



# **Estrategias de Cooperación en Procesos Estocásticos de Crecimiento Multiplicativo**

**Jesús García Sánchez**





# **Estrategias de Cooperación en Procesos Estocásticos de Crecimiento Multiplicativo**

Jesús García Sánchez

Memoria del **Trabajo Fin de Máster**.  
Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)  
Universidad de Granada.

Tutorizado por:

Prof./Dr. Miguel Ángel Muñoz Martínez  
Prof./Dr. Serena Di Santo



# Índice general

<b>English Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Resumen Español</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo de agentes . . . . .	9
2.2. Promediado de simulaciones y paralelización de código . . . . .	10
2.3. Topología de red . . . . .	11
2.4. Dinámica de avaricia y dinámica de generosidad . . . . .	12
2.5. Selección natural . . . . .	14
<b>3. Resultados</b>	<b>17</b>
3.1. Reproducción de resultados bibliográficos . . . . .	17
3.2. Modelo de agentes en red topológica . . . . .	21
3.3. Dinámica de avaricia . . . . .	23
3.4. Selección natural . . . . .	29

#### **4. Conclusiones**

# English Abstract

The effect of cooperation in systems subjected to stochastic processes of multiplicative growth has been studied through a Python implementation of an agent-based model. This implementation revealed that the behavior of systems in which all agents cooperate with each other is equivalent to that of any connected cooperative network among the agents. Additionally, it was found that greed has an adverse effect on all agents in the system, including the wealthiest ones. Finally, a way of achieving cooperation as a result of a natural selection process has been identified.





# Resumen Español

Se ha estudiado el efecto de la cooperación en sistemas sometidos a procesos estocásticos de crecimiento multiplicativo mediante una implementación en Python de un modelo basado en agentes. Mediante esta implementación, se ha descubierto que el comportamiento de sistemas en los que todos los agentes cooperan entre sí es equivalente al de cualquier red cooperativa conexa entre los agentes. Además, se ha comprobado que la avaricia tiene un efecto adverso en todos los agentes del sistema, incluidos los más ricos. Por último, se ha hallado la posibilidad de obtener la cooperación como resultado de un proceso de selección natural.



# 1 | Introducción

La cooperación puede observarse en múltiples entornos, como biológicos, económicos o sociológicos. A pesar de su ubiquidad, es difícil comprender que en contextos competitivos como estos la cooperación pueda no sólo existir sino perdurar en el tiempo. En este trabajo hemos implementado y estudiado un modelo basado en agentes que admite la existencia de la cooperación a partir de unas reglas muy simples y muestra como la cooperación puede ser beneficiosa de manera egoísta.

Planteamientos simplistas como el del dilema del prisionero parecen sugerir que la cooperación no es una estrategia viable en un ambiente competitivo. Al fin y al cabo, encontramos un equilibrio de Nash en la deserción absoluta (lo contrario a la cooperación). Pese a esto, podemos observar que la cooperación existe incluso en ambientes tan competitivos como el biológico. Las estrategias de cooperación han aparecido y sobrevivido a la presión selectiva, lo que nos indica que debe haber mecanismos que la favorezcan [2] [1].

Una cualidad que deben satisfacer los mecanismos que desemboquen en la cooperación es que deben hacer que la cooperación sea resistente a la aparición de desertores. Una forma de garantizar esto es que los individuos cooperadores se vean más beneficiados que los desertores, haciendo que la deserción sea una estrategia peor que la cooperación. Es decir, la cooperación debe ser la estrategia óptima de forma egoísta, no altruista [5].

Nuestro estudio de la cooperación se centra en los sistemas que presentan procesos estocásticos de crecimiento multiplicativo. Los procesos de crecimiento multiplicativo son aquellos en los que una cantidad altera su valor conforme a un factor. Sea  $x$  la cantidad y  $C$  el factor, la dinámica viene dada por:

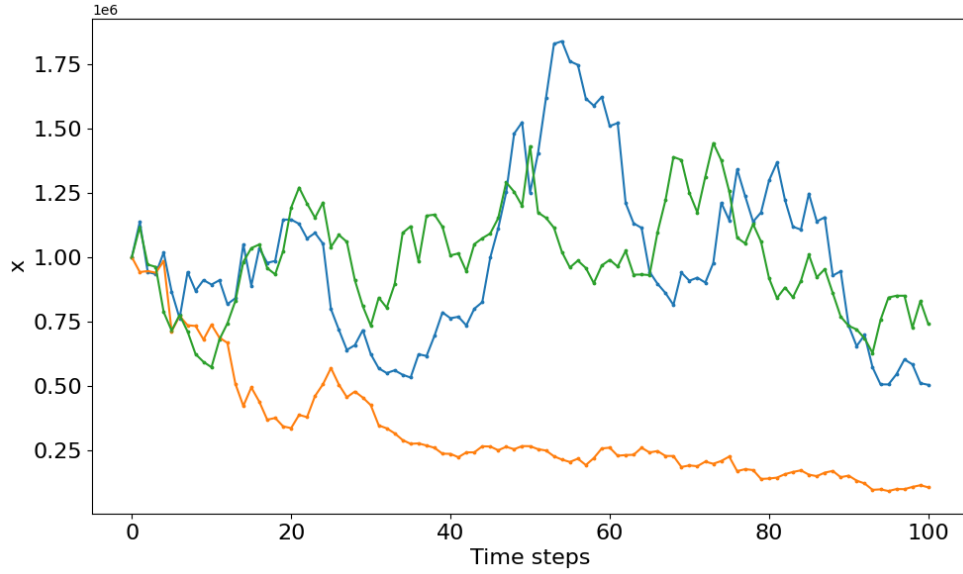


Figura 1.1: Ejemplo de la evolución de valores bajo un proceso estocástico de crecimiento multiplicativo. En este ejemplo, el factor de crecimiento en cada paso temporal se ha obtenido de una Gaussiana centrada en  $\mu = 1.0$  con desviación estándar  $\sigma = 0.1$ .

$$\dot{x}(t) = Cx(t)$$

Al hacer que el crecimiento multiplicativo sea estocástico, le damos al factor de crecimiento  $C$  la capacidad de variar su valor de forma aleatoria, haciendo que la magnitud  $x$  crezca o decrezca de forma distinta en cada instante. En la figura 1.1 podemos ver ejemplos discretos de tres evoluciones del valor  $x$  bajo este tipo de proceso. Como podemos ver, la estocasticidad puede aumentar el crecimiento del sistema o reducirlo, dependiendo del valor de crecimiento en cada paso temporal. El efecto de la estocasticidad puede ser positivo si se encadenan valores grandes del factor de crecimiento de forma consecutiva. De igual modo, la estocasticidad puede tener un efecto perjudicial en el crecimiento si se encadenan valores pequeños del factor de crecimiento.

Nuestro objetivo es estudiar las estrategias de cooperación en estos procesos desde una perspectiva computacional. Para ello, haremos uso de un modelo basado en agentes. Los modelos basados en agentes son un tipo de modelo computacional que

se centran en simular las acciones autónomas de los agentes o individuos que componen un sistema, en lugar del sistema en su totalidad.

Un resultado de la publicación [3] es que en sistemas que se rigen por procesos de crecimiento multiplicativo estocástico, la cooperación tiene la capacidad de mitigar el efecto perjudicial que puede tener la estocasticidad en el crecimiento multiplicativo, haciendo que los agentes cooperantes sincronicen su crecimiento. De este modo, el crecimiento de los agentes cooperantes se hace mayor que el de los desertores, lo que supone una clara ventaja en ambientes competitivos como la evolución.

El método de cooperación que se plantea en [3] es que todos los agentes del sistema pongan una parte de su riqueza<sup>1</sup> en un fondo común tras cada paso temporal. La riqueza de este fondo se distribuye después equitativamente entre todos los agentes. Intuitivamente, podemos llegar a entender por qué esto supone una ventaja.

Supongamos un sistema con sólo dos agentes cooperantes cuyo crecimiento se rige por un proceso multiplicativo estocástico. En un paso temporal el agente 1 tiene mala suerte y ve su riqueza reducida, mientras que el agente 2 tiene buena suerte y su riqueza crece. Compartir su riqueza a través del fondo común sin duda será beneficioso para el agente 1, mientras que el agente 2 se verá desfavorecido en este paso temporal. Gracias a esto, el agente 1 podrá alcanzar una riqueza mayor a la que habría obtenido sin la ayuda del agente 2. Aunque no lo parezca, esto es beneficioso para el agente 2, ya que en pasos temporales futuros, cuando se cambien los papeles y sea el agente 2 el que tenga mala suerte, el agente 1 dispondrá de más riqueza con la que ayudar al agente 2. Gracias a esta forma de cooperar, el fondo común puede servir como mitigador de las malas rachas (efecto adverso de la estocasticidad), haciendo que todos los agentes cooperantes se beneficien a largo plazo. Podemos ver este mismo concepto muy bien ilustrado en [4].

