

Infierno
Saga de la Divina comedia

Jesús González Abril

Curso 2025-2026

Índice general

1. Anillos	2
1.1. Operaciones binarias	2
Bibliografía	5

Capítulo 1

Anillos

1.1. Operaciones binarias

Definición 1.1.1: Operación binaria

Sea X un conjunto. Una operación binaria en X es una aplicación $*$: $X \times X \rightarrow X$. Por lo general escribimos $*(a, b) = a * b$.

Nota

En general si por el contexto se sobreentiende que una operación es binaria se simplifica el lenguaje hablando simplemente de operaciones. De igual manera normalmente se omite el conjunto sobre el que está definida la operación.

Definición 1.1.2: Tipos de operaciones

Una operación $*$ se dice

- **Conmutativa** si $x * y = y * x$ para todo $x, y \in X$.
- **Asociativa** si $x * (y * z) = (x * y) * z$ para todo $x, y, z \in X$.

Definición 1.1.3: Terminología sobre elementos

Un elemento $x \in X$ se dice que es:

- **Neutro por la izquierda (neutro por la derecha)** si $x * y = y$ para todo $y \in X$ ($y * x = y$ para todo $y \in X$).
- **Cancelable por la izquierda (cancelable por la derecha)** si para cada dos elementos distintos $a \neq b$ de X se verifica $x * a \neq x * b$ ($a * x \neq b * x$).
- **Neutro** si es neutro por la derecha y por la izquierda.
- **Cancelable** si es cancelable por la izquierda y por la derecha.

Supongamos que e es un elemento neutro de X con respecto a $*$. Sean x e y elementos de X . Decimos que x es simétrico de y por la izquierda y que y es simétrico de x por la derecha con respecto a $*$ si se verifica $x * y = e$. En este contexto decimos que x es:

- **Simétrico** de y si lo es por ambos lados. En tal caso decimos que x es invertible, siendo y su inverso ($y = x^{-1}$).

Ejemplo

Si x es cancelable por la izquierda entonces para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene

$$x * a = x * b \implies a = b$$

Demostración

Supongamos que $x * a = x * b$, si $a = b$ ya hemos terminado. En caso contrario a y b son elementos distintos, y como x es cancelable por la izquierda entonces debe ser $x * a \neq x * b$, pero eso contradice la suposición inicial, luego ha de ser $a = b$. ■

Ejercicio 1.1

Probar que si x es cancelable por la derecha entonces para cualesquiera $a, b \in X$ se tiene

$$a * x = b * x \implies a = b$$

Definición 1.1.4: Tipos de conjuntos con operaciones

Un par $(X, *)$ formado por un conjunto y una operación $*$ decimos que es un:

- **Semigrupo** si $*$ es asociativa.
- **Monoide** si es un semigrupo que tiene un elemento neutro con respecto a $*$.
- **Grupo** si es un monoide y todo elemento de X es invertible con respecto a $*$.
- **Grupo abeliano** si es un grupo y $*$ es conmutativa.

Ejemplo

Si tomamos la suma de elementos sobre distintos conjuntos de números obtenemos un ejemplo de cada uno de los tipos de conjuntos con operaciones:

1. $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo.
2. $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ es un monoide.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo

Un ejemplo de grupo no abeliano es $GL_n(\mathbb{R})$ si $n \geq 2$. $GL_n(\mathbb{R})$ es el grupo de las matrices invertibles $n \times n$ con entradas reales, donde la operación es la multiplicación de matrices.

Demostración

En primer lugar es inmediato que la operación es asociativa. También es fácil ver que tiene elemento neutro, la matriz identidad I_n . Si tomamos una matriz cualquiera $A \in GL_n(\mathbb{R})$ entonces ha de ser invertible, por lo que su elemento inverso es A^{-1} que claramente pertenece a $GL_n(\mathbb{R})$.

Finalmente, para ver que el grupo no es conmutativo notemos que para $n = 2$ podemos tomar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ambas invertibles por tener determinante no nulo, que verifican

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso de que sea $n > 2$ podemos tomar matrices de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

cuyo producto no conmuta por las propiedades de la multiplicación de matrices por bloques. ■

Bibliografía

- [Lam94] Leslie Lamport. “LaTeX: A Document Preparation System”. En: *Addison-Wesley* (1994). URL: <https://www.latex-project.org/help/documentation/latex2e/>.
- [Knu97] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms*. 3rd. Addison-Wesley, 1997. ISBN: 978-0201896831. URL: <https://www.pearson.com/store/p/the-art-of-computer-programming-volume-1-fundamental-algorithms/P100000001007/9780201896831>.