④ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad \forall x \in]-1,1[$$

Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en $]-1,1[$ y uniformemente en todo compacto $K \subset]-1,1[$, pero no converge uniformemente en $]-1,1[$.

f_n es derivable en $]-1,1[$

Para n fijo $\quad f'_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}\cdot(1-x^n) - x^n\cdot(-nx^{n-1})}{(1-x^n)^2}$

$$\frac{nx^{n-1}\left[1-x^n+x^n\right]}{(1-x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Si $x>0 \quad f'_n(x)>0 \longrightarrow f_n$ es creciente en $(0,1)$

Si $x<0 \quad f'_n(x)<0 \longrightarrow f_n$ es creciente en $(-1,0)$

$\forall x \in K = [-\delta, \delta] : 0<\delta<1 \quad$ (K es compacto)

$|f_n(x)| \leq f_n(\delta) \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$

Si probamos que $\sum_{n\geq 1} f_n(\delta)$ es convergente, por el Test de Weierstrass tendremos que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en K

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{\delta^n}{1-\delta^n} \quad$ Usando el criterio del cociente

$$\frac{\delta^{n+1}}{1-\delta^{n+1}} \cdot \frac{1-\delta^{n}}{\delta^{n}} = \delta \cdot \frac{1-\delta^{n}}{1-\delta^{n+1}}$$ Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \delta \cdot \frac{1-\delta^{n}}{1-\delta^{n+1}} = \delta < 1 \Rightarrow$$ la serie es convergente

Para ver que la función converge absolutamente podemos usar el mismo criterio del cociente aplicado a $|f_n(x)|$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = x \frac{1-x^{n}}{1-x^{n+1}} \quad \text{Si } |x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x \frac{1-x^{n}}{1-x^{n+1}} = x < 1$$

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolutamente en $]-1,1[$

Falta probar que no converge uniformemente en $]-1,1[$

Supongamos que $\sum_{n\geq 1} f_n$ convergiese uniformemente en $]-1,1[$

Sea $\varepsilon>0$ $\exists\, m \in \mathbb{N}: m \leq p < q \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n} < \varepsilon \;\forall x \in]-1,1[$

$\varepsilon>0$ fijo $m \leq p < q$ fijos $\sum_{k=p+1}^{q} \frac{x^n}{1-x^n} < \varepsilon \quad \forall x \in]-1,1[$

$\left(\lim_{x\to 1}\right) \to \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{1-1} \Rightarrow$ la serie sería de Cauchy, pero el término general no convergería a 0. !!

lo que es imposible, así, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ no converge uniformemente en $]-1,1[$.

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)}$$

Estamos ante una serie de potencias con $a=0$ y $c_n = \frac{1}{\log(n+2)}$

$R=\frac{1}{L}$ $\quad L=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\log(n+2)}} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)}{\log(n+3)} = 1 \Rightarrow R=1$

- La serie converge absolutamente en $]-1,1[$
- La serie converge uniformemente en cualquier compacto $K \subset]-1,1[$
- La serie no converge en $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$

Falta ver la convergencia en $\{-1,1\}$

Para $x=-1$ $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ El término general tiende a 0. y es estrictamente decreciente, entonces la serie converge puntualmente para $x=-1$.

Para $x=1$ $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(n+2)}$ La serie diverge por el criterio de comparación con la serie armónica

De aquí también vemos que para $x=-1$ la serie no es absolutamente convergente