

# Infierno y Purgatorio Saga de la Divina Comedia

Universidad de Murcia

Jesús González Abril

October 23, 2025

# Contents

<b>1 Grupos</b>	<b>2</b>
1.1 Operaciones binarias . . . . .	2
1.1.1 Subconjuntos y operaciones . . . . .	5
1.2 Definiciones y ejemplos . . . . .	6
1.2.1 Ejemplos . . . . .	7
1.2.2 El grupo diédrico . . . . .	8
<b>2 Anillos</b>	<b>11</b>
2.1 Anillos . . . . .	11
2.1.1 Ejemplos de anillo . . . . .	12
2.1.2 Propiedades de los anillos . . . . .	13
2.2 Subanillos . . . . .	16
2.3 Homomorfismos de anillos . . . . .	19
2.3.1 Ejemplos de homomorfismos . . . . .	21
2.3.2 Propiedades de los homomorfismos . . . . .	22
2.4 Ideales y anillos cociente . . . . .	25
2.4.1 Ejemplos de ideales . . . . .	26
2.4.2 Anillos cociente . . . . .	29
2.4.3 Teorema de correspondencia . . . . .	31
2.5 Operaciones con ideales . . . . .	34
2.6 Teoremas de isomorfía y Teorema chino de los restos . . . . .	37
<b>3 Divisibilidad en dominios</b>	<b>41</b>
3.1 Cuerpos y dominios . . . . .	41
3.2 Ideales primos y maximales . . . . .	44
3.3 Divisibilidad . . . . .	47
3.3.1 Divisibilidad en términos de ideales principales. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. . . . .	51
3.4 Dominios de factorización única . . . . .	55
<b>A Teoría de conjuntos</b>	<b>58</b>
A.1 Conjuntos y clases . . . . .	58
A.2 Uniones, intersecciones, complementos . . . . .	59
A.3 Aplicaciones . . . . .	59
A.4 Relaciones . . . . .	60
A.5 Productos . . . . .	62
A.5.1 Caracterización del producto . . . . .	62

# Chapter 1

## Grupos

### 1.1 Operaciones binarias

#### Definition 1.1.1: Operación binaria

Sea  $X$  un conjunto. Una operación binaria en  $X$  es una aplicación  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$ . Por lo general escribimos  $*(a, b) = a * b$ .

*Remark.* En general, si por el contexto se sobreentiende que una operación es binaria, se simplifica el lenguaje hablando simplemente de operaciones. De igual manera, normalmente se omite el conjunto sobre el que está definida la operación.

#### Definition 1.1.2: Tipos de operaciones

Una operación  $*$  se dice

- **Conmutativa** si  $x * y = y * x$  para todo  $x, y \in X$ .
- **Asociativa** si  $x * (y * z) = (x * y) * z$  para todo  $x, y, z \in X$ .

#### Definition 1.1.3: Terminología sobre elementos

Un elemento  $x \in X$  se dice que es:

- **Neutro por la izquierda (neutro por la derecha)** si  $x * y = y$  para todo  $y \in X$  ( $y * x = y$  para todo  $y \in X$ ).
- **Cancelable por la izquierda (cancelable por la derecha)** si para cada dos elementos distintos  $a \neq b$  de  $X$  se verifica  $x * a \neq x * b$  ( $a * x \neq b * x$ ).
- **Neutro** si es neutro por la derecha y por la izquierda.
- **Cancelable** si es cancelable por la izquierda y por la derecha.

Supongamos que  $e$  es un elemento neutro de  $X$  con respecto a  $*$ . Sean  $x$  e  $y$  elementos de  $X$ . Decimos que  $x$  es simétrico de  $y$  por la izquierda y que  $y$  es simétrico de  $x$  por la derecha con respecto a  $*$  si se verifica  $x * y = e$ . En este contexto decimos que  $x$  es:

- **Simétrico** de  $y$  si lo es por ambos lados. En tal caso decimos que  $x$  es invertible, siendo  $y$  su inverso ( $y = x^{-1}$  si el inverso es único).

