



Universidad Industrial de Santander

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

# PÉNDULO MAGNÉTICO

*Retos Científicos*

Autor:

Alejandro Hernández Celis  
Daniel Steeven Saavedra Santos  
Jesús Alberto Garcés Castro

Diciembre 2023

## Resumen

El la comprensión de las leyes naturales. A su vez, la industria se beneficia de los progresos de la ciencia. En esta propuesta de investigación se busca establecer las pautas y los precedentes para solucionar un problema abierto, el cual consiste en determinar la dinámica de un péndulo magnético caótico. Se analiza el problema desde una perspectiva general, y se establece una ruta a seguir, con la finalidad de encontrar una solución concreta y acertada, que permita ampliar el conocimiento, y, en caso de ser posible, proponer diversas aplicaciones.

## 1. Introducción

El estudio del campo magnético ha sido históricamente un reto para los físicos de cada época. Desde que Maxwell formuló sus ecuaciones para la descripción de los fenómenos electromagnéticos [Griffiths, 1999], múltiples interpretaciones han aparecido desde esa fecha. Es por eso que desde la llegada de la mecánica cuántica se le ha dado una interpretación diferente al magnetismo, haciendo de este un fenómeno netamente cuántico debido a corrientes internas que se generan en cada átomo del material [Schollwöck et al., 2008].

Sin embargo, muchos sistemas físicos que presentan propiedades magnéticas, pueden ser y el magnetismo son áreas de la física de gran interés, pues en ellas hay preguntas sin resolver que pueden ayudar a mejorar o modelados por las ecuaciones de Maxwell sin necesidad de hacer uso de la cuantización del campo electromagnético, siendo de gran utilidad en cuanto a simplificación de problemas.

El péndulo magnético no es una excepción a este conjunto de sistemas, ya que justamente sus dimensiones permiten estudiarlo por medio de una teoría clásica de perturbaciones (referido a un movimiento caótico) [Schulz-DuBois, 1970], y es un tema de estudio muy apetecido por los físicos dada sus aplicaciones en la vida cotidiana, como por ejemplo, el funcionamiento de un cosechador piezoeléctrico alimentado por la energía que puede generar un péndulo magnético, haciendo uso de la teoría del momento de inercia el cual logra generar  $40.24 \mu W/cm^3$  [Cho et al., 2016].

Aun así, no todo péndulo magnético puede ser descrito por una sola ecuación diferencial sin tener en cuenta sus condiciones iniciales, en muchos casos, como se menciona anteriormente, debe hacerse uso de una teoría adicional para estudiar su movimiento, la cual es la teoría del caos. Esta teoría es de vital importancia en la física, puesto que, el movimiento de muchos sistemas es descrito por ecuaciones diferenciales que son no integrables, haciendo que en los diagramas de Poincaré no haya trayectorias cerradas, y esto haga que su movimiento cambie abruptamente por alguna variación mínima en sus condiciones iniciales y este comportamiento caótico es más que nada inducido debido a la no periodicidad de sus ecuaciones de movimiento no lineales, lo cual lo hace caótico, pero aun así, sigue siendo determinista. [Goldstein, 1980]

## 2. Estado del Arte

Uno de los péndulos magnéticos más trabajados es el péndulo de Doubochinski [Tennenbaum, 2006], este tiene como finalidad mostrar que la cuantización de la amplitud es una propiedad elemental de los sistemas vibrantes. El péndulo de Doubochinski consta de un brazo rígido que tiene un imán permanente atado a este, bajo este brazo hay un electroimán que genera campo magnético por medio de corriente alterna, un montaje de un péndulo de Dubochinski es similar al mostrado en la figura 1, la dinámica de estos sistemas es analizada en un inicio por medio de la ecuación de un oscilador forzado, esta es:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{ext}. \quad (1)$$

En la ecuación anterior  $f_{ext}$  es la fuerza externa, en este caso esta es la fuerza magnética generada por el electroimán, esta fuerza suele ser modelada por medio de la energía de interacción dipolar, asumiendo los dos imanes como dipolos puntuales y también se aproxima por medio de métodos numéricos, por series polinómicas y armónicas. Otra herramienta importante en este sistema son los mapas de Poincare [Taylor and Taylor, 2005], diagramas de fase para posición y momentum que describen fenómenos no lineales [Goldstein et al., 2002].

