

Propuesta Reto # 5 - Péndulo Magnético

Jesús Garcés
Alejandro Hernandez
Daniel Saavedra
Universidad Industrial de Santander
Carrera 27 Calle 9 Bucaramanga

Índice

1. Introducción	1
2. Estado del Arte	2
3. Objetivos	3
3.1. Objetivo principal	3
3.2. Objetivos específicos	4
4. Metodología	4
5. Equipo de Investigación	5
6. Cronograma	5
7. Referencias	6

Resumen

El caos y el magnetismo son áreas de la física de gran interés, pues en ellas hay preguntas sin resolver que pueden ayudar a mejorar la comprensión de las leyes naturales. A su vez, la industria se beneficia de los progresos de la ciencia. En esta propuesta de investigación se busca establecer las pautas y los precedentes para solucionar un problema abierto, el cual consiste en determinar la dinámica de un péndulo magnético caótico. Se analiza el problema desde una perspectiva general, y se establece una ruta a seguir, con la finalidad de encontrar una solución concreta y acertada, que permita ampliar el conocimiento, y, en caso de ser posible, proponer diversas aplicaciones.

1. Introducción

El estudio del campo magnético ha sido históricamente un reto para los físicos de cada época. Desde que Maxwell formuló sus ecuaciones para la descripción de los fenómenos electromagnéticos

[Griffiths, 1999], múltiples interpretaciones han aparecido desde esa fecha. Es por eso que desde la llegada de la mecánica cuántica se le ha dado una interpretación diferente al magnetismo, haciendo de este un fenómeno netamente cuántico debido a corrientes internas que se generan en cada átomo del material [Schollwöck et al., 2008].

Sin embargo, muchos sistemas físicos que presentan propiedades magnéticas, pueden ser modelados por las ecuaciones de Maxwell sin necesidad de hacer uso de la cuantización del campo electromagnético, siendo de gran utilidad en cuanto a simplificación de problemas.

El péndulo magnético no es una excepción a este conjunto de sistemas, ya que justamente sus dimensiones permiten estudiarlo por medio de una teoría clásica de perturbaciones (referido a un movimiento caótico) [Schulz-DuBois, 1970], y es un tema de estudio muy apetecido por los físicos dada sus aplicaciones en la vida cotidiana, como por ejemplo, el funcionamiento de un cosechador piezoeléctrico alimentado por la energía que puede generar un péndulo magnético, haciendo uso de la teoría del momento de inercia el cual logra generar $40.24 \mu W/cm^3$ [Cho et al., 2016].

Aun así, no todo péndulo magnético puede ser descrito por una ecuación totalmente determinista, en muchos casos, como se menciona anteriormente, debe hacerse uso de una teoría adicional para estudiar su movimiento, la cual es la teoría del caos. Esta teoría es de vital importancia en la física, puesto que, el movimiento de muchos sistemas es descrito por ecuaciones diferenciales que son no integrables, haciendo que en los diagramas de Poincaré no haya trayectorias cerradas, y esto haga que su movimiento cambie abruptamente por alguna variación mínima en sus condiciones iniciales y este comportamiento caótico es más que nada inducido debido a la no periodicidad de sus ecuaciones de movimiento no lineales, lo cual lo hace caótico, pero aun así, sigue siendo determinista. [Goldstein, 1980]

2. Estado del Arte

Uno de los péndulos magnéticos más trabajados es el péndulo de Doubochinski [Tennenbaum, 2006], este tiene como finalidad mostrar que la cuantización de la amplitud es una propiedad elemental de los sistemas vibrantes. El péndulo de Doubochinski consta de un brazo rígido que tiene un imán permanente atado a este, bajo este brazo hay un electroimán que genera campo magnético por medio de corriente alterna, un montaje de un péndulo de Dubochinski es similar al mostrado en la figura 1, la dinámica de estos sistemas es analizada en un inicio por medio de la ecuación de un oscilador forzado, esta es:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{ext}.$$