#### Example 1.1.4

Si  $x$  es cancelable por la izquierda, entonces para cualesquiera  $a, b \in X$  se tiene

$$x * a = x * b \implies a = b$$

#### Proof

Supongamos que  $x * a = x * b$ , si  $a = b$  ya hemos terminado. En caso contrario,  $a$  y  $b$  son elementos distintos, y, como  $x$  es cancelable por la izquierda, entonces debe ser  $x * a \neq x * b$ , pero eso contradice la suposición inicial, luego ha de ser  $a = b$ .

#### Example 1.1.5

Si  $x$  es cancelable por la derecha entonces, para cualesquiera  $a, b \in X$  se tiene

$$a * x = b * x \implies a = b$$

*Remark.* Notemos que esta caracterización no es más que el contrarrecíproco de la primera definición que hemos dado de elemento cancelable.

#### Definition 1.1.6: Tipos de conjuntos con operaciones

Un par  $(X, *)$  formado por un conjunto y una operación  $*$  decimos que es un:

- **Semigrupo** si  $*$  es asociativa.
- **Monoide** si es un semigrupo que tiene un elemento neutro con respecto a  $*$ .
- **Grupo** si es un monoide y todo elemento de  $X$  es invertible con respecto a  $*$ .
- **Grupo abeliano** si es un grupo y  $*$  es conmutativa.

#### Example 1.1.7

Si tomamos la suma de elementos sobre distintos conjuntos de números obtenemos un ejemplo de cada uno de los tipos de conjuntos con operaciones:

1.  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$  es un semigrupo, ya que la suma es asociativa, pero no tiene neutro.
2.  $(\mathbb{N}, +)$  es un monoide, ya que la suma es asociativa y tiene el 0 como neutro.
3.  $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo, ya que la suma es asociativa, tiene neutro y todos los elementos tienen inverso. De hecho, como la suma es conmutativa es un grupo abeliano.

#### Example 1.1.8: Grupo no abeliano

Un ejemplo de grupo no abeliano es  $GL_n(\mathbb{R})$  si  $n \geq 2$ .  $GL_n(\mathbb{R})$  es el grupo de las matrices invertibles  $n \times n$  con entradas reales, donde la operación es la multiplicación de matrices.

### Proof

En primer lugar, es inmediato que la operación es asociativa. También es fácil ver que tiene elemento neutro, la matriz identidad  $I_n$ . Si tomamos una matriz cualquiera  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  esta ha de tener inversa, por lo que su elemento inverso es  $A^{-1}$  que claramente pertenece a  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Finalmente, para ver que el grupo no es conmutativo notemos que para  $n = 2$  podemos tomar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ambas invertibles por tener determinante no nulo, que verifican

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso de que sea  $n > 2$  podemos tomar matrices de la forma

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

cuyo producto no conmuta por las propiedades de la multiplicación de matrices por bloques.

### Example 1.1.9

Sean  $A$  un conjunto y sea  $X = A^A$  el conjunto de las aplicaciones de  $A$  en  $A$ . Probar que la composición de aplicaciones define una operación asociativa en  $X$  para la que la identidad  $1_X$  es neutro. Esto prueba que  $(A^A, \circ)$  es un monoide.

### Proposition 1.1.10

Sea  $*$  una operación en un conjunto  $X$ .

1. Si  $e$  es un neutro por la izquierda y  $f$  es un neutro por la derecha de  $X$  con respecto a  $*$ , entonces  $e = f$ . En particular,  $X$  tiene a lo sumo un neutro.
2. Supongamos que  $(X, *)$  es un monoide y sea  $a \in X$ .
  - (a) Si  $x$  es un simétrico por la izquierda de  $a$  e  $y$  es un simétrico por la derecha de  $a$ , entonces  $x = y$ . Por tanto, en tal caso  $a$  es invertible y tiene a lo sumo un simétrico.
  - (b) Si  $a$  tiene un simétrico por un lado entonces es cancelable por ese mismo lado. En particular, todo elemento invertible es cancelable.