En el estudio del péndulo de Doubochinski se ha demostrado una relación entre el comportamiento del péndulo y la simetría de la fuerza externa [Luo et al., 2020], además de esto el péndulo exhibe una transición entre distintos regímenes, su comportamiento puede estar en un régimen estable o en uno caótico, en los artículos [Khomeriki, 2016], [Siahmakoun et al., 1997] se amplía más esto.

En todos los artículos citados anteriormente se trabaja con el montaje convencional del péndulo de Doubochinski, es decir, un imán permanente atado a un brazo fijo y un electroimán que genera la fuerza externa, vale la pena entonces analizar como sería la dinámica de este sistema si la fuerza externa es realizada por un imán permanente. Al resolver esta última pregunta surge como primera solución el medir la fuerza entre estos dos imanes, en [Vokoun et al., 2009] estudian la fuerza magnetostática entre dos imanes permanentes; sin embargo, estos limitan el problema a la fuerza entre los imanes cuando son coaxiales y cuando uno de los imanes está a una distancia  $r$  del eje axial del otro, además se asume que la magnetización siempre apunta en una dirección, dado que nuestro problema trata sobre la dinámica de un péndulo magnético, los instantes en los que ocurre esto son muy pequeños, si se quisiera adoptar este método de solución las distancias entre ejes axiales deberán ser medidas en cada instante de la trayectoria, agregando más variables por controlar y estudiar al problema, es por esto que, se tomará una aproximación distinta. En esta aproximación se modela en inicio los imanes como dipolos magnéticos puntuales, la energía de interacción de un dipolo está dada por:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2)$$

De esta última expresión podemos obtener la fuerza sobre el dipolo dado que  $F = -\nabla E$ , de esta forma, se evita calcular la fuerza magnética punto a punto, sin embargo, se calculará el campo magnético del imán fijo y el momento magnético de ambos imanes. El momento magnético

de imanes permanentes de neodimio se ha medido en [Amrani, 2015] y el campo magnético de imanes permanentes se ha calculado en [Petruska and Abbott, 2012] y [Camacho and Sosa, 2013]. Se adoptarán los métodos plasmados en los artículos antes citados como primera aproximación al problema, con esto se buscará entonces tener resultados que muestren la relación entre el comportamiento del péndulo magnético y la simetría de la fuerza externa, además de que se muestren los regímenes estables y caóticos que describe un péndulo de Doubochinski convencional.

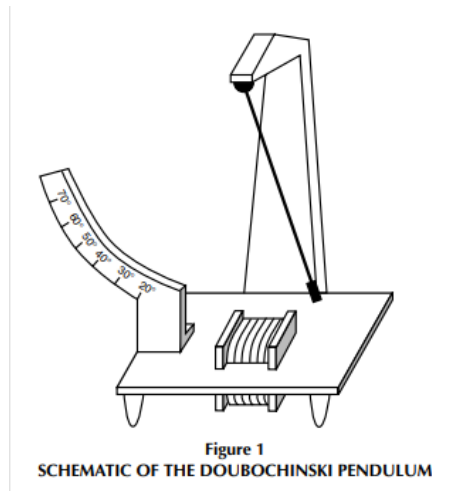


Figura 1: Montaje de un péndulo de Doubochinski

### 3. Objetivos

#### 3.1. Objetivo principal

Estudiar la dinámica de un péndulo magnético que oscila sobre una estructura de imanes permanentes, y determinar su dependencia del número y posición de los mismos.