Una forma de caracterizar el crecimiento de una magnitud en procesos multiplicativos es mediante el *crecimiento logarítmico*. Este se define entre el valor inicial de la magnitud y su valor en cierto tiempo  $T$  [5]. Si hacemos este tiempo lo suficientemente

---

<sup>1</sup>Utilizamos "riqueza" como término común a todos los sistemas en los que este tipo de proceso es aplicable. En biología, riqueza puede referirse a los recursos de los que disponen los individuos, mientras que en economía, riqueza sería la cantidad de dinero de los individuos.

grande hablamos de crecimiento logarítmico a largo plazo, definido por:

$$G = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \left( \frac{x(T)}{x(0)} \right)}{T}$$

Esta será la magnitud a la que nos referiremos en este texto cuando hablemos de "crecimiento". Una comparación que nos interesará hacer a menudo es la del crecimiento en presencia de cooperación y en ausencia de ella. Para realizarla, usaremos el crecimiento logarítmico relativo, que no es más que la diferencia entre el crecimiento logarítmico en presencia de cooperación y el crecimiento logarítmico en ausencia de ella.

## 2 | Metodología

Para estudiar la cooperación bajo crecimiento multiplicativo estocástico hemos implementado un modelo de agentes en Python. Todo el código desarrollado y empleado para este trabajo puede encontrarse en su repositorio de GitHub [6].

### 2.1 Modelo de agentes

El modelo de agentes que hemos implementado está compuesto por  $N$  agentes, cada uno de los cuales cuenta con una riqueza o valor propio  $x_i$ . En cada paso temporal discreto de la evolución del modelo se llevan a cabo dos etapas. En la primera etapa cada uno de los agentes sufre un crecimiento multiplicativo dado por una variable aleatoria  $\zeta_i$ , distinta para cada agente. Esta variable aleatoria se obtiene de una distribución Gaussiana de media  $\mu_i$  y desviación estándar  $\sigma_i$ , ambas también específicas de cada agente. Usaremos la notación  $\zeta_i^t = \zeta(t, \mu_i, \sigma_i)$ . Podemos ver la ecuación correspondiente a la primera etapa del paso temporal en la ecuación (2.1).

$$x_i^{t+1/2} = x_i^t \zeta_i^t \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.1)$$

En la segunda etapa, cada agente entrega una porción de su valor marcada por su *sharing parameter*  $a_i$  a un fondo común y recibe su parte equitativa de la colecta del grupo. Poniendo estas dos etapas juntas podemos obtener la expresión del paso temporal del modelo de agentes que podemos ver en (2.2). Esta acción de colecta y reparto es nuestra forma de caracterizar la cooperación entre los agentes.

$$x_i^{t+1} = x_i^t \zeta_i^t (1 - a_i) + \frac{\sum_{j=1}^N x_j^t \zeta_j^t a_j}{N} \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.2)$$

Una comparación de interés será la de la evolución en presencia de cooperación y en ausencia de ella. Si bien el régimen de cooperación es el dado por la ecuación (2.2), el régimen de no cooperación o desertión es equivalente a llevar a cabo sólo la primera etapa del paso temporal, dada en la ecuación (2.1). Para que la comparación sea coherente, utilizaremos los mismos números aleatorios  $\zeta_i$  en ambos casos. Comparando la evolución de los agentes en presencia y en ausencia de cooperación, podremos obtener el crecimiento logarítmico relativo.

## 2.2 Promediado de simulaciones y paralelización de código

Estudiar un proceso estocástico trae consigo ruido en las medidas. Para obtener conclusiones fiables de los regímenes que estudiemos necesitamos realizar múltiples evoluciones temporales y promediar los resultados obtenidos de cada una de ellas. Por tanto, no sólo tendremos que controlar el número de pasos temporales que dejamos evolucionar el sistema, sino el número de evoluciones que queremos llevar a cabo para cada simulación.

Aquí nos encontramos una dificultad en términos de eficiencia. En una simulación, el número de pasos temporales totales a realizar estará dado no sólo por el número de pasos que dejemos evolucionar el sistema, sino por cuántas evoluciones queramos hacer para el promediado. De cara a los pasos temporales, escogeremos el valor lo más pequeño posible que permita evolucionar al sistema hacia su estado natural de forma consistente. Si evolucionamos el sistema pocos pasos, no tendremos oportunidad de ver la fenomenología que hay en él. Respecto al número de simulaciones, calcularemos el error a partir de la desviación estándar de las medidas tomadas, realizando tantas simulaciones como sea necesario para reducir el error lo suficiente.

Algo que podemos utilizar a nuestro favor es la independencia entre distintas evoluciones para paralelizar código mediante la librería *multiprocessing* de Python. Durante una simulación, podemos ejecutar cada una de las evoluciones del modelo en una CPU distinta y luego compendiar los resultados de cada una de las evoluciones. El aumento en velocidad que podemos obtener de este modo es muy significativo, haciendo las simulaciones casi tanto más rápidas como número de CPUs utilizemos, aproximadamente.



## 2.3 Topología de red

El modelo de agentes que hemos presentado considera que todos los agentes interactúan con todos los demás. Esto puede no ser lo más realista en según qué casos. Podemos crear una topología de red que nos permita establecer conexiones entre agentes de forma selecta. De este modo, cada agente sólo podrá cooperar con aquellos agentes con los que esté conectado: sus vecinos en la red.

Las redes pueden caracterizarse a través de las llamadas matrices de adyacencia. Las matrices de adyacencia son matrices cuadradas con número de filas y columnas igual al número de nodos (que en nuestro caso representan a los agentes del modelo). El elemento  $A_{ij}$  de la matriz indica la existencia ( $A_{ij} > 0$ ) o ausencia ( $A_{ij} = 0$ ) de una conexión entre los nodos  $i$  y  $j$ . Es decir, indica si el nodo  $j$  comparte recursos con el nodo  $i$ , así como la magnitud de la conexión en las redes ponderadas. Sirviéndonos de la matriz de adyacencia de la red que establezcamos con nuestros agentes, podemos adaptar las ecuaciones de evolución (2.2). Consideramos que el sharing parameter de cada agente es la porción total de su valor que cederá al fondo común, de tal modo que la cantidad que compartirá con cada uno de sus vecinos será su sharing parameter dividido entre el número de vecinos que tenga. Sea  $A$  la matriz de adyacencia de la red y denotando su elemento de la fila  $i$  y la columna  $j$  como  $A_{ij}$  nuestra ecuación de evolución adaptada a redes se convierte en (2.3), donde  $K_i$  es el número de vecinos del nodo  $i$ .

$$x_i^{t+1} = x_i^t \zeta_i^t (1 - a_i) + \frac{\sum_{j=1}^N x_j^t \zeta_j^t a_j A_{ij}}{K_i} \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.3)$$

Implementando esta ecuación en nuestra función de evolución podemos estudiar la red bajo topologías arbitrarias.

## 2.4 Dinámica de avaricia y dinámica de generosidad

Una de las dinámicas que estamos interesados en estudiar es el cambio en el sharing parameter por parte de los agentes en función del estado del sistema. Consideramos la capacidad de los agentes de detectar el estado actual del sistema y decidir en función de esta información qué cantidad de su riqueza compartir.

Una de las dinámicas que hemos planteado bajo este paradigma es la de **avaricia**. En esta, los agentes comparten menos cuanto mayor es su cantidad de riqueza con respecto a la del resto. Para caracterizar este comportamiento hemos utilizado la expresión de la ecuación (2.4). En cada paso temporal de la evolución del sistema, el sharing parameter de cada uno de los agentes se actualizará al dado por esta expresión.

$$a_i = \left( 1 - \frac{x_i}{\sum_{i=0}^N x_i} \right)^\nu \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.4)$$

De acuerdo con la expresión (2.4) un agente que posea muy poca riqueza estará dispuesto a dar casi su totalidad, mientras que si un agente se hace con casi la totalidad de la riqueza no cederá casi nada. El exponente  $\nu$  de esta ecuación nos indica la intensidad de la avaricia de los agentes del sistema. Si el valor del exponente es bajo, el efecto de la avaricia será menor, mientras que si su valor es elevado su efecto se acentuará. Podemos ver una representación del efecto de la avaricia para diferentes valores del exponente en la figura 2.1 (izquierda).

Bajo el efecto de la avaricia pueden aparecer dos regímenes opuestos que podemos caracterizar mediante sus casos extremos. En primer lugar tenemos el **régimen comunal** (communal regime), este se da cuando todos los agentes evolucionan a la par, con los mismos valores de riqueza. Así:

$$x_i^* = \frac{1}{N} \quad a_i = \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^\nu \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.5)$$

donde  $x_i^*$  es la riqueza relativa del agente  $i$ , es decir  $x_i^* = x_i / \sum_{i=1}^N x_i$ . El régimen opuesto a este se corresponde a cuando uno de los agentes se hace con toda la riqueza

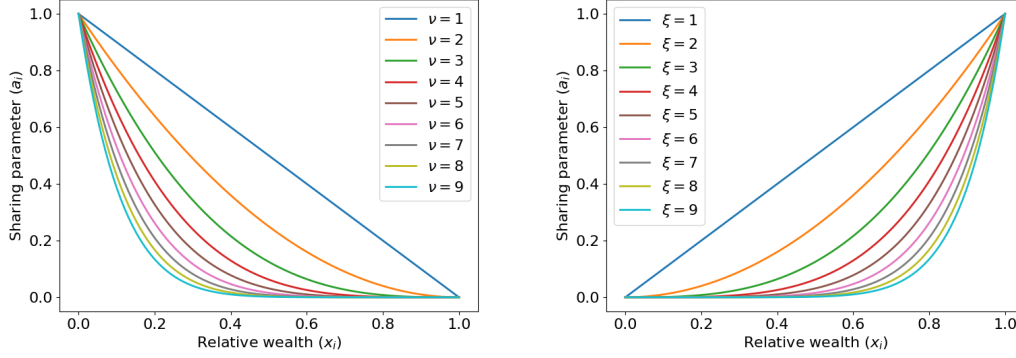


Figura 2.1: Representación del efecto del exponente  $\nu$  (izquierda) y  $\xi$  (derecha) en el sharing parameter bajo el régimen de avaricia (izquierda) y bajo el régimen de generosidad (derecha).