### Proof

(1) Como  $e$  es neutro por la izquierda y  $f$  es neutro por la derecha tenemos

$$f = e * f = e.$$

(2a) Ahora suponemos que  $(X, *)$  es un monoide. Por (1),  $(X, *)$  tiene un único neutro que vamos a denotar por  $e$ . Como  $x$  es inverso por la izquierda de  $a$  e  $y$  es inverso por la derecha de  $a$ , usando la propiedad asociativa, tenemos que

$$y = e * y = (x * a) * y = x * (a * y) = x * e = x.$$

(2b) Supongamos que  $a$  es un elemento de  $X$  que tiene un inverso por la izquierda  $b$  y que  $a * x = a * y$  para  $x, y \in X$ . Usando la asociatividad una vez más concluimos que

$$x = e * x = (b * a) * x = b * (a * x) = b * (a * y) = (b * a) * y = e * y = y.$$

*Remark.* Por la proposición anterior si  $X$  es un monoide cada elemento invertible  $a$  tiene un único inverso que denotaremos  $a^{-1}$ .

### 1.1.1 Subconjuntos y operaciones

Sea  $*$  una operación en un conjunto  $A$  y sea  $B$  un subconjunto de  $A$ . Decimos que  $B$  es cerrado con respecto a  $*$  si para todo  $a, b \in B$  se verifica que  $a * b \in B$ . En tal caso podemos considerar  $*$  como una operación en  $B$  que se dice inducida por la operación en  $A$ .

- Un subsemigrupo de un semigrupo es un subconjunto suyo que con la misma operación es un semigrupo.
- Un submonoide de un monoide es un subconjunto suyo que con la misma operación es un monoide con el mismo neutro.
- Un subgrupo de un grupo es un subconjunto suyo que con la misma operación es un grupo.

## 1.2 Definiciones y ejemplos

### Definition 1.2.1: Grupo

Un grupo es una pareja  $(G, \cdot)$ , formada por un conjunto no vacío  $G$  junto con una operación binaria, que denotaremos por  $\cdot$ , que satisface los siguientes axiomas:

1. (Asociativa)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , para todo  $a, b, c \in G$ .
2. (Neutro) Existe un elemento  $e \in G$ , llamado elemento neutro del grupo, tal que  $e \cdot a = a = a \cdot e$ , para todo  $a \in G$ .
3. (Inverso) Para todo  $a \in G$  existe otro elemento  $a^{-1} \in G$ , llamado elemento inverso de  $a$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$ .

Si además se verifica el siguiente axioma se dice que el grupo es abeliano o conmutativo:

4. (Conmutativa)  $a \cdot b = b \cdot a$ , para todo  $a, b \in G$ .

Demostraremos ahora algunas propiedades de los grupos.

### Lemma 1.2.2: Propiedades básicas de grupos

Sea  $(G, \cdot)$  un grupo.

1. (Unicidad del neutro) El neutro de  $G$  es único y lo denotaremos  $e$ . De hecho, si  $a, b \in G$  satisfacen que  $a \cdot b = a$  ó  $b \cdot a = a$  entonces  $b = e$ .
2. (Unicidad del inverso) El inverso de un elemento  $a$  de  $G$  es único y lo denotaremos  $a^{-1}$ . De hecho, si  $e$  es el neutro de  $G$  y  $a, b \in G$  satisfacen  $a \cdot b = e$  ó  $b \cdot a = e$  entonces  $b = a^{-1}$ .
3. (Propiedad Cancelativa) Todo elemento de  $G$  es cancelativo.
4. Para todo  $a, b \in G$ , las ecuaciones  $a \cdot X = b$  y  $X \cdot a = b$  tienen una única solución en  $G$ .
5.  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .

### Proof

1. Haremos solo el caso por la derecha, en efecto, si  $a \cdot b = a$  entonces

$$b = e \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot a = e.$$

2. De nuevo hacemos solo el caso  $a \cdot b = e$

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1} \cdot a \cdot b = e \cdot b = b.$$

3. Sea  $x \in G$ , entonces  $x$  debe ser cancelable puesto que en caso contrario existirían  $a, b \in G$  con  $a \neq b$  tales que  $x \cdot a = x \cdot b$ , pero entonces

$$a = e \cdot a = x^{-1} \cdot x \cdot a = x^{-1} \cdot x \cdot b = e \cdot b = b$$

una contradicción.

