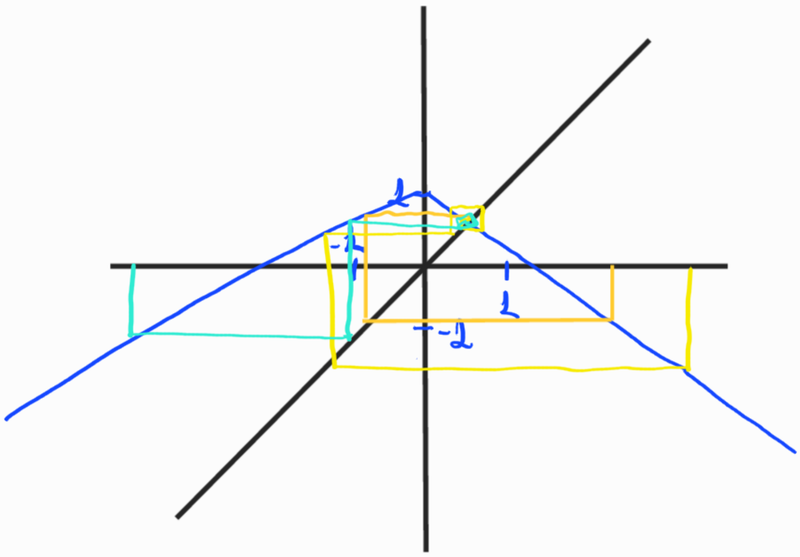
1. Dado $\alpha > 0$, se considera la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = 1 - \alpha |x_n| \quad (1)$$

a) Para $\alpha = 0'7$, estudia gráficamente el comportamiento de las soluciones en función de su dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.



Gráficamente podemos ver que independientemente del punto inicial, $x_n \rightarrow p$ (p el único punto fijo de la ecuación $x_{n+1} = 1 - 0'7|x_n|$)
Observamos que $\forall x \in (-\infty, p)$ $f(x) = 1 - 0'7|x| > x$ y $\forall x \in (p, +\infty)$ $f(x) < x$. Por tanto, por los resultados teóricos probados en los ejercicios, sabemos que α es asintóticamente estable en todo $\mathbb{R}$.

Podemos calcular p $\qquad p = 1 - 0'7|p| \qquad p + 0'7|p| = 1$

$f(x) = 1 - 0'7|x| \leq 1$ $\qquad 1'7p = 1 \quad \boxed{p = \frac{1}{1'7}}$

$0'3p = 1 \quad p = \frac{1}{0'3} > 1$, !!

No se puede dar

b) Para $\alpha>0$ determina el número de puntos de equilibrio de la ecuación (1)

Para calcular los puntos fijos necesitamos que $f(x)=x$

Donde $f(x)=1-\alpha|x|$

$$1-\alpha|x|=x \begin{cases} 1-\alpha x = x & \text{Si } x>0 \\ 1+\alpha x = x & \text{Si } x<0 \end{cases} \begin{cases} 1=(\alpha+1)x \\ 1=(1-\alpha)x \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1} \\ x=\dfrac{1}{1-\alpha} \end{cases}$$

$$f(x)\leq 1 \ \forall x \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\alpha+1} \\ x=\dfrac{1}{1-\alpha} \end{array}\right\} \text{serán puntos fijos si y solo si son} \leq 1$$

Para $\alpha>0$

$\dfrac{1}{\alpha+1}<1 \ \forall \alpha$ Siempre hay al menos un punto fijo

$$\frac{1}{1-\alpha}<1 \begin{cases} \text{Si } \alpha<1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-\alpha}>1 & \text{Solo existiría un punto fijo} \\ \text{Si } \alpha>1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-\alpha}<1 & \text{Existirían 2 puntos fijos} \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha=1 \quad f(x)=1-|x| \begin{cases} \text{Para } x>0 & \text{hemos visto que siempre hay un punto fijo} \\ \text{Para } x<0 & 1+x=x \Leftrightarrow 1=0 \ !! \ \text{No hay.} \end{cases}$$

En conclusión:

Si $\alpha>1$ Tenemos 2 puntos fijos (Uno positivo y otro negativo)

Si $\alpha<1$ Tenemos 1 solo punto fijo (Positivo)

c) Estudia la estabilidad de los puntos fijos para $a = 1'8$

Para $\alpha = 1'8$ Tenemos $x_{n+1} = 1 - 1'8|x_n|$.

Sea $f(x) = 1 - 1'8|x|$

$$f(x) \begin{cases} 1 - 1'8x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + 1'8x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $\alpha > 1$, tenemos 2 puntos fijos

$$p_1 = \frac{1}{1+1'8} = \frac{1}{2'8} = \frac{10}{28}$$

$$p_2 = \frac{1}{1-1'8} = \frac{-1}{0'8} = \frac{-10}{8} = -1'25$$

f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y como 0 no es un punto fijo de f, podemos usar la derivada para estudiar la estabilidad de los puntos fijos

$$f'(x) = \begin{cases} -1'8 & \text{si } x > 0 \\ 1'8 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|f'(p_1)| = 1'8 > 1$$

$$|f'(p_2)| = |-1'8| = 1'8 > 1$$

Los puntos son inestables. Además, la inestabilidad de p_2 se puede comprobar viendo que $f(x) > x \ \forall x \in (-1'25, 0)$ y $f(x) < x$ $\forall x \in (-2'5, -1'25)$.

d) Si $\alpha = 2$, comprueba que $\{-0'2, 0'6\}$ es un 2-ciclo y estudia su estabilidad

$x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ $\quad f(x) = 1 - 2|x|$ Veamos que es un 2-ciclo

$$\left.\begin{array}{l} f(-0'2) = 1 - 2|-0'2| = 1 - 0'4 = 0'6 \\ f(0'6) = 1 - 2\cdot|0'6| = -0'2 \end{array}\right\} \text{Es un 2-ciclo}$$

Para ver su estabilidad usamos la derivada, ya que f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y 0 no es un punto del ciclo.

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad |f'(-0'2)\cdot f'(0'6)| = |-2\cdot 2| = 4 > 1$$

El 2-ciclo es inestable.