za. Denominamos a este régimen como **régimen de acaparación** (hoard regime). sea  $j$  el agente que se hace con toda la riqueza:

$$\begin{cases} x_i^* = 0 & \text{si } i \neq j \\ x_j^* = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = 1 & \text{si } i \neq j \\ a_j = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Podemos considerar los regímenes comunales y de acaparación como casos límite con los que comparar las evoluciones de nuestro sistema. Para hacer esto, comparamos los valores de los sharing parameters de todos los agentes a lo largo de la evolución del sistema con los valores que consideran los dos regímenes límite. Si los valores se aproximan con error relativo lo suficientemente pequeño en cierto paso temporal, consideramos que se está siguiendo ese régimen en ese paso temporal. Finalmente, verificamos durante qué porcentaje del tiempo de la evolución se ha seguido cada uno de los regímenes. Si al menos el 90 % del tiempo de evolución se ha seguido un régimen de acaparación o comunal, consideramos que ese ha sido el régimen que en compendio ha seguido el sistema. Si ninguno de los dos regímenes alcanza el 90 % del tiempo de evolución, pero sí lo hacen al combinarse, consideramos que el régimen global ha sido un régimen mezcla de ambos (régimen mixto).

En contraposición a la dinámica de avaricia, hemos planteado la dinámica de **generosidad**, donde los agentes comparten más cuanto mayor es su riqueza. Caracteri-

zamos este comportamiento con la ecuación (2.7). Del mismo modo que en la dinámica anterior, los agentes actualizan el valor de su sharing parameter en cada paso temporal de la evolución, mientras que  $\xi$  nos indica la intensidad de la generosidad. Podemos ver la representación del efecto del exponente sobre el sharing parameter en la figura 2.1 (derecha).

$$a_i = \left( \frac{x_i}{\sum_{i=0}^N x_i} \right)^{\xi} \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.7)$$

Como veremos en la sección de Resultados, la dinámica de avaricia desembocó en una serie de regímenes y comportamientos interesantes, por lo que centramos nuestra atención en esta dinámica. En contraposición, la dinámica de generosidad no produjo resultados muy interesantes, por lo que no la discutiremos en Resultados. Pese a que no vayamos a discutir ningún resultado en particular de la dinámica de generosidad, no hemos querido dejar de plantearla aquí, por mantener la simetría en el planteamiento y porque fue también un paso en nuestra investigación.

Tanto el modelo de la dinámica de avaricia como de generosidad asumen que todos los agentes conocen el valor de riqueza de todos los demás agentes. Es difícil cumplir esta condición en un caso real, siendo razonable acotar su rango de aplicabilidad al estudio económico, donde el valor de riqueza está bien cuantificado y los agentes pueden llegar a tener una perspectiva más global. Por estos mismos motivos, es fácil llegar a la conclusión de que estas dinámicas tan simples no podrían adaptarse de forma sencilla a un caso biológico. Para estos casos, hemos establecido un modelo de selección natural.

## 2.5 Selección natural

Hemos implementado un modelo de selección natural que podemos aplicar a la evolución de nuestro modelo de agentes. A diferencia de las dinámicas de avaricia y generosidad, la selección natural no necesita que los agentes tengan conocimiento del estado global del sistema. Cada cierto número de pasos temporales aplicamos un filtro, eliminando a un porcentaje de los agentes. Los agentes eliminados serán los que tengan un menor valor de riqueza en el momento de aplicar el filtro. Los huecos dejados por los agentes eliminados se sustituyen por nuevos agentes. Estos nuevos

agentes serán los "hijos" de los agentes que han sobrevivido. Por cada agente eliminado, escogeremos a uno de los supervivientes al azar para hacer de padre y crear un hijo semejante a él. Los hijos tendrán las mismas características que el padre, con una pequeña variabilidad aplicada.

Las características a heredar por los hijos son los parámetros  $a$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  del padre. En nuestra implementación, tenemos la libertad de escoger cuáles de estos tres parámetros serán cedidos directamente al hijo y cuáles de ellos se someterán a una pequeña variación. Dejando que un parámetro varíe, la población de agentes debería evolucionar hasta valores de ese parámetro más óptimos, entendiendo por óptimos aquellos que maximizan los valores de riqueza de los agentes. La variación que aplicamos a los parámetros es proporcional al valor base y aleatoria entre dos extremos que no tienen por qué ser simétricos. Es decir, podemos establecer que la variación sea entre el 95 % y el 110 %, favoreciendo el crecimiento del parámetro a través de las generaciones.



## 3 | Resultados

### 3.1 Reproducción de resultados bibliográficos

La inspiración y fuente principal de este trabajo surge de los resultados de la publicación [3]. Como tal, nuestro primer objetivo tras implementar el modelo de agentes fue reproducir los resultados de la publicación original. En particular, queremos observar el efecto que tienen la variabilidad estocástica y el número de agentes de un sistema en el crecimiento del mismo. Además, queremos observar como bajo ciertas condiciones, un agente puede encontrar beneficio en poner más que el resto en el fondo común. Es decir, queremos observar que un agente se beneficia de forma egoísta de cooperar más que el resto.

En un modelo de dos agentes, hemos fijado el sharing parameter del agente 2 a  $a_2 = 0.5$ . Variando el sharing parameter del agente 1 hemos simulado la evolución del sistema, tomando nota del crecimiento logarítmico relativo del agente 1 durante las evoluciones. La figura 3.1 (arriba) es una recreación de una de las gráficas que podemos encontrar en la publicación original, que nos muestra los resultados de este mismo experimento, realizado para distintos valores de  $\sigma$ . En la figura 3.1 (abajo) encontramos la gráfica de la publicación original, donde podemos observar en la curva de la solución analítica que los máximos en el crecimiento se producen para valores de  $a_1 > 0.5$ . Es decir, el agente 1 experimenta un mayor crecimiento cuando comparte más que el otro agente. La solución analítica de este problema se puede encontrar resuelta en la publicación original [3]. De acuerdo con nuestra notación, la expresión analítica de la solución de este problema es la dada en la ecuación (3.1), donde  $G_{rel}^1$  es el crecimiento logarítmico relativo del agente 1 y  $K_\beta(Z)$  la función de Bessel modificada de segundo tipo.

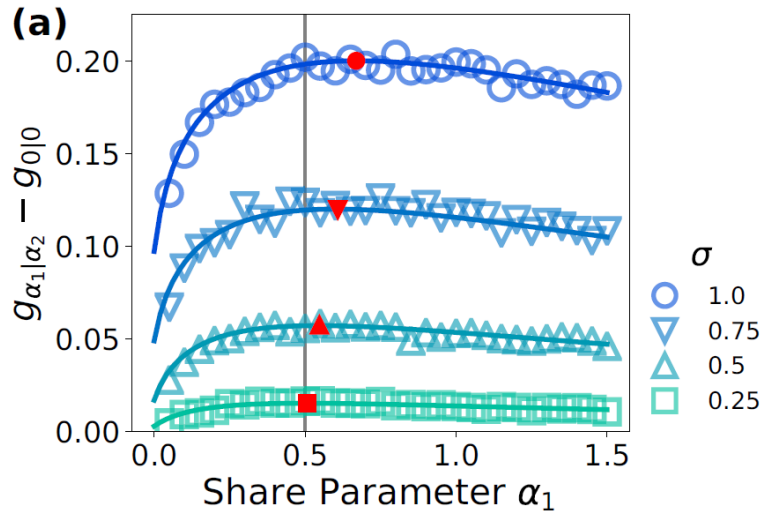
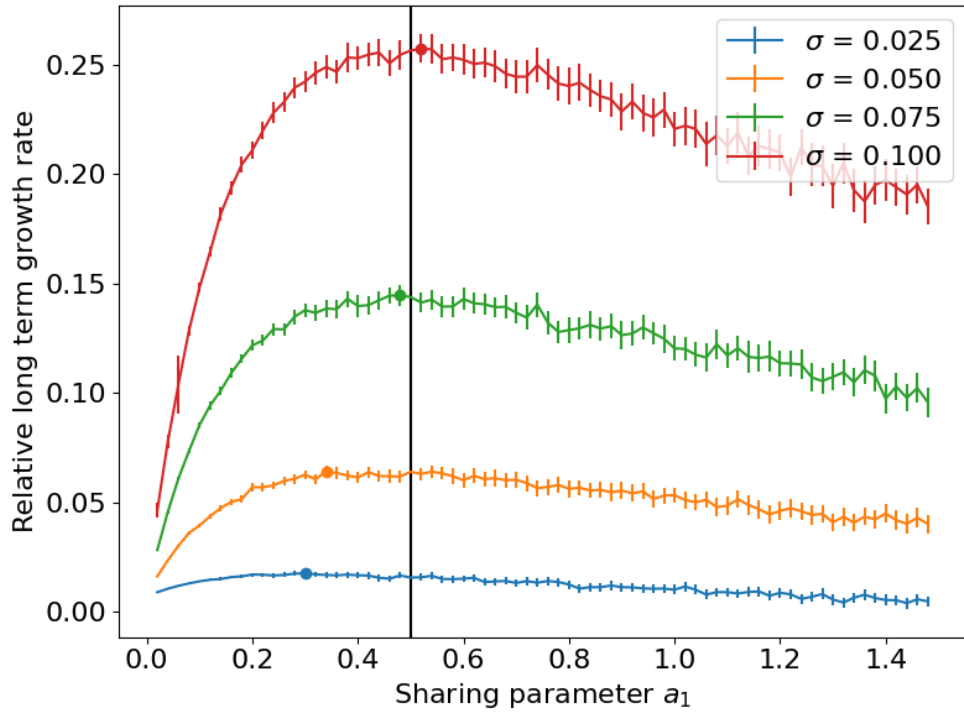