4. Sean  $a, b \in G$  arbitrarios y  $x, y$  dos soluciones cualesquiera, entonces

$$x = e \cdot x = a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b$$

y de igual manera

$$y = e \cdot y = a^{-1} \cdot a \cdot y = a^{-1} \cdot b$$

luego  $x = y$ . Para la otra ecuación se razona igual. Notemos que también hemos demostrado la existencia de una solución ( $x = a^{-1} \cdot b$ ).

5. Basta realizar un sencillo cálculo y aplicar el apartado 2

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot e \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e.$$

## 1.2.1 Ejemplos

### Example 1.2.3: Grupo trivial

Sea  $X$  un conjunto y consideremos la aplicación identidad  $1_X : X \rightarrow X$  tal que  $1_X(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Entonces el conjunto  $T = \{1_X\}$  con la operación de composición es un grupo  $(T, \circ)$  que llamaremos el grupo trivial (lo denotaremos  $1$ ).

En general, podríamos haber definido este grupo como un único elemento  $\{x\}$  con la operación descrita por  $x \cdot x = x$ .

En términos de grupos de transformaciones, el grupo trivial de  $X$  es el grupo de transformaciones más pequeño que podemos construir. Que en efecto se trata de un grupo es inmediato.

### Example 1.2.4: Grupo simétrico

Sean  $X$  un conjunto y  $S_X$  el conjunto de todas las biyecciones de  $X$  en sí mismo. Entonces  $(S_X, \circ)$  es un grupo, llamado grupo simétrico o grupo de las permutaciones de  $X$ .

En términos de grupos de transformaciones, el grupo de permutaciones de  $X$  es el grupo de transformaciones más grande que podemos construir. Probemos ahora que en efecto es un grupo.

### Proof

Prescindiremos del uso de  $\circ$  para simplificar la notación.

1. Asociativa: sean  $f, g, h$  biyecciones, dado  $x \in X$  cualquiera

$$((fg)h)x = (fg)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(gh(x)) = (f(gh))x \implies (fg)h = f(gh)$$

2. Neutro: basta considerar la aplicación identidad  $\text{id}(x) = x$ .

3. Inverso: claramente el inverso de una biyección cualquiera  $f$  es su inversa  $f^{-1}$ , que verifica

$$(ff^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

luego  $ff^{-1} = \text{id}$ .

*Remark.* En general  $S_X$  no es un grupo abeliano.



### Example 1.2.5: Producto de grupos

Si  $(G, *)$  y  $(H, *)$  son dos grupos, entonces el producto directo  $G \times H$  es un grupo en el que la operación viene dada componente a componente:

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 * h_2).$$

Más generalmente, si  $(G_i)_{i \in I}$  es una familia arbitraria de grupos, entonces el producto directo  $\prod_{i \in I} G_i$  tiene una estructura de grupo en el que el producto se realiza componente a componente. Para más información ver la Definición A.5.1.

Probemos que el producto directo de dos grupos es un grupo:

#### Proof

1. Asociativa:

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)) \cdot (g_3, h_3) &= (g_1 * g_2, h_1 * h_2) \cdot (g_3, h_3) = (g_1 * g_2 * g_3, h_1 * h_2 * h_3) = \\ &= (g_1, h_1) \cdot (g_2 * g_3, h_2 * h_3) = (g_1, h_1) \cdot ((g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)) \end{aligned}$$

donde hemos usado la asociatividad de los grupos  $G, H$ .

2. Neutro: basta considerar el elemento  $(e_G, e_H)$  donde  $e_G$  es el neutro de  $G$  y  $e_H$  el de  $H$ .

3. Inverso: claramente el inverso de un elemento cualquiera  $(g_1, h_1)$  es  $(g_1^{-1}, h_1^{-1})$ , que verifica

$$(g_1, h_1) \cdot (g_1^{-1}, h_1^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, h_1 * h_1^{-1}) = (e_G, e_H).$$

### Example 1.2.6: Tabla de Cayley

Dado un grupo finito podemos construir lo que llamaremos su tabla de Cayley (también llamada tabla de multiplicación o de suma, dependiendo del nombre que le demos a la operación del grupo). Esta tabla se obtiene disponiendo cada uno de los elementos del grupo tanto por columnas como por filas y calculando sus productos. Si el grupo tiene 2 elementos  $a, b$  la tabla será de la forma:

