$E_\lambda^K = \langle H_\lambda, DH_\lambda, \dots, D^K H_\lambda \rangle = \{ Q(x) \cdot \lambda^n \}$

donde Q es un polinomio de grado $< K$.

Caso no resonante $\lambda \notin \sigma$

Si $b \in E_\lambda^K$ entonces existe una solución particular en E_λ^K

Caso resonante $\lambda \in \sigma$, μ multiplicidad algebraica

Si $b \in E_\lambda^K \Rightarrow \exists$ una solución en $E_\lambda^{K+\mu}$

Método general de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo:

Sea la ecuación

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n(1+3^n) = n + n3^n$$

$n \to E_1^1$ Resonante $\longrightarrow n \to E_1^3$

$n3^n \to E_3^1$ No resonante

Polinomio característico $= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$

$(\lambda-1)$ es una raíz doble

La solución será de la forma

$n \to E_1^3 \quad an^3 + bn^2 + cn + d$

$n3^n \to E_3^1 \quad (an+b)3^n$

n no resonante $(an+b)$

$\lambda =$ simple $\quad an^2 + bn + \cancel{c}$

$\lambda =$ doble $\quad an^3 + bn^2 + \cancel{c}n + \cancel{d}$

De la homógenea

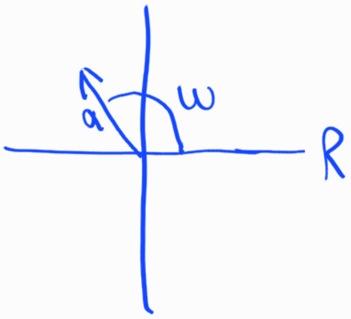
Si es no resonante no se puede quitar ninguno.

<u>Caso valores complejos</u>

α, w positivo

$\lambda = \alpha e^{iw} \quad (1)$

$\lambda^n = \alpha^n \cdot e^{inw} \quad (2)$



$$\text{Euler} \begin{cases} (1) = \alpha(\cos(w) + i \operatorname{sen}(w)) \\ (2) = \alpha^n(\cos(nw) + i \operatorname{sen}(nw)) \end{cases}$$

Π_n

$\operatorname{Re} \Pi_\lambda(n) = \alpha^n \cos(nw)$

$\operatorname{Im} \Pi_\lambda(n) = \alpha^n \operatorname{sen}(nw)$

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$E^k_{w,\alpha} = \operatorname{Re}(E^k_\lambda) \oplus \operatorname{Im}(E^k_\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} Q_1(n) \cdot \alpha^n \cos(nw) + \\ Q_2(n) \cdot \alpha^n \operatorname{sen}(nw) \end{array} \middle| \operatorname{Gr}(Q_{1,2}) \le k \right\}$$

Si $b \in E^{k}_{\alpha,\omega}$

Caso no resonante $\lambda \in \mathbb{C}$

Entonces $\exists$ una solución particular en $E^{k}_{\alpha,\omega}$

Caso resonante $\lambda \in \sigma$, μ multiplicidad

Si $b \in E^{k}_{\alpha,\omega} \Longrightarrow x_p \in E^{k+\mu}_{\alpha,\omega}$

Resolver

$$x_{n+2} + x_n = 4^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right) + \operatorname{sen}(4n)$$

$$\underbrace{4^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}_{\varepsilon^{0}_{4,\frac{1}{2}}} \qquad \underbrace{\operatorname{sen}(4n)}_{\varepsilon_{1,4}}$$

LIDIA

Ec. Homogenea

$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ $\quad p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$

① $p(\lambda)$ raices reales y distintas

λ_1, λ_2

$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ SF de soluciones

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{c_1}} \qquad \underset{\mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{c_2}}$$

② $p(\lambda)$ raiz doble λ

$\{\lambda^n, n\lambda^n\}$ SF de soluciones

$$x_n = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n$$

③ Raices complejas

$\lambda_1 = a + bi \quad \lambda_2 = a - bi$

$r =$ modulo de λ_1

$\theta =$ argumento de λ_1

$\{r^n \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta)\}$

$$x_n = c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 \operatorname{sen}(n\theta)$$

Ec completa

$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = b(n)$

| Solución general de la completa | = | Solución general de la homogénea | + | Una solución particular de la completa |

$b(n)$ cte → Busco soluciones constantes

$b(n)$ pol grado n → Busco solucione polinomicas de grado n

$b(n)$ a^n → Busco soluciones $K a^n$

$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 8$

1) Resolvemos la homogénea

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 5 \end{cases}$

$\{2^n, 5^n\}$ SF

Sol general

$x_n = c_1 2^n + c_2 5^n$

2) Busco una solución particular de la completa

¿$x_n = k$?

$k - 7k + 10k = 8$

$4k = 8 \rightarrow k = 2$

$x_n = 2$ es una solución particular de la completa

Solución general de la completa

$x_n = C_1 2^n + C_2 5^n + 2$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

- Resonancia

$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 7 \cdot 2^n \quad (2)$

1) Homogenea

$x_n = C_1 2^n + C_2 5^n$

2) Solución particular de (2)

$x_n = K n \cdot 2^n$ ¿Sol de (2)?

$K(n+2) 2^{n+2} - 7K(n+1) 2^{n+1} + 10K \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n$

$2^n [4K(n+2) - 14K(n+1) + 10Kn] = 7 \cdot 2^n$

$n\underbrace{(4K - 14K + 10K)}_{0} + 8K - 14K = 7.$

$-6K = 7 \qquad K = \frac{-7}{6}$

Solución particular de (2)

$x_n = \frac{-7}{6} n 2^n$

Solución general de la completa

$x_n = C_1 2^n + C_2 5^n - \frac{7}{6} n 2^n$

TEOREMA

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c \cdot x_n = 0$$

$p(1) > 0 \qquad a + b + c > 0$

$p(-1) > 0 \qquad a - b + c > 0$

$p(0) < a \qquad a - c > 0$