Figura 3.1: Arriba: Crecimiento logarítmico relativo del agente 1 frente a su sharing parameter en un modelo de dos agentes para distintas desviaciones estándar del crecimiento multiplicativo. El sharing parameter del agente 2 se ha fijado a  $a_2 = 0.5$ . Podemos observar como el crecimiento se hace mayor para  $\sigma$  mayor gracias a la cooperación. Los puntos marcados se corresponden al máximo en el crecimiento logarítmico relativo de cada curva. El resultado esperado es encontrar estos máximos en valores de  $a_1 > 0.5$ . Esto último no llega a observarse para todos los valores de  $\sigma$  debido a que se necesita una cantidad de simulaciones mayor para afinar máximos tan poco pronunciados. Abajo: Misma figura en la publicación original [3] (Figura 1a) además de sus curvas analíticas.



$$G_{rel}^1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2} \frac{K_{-1+\frac{a_2-a_1}{2\sigma^2}}\left(\frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sigma^2}\right)}{K_{\frac{a_2-a_1}{2\sigma^2}}\left(\frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sigma^2}\right)} \quad (3.1)$$

Pese a haberse confirmado este resultado de forma analítica, no lo podemos observar tan claramente ni en los resultados numéricos de nuestra recreación ni en la publicación original. Para desviaciones estándar pequeñas, el cambio en el crecimiento con  $a_1$  es pequeño, haciendo que el máximo sea menos pronunciado y requiriendo por tanto una cantidad muy alta de evoluciones a promediar para observar el resultado computacionalmente. Durante el proceso de confección de la gráfica hemos podido observar como el resultado computacional se aproxima más y más al analítico según aumentamos el número de evoluciones con las que promediamos. Invirtiendo más potencia de cálculo esperaríamos llegar a observar el mismo resultado de forma computacional.

Los máximos del crecimiento se dan para sharing parameters mayores cuanto mayor es  $\sigma$ . De esto podemos aprender que cuanto mayor es la desviación estándar del crecimiento multiplicativo, más están incentivados los agentes a cooperar, ya que la cooperación entre ellos les sirve para combatir los efectos adversos del ruido en su crecimiento. De hecho, podemos observar que los crecimientos son mayores cuando  $\sigma$  es más grande. Gracias a la cooperación pueden convertir la mayor variabilidad del ruido a favor de su crecimiento.

La figura 3.2 es otra recreación, en este caso del material suplementario de la publicación original [3]. En ella podemos ver de nuevo el crecimiento logarítmico relativo del agente 1 de un sistema en función de su sharing parameter. En esta ocasión hemos simulado para diferentes números de agentes en el sistema, manteniendo la desviación estándar del crecimiento multiplicativo en  $\sigma = 0.1$  y los sharing parameters de todos los agentes distintos al 1 en  $a_{i>1} = 0.5$ . Si comparamos los rangos del eje vertical de las figuras 3.1 (arriba) y 3.2, podemos observar como contar con un mayor número de agentes dispuestos a cooperar en el sistema aumenta el crecimiento del agente 1. Al contar con un mayor número de agentes, el fondo común se nutre de más fuentes, haciéndolo más resistente a rachas adversas en el crecimiento multiplicativo, y permitiendo crecimientos mayores.

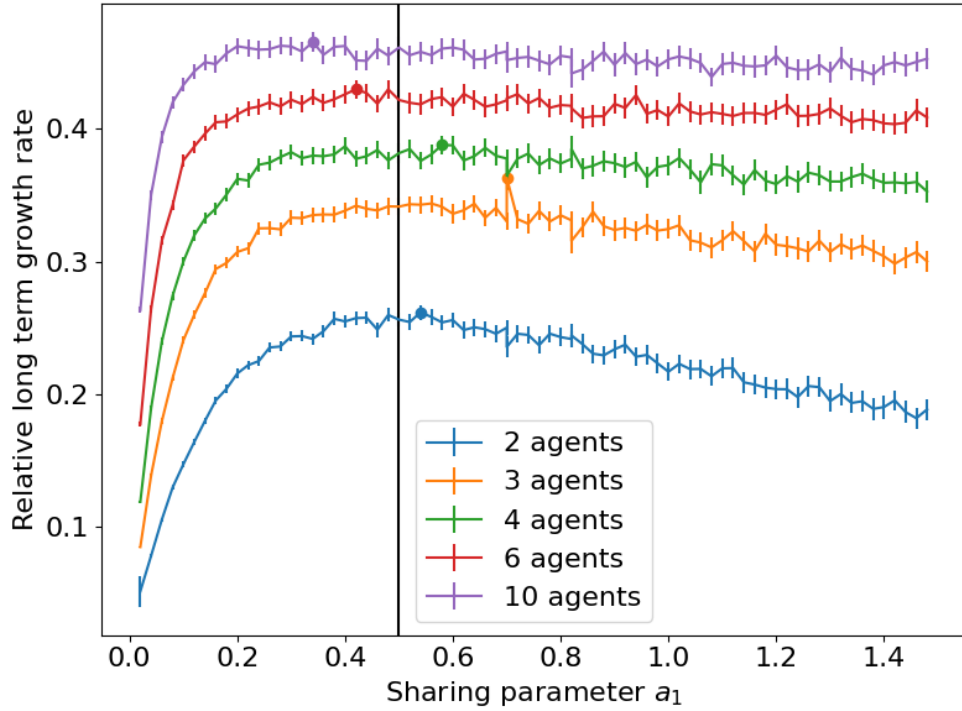


Figura 3.2: Crecimiento logarítmico relativo del agente 1 frente a su sharing parameter en modelos con distinto número de agentes y  $\sigma = 0.1$ . El sharing parameter de los agentes distintos a 1 es  $a = 0.5$ . Los puntos marcados se corresponden al máximo en el crecimiento logarítmico relativo de cada curva.

Al igual que nos pasaba con la figura 3.1 (arriba), la estadística necesaria para observar en 3.2 de forma clara que el agente 1 está incentivado a cooperar más que el resto es demasiado grande. Este es también uno de los resultados de la publicación original [3].

Los resultados con los que nos quedamos aquí de cara al resto de nuestro estudio son que los agentes encuentran mayor beneficio en cooperar cuando la variabilidad del crecimiento multiplicativo es mayor, ya que la cooperación es su forma de combatir el efecto adverso del ruido. Del mismo modo, contar con un número mayor de agentes dispuestos a cooperar también beneficia a los agentes, ya que un fondo común que se construye con más agentes es más resistente al efecto adverso del ruido.

## 3.2 Modelo de agentes en red topológica

Pasamos ahora a discutir los resultados obtenidos para sistemas en los que los agentes cooperan de forma selecta. Es decir, cada agente coopera sólo con sus vecinos en una red topológica, en lugar de cooperar con todos los demás.

En la figura 3.3 podemos ver ejemplos de configuraciones de redes topológicas junto con el crecimiento logarítmico relativo de sus agentes. En la primera configuración podemos ver un caso extremo, en el que tenemos dos islas de nodos. Una de ellas está compuesta por 18 agentes conectados todos con todos, mientras que la otra está compuesta por sólo 2 agentes, también conectados entre sí.

La isla con un mayor número de agentes cuenta con un mayor crecimiento logarítmico relativo. Al estar compuesta por un mayor número de agentes, el fondo común que conforman permite mitigar más satisfactoriamente las variaciones debidas a la estocasticidad del crecimiento al que están sometidos. De este modo, el crecimiento que consiguen obtener es bastante mayor al que obtendrían en caso de no cooperar entre ellos. Este efecto también está presente en la isla de dos agentes, aunque en menor escala. Al estar el fondo común compuesto por la riqueza de menos agentes, su capacidad de mitigar el ruido estocástico es menor. Esto está en total de acuerdo con lo discutido en la sección anterior.

Un resultado impactante que podemos observar en la misma figura 3.3 es que basta con establecer un único enlace entre las dos islas para que todos los agentes del sistema crezcan a la par y presenten el mismo crecimiento logarítmico relativo. Este resultado es idéntico para diferentes dimensiones de las islas y número de islas.