$\cdot$	$a$	$b$
$a$	$a \cdot a$	$a \cdot b$
$b$	$b \cdot a$	$b \cdot b$

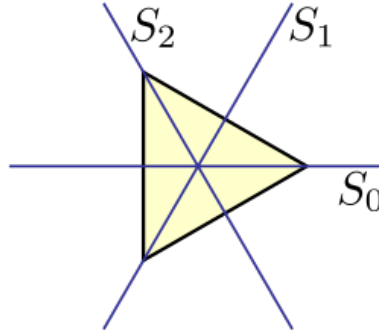
Como ejemplo concreto, la tabla del grupo  $\mathbb{Z}_3$  (enteros módulo 3) es la siguiente:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

## 1.2.2 El grupo diédrico

Veamos ahora un grupo con especial significado geométrico. Consideremos un polígono regular de  $n$  lados y las transformaciones que lo dejan invariantes (rotaciones y reflexiones), a las que llamaremos simetrías. La composición de dos simetrías de un polígono regular es nuevamente una simetría de este objeto. Considerando la composición de simetrías como operación binaria, esto le da a las simetrías la estructura algebraica de un grupo finito.

La siguiente tabla de Cayley muestra el efecto de la composición en el grupo diédrico de orden 6,  $D_3$  – las simetrías de un triángulo equilátero. Aquí,  $r_0$  denota la identidad,  $r_1$  y  $r_2$  denotan rotaciones en sentido antihorario de  $120^\circ$  y  $240^\circ$  respectivamente, mientras que  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  denotan reflexiones a través de las tres líneas mostradas en la imagen adyacente.



$\circ$	$r_0$	$r_1$	$r_2$	$s_0$	$s_1$	$s_2$
$r_0$	$r_0$	$r_1$	$r_2$	$s_0$	$s_1$	$s_2$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$r_0$	$s_1$	$s_2$	$s_0$
$r_2$	$r_2$	$r_0$	$r_1$	$s_2$	$s_0$	$s_1$
$s_0$	$s_0$	$s_2$	$s_1$	$r_0$	$r_2$	$r_1$
$s_1$	$s_1$	$s_0$	$s_2$	$r_1$	$r_0$	$r_2$
$s_2$	$s_2$	$s_1$	$s_0$	$r_2$	$r_1$	$r_0$

Por ejemplo,  $s_2 s_1 = r_1$ , porque la reflexión  $s_1$  seguida de la reflexión  $s_2$  resulta en una rotación de  $120^\circ$ . El orden de los elementos que denotan la composición es de derecha a izquierda, reflejando la convención de que el elemento actúa sobre la expresión a su derecha. La operación de composición no es conmutativa.

El siguiente ejemplo abstrae y generaliza el concepto de grupo diédrico prescindiendo de la interpretación geométrica.

#### Example 1.2.7: Grupo diédrico

Para cada número natural positivo  $n$  definimos un grupo formado por  $2n$  elementos

$$D_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$$

en el que la multiplicación viene dada por la siguiente regla:

$$(a^{i_1} b^{j_1})(a^{i_2} b^{j_2}) = a^{[i_1 + (-1)^{j_1} i_2]_n} b^{[j_1 + j_2]_2}$$

con notación como en el ejemplo anterior. Este grupo se llama grupo diédrico de orden  $2n$ .

El grupo diédrico infinito  $D_\infty$  está formado por elementos de la forma  $a^n b^m$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $m = 0, 1$  con el producto  $(a^{i_1} b^{j_1})(a^{i_2} b^{j_2}) = a^{i_1 + (-1)^{j_1} i_2} b^{[j_1 + j_2]_2}$ .

Si ahora consideramos únicamente las rotaciones que dejan invariante un polígono de  $n$  lados obtenemos otro grupo, en este caso con  $n$  elementos, cada uno de ellos correspondiente a rotar por un múltiplo de  $\frac{360^\circ}{n}$ . El siguiente ejemplo abstrae este grupo de rotaciones.