En la ecuación anterior f_{ext} es la fuerza externa, en este caso esta es la fuerza magnética generada por el electroimán, esta fuerza suele ser modelada por medio de la energía de interacción dipolar, asumiendo los dos imanes como dipolos puntuales y también se aproxima por medio de métodos numéricos, por series polinómicas y armónicas. Otra herramienta importante en este sistema son

los mapas de Poincare[Taylor and Taylor, 2005], diagramas de fase para posición y momentum que describen fenómenos no lineales[Goldstein et al., 2002].

En el estudio del péndulo de Doubochinski se ha demostrado una relación entre el comportamiento del péndulo y la simetría de la fuerza externa [Luo et al., 2020], además de esto el péndulo exhibe una transición entre distintos regímenes, su comportamiento puede estar en un régimen estable o en uno caótico, en los artículos [Khomeriki, 2016], [Siahmakoun et al., 1997] se amplía más esto.

En todos los artículos citados anteriormente se trabaja con el montaje convencional del péndulo de Doubochinski, es decir, un imán permanente atado a un brazo fijo y un electroimán que genera la fuerza externa, vale la pena entonces analizar como sería la dinámica de este sistema si la fuerza externa es realizada por un imán permanente. Al resolver esta última pregunta surge como primera solución el medir la fuerza entre estos dos imanes, en [Vokoun et al., 2009] estudian la fuerza magnetostática entre dos imanes permanentes; sin embargo, estos limitan el problema a la fuerza entre los imanes cuando son coaxiales y cuando uno de los imanes está a una distancia r del eje axial del otro, además se asume que la magnetización siempre apunta en una dirección, dado que nuestro problema trata sobre la dinámica de un péndulo magnético, los instantes en los que ocurre esto son muy pequeños, si se quisiera adoptar este método de solución las distancias entre ejes axiales deberán ser medidas en cada instante de la trayectoria, agregando más variables por controlar y estudiar al problema, es por esto que, se tomará una aproximación distinta. En esta aproximación se modela en inicio los imanes como dipolos magnéticos puntuales, la energía de interacción de un dipolo está dada por:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

De esta última expresión podemos obtener la fuerza sobre el dipolo dado que $F = -\nabla E$, de esta forma, se evita calcular la fuerza magnética punto a punto, sin embargo, se calculará el campo magnético del imán fijo y el momento magnético de ambos imanes. El momento magnético de imanes permanentes de neodimio se ha medido en [Amrani, 2015] y el campo magnético de imanes permanentes se ha calculado en [Petruska and Abbott, 2012] y [Camacho and Sosa, 2013]. Se adoptarán los métodos plasmados en los artículos antes citados como primera aproximación al problema, con esto se buscará entonces tener resultados que muestren la relación entre el comportamiento del péndulo magnético y la simetría de la fuerza externa, además de que se muestren los regímenes estables y caóticos que describe un péndulo de Doubochinski convencional.

3. Objetivos

3.1. Objetivo principal

Estudiar la dinámica de un péndulo magnético que oscila sobre una estructura de imanes permanentes, y determinar su dependencia del número y posición de los mismos.