Podemos ir un paso más allá. La tercera y cuarta configuración de la figura 3.3 son iguales a las dos primeras configuraciones, excepto porque la isla mayor tiene una densidad menor de conexiones. A pesar de contar con menos conexiones, podemos apreciar que el crecimiento logarítmico relativo de los agentes es igual al que obteníamos cuando todos los agentes estaban conectados con todos. Hemos observado que esto es cierto siempre que el grafo sea conexo. Es decir, siempre que todos los vecinos estén conectados por un camino. Por tanto, **basta con que exista una vía de cooperación que pase por todos los agentes para que estos sincronicen**

**22** ESTRATEGIAS DE COOPERACIÓN EN PROCESOS ESTOCÁSTICOS DE CRECIMIENTO  
MULTIPLICATIVO

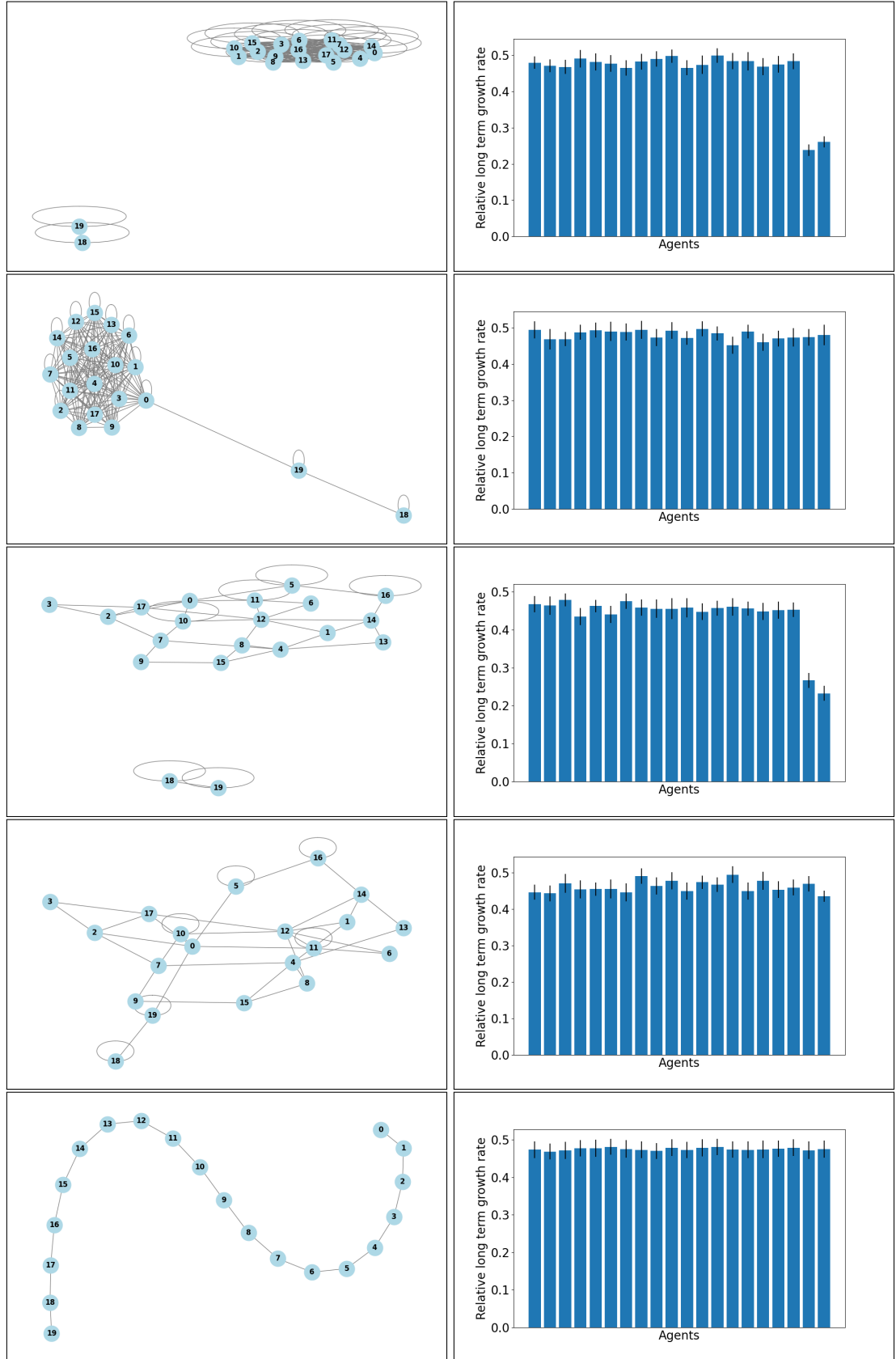


Figura 3.3: Ejemplo de redes topológicas junto con el crecimiento logarítmico relativo de de cada uno de sus agentes. En todos los ejemplos se ha simulado para  $N = 20$ ,  $\mu=1.0$  y  $\sigma = 0.1$ .

**su crecimiento.** Como confirmación de este fenómeno, hemos planteado una última configuración, donde planteamos un grafo conexo con el mínimo número posible de enlaces (última configuración de la figura 3.3).

### 3.3 Dinámica de avaricia

En la figura 3.4 podemos ver distintos ejemplos de la evolución del modelo de agentes para distintos valores del exponente de avaricia  $v$ . Podemos observar como para valores pequeños del exponente los valores de riqueza de los agentes se desarrollan al unísono. Es decir, para valores pequeños de  $v$  se da el régimen comunal. En contraposición, para valores altos del exponente, uno de los agentes dispara su crecimiento en comparación al resto de agentes, haciéndose con toda la riqueza relativa y llegando al límite de régimen de acaparación. Para valores intermedios del exponente podemos observar ambas fenomenologías: el sistema sigue el régimen comunal durante una porción de los pasos temporales pero, a partir de cierto momento, cuando uno de los agentes consigue enriquecerse más que el resto, el régimen pasa a ser de acaparación, estamos entonces ante un régimen mixto.

A raíz de observar estas diferencias debido al efecto del exponente de avaricia  $v$  decidimos estudiar con mayor precisión los límites del efecto de este exponente. Para ello, realizamos varias simulaciones para diferentes valores del exponente. En cada una de ellas determinamos la proporción de pasos temporales durante los que sigue cada régimen. Representando esta proporción en función del valor del exponente, podemos determinar a partir de qué exponente el régimen pasa de comunal a acaparación.

En la figura 3.5 podemos ver la representación del tipo de régimen frente al valor del exponente de avaricia para distintos valores de número de agentes  $N$  y  $\sigma$ . En primer lugar podemos observar como a partir de cierto valor de  $v$  el tipo de régimen de las evoluciones de los sistemas cambia de comunal a acaparador, pasando por regímenes mixtos para ciertos valores críticos del exponente. Es decir, el régimen acaparador sólo se hace posible cuando el exponente de avaricia es lo suficientemente grande.