### Example 1.2.8: Grupo cíclico

Para cada número natural positivo  $n$  definimos un grupo  $C_n$  formado por  $n$  elementos

$$C_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\},$$

donde  $a$  es un símbolo, y en el que la multiplicación viene dada por la siguiente regla:

$$a^i a^j = a^{[i+j]_n}$$

donde  $[x]_n$  denota el resto de dividir  $x$  entre  $n$ . Este grupo se llama cíclico de orden  $n$ . También definimos el grupo cíclico infinito como el conjunto  $C_\infty = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $a$  es un símbolo y consideramos  $a^n = a^m$  si y solo si  $n = m$ , y en el que el producto viene dado por  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ .

*Remark.* Es fácil notar la similitud entre  $C_n$  y  $\mathbb{Z}_n$ , así como entre  $C_\infty$  y  $\mathbb{Z}$ . Más tarde formalizaremos esta intuición probando que estos grupos son equivalentes (isomorfos).

# Chapter 2

## Anillos

### 2.1 Anillos

#### Definition 2.1.1: Anillo

Un anillo es una terna  $(A, +, \cdot)$  formada por un conjunto no vacío  $A$  y dos operaciones  $+$  (suma) y  $\cdot$  (producto) en  $A$  que verifican:

1.  $(A, +)$  es un grupo abeliano.
2.  $(A, \cdot)$  es un monoide.
3. Distributiva del producto respecto de la suma:  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  para todo  $a, b, c \in A$ .

Si además  $\cdot$  es conmutativo en  $A$ , decimos que  $(A, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo.

*Remark.*

- El neutro de  $A$  con respecto a  $+$  se llama cero y se denota  $0$ .
- El neutro de  $A$  con respecto a  $\cdot$  se llama uno y se denota  $1$ .
- El simétrico de un elemento  $a$  con respecto a  $+$  se llama opuesto y se denota  $-a$ .
- Si  $a$  es invertible con respecto a  $\cdot$ , su simétrico se llama inverso y se denota  $a^{-1}$ .
- En general para  $+$  y  $\cdot$  usamos la notación usual para sumas y productos

$$a \cdot (b + c) = a(b + c) = ab + ac.$$

Como  $(A, +)$  es un grupo, todo elemento de  $A$  es invertible respecto de la suma y por tanto cancelable. Diremos que un elemento de  $A$  es regular en  $A$  si es cancelable con respecto al producto. En caso contrario decimos que el elemento es singular en  $A$  o divisor de cero. El termino divisor de cero se justifica por lo siguiente. Supongamos que  $x \in A$  no es cancelable respecto al producto, en tal caso existen dos elementos distintos  $a \neq b$  tales que  $ax = bx$ . Pero entonces es inmediato que

$$(a - b)x = 0$$

sin embargo, ni  $(a - b)$  ni  $x$  son cero, por lo que podemos interpretar que ambos son «divisores del cero».

### 2.1.1 Ejemplos de anillo

#### Example 2.1.2

Los conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son anillos conmutativos con la suma y el producto usuales. Notemos que todo elemento no nulo de  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  es invertible. Sin embargo, en  $\mathbb{Z}$  solo hay dos elementos invertibles (1 y -1) aunque todos los elementos son regulares menos el 0.

#### Proof

Demostrar que se trata de anillos conmutativos es muy sencillo, basta comprobar que se verifican todas las propiedades pertinentes.

Probaremos que en  $\mathbb{C}$  todos los elementos salvo el 0 son invertibles, el resto de afirmaciones quedan como ejercicio. Sea  $z = a + bi$  un número complejo cualquiera no nulo, en tal caso el número  $w = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$  verifica

$$zw = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2 - abi + abi - b(-1)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

luego  $w = z^{-1}$  y por tanto  $z$  tiene inverso.

#### Example 2.1.3: Producto de anillos

Sean  $A$  y  $B$  dos anillos. Entonces el producto cartesiano  $A \times B$  tiene una estructura de anillo con las operaciones definidas componente a componente:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

Obsérvese que  $A \times B$  es conmutativo si y solo si lo son  $A$  y  $B$ , y que esta construcción se puede generalizar a productos cartesianos de cualquier familia (finita o no) de anillos.

