Probabilidad en Python

May 29, 2024

1 Probabilidad básica

1.1 Combinatoria

1.1.1 Teoría básica de conjuntos (finitos).

PRINCIPIO BÁSICO del CONTEO

- Principio de suma: Si una situación puede ocurrir de k maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de n maneras, entonces existen $k+n$ maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda situación.
- Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|\}$
- Principio de Multiplicación. Si tenemos dos conjuntos de k y n elementos respectivamente, y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, esto lo podemos hacer de $k \times n$ maneras.
- Si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Ejemplos.

Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes y para cada uno hay tres colores, en la segunda tienda hay diez modelos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuántos pantalones tiene que escoger la persona?

En la primera tienda hay $6 \times 3 = 18$ pantalones, mientras que en la segunda hay $10 \times 4 = 40$ pantalones. Para hallar el total de pantalones tenemos que sumar estos dos números, y obtenemos $18 + 40 = 58$ pantalones.

¿Cuántos números de a lo más tres cifras se pueden formar con los dígitos 3,4,7 y 8?

Los números que se van a formar pueden tener una, dos o tres cifras. Primero, se tiene ver por separado cuantos hay de cada tipo y luego sumamos los resultados de acuerdo al principio de la suma. Se tienen 4 números de una cifra, para los de dos cifras la primera puede ser cualquiera de los cuatro dígitos y la segunda también, por lo tanto hay $4 \times 4 = 16$ números de dos cifras. De manera similar, hay $4 \times 4 \times 4 = 64$ números de tres cifras. En total tenemos $4 + 16 + 64 = 84$ números de a lo más tres cifras formados con los dígitos $3, 4, 7$ y 8.

Supongamos que quiero comprar una tableta. Puedo elegir una pantalla grande o una pequeña; Una capacidad de almacenamiento de 64GB, 128GB o 256GB y una cubierta blanca o negra. ¿Cuántas opciones diferentes tengo?

Tenemos que hay 12 opciones posibles. El principio de la multiplicación indica que podemos simplemente multiplicar el número de opciones en cada categoría (tamaño de pantalla, memoria, color) para obtener el número total de posibilidades, es decir, la respuesta es $2 \times 3 \times 2 = 12$.

1.1.2 Determinar el número de subconjuntos de longitud k de un conjunto de longitud n.

Definimos el factorial de un número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

Por convención, se define $0! = 1$.

Ahora, sea $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto que denota a los primeros n números naturales, y definamos $S_{f(n)} = \{f : S_n \to S_n \mid f \text{ es biyectiva}\}$, entonces $S_{f(n)} \neq \emptyset$ ya que $Id \in S_{f(n)}$.

A una función $f \in S_{f(n)}$ se le conoce como permutación del conjunto S_n y además,

$$|S_{f(n)}| = n!$$

Tenemos 3 bolas y 3 urnas, y queremos introducir cada bola en cada urna. Las formas en que se puede hacer esto es:

3!=6.

El número de permutaciones de k objetos tomados de un conjunto de n objetos distintos es:

$${}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- ¿Cuantas permutaciones diferentes se pueden hacerse con las letras de la palabra COLUMNA?
- ¿Cuantas de estas permutaciones empiezan con la letra M?

Como no hay letras iguales, tenemos 5040 permutaciones. Puesto que las palabras comienzan con la letra M, solo se permutan las 6 letras restantes para obtener 6!=720 permutaciones.

Permutaciones con repetición. Si seleccionamos k objetos de un conjunto de n elementos con repetición, entonces se tienen

$${}_n\mathrm{PR}_k = n^k$$

formas distintas de efectuar la selección.

¿Cuantas placas de automóviles distintas podemos generar si cada placa posee 3 dígitos y 3 letras?. Considerando un alfabeto de 26 letras.

Para los números tenemos ${}_{10}\mathrm{PR}_3 = 10^3 = 1,000$ y para las letras tenemos ${}_{26}\mathrm{PR}_3 = 26^3 = 17,576$. Usando el principio básico del conteo se tienen: ${}_{10}\mathrm{PR}_3 \times_{26} \mathrm{PR}_3 = 17,576,000$ placas distintas.

Permutaciones con grupos de elementos iguales. Si se tiene un conjunto de n elementos con grupos de elementos iguales, de los cuales n_1 son del tipo 1, n_2 son del tipo 2 y así sucesivamente, de tal manera que $n = n_1 + n_2 + \cdots n_k$. Entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$${}_n\mathrm{P}_{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}.$$

Determinar el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra COCODRILO.