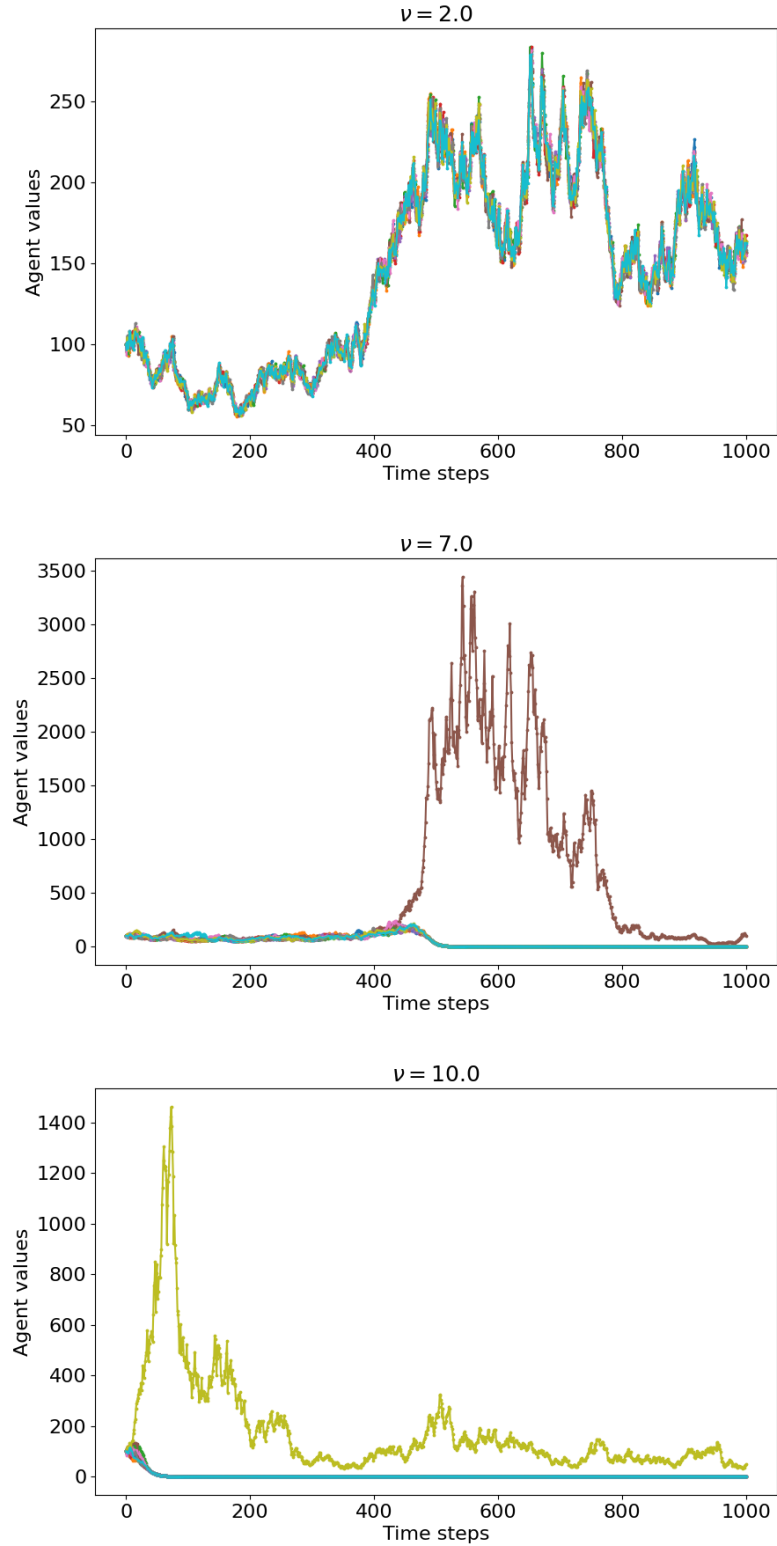


Figura 3.4: Ejemplos de evolución del modelo de agentes bajo el régimen de avaricia para distintos valores del exponente  $\nu$ . Las evoluciones se han realizado para  $N = 10$  agentes, 1000 pasos temporales y parámetros  $\mu = 1.0$  y  $\sigma = 0.1$  para todos los agentes. Con  $\nu = 2$  podemos ver un ejemplo de **régimen comunal**,  $\nu = 7$  nos muestra un **régimen mixto** y  $\nu = 10$  nos muestra un **régimen de acaparamiento**.

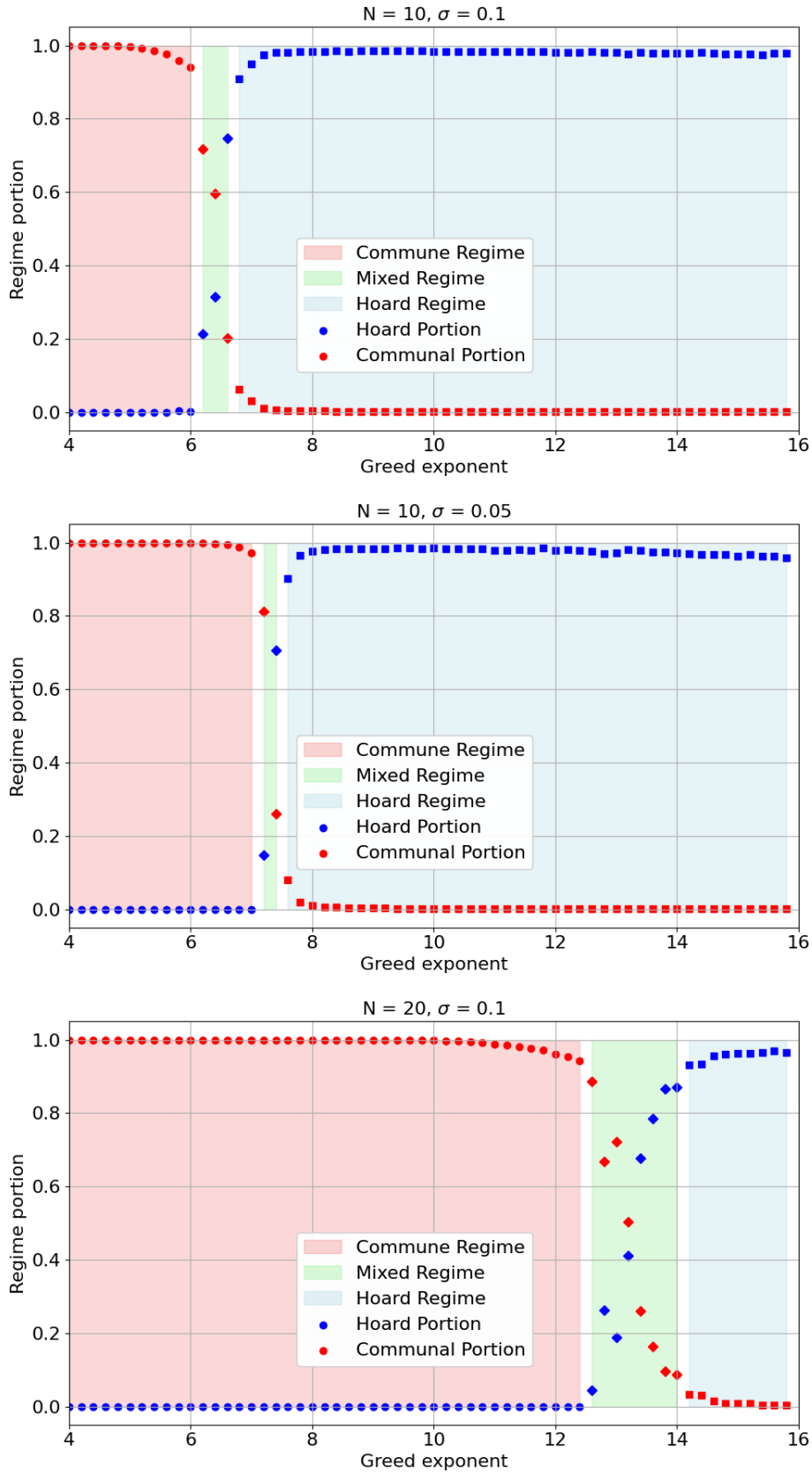


Figura 3.5: Regímenes de la evolución de los agentes con la actualización avariciosa del sharing parameter. Para  $N$  mayor y  $\sigma$  menor la transición al régimen de acaparamiento se produce para un exponente de avaricia mayor.

Todos los agentes empiezan con el mismo valor de riqueza en estas simulaciones. Para que un agente adopte el rol de acaparador, necesita tener un gran crecimiento en pocos pasos temporales, de tal modo que su contribución al fondo común se reduzca según lo indicado en (2.4) y dispare su crecimiento a base de aprovecharse de la contribución al fondo común del resto de los agentes. El crecimiento inicial que da pie al régimen acaparador se produce por mero azar, un agente se verá más beneficiado que el resto en unos pocos pasos temporales consecutivos. Cuanto mayor sea el valor del exponente de avaricia, menos grande tendrá que ser este crecimiento inicial para que el agente beneficiado reduzca su sharing parameter lo suficiente como para iniciar el régimen acaparador. Es por esto que el régimen acaparador se observa con mayor frecuencia en dinámicas avariciosas con un  $\nu$  elevado.

Al igual que vemos el efecto del exponente de avaricia, podemos ver el efecto del parámetro  $\sigma$ , común a todos los agentes en estas simulaciones. Comparando la gráfica de la figura 3.5 generada para  $N = 10$  y  $\sigma = 0.1$  con la generada para  $N = 10$  y  $\sigma = 0.05$  podemos observar como la transición de regímenes se produce para un exponente mayor en las simulaciones con la desviación estándar menor. Al ser la desviación estándar del crecimiento multiplicativo menor, el crecimiento anómalo que puede llegar a tener un agente se reduce. Por mucha suerte que tenga en el crecimiento multiplicativo en pasos consecutivos, la desviación estándar reducida no le permite crecer tanto en pocos pasos. Por tanto, el crecimiento inicial que puede desembocar en el régimen de acaparación es menor que en el caso de  $\sigma$  mayor, por lo que se necesita un exponente de avaricia más grande para que el agente de mayor riqueza comience a acaparar.

Por último podemos ver el efecto del número de agentes. Podemos observar como para  $N = 20$  agentes y  $\sigma = 0.1$  la transición de regímenes se produce para valores mayores de  $\nu$  que para  $N = 10$  agentes y  $\sigma = 0.1$ . Al haber una mayor cantidad de agentes en el sistema, un crecimiento en riqueza igual supone un aumento menor en comparación a la riqueza total de los agentes. Al ser la riqueza relativa la que dirige el cambio en el sharing parameter, se necesita un valor mayor del exponente de avaricia para comenzar el régimen de acaparación.

Con esto, podemos entender cuales son las condiciones que se deben dar para que el régimen del sistema pase de ser comunal a acaparador.



En las gráficas de la figura 3.4 podemos observar de forma clara que el régimen acaparador es perjudicial para todos los agentes que no son el acaparador. Esto parece bastante lógico, ya que precisamente hemos construido una dinámica que le permite a uno de los agentes aprovecharse de los demás. Sin embargo, una observación más interesante es que este régimen tampoco resulta beneficioso para el agente acaparador. En las gráficas de 3.4 que muestran una dinámica acaparadora podemos ver como después del crecimiento inicial del acaparador, su valor de riqueza se hunde hasta casi encontrarse con el del resto de agentes. Cuando un agente acaparador comienza su crecimiento empieza a aprovecharse del resto de agentes, tomando riqueza del fondo común sin poner él apenas nada a cambio. Este aprovechamiento le permite crecer rápidamente, pero simultáneamente reduce el valor de riqueza del resto de los agentes. Al reducirse el valor de los agentes no acaparadores, la cantidad de riqueza que llega al fondo común también se reduce. La existencia de un fondo común le permite a los agentes tener cierta garantía de seguridad cuando la estocasticidad les hace perder riqueza, ya que pueden compensar estas pérdidas con la riqueza del fondo. Sin embargo, la acaparación agota casi por completo el fondo, eliminando así su utilidad. Debido a esto, tan pronto como el agente acaparador se enfrente a una mala racha de crecimiento multiplicativo, no tendrá nada con lo que combatirlo, y decaerá progresivamente.