#### 3.2. Objetivos específicos

- Determinar teóricamente, bajo una aproximación de campo dipolar entre dos imanes, la fuerza de interacción que experimentan, y comparar con los resultados experimentales arrojados para el péndulo magnético con un solo imán en la base.
- Estudiar el comportamiento del péndulo magnético bajo la influencia de dos o más imanes en la base, y modificar teóricamente el resultado anteriormente obtenido para que la simulación sea aproximadamente similar a la arrojada por el experimento.
- Encontrar el número de imanes necesarios para generar un comportamiento caótico.
- Determinar los tipos de arreglos geométricos para los cuales se induce caos en el sistema.

- Determinar si es posible, bajo determinadas circunstancias, que el sistema sea predecible y controlable.

## 4. Métodos y ecuaciones

El estudio del comportamiento del péndulo fue dividido en dos partes; una componente teórica por medio de una simulación en el lenguaje de python, y una componente práctica, en donde se analizó el movimiento por medio del programa Tracker.

Para desarrollar tanto la parte teórica como experimental de conceptos teóricos como son el momento dipolar magnético, fuerza magnética, campo magnético y oscilaciones forzadas.

Para la medición del momento magnético del imán se usó una aproximación en la que el imán es un dipolo magnético puntual, con esto en cuenta la expresión que describe su fuerza sobre el eje axial es:

$$F(x) = \frac{3\mu_0\mu^2}{2\pi x^4}.$$

Midiendo la fuerza en función de la posición se encontró un momento magnético de  $1,4457[A/m^2]$ , resultado similar al de [Amrani, 2015], este valor será utilizado en la sección 6. El campo magnético del imán fue extraído de [Derby and Olbert, 2010], las expresiones utilizadas fueron:

$$B_\rho = \frac{3\mu_0\mu\rho z}{4\pi r^5}, \quad (3)$$

$$B_z = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{r^5}, \quad (4)$$

asumiendo que el momento magnético solo apunta en dirección z se calcula el producto punto entre  $\vec{\mu}$  y  $\vec{B}$ , con este resultado se calcula la energía de la interacción dipolar entre los imanes, teniendo en cuenta que  $\vec{F} = -\nabla E$  se calculan la fuerza externa que actúa, con el fin de obtener ecuaciones dinámicas como las de la ecuación 1 se encuentra la frecuencia natural de oscilación ( $\omega_0$ ) y el coeficiente de fricción ( $b$ ). Estos son encontrados por medio de oscilaciones libres del imán, es decir, sin la acción del campo magnético, en estas se medirá el tiempo de la primera oscilación y como la amplitud va disminuyendo por acción de la fricción, los valores obtenidos son  $\omega_0 = 5,51[rad/s]$  y  $b = 0,7[s^{-1}]$ , de esta forma las ecuaciones dinámicas en cada uno de los ejes cartesianos son:

$$\ddot{x} + 0,7\dot{x} + (5,51)^2 x = f_x, \quad (5)$$

$$\ddot{y} + 0,7\dot{y} + (5,51)^2 y = f_y, \quad (6)$$

$$\ddot{z} + 0,7\dot{z} + (5,51)^2 z = f_z. \quad (7)$$

En las ecuaciones 5, 6 y 7,  $f_x$  es:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial i} E \quad ; \quad i = x, y, z$$

La solución a estas ecuaciones son las utilizadas en la sección 6, estas expresiones se pueden ver explícitamente en el código anexo.

Para la componente práctica se realizó el montaje mostrado en la figura 7, por medio de la herramienta Tracker se midió la posición respecto a los 3 ejes cartesianos, los resultados obtenidos se pueden ver en la sección 5.

## 5. Resultados experimentales

El péndulo fue lanzado desde una posición inicial de  $(0, -20, 8)$ , desde el reposo, el eje x es el plano visto desde arriba, por lo que el eje z es saliente a este plano, en la figura 7, la imagen de la izquierda muestra el plano xy, mientras que la derecha muestra el plano yz, con base en esto se configuró esto en el programa y se calcularon las posiciones en cada eje cartesiano en función del tiempo. La posición en x en función del tiempo es la mostrada en la figura 2, en esta se puede ver como el movimiento en este eje está dado como una oscilación semi-armónica que va disminuyendo su amplitud.

