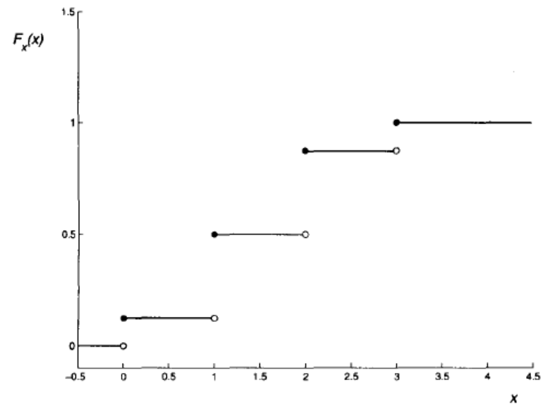
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Entonces su función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1/3, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

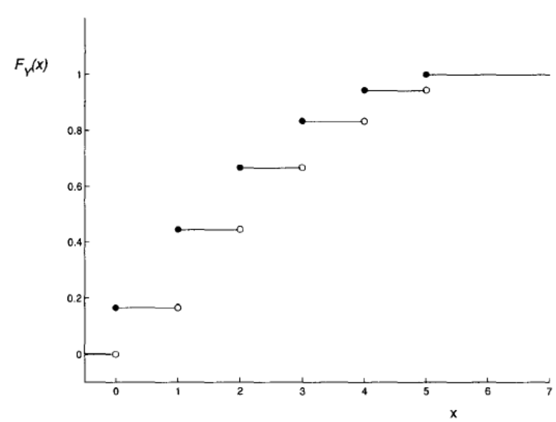
Ejemplo 13. Sea X una v.a con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



Ejemplo 14. Sea Y una v.a con función de distribución de dada por:

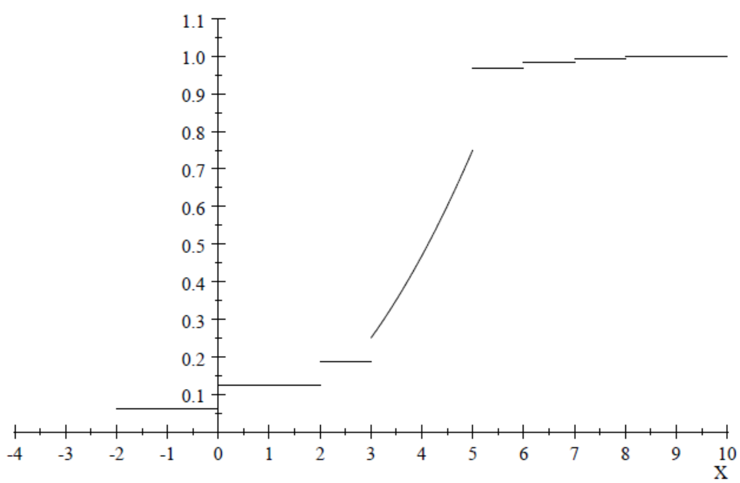
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{6}{36}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{16}{36}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{24}{36}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \dfrac{30}{36}, & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \dfrac{34}{36}, & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$



Ejemplo 15. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{16} & \text{si } x \in [-2, 0) \\ \dfrac{1}{8} & \text{si } x \in [0, 2) \\ \dfrac{3}{16} & \text{si } x \in [2, 3) \\ \dfrac{1}{32}(x^2 - 1) & \text{si } x \in [3, 5) \\ 1 - \dfrac{1}{2^k} & \text{si } x \in [k, k+1) \text{para } k \in \{5, 6, 7\} \\ 1 & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$

Encontrar las siguientes probabilidades: (1) $\mathbb{P}(-2 \leq X < 1)$, (2) $\mathbb{P}(3 < X < 5)$, (3) $\mathbb{P}(X \geq 5)$, y (4) $\mathbb{P}(X \in \{1, 2, ..., 10\})$.



Solución.

(1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-2 \leq X < 1) &= F_X(1_-) - F_X(-2_-) \\ &= \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(3 < X < 5) &= F_X(5-) - F_X(3) \\ &= \frac{1}{32}(5^2 - 1) - \frac{1}{32}(3^2 - 1) \\ &= \frac{24 - 8}{32} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5)\\ &= 1 - F_X(5-)\\ &= 1 - \frac{1}{32}(5^2 - 1)\\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(4) $\mathbb{P}(X \in \{1, 2, ..., 10\}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X \geq 5)$, donde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= F_X(1) - F_X(1-) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0\\ \mathbb{P}(X = 2) &= F_X(2) - F_X(2-) = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}\\ \mathbb{P}(X = 3) &= F_X(3) - F_X(3-) = \frac{1}{32}(3^2 - 1) - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}\\ \mathbb{P}(X = 4) &= F_X(4) - F_X(4-) = \frac{1}{32}(4^2 - 1) - \frac{1}{32}(4^2 - 1) = 0\end{aligned}$$

Entonces, $\mathbb{P}(X \in \{1, 2, ..., 10\}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.