Se tiene

$$_9\mathrm{P}_{2,3,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!\,3!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 30,240.$$

Ahora, queremos tomar k elementos de un conjunto de n elementos. Sea $S(n,k) = \{B \subset S_n : |B| = k\}$, entonces:

$$|S(n,k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k \leq n.$$

Propiedades.

- Si $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$;
- Si $k = n$, entonces $\binom{n}{k} = 1$;
- Si $k = 0$, entonces $\binom{n}{k} = 1$;
- Si $k = 1$, entonces $\binom{n}{k} = n$.

De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres: (1) ¿Cuantos comités distintos que consistan de 2 mujeres y 3 hombres se pueden formar? (2) ¿Que sucede si 2 de los hombres se rehúsan a trabajar juntos en el comité?

(1) Hay $\binom{5}{2}$ grupos posibles de 2 mujeres y $\binom{7}{3}$ grupos posibles de 3 hombres. Usando el PBC:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350 \text{ comités.}$$

(2) Si 2 de los hombres se rehúsan a trabajar juntos $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ grupos posibles de 3 hombres que no contienen a los 2 que se rehúsan a participar juntos, y hay $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ grupos posibles de 3 hombres que contienen exactamente a 1 de los que se rehúsan:

$$\binom{5}{2} \cdot \left[\binom{2}{0}\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{5}{2}\right] = 300 \text{ comités.}$$

Resultado: - Vimos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

- Si tomamos $x = y = 1$, entonces la fórmula anterior nos dice que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

La fórmula anterior, nos dice que hay 2^n subconjuntos de un conjunto de tamaño n.

1.1.3 Diagramas de Venn

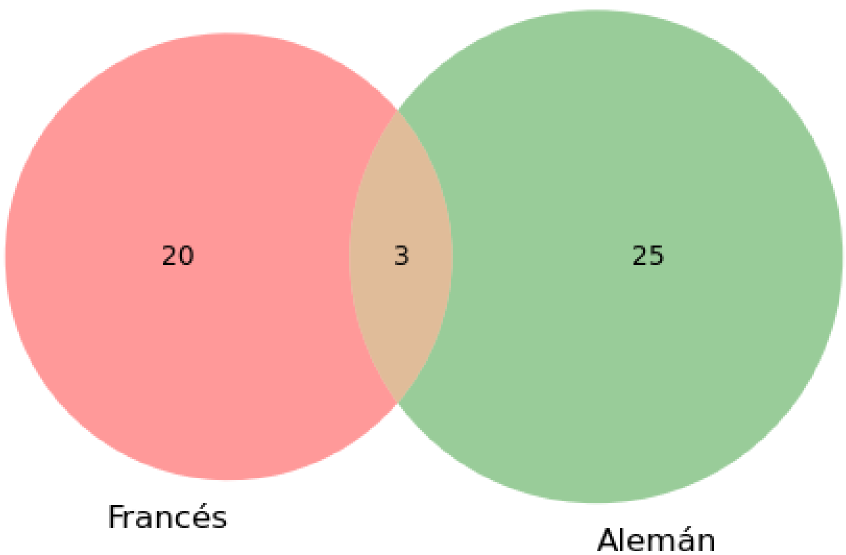
Un diagrama de Venn es un diagrama que permite contar los elementos de conjuntos.

Ejemplo. En un salón de clases hay 50 alumnos. 20 de los alumnos estudian francés, 25 estudian alemán y 3 estudian francés y alemán.

[1]:
```
from matplotlib_venn import venn2, venn2_circles, venn2_unweighted
from matplotlib_venn import venn3, venn3_circles
from matplotlib import pyplot as plt
```

[2]:
```
venn2(subsets = (20, 25, 3), set_labels = ('Francés', 'Alemán'))
```

[2]:
```
<matplotlib_venn._common.VennDiagram at 0x7fa7bd131a90>
```



2 Probabilidad clásica

En probabilidad clásica (modelo laplaciano)

- Experimento aleatorio.
- Espacio muestral Ω (conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio). Hipótesis $\#\Omega < +\infty$.
- Eventos (diccionario con conjuntos).
- Si $\omega \in \Omega$, entonces $\{\omega\}$ se le asigna una función $P : P(\Omega) \to [0, 1]$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}.$$

En particular, si $A \in P(\Omega)$ (eventos) entonces

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$