#### Example 2.1.4

Dados un anillo  $A$  y un conjunto  $X$ , el conjunto  $A^X$  de las aplicaciones de  $X$  en  $A$  es un anillo con las siguientes operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Si definimos la familia de conjuntos  $\{A_i = A : i \in X\}$  entonces es inmediato que  $\bigcup_{i \in X} A_i = A$ . Recordemos ahora que el producto  $\prod_{i \in X} A_i$  es el conjunto de funciones  $f : X \rightarrow \bigcup_{i \in X} A_i$ , es decir, el conjunto de funciones  $f : X \rightarrow A$ , luego  $A^X$  es un anillo correspondiente a un producto «infinito» del anillo  $A$  consigo mismo. Para más información ver la Definición A.5.1.

### Example 2.1.5: Anillo de polinomios

Dado un anillo  $A$ , un polinomio en una indeterminada es una expresión:

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

donde  $n \geq 0$  y  $a_i \in A$  para todo  $i$ . El conjunto de polinomios con coeficientes en  $A$  se denota  $A[X]$ . La suma y producto en  $A[X]$  se definen de la forma usual.

### Example 2.1.6: Sucesiones

Dado un anillo  $A$ , denotamos por  $A[[X]]$  el conjunto de sucesiones  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  de elementos de  $A$ . Con las operaciones:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots),$$

$$(a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \dots),$$

$A[[X]]$  es un anillo llamado anillo de series de potencias con coeficientes en  $A$ .

## 2.1.2 Propiedades de los anillos

### Lemma 2.1.7

Sea  $A$  un anillo y sean  $a, b, c \in A$ . Se verifican las siguientes propiedades

1. Todo elemento de  $A$  es cancelable respecto de la suma.
2. Todo elemento invertible de  $A$  es regular en  $A$ .
3. Si  $b + a = a$  entonces  $b = 0$ . Si  $ba = a$  para todo  $a$ , entonces  $b = 1$ . En particular, el cero y uno son únicos.
4. El opuesto de  $a$  es único y si  $a$  es invertible, entonces  $a$  tiene un único inverso.
5.  $0a = 0 = a0$ .
6.  $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ .
7.  $a(b - c) = ab - ac$ .
8.  $a$  y  $b$  son invertibles si y solo si  $ab$  y  $ba$  son invertibles. En tal caso  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
9. Si  $0 = 1$  entonces  $A = \{0\}$ .

### Proof

1. Como  $A$  es un grupo respecto de la suma todo elemento tiene inverso, y por la Proposición 1.1.10 todo elemento invertible (respecto a la suma) es cancelable (respecto a la suma).
2. De nuevo por la Proposición 1.1.10 todo elemento invertible (respecto al producto) es cancelable (respecto al producto).
3. Si  $b + a = a$  entonces como  $a$  es cancelable por el apartado 1, tenemos  $b = 0$ . Si  $ba = a$  para todo  $a$ , entonces como el neutro es único  $b = 1$ .
4. De nuevo se sigue de la Proposición 1.1.10.

5. Basta aplicar un pequeño truco

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \implies 0 = 0a$$

para el caso  $a0$  se procede igual.

6. Basta notar que

$$ab + a(-b) = a(b - b) = 0, ab + (-a)b = (a - a)b = 0 \implies -(ab) = a(-b) = (-a)b$$

ya que los opuestos son únicos.

7.  $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$ .

8. En primer lugar si  $a, b$  son invertibles entonces existen  $a^{-1}, b^{-1}$  y es fácil ver que

$$ab(b^{-1}a^{-1}) = e = (b^{-1}a^{-1})ab, ba(a^{-1}b^{-1}) = e = (a^{-1}b^{-1})ba$$

luego  $ab, ba$  son invertibles. Para el recíproco, si  $ab, ba$  son invertibles entonces

$$a(b(ab)^{-1}) = ab(ab)^{-1} = e, ((ba)^{-1}b)a = (ba)^{-1}ba = e$$

por tanto, por la Proposición 1.1.10 ambos simétricos  $b(ab)^{-1}, (ba)^{-1}b$  son iguales (ambos son  $a^{-1}$ ) y  $a$  es invertible. Para ver que  $b$  es invertible se procede igual.