Este efecto se producirá siempre que dejemos evolucionar al sistema el tiempo suficiente. Si cortamos la evolución tan pronto como el agente acaparador llegue a su pico, está claro que se verá beneficiado. El caso de estudio interesante se produce cuando dejamos evolucionar el sistema un tiempo lo suficientemente largo. En la figura 3.6 podemos ver los valores promediados de riqueza que alcanza el agente acaparador al final de la evolución del sistema. Hemos caracterizado al acaparador como el agente que muestra un pico más alto a lo largo de toda la evolución del sistema. Si bien este rol está bien definido en el caso de regímenes mixto y acaparador, no está bien definido en el caso comunal, por lo que encontramos mayores errores en estas medidas. Pese a esto, podemos apreciar como el acaparador se ve perjudicado por el régimen que él mismo dictamina.

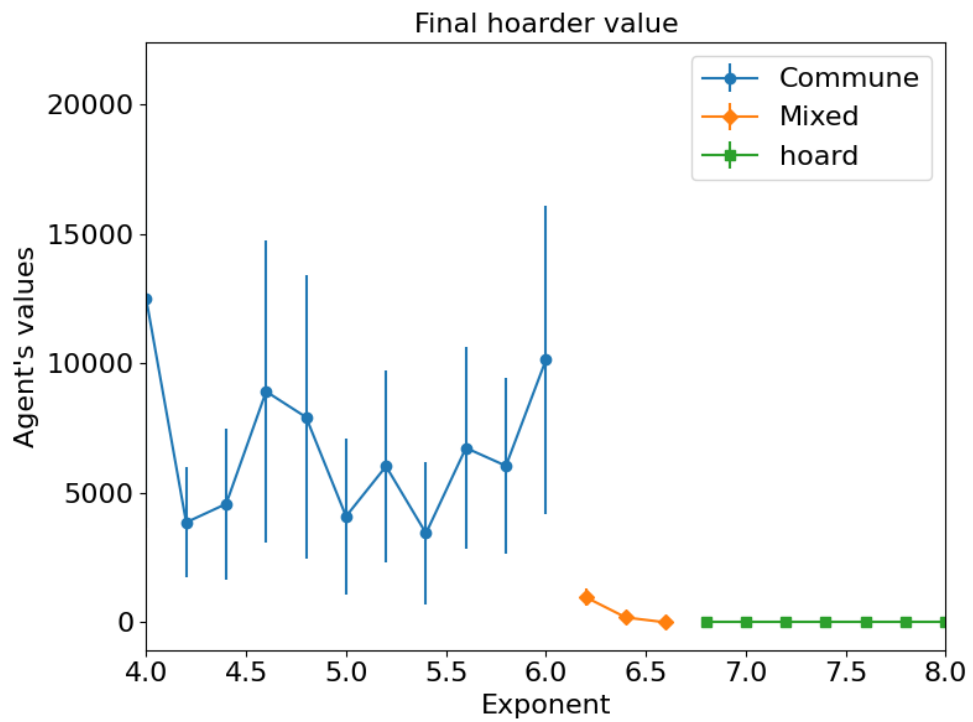


Figura 3.6: Promedio de valores de riqueza del agente acaparador al final de la evolución del sistema frente al exponente de avaricia del régimen.

### 3.4 Selección natural

La selección natural tal y como la hemos implementado nos permite dejar evolucionar los parámetros  $a$ ,  $\sigma$  y  $\mu$ , aunque nos hemos centrado únicamente en la evolución del sharing parameter. Ya que los parámetros  $\sigma$  y  $\mu$  son los que caracterizan el crecimiento multiplicativo estocástico, podemos entenderlos como parámetros ambientales, fuera del control de los individuos en una aplicación biológica. Entonces, el único parámetro que podrían variar con las generaciones sería el sharing parameter. Es decir, su disposición a cooperar con el resto de individuos.

Como un primer paso en este estudio decidimos analizar el comportamiento de la selección natural en un sistema donde cada agente cuenta con un sharing parameter distinto. En la figura 3.7 podemos observar como en muy pocas generaciones todos los agentes convergen al mismo sharing parameter. Además, el valor que adoptan se corresponde con el más bajo de los originales. Estar mucho más dispuesto a compartir que el resto de agentes supone una vulnerabilidad de la que el resto de agentes puede aprovecharse. Es por esto que, en un primer momento, todos los agentes convergen al menor sharing parameter presente en el sistema.

Debido a este resultado, podemos simplificar nuestros análisis posteriores. Es indistinto plantear la evolución de un sistema donde todos los agentes comiencen con el mismo sharing parameter o donde cada uno tiene un valor inicial distinto, ya que en pocas generaciones, el segundo caso se hará equivalente al primero. Por tanto, en las siguientes evoluciones con selección natural que planteemos los agentes tendrán los mismos sharing parameters al inicio.

En la figura 3.8 podemos ver los resultados de otras simulaciones con selección natural. Mostramos el progreso de los valores medios de los sharing parameter a lo largo de la evolución de cuatro sistemas distintos. La única diferencia entre estos sistemas es el valor inicial de los sharing parameters de los agentes.

Como explicamos en el capítulo anterior, nuestra implementación de la selección natural nos permite aplicar un sesgo en la variabilidad de los parámetros heredados entre generaciones. Esta variabilidad está indicada con  $\Sigma$  en los títulos de las gráficas de la figura 3.8.

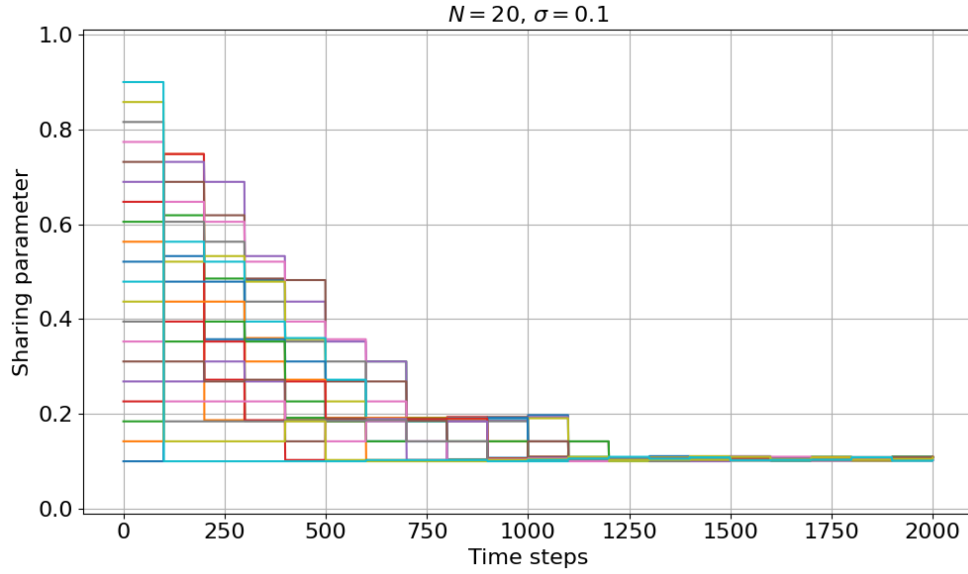


Figura 3.7: Primeros pasos en la evolución de un sistema con selección natural con distintos valores de sharing parameter para cada agente.

En la primera gráfica de 3.8 hemos aplicado una variabilidad sin sesgo. En cada generación, los hijos tendrán un valor de  $a$  entre un 1 % menor y un 1 % mayor que el del padre (distribuido uniformemente). La selección natural con esta variabilidad converge en un sharing parameter de valor:

$$a = 0.0317 \pm 0.0010$$

sin importar el valor de  $a$  al inicio de la evolución de los sistemas.

