



TAREA.2: HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL

Diseño Mecatrónica



14 DE ENERO DE 2019
JESUS ALBERTO GARCIA CAMACHO
8.- B T/M

Para que el robot pueda realizar las tareas de manipulación que le son encomendadas es necesario que conozca la posición y orientación de los elementos a manipular con respecto a la base del robot. Se entiende entonces la necesidad de contar con una serie de herramientas matemáticas que permitan especificar la posición y orientación en el espacio de piezas, herramientas y, en general, de cualquier objeto.

Los denominados cuaternios, al tratarse de una herramienta de uso más restringido a otros campos, como el aeronáutico, no son analizados con el suficiente detalle en la bibliografía existente en robótica. Se trata de un método de gran economía computacional utilizado incluso por algunos robots comerciales para la representación de orientación, y por ello se ha incluido un apartado dedicado a su estudio.

REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN

En un plano bidimensional, la posición de un cuerpo rígido precisa de dos grados de libertad y, por tanto, la posición del cuerpo quedará definida por dos componentes independientes. En el caso de espacio tridimensional será necesario emplear tres componentes. Se definen mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido.

En el caso de trabajar en el plano (2 dimensiones), el sistema de referencia OXY correspondiente queda definido por dos vectores coordenados OX y OY perpendiculares entre sí con un punto de intersección común.

Coordenadas cartesianas

Un punto a vendrá expresado por las componentes (x, y) correspondientes a los ejes coordenados del sistema OXY. Por tanto, la posición del extremo del vector p está caracterizada por las dos componentes (x, y) , denominadas coordenadas cartesianas del vector y que son las proyecciones del vector p sobre los ejes OX y OY. En el caso de que se trabaje en tres dimensiones, un vector viene definido con respecto al sistema de referencia OXYZ mediante las coordenadas correspondientes a cada uno de los ejes coordenados.

Coordenadas Polares y cilíndricas

Es posible también caracterizar la localización de un punto o vector p respecto a un sistema de ejes cartesianos de referencia OXY utilizando las denominadas coordenadas polares p .

Las componentes r y θ tienen el mismo significado que en el caso de coordenadas polares, aplicado el razonamiento sobre el plano OXY, mientras que la componente z expresa la proyección sobre el eje OZ del vector p .

Coordenadas Esféricas

Utilizando el sistema de referencia OXYZ, el vector p tendrá como coordenadas esféricas (r, θ, φ) , donde la componente r es la distancia desde el origen O hasta el extremo del vector p ; la componente θ es el ángulo formado por la proyección del vector p sobre el plano OXY con el eje OX; y la componente φ es el ángulo formado por el vector p con el eje OZ.

REPRESENTACIÓN DE LA ORIENTACIÓN

Para el caso de un sólido rígido, es necesario además definir cuál es su orientación con respecto a un sistema de referencia. Una orientación en el espacio tridimensional viene definida por tres grados de libertad o tres componentes linealmente independientes. Para poder describir de forma sencilla la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, es habitual asignar solidariamente al objeto un nuevo sistema, y después estudiar la relación espacial existente entre los dos sistemas.

Matrices de rotación

Las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido principalmente a la comodidad que proporciona el uso del álgebra matricial.

La llamada matriz de rotación, que define la orientación del sistema OUV con respecto al sistema OXY, y que sirve para transformar las coordenadas de un vector en un sistema a las del otro. También recibe el nombre de matriz de cosenos directores. Es fácil de comprobar que se trata de una matriz orto normal, tal que $R^T = R^{-1}$.

En un espacio tridimensional, el razonamiento a seguir es similar. Supónganse los sistemas OXYZ y OUVW, coincidentes en el origen, siendo el OXYZ el sistema de referencia fijo, y el OUVW el solidario al objeto cuya orientación se desea definir.

Composición de rotaciones

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones. Así, si al sistema OUVW se le aplica una rotación de ángulo α sobre OX, seguida de una rotación de ángulo φ sobre OY y de una rotación de ángulo θ sobre OZ.

Ángulos de Euler

Todo sistema OUVW solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse con respecto al sistema OXYZ mediante tres ángulos: φ, θ, ψ , denominados ángulos de Euler que representan los valores de los giros a realizar sobre tres ejes ortogonales entre sí, de modo que girando sucesivamente el sistema OXYZ sobre estos ejes octonormales los valores de φ .

Es importante que estas operaciones se realicen en la secuencia especificada, pues las operaciones de giros consecutivos sobre ejes, no son conmutativas.

Ángulos de Euler WVW

Sólo se diferencia del anterior en la elección del eje sobre el que se realiza el segundo giro. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación.

Como antes, es preciso considerar que el orden de los giros no es conmutativo.

Ángulos Euler XYZ

Se trata de la representación utilizada generalmente en aeronáutica. Es también la más habitual de entre las que se aplican a los giros sobre los ejes del sistema fijo. Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, al igual que en el caso anterior, se puede colocar al sistema OUVW en cualquier orientación.

Par de rotación

Θ sobre el eje k (Figura 3.10). El eje k ha de pasar por el origen O de ambos sistemas. Al par (k, θ) se le denomina par de rotación y se puede demostrar que es único.

Cuaternios

Los cuaternios, definidos por Hamilton [HAMILTON-69], pueden ser utilizados como herramienta matemática de gran versatilidad computacional para trabajar con giros y orientaciones. Para comprender la verdadera utilidad de los cuaternios, es necesario analizar sus propiedades y ver la aplicación práctica de las mismas.

De esta asociación aparentemente arbitraria y gracias a las propiedades de los cuaternios que más adelante se verán, se obtiene una importante herramienta analítica para el tratamiento de giros y cambios de orientación.