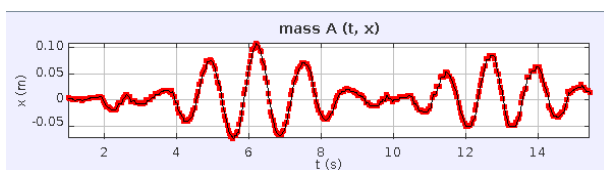


Figura 2: Posición en x vs t.

La posición en y en función del tiempo se muestra en la figura 3, en esta se ve como la posición en y sigue un comportamiento armónico muy poco amortiguado, solo presentando pequeños cambios en su amplitud.

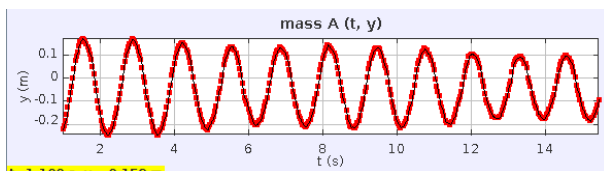


Figura 3: Posición en y vs t.

La posición en z en función del tiempo se muestra en la figura 4, el movimiento esta vez no puede ser considerado armónico, dado que muestra varios puntos de discontinuidad y transiciones bruscas, estos se sustentan principalmente en la acción del campo magnético del imán de la base, al realizar esta gráfica Tracker muestra como el imán experimenta transiciones abruptas, esto se puede observar en los videos que se tomaron de la oscilación del péndulo, de esta forma se puede ver como la perturbación del campo magnético se ve mayormente reflejado en la posición del eje z.

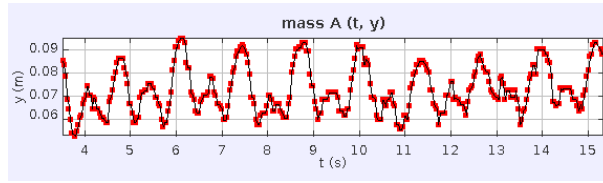


Figura 4: Posición en  $z$  vs  $t$ .

## 6. Resultados teóricos

Teniendo en cuenta la metodología propuesta, se realiza un estudio de forma teórica, en donde se busca simular el comportamiento del imán por medio de una aproximación numérica, en donde se utiliza el método de Runge-Kutta de 4° orden. En esta simulación es tenido en cuenta el aporte de un solo imán en la base, el cual cambia la oscilación del péndulo por medio de fuerzas magnéticas entre el imán de la base, y el imán del péndulo.

En la aproximación que se utiliza en este estudio, el imán parte del reposo, y su posición inicial se encuentra en el punto  $(0, -20, 8)$ , y los parámetros  $b$  y  $\omega_0$  utilizados en la ecuación diferencial fueron encontrados de forma experimental con valores de  $b = 0,7$  y  $\omega_0 = 5,51$ . Con esto en mente, los resultados arrojados por la simulación numérica son mostrados a continuación.

Trayectoria tridimensional del pendulo magnetico

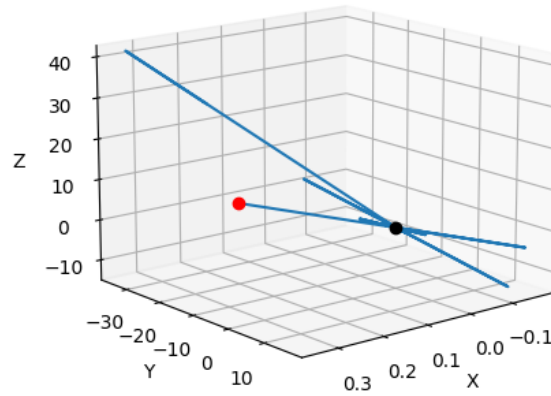


Figura 5: Movimiento del péndulo magnético con 15 segundos de oscilación.