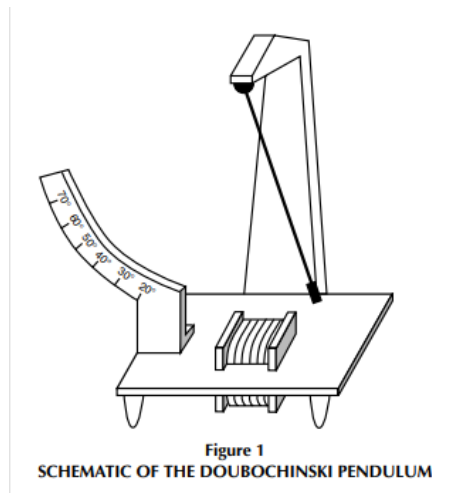


Figura 1: Montaje de un péndulo de Doubochinski

3.2. Objetivos específicos

- Determinar teóricamente, bajo una aproximación de campo dipolar entre dos imanes, la fuerza de interacción que experimentan, y comparar con los resultados experimentales arrojados para el péndulo magnético con un solo imán en la base.
- Estudiar el comportamiento del péndulo magnético bajo la influencia de dos o más imanes en la base, y modificar teóricamente el resultado anteriormente obtenido para que la simulación sea aproximadamente similar a la arrojada por el experimento.
- Encontrar el número de imanes necesarios para generar un comportamiento caótico.
- Determinar los tipos de arreglos geométricos para los cuales se induce caos en el sistema.
- Determinar si es posible, bajo determinadas circunstancias, que el sistema sea predecible y controlable.

4. Metodología

Lo primero que se debe realizar es calcular el campo magnético de un imán de neodimio. Es de vital importancia conocer su forma para comprender la interacción con otros imanes, y la fuerza que ejercen punto a punto sobre el péndulo. Entender la interacción y el comportamiento del campo en el espacio da luz sobre cómo surge el comportamiento caótico a partir de la posición de los imanes, y además, abre la posibilidad de determinar si existen configuraciones en las cuales el sistema sea predecible y controlable. Es decir, conocer el campo magnético de la base es el paso principal para encontrar la relación de la dinámica del sistema con la geometría de los imanes. Ahora, como los imanes pueden ser aproximados a dipolos magnéticos, se tratará, en primera instancia, de simular

el péndulo como un dipolo. Para observar la calidad del modelo teórico, se llevará a cabo una simulación computacional. El resultado se contrastará con los resultados del montaje experimental, en el cual se intentará seguir la trayectoria del péndulo con una cámara posicionada sobre la parte superior del montaje. Si el modelo teórico no es satisfactorio, o si se desea alcanzar una mayor precisión, se simulará el péndulo como otro imán de neodimio. En esta instancia es importante observar qué tan sensible es el sistema a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, en busca de saber en qué momento particular de la metodología surge el movimiento caótico. De igual manera, es importante determinar cómo cambia el campo, y por ende, la fuerza de interacción, cuando el imán de la base cambia su orientación. Además, se pueden ir realizando variaciones en la longitud del brazo del péndulo, con la finalidad de estudiar cómo el periodo del mismo, y la distancia entre los imanes, afecta la evolución del sistema. El siguiente paso es realizar el montaje experimental con dos imanes en la base. En este punto, el modelo teórico se pone a prueba, pues la interacción entre los imanes de la base empieza a ser notoria. La posición relativa de los imanes en la base, y la combinación de sus orientaciones, serán fundamentales para obtener mayor información sobre la relevancia de determinados parámetros. Lograr una descripción aceptable del fenómeno será un indicio que sustente la validez del acercamiento realizado en las etapas anteriores. De ahí en adelante, el objetivo será mirar el surgimiento de nuevos efectos cuando se empiezan a introducir de forma sucesiva más imanes en la base. Este procedimiento gradual es la herramienta a utilizar para ir descartando las explicaciones más elementales, y descubrir las particularidades fenomenológicas que caracterizan de forma esencial al problema.

5. Equipo de Investigación

El proyecto será llevado a cabo por Alejandro Hernández, Jesús Garcés y Daniel Saavedra, estudiantes de noveno semestre del pregrado en Física de la Universidad Industrial de Santander, adscritos a los grupos de investigación GOTS, CIMBIOS y FICOMACO, respectivamente. Los involucrados tienen experiencia en simulación y análisis de datos, y una formación teórica para poder dar ideas y generar una discusión acorde que pueda ser utilizada para la realización del problema.