Que el sistema evolucione hasta un valor de cooperación tan bajo parece oponerse a resultados bibliográficos que afirman que sistemas con estos valores de  $N$  y  $\sigma$  optimizan su crecimiento para valores superiores del sharing parameter [3]. Sin embargo, lo que estamos observando en esta gráfica es la inestabilidad ante la desertión. Valores mayores de  $a$  serían beneficiosos para todos los agentes, pero los propios agentes no actúan conociendo este hecho. En su lugar, se aprovechan del beneficio inmediato de la desertión, haciendo que el sistema entero reduzca su  $a$ . Notablemente, este comportamiento no hace que el sistema llegue al límite de desertión absoluta ( $a = 0$ ). Esto podría deberse a que reducir aun más el sharing parameter supone una desventaja inmediata para el agente, que no es capaz de compensarse con el beneficio instantáneo

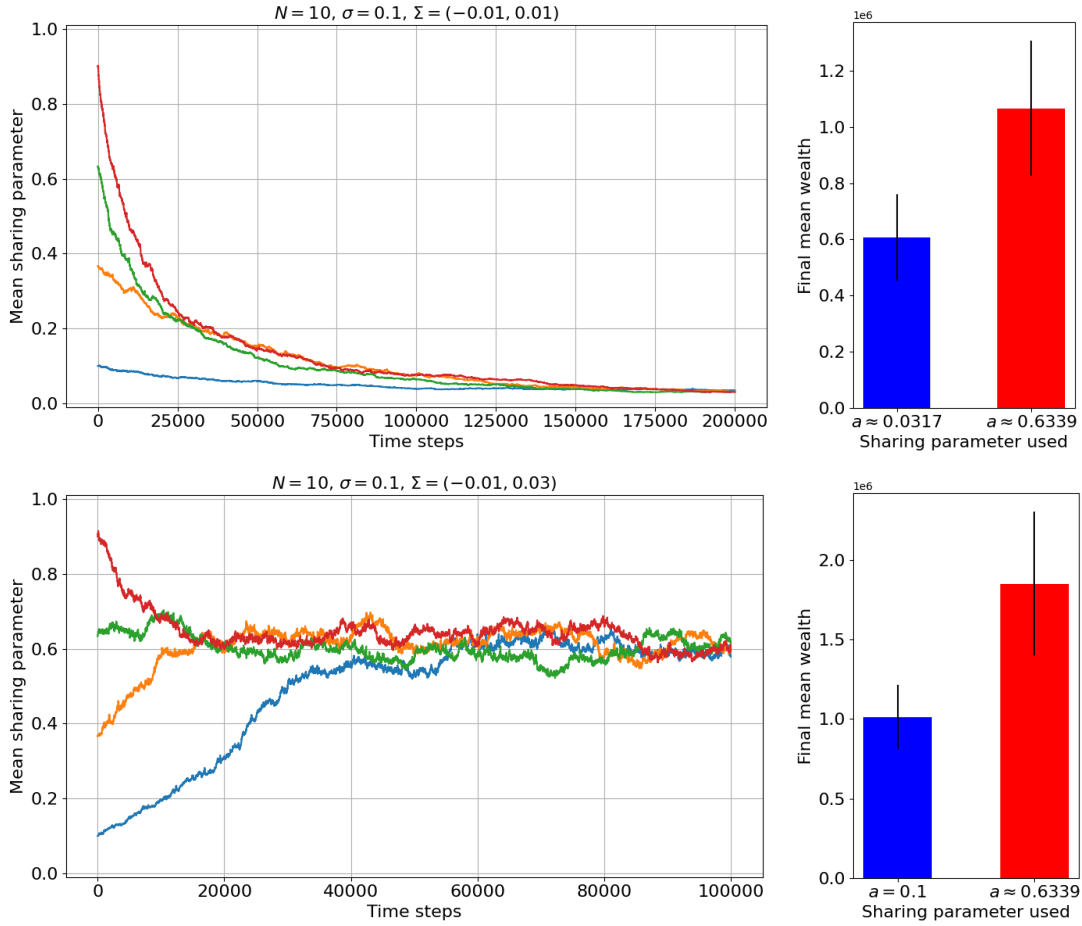


Figura 3.8: Izquierda: Evolución del sharing parameter de los agentes a lo largo del proceso de selección natural del sistema para distintos valores iniciales del sharing parameter. Podemos ver como el sistema converge a los mismos valores del sharing parameter sin importar su valor inicial. Derecha: Comparación de los valores medios finales de riqueza de los agentes al evolucionar el sistema con diferentes sharing parameters sin selección natural. Podemos ver como el crecimiento del sistema con  $a \approx 0.639$  fijo en el tiempo otorga un crecimiento mayor que el valor  $a = 0.1$  y que el  $a \approx 0.0317$  obtenido de evolucionar el sistema con la inestabilidad de la desertión.

de la desertión.

En la segunda gráfica de la izquierda en la figura 3.8 podemos ver el efecto de la sección natural aplicada a  $a$  con un sesgo positivo. En este caso el sharing parameter converge a un valor superior:

$$a = 0.634 \pm 0.014$$

de nuevo sin importar el valor de  $a$  al comienzo de la evolución de los sistemas.

Puede parecer que aplicar un sesgo hacia el crecimiento de  $a$  es una forma artificial de forzar cierta convergencia, dejando de ser por tanto selección natural. Sin embargo, lo único que hacemos con esto es darle la oportunidad al sistema de combatir el atractivo de la desertión, dejando evolucionar al sistema a valores de  $a$  verdaderamente favorables para los agentes. De hecho, en la misma gráfica podemos ver como incluso los sistemas que empiezan con un valor inicial de  $a$  superior al valor de convergencia son capaces de reducir su valor gracias al proceso de selección natural, pese al sesgo hacia el crecimiento del parámetro.

Para validar estos resultados, queremos verificar si el valor del sharing parameter obtenido mediante este método es realmente mejora el crecimiento. Para ello, hemos simulado con los mismos números aleatorios la evolución de dos sistemas, cada uno con distintos valores de sharing parameter. Dejando a ambos sistemas evolucionar durante 10000 pasos sin alterar en ningún momento los valores de  $a$ , comparamos la media de riqueza de los agentes en el último paso temporal. Si una simulación tiene un valor significativamente mayor de riqueza media final podemos determinar que el coeficiente  $a$  con el que evolucionó es más beneficioso que el otro. En las gráficas de la derecha de la figura 3.8 podemos ver los resultados de esta misma comparación. Hemos comparado los resultados que se obtienen con los dos valores convergentes del sharing parameter obtenido en las simulaciones de selección natural, así como con uno de los valores iniciales de sharing parameter considerado  $a = 0.1$ . Como podemos observar,  $a = 0.634$  mejora el crecimiento del sistema en comparación con los otros dos parámetros.

En resumen, hemos podido observar como nuestra implementación de selección natural nos permite encontrar valores del sharing parameter que mejoran la riqueza

de los agentes, aunque este proceso puede verse inestabilizado por el beneficio individualista de la deserción, inestabilidad que da lugar a peor crecimiento. Podemos aplicar estos resultados a un contexto de evolución biológica primigenia. Dadas dos poblaciones, una que a lo largo de las generaciones ha visto favorecida la cooperación y otra que ha visto favorecida la deserción, los recursos que es capaz de obtener la población cooperadora serán mayores a los de la población desertora, teniendo la población cooperadora una ventaja evolutiva en comparación.





## 4 | Conclusiones

Hemos implementado satisfactoriamente en Python un modelo basado en agentes para el estudio del rol de la cooperación en procesos estocásticos de crecimiento multiplicativo.

A partir de esta implementación, hemos podido reproducir resultados bibliográficos y hemos expandido el rango de investigación, proponiendo el uso de topologías de red, dinámicas de avaricia/generosidad y selección natural en el modelo de agentes.

Del estudio de topologías de red hemos determinado que el efecto positivo de la cooperación es equivalente en todas las configuraciones conexas de la red. Por tanto, no es necesario que todos los agentes cooperen con todos los demás para que se maximice el efecto positivo de la cooperación. Basta con que exista un camino de conexiones cooperativas que pase a través de todos los agentes.

En la dinámica de avaricia hemos observado que el régimen de la evolución del sistema viene marcado por un exponente que nos indica la intensidad de la avaricia de los agentes. Si los agentes son demasiado avariciosos, el sistema entra en un régimen que es perjudicial no sólo para los agentes con menos riqueza, sino también para los más ricos si la dinámica se mantiene durante el tiempo suficiente.

Aplicando la selección natural a la evolución de los modelos de agentes, podemos encontrar parámetros de cooperación que permiten a los agentes crecer más que lo que conseguían crecer inicialmente (aunque existan inestabilidades debido a el beneficio instantáneo que supone para un agente aprovecharse de la cooperación del resto sin dar él tanto a cambio). Que la cooperación pueda aparecer e incrementarse

en un ambiente de selección natural tan simple como este arroja luz sobre cómo en un ambiente competitivo como el de la selección natural pueden aparecer individuos que cooperen entre sí.

Los resultados que hemos obtenido son solo algunas de las múltiples aplicaciones de la implementación realizada. Con la infraestructura ya existente se podrían llevar a cabo más estudios y ampliar los resultados aquí mostrados.

Una futura investigación de interés podría ser la combinación de las ramas aquí exploradas. Sin necesidad de desarrollar más software, podría investigarse el efecto de la avaricia en modelos de agentes con red topológica. También podrían investigarse más en profundidad mecanismos que contrarresten la inestabilidad de la deserción en la selección natural, sin necesidad de aplicar un sesgo. De hecho, como intento de esto mismo, la implementación actual cuenta con la capacidad de admitir mutaciones en las poblaciones, aunque la funcionalidad debería refinarse antes de hacer uso de ella.

# Bibliografía

- [1] Robert Axelrod. “Effective choice in the prisoner’s dilemma”. En: *Journal of conflict resolution* 24.1 (1980), págs. 3-25.
- [2] Robert Axelrod y William D Hamilton. “The evolution of cooperation”. En: *science* 211.4489 (1981), págs. 1390-1396.
- [3] Lorenzo Fant et al. “Stable cooperation emerges in stochastic multiplicative growth”. En: *Physical Review E* 108.1 (2023), pág. L012401.
- [4] *Farmer’s Fable*. <https://www.farmersfable.org/>. Accessed: 2024-09-06.
- [5] Ole Peters y Alexander Adamou. “The ergodicity solution of the cooperation puzzle”. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 380.2227 (2022), pág. 20200425.
- [6] Jesús García Sánchez. *TFM - Trabajo Fin de Máster*. <https://github.com/JesusGarSan/TFM>. Accedido: 29-ago-2024. 2024.