En la figura 5, el punto rojo es la condición inicial de la cual parte el sistema, y el punto negro

hace referencia al imán puesto en la base del péndulo. Puede notarse como el imán ejerce una fuerza de repulsión sobre el péndulo, haciéndolo oscilar de manera abrupta con cambios de dirección muy marcados, el cual es justo el comportamiento visto en la práctica.

La figura 6, muestra la dependencia temporal de las posiciones y sus velocidades asociadas, se puede apreciar como justo al final, a partir de los 14 segundos la solución se aleja de lo mostrado anteriormente, esto puede ser debido a una falla del método en las fronteras, lo que hace que los valores mostrados oscilen drásticamente. La posición en  $x$  oscila muy poco, esto es debido a que por su condición inicial, el péndulo no se mueve en dirección  $x$ , haciendo que la trayectoria, grosso modo, pueda verse como una línea recta, mientras que, tanto en  $y$  como en  $z$ , oscila de una forma continua, dando así los términos oscilantes en sus respectivos planos.

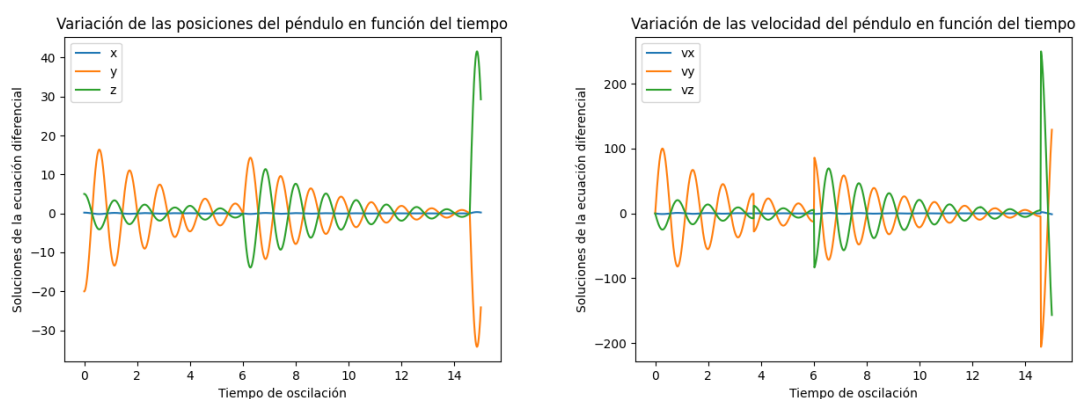


Figura 6: Soluciones para las incógnitas de las ecuaciones diferenciales.

## 7. Discusión

## 8. Referencias

- [Amrani, 2015] Amrani, D. (2015). Determination of magnetic dipole moment of permanent disc magnet with two different methods. *Physics Education*, 31(1):1–6.
- [Camacho and Sosa, 2013] Camacho, J. M. and Sosa, V. (2013). Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista mexicana de física E*, 59(1):8–17.
- [Cho et al., 2016] Cho, J. Y., Jeong, S., Jabbar, H., Song, Y., Ahn, J. H., Kim, J. H., Jung, H. J., Yoo, H. H., and Sung, T. H. (2016). Piezoelectric energy harvesting system with magnetic