6. Cronograma

El cronograma será llevado a cabo en concordancia con la metodología propuesta. Las fechas establecidas son provisionales, y podrán ser modificadas en cualquier momento dependiendo de los avances y progresos obtenidos. Es de aclarar que cada fecha representa la fecha límite para la cual se espera que el objetivo propuesto se encuentre realizado. A continuación se muestra la distribución propuesta:

- **Octubre 5:** Calcular el campo magnético de un imán de neodimio.
- **Octubre 12:** Simular computacionalmente el péndulo como un dipolo bajo la acción de un imán de neodimio. A su vez, contrastar los resultados obtenidos con las mediciones experimentales.

- **Octubre 16:** Entregar informe de avances.
- **Octubre 26:** Realizar las correcciones pertinentes al modelo teórico. Se sugiere simular el péndulo como un imán de neodimio bajo la acción de otro imán de neodimio.
- **Noviembre 2:** Realizar la simulación computacional con dos imanes en la base, e identificar las principales diferencias con el caso de un solo imán debido a los términos adicionales de interacción. De igual forma se realiza una configuración experimental.
- **Noviembre 13:** Entregar informe de avances.
- **Diciembre 4:** Extrapolar a más de dos imanes en la base. Se espera haber encontrado una relación entre el número de imanes, y la geometría, con la dinámica del sistema.
- **Diciembre 14:** Entrega de informe final.

7. Referencias

- [Amrani, 2015] Amrani, D. (2015). Determination of magnetic dipole moment of permanent disc magnet with two different methods. *Physics Education*, 31(1):1–6.
- [Camacho and Sosa, 2013] Camacho, J. M. and Sosa, V. (2013). Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista mexicana de física E*, 59(1):8–17.
- [Cho et al., 2016] Cho, J. Y., Jeong, S., Jabbar, H., Song, Y., Ahn, J. H., Kim, J. H., Jung, H. J., Yoo, H. H., and Sung, T. H. (2016). Piezoelectric energy harvesting system with magnetic pendulum movement for self-powered safety sensor of trains. *Sensors and actuators A: Physical*, 250:210–218.
- [Goldstein, 1980] Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed edition.
- [Goldstein et al., 2002] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical mechanics*.
- [Griffiths, 1999] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd ed edition.
- [Khomeriki, 2016] Khomeriki, G. (2016). Parametric resonance induced chaos in magnetic damped driven pendulum. *Physics Letters A*, 380(31-32):2382–2385.
- [Luo et al., 2020] Luo, Y., Fan, W., Feng, C., Wang, S., and Wang, Y. (2020). Subharmonic frequency response in a magnetic pendulum. *American Journal of Physics*, 88(2):115–123.

- [Petruska and Abbott, 2012] Petruska, A. J. and Abbott, J. J. (2012). Optimal permanent-magnet geometries for dipole field approximation. *IEEE transactions on magnetics*, 49(2):811–819.
- [Schollwöck et al., 2008] Schollwöck, U., Richter, J., Farnell, D. J., and Bishop, R. F. (2008). *Quantum magnetism*, volume 645. Springer.
- [Schulz-DuBois, 1970] Schulz-DuBois, E. (1970). Foucault pendulum experiment by kamerlingh onnes and degenerate perturbation theory. *American Journal of Physics*, 38(2):173–188.
- [Siahmakoun et al., 1997] Siahmakoun, A., French, V. A., and Patterson, J. (1997). Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field. *American Journal of Physics*, 65(5):393–400.
- [Taylor and Taylor, 2005] Taylor, J. R. and Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*, volume 1. Springer.
- [Tennenbaum, 2006] Tennenbaum, J. (2006). Amplitude quantization as an elementary property of macroscopic vibrating systems. *21st Century Science and Technology*, 18(4):50.
- [Vokoun et al., 2009] Vokoun, D., Beleggia, M., Heller, L., and Šittner, P. (2009). Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets. *Journal of magnetism and Magnetic Materials*, 321(22):3758–3763.