Relación 1

1. Se considera la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto no vacío C si, y sólo si, C está acotado.

$\Leftarrow$

Sea C un conjunto acotado, entonces C tiene supremo e ínfimo

Sea $M = \max\{\sup(C), \inf(C)\}$ Entonces

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \left|\frac{M}{n}\right| = \varepsilon \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0 \Rightarrow$$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en C.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\{f_n\}$ Converge uniformemente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}, \ n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in C$$

Si C no esta acotado $\Rightarrow$ $|f_n(x) - 0| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$!!

$$\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\left|\frac{x}{n}\right|}} < \underset{\text{cte}}{\underset{\downarrow}{\varepsilon}}$$

② Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{1+nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado $p \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{g_n\}$ en el intervalo $[0,p]$, y en la semirecta $[p,+\infty[$.

$n \in \mathbb{N}$ fijo $\quad g_n$ derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con

$$g'_n(x) = \frac{\frac{n}{\cancel{1+nx}} \cdot \cancel{1+nx} - n\log(1+nx)}{(1+nx)^2} = \frac{n - n\log(1+nx)}{(1+nx)^2}$$

$$n - n\log(1+nx) = 0 \iff 1 = \log(1+nx) \iff e = 1+nx \iff x = \frac{e-1}{n}$$

Si $x > \frac{e-1}{n} \Rightarrow g'_n(x)$ es decreciente

Si $x < \frac{e-1}{n} \Rightarrow g'_n(x)$ es creciente

$$g_n(x) \leq g_n\left(\frac{e-1}{n}\right) = \frac{1}{e}$$

Sea $p \in \mathbb{R}^+ \; \exists \, m \in \mathbb{N} : n \geq m \quad \frac{e-1}{n} < p \qquad x_n = \frac{e-1}{n} \quad n \geq m$

$x_n \in [0,p] \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad \{g_n(x_n)\} \not\to 0$

$\{g_n\}$ no converge uniformemente en $[0,p]$

$n \geq m \quad \frac{e-1}{n} < p \quad g_n$ decreciente en $[p,+\infty[$

$0 < g_n(x) \leq g_n(p) \quad \{g_n(p)\} \to 0$

$\exists \, m \in \mathbb{N} : n \geq m \;\; |g_n(x)| \leq p_n \;\; \forall x \in [p,+\infty[\;\Rightarrow g_n$ con. uni en $[p,+\infty[$

③ Probar que la sucesión $\{h_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$\boxed{h_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

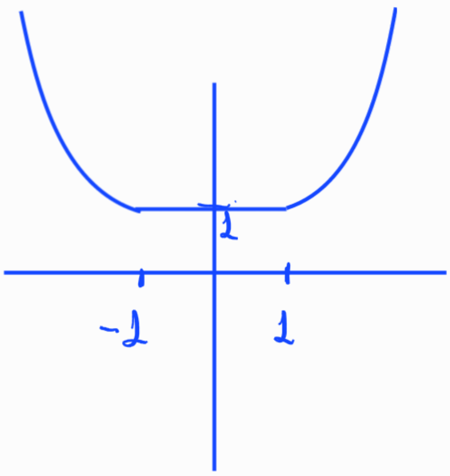
$|x|<1 \quad \{x^{2n}\} \to 0 \quad \{h_n(x)\} \to 1$

$|x|=1 \quad \{x^{2n}\} \to 1 \quad \{h_n(x)\} \to \{\sqrt[n]{2}\} \to 1$

$|x|>1 \quad \sqrt[n]{x^{2n}\cdot\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)} = x^2\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^{2n}}} \quad \{h_n(x)\} \to x^2$

$\{h_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} = \max\{1, x^2\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$|x|<1 \quad \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - \sqrt[n]{1}$

$|x|>1 \quad \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - \sqrt[n]{x^{2n}}$

Usar el TVM en $y \to \sqrt[n]{y}$

$|x| \leq 1 \qquad f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \qquad b = x^{2n} + 1 \qquad a = 1$

$$\sqrt[n]{1+x^{2n}} - \sqrt[n]{1} \leq \underset{\substack{\vee\!/ \\ 1}}{x^{2n}} \cdot \frac{1}{n \underset{\substack{\vee\!/ \\ 1}}{\sqrt[n]{(1+t)^{n-1}}}} \leq \frac{1}{n}$$

$|x| > 1$

$$\sqrt[n]{1+x^{2n}} - \sqrt[n]{x^{2n}} \leq \frac{1}{n \sqrt[n]{(1+t)^{n-1}}} \leq \frac{1}{n}$$

Tenemos que la sucesión $\{\rho_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ $n \in \mathbb{N}$ $\{\rho_n\} \to 0$ y $|h_n(x) - h(x)| \leq \frac{1}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por tanto $\{h_n\}$ converge uniformemente a $h(x)$ en $\mathbb{R}$