- pendulum movement for self-powered safety sensor of trains. *Sensors and actuators A: Physical*, 250:210–218.
- [Derby and Olbert, 2010] Derby, N. and Olbert, S. (2010). Cylindrical magnets and ideal solenoids. *American Journal of Physics*, 78(3):229–235.
- [Goldstein, 1980] Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed edition.
- [Goldstein et al., 2002] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical mechanics*.
- [Griffiths, 1999] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 3rd ed edition.
- [Khomeriki, 2016] Khomeriki, G. (2016). Parametric resonance induced chaos in magnetic damped driven pendulum. *Physics Letters A*, 380(31-32):2382–2385.
- [Luo et al., 2020] Luo, Y., Fan, W., Feng, C., Wang, S., and Wang, Y. (2020). Subharmonic frequency response in a magnetic pendulum. *American Journal of Physics*, 88(2):115–123.
- [Petruska and Abbott, 2012] Petruska, A. J. and Abbott, J. J. (2012). Optimal permanent-magnet geometries for dipole field approximation. *IEEE transactions on magnetics*, 49(2):811–819.
- [Schollwöck et al., 2008] Schollwöck, U., Richter, J., Farnell, D. J., and Bishop, R. F. (2008). *Quantum magnetism*, volume 645. Springer.
- [Schulz-DuBois, 1970] Schulz-DuBois, E. (1970). Foucault pendulum experiment by kamerlingh onnes and degenerate perturbation theory. *American Journal of Physics*, 38(2):173–188.
- [Siahmakoun et al., 1997] Siahmakoun, A., French, V. A., and Patterson, J. (1997). Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field. *American Journal of Physics*, 65(5):393–400.
- [Taylor and Taylor, 2005] Taylor, J. R. and Taylor, J. R. (2005). *Classical mechanics*, volume 1. Springer.
- [Tennenbaum, 2006] Tennenbaum, J. (2006). Amplitude quantization as an elementary property of macroscopic vibrating systems. *21st Century Science and Technology*, 18(4):50.
- [Vokoun et al., 2009] Vokoun, D., Beleggia, M., Heller, L., and Šittner, P. (2009). Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets. *Journal of magnetism and Magnetic Materials*, 321(22):3758–3763.

## 9. Anexos

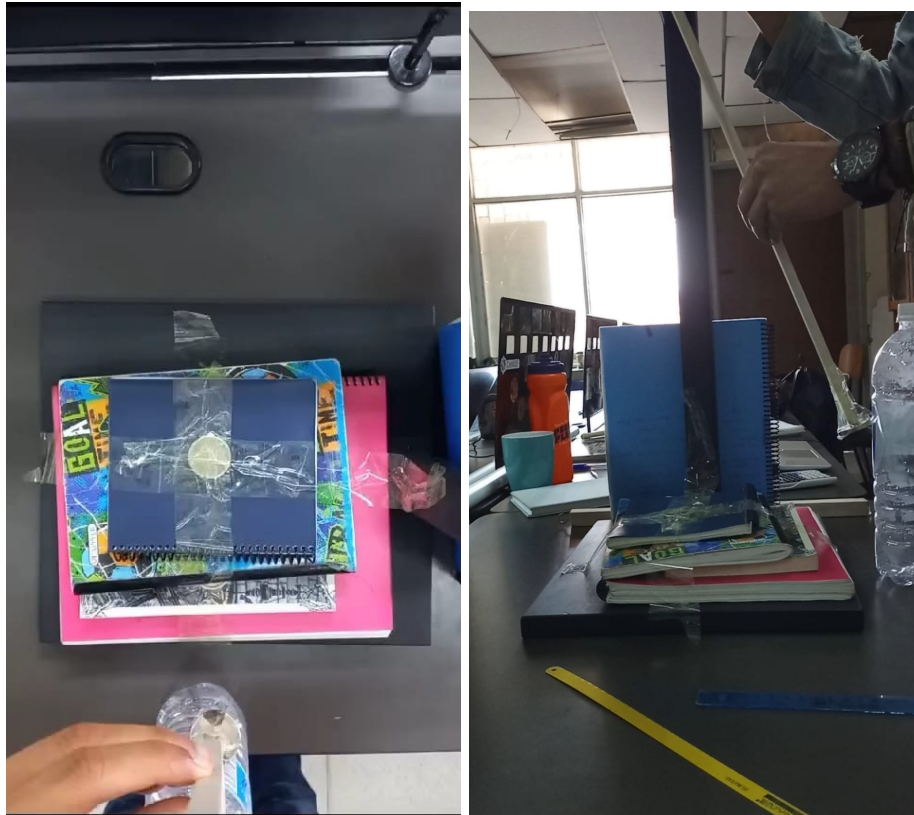


Figura 7: Vista desde arriba y lateral del montaje experimental