9. Si  $0 = 1$  entonces dado  $x \in A$  tenemos

$$x = x1 = x0 = 0 \implies A = \{0\}.$$

Dados un anillo  $A$ , un elemento  $a \in A$  y un entero positivo  $n$ , la notación  $na$  (respectivamente  $a^n$ ) representa el resultado de sumar (respectivamente multiplicar)  $a$  consigo mismo  $n$  veces, y si  $n = 0$  convenimos que  $0a = 0$  y  $a^0 = 1$ . Más rigurosamente, a partir de estas últimas igualdades se definen  $na$  y  $a^n$  de forma recurrente poniendo  $(n + 1)a = a + na$  y  $a^{n+1} = aa^n$  para  $n \geq 0$ . Por último, si  $n \geq 1$  se define  $(-n)a = -(na)$ , y si además  $a$  es invertible se define  $a^{-n} = (a^{-1})^n$ .

### Lemma 2.1.8

Sea  $A$  un anillo,  $a, b \in A$ , y  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Se verifican:

1.  $n(a + b) = na + nb$ .
2.  $(n + m)a = na + ma$ .
3. Si  $n, m \geq 0$ , entonces  $a^{n+m} = a^n a^m$ . Si  $a$  es invertible, la igualdad vale para  $n, m$  arbitrarios.
4. Si  $A$  es conmutativo y  $n \geq 0$ , entonces  $(ab)^n = a^n b^n$ . Si  $a$  y  $b$  son invertibles, la igualdad vale para todo  $n$ .

### Proof

1. Por inducción: el caso base  $n = 0$  es inmediato, si lo suponemos para  $n$  entonces

$$(n + 1)(a + b) = (a + b) + na + nb = (n + 1)a + (n + 1)b.$$

2. Basta aplicar recursivamente que  $(n + 1)a = a + na$ .

3. Basta aplicar recursivamente que  $a^{n+1} = aa^n$ . Si  $a$  es invertible entonces podemos usar que  $a^{-n} = (a^{-1})^n$  distinguiendo casos. Por ejemplo si  $n > 0, m < 0, n > m$

entonces

$$a^n a^m = a^n (a^{-1})^{-m} = a^{n+m} a^{-m} (a^{-1})^{-m} = a^{n+m}.$$

4. Por inducción: el caso base  $n = 0$  es inmediato, si lo suponemos para  $n$  entonces

$$(ab)^{n+1} = ab(ab)^n = ab a^n b^n = a a^n b b^n = a^{n+1} b^{n+1}.$$

Cuando  $a$  y  $b$  son invertibles, si  $n < 0$

$$(ab)^n = ((ab)^{-1})^{-n} = (b^{-1} a^{-1})^{-n} = (b^{-1})^{-n} (a^{-1})^{-n} = b^n a^n.$$



## 2.2 Subanillos

*Remark.* A partir de ahora supondremos que todos los anillos que aparecen son conmutativos.

Sea  $*$  una operación en un conjunto  $A$  y sea  $B$  un subconjunto de  $A$ . Decimos que  $B$  es cerrado con respecto a  $*$  si para todo  $a, b \in B$  se verifica que  $a * b \in B$ . En tal caso podemos considerar  $*$  como una operación en  $B$  que se dice inducida por la operación en  $A$ .

### Definition 2.2.1: Subanillo

Un subanillo de un anillo es un subconjunto suyo que con la misma suma y producto es un anillo con el mismo uno.

### Proposition 2.2.2: Caracterización de subanillos

Las siguientes condiciones son equivalentes para  $B \subseteq A$ :

1.  $B$  es un subanillo de  $A$ .
2.  $B$  contiene al 1 y es un anillo, luego es cerrado para sumas, productos y opuestos.
3.  $B$  contiene al 1 y es cerrado para restas y productos.

### Proof

(1)  $\implies$  (2): Si  $B$  es un subanillo de  $A$  entonces contiene al 1 y es cerrado para sumas y productos. Por otro lado, como  $B$  es un anillo, tiene un cero, que de momento denotamos  $0_B$  y cada elemento  $b \in B$  tiene un opuesto en  $B$ . En realidad  $0_B + 0_B = 0_B = 0 + 0_B$ , con lo que aplicando la propiedad cancelativa de la suma deducimos que  $0_B = 0$ , o sea, el cero de  $A$  está en  $B$  y por tanto es el cero de  $B$  (el único que puede tener). Por la unicidad del opuesto, el opuesto de  $b$  ha de ser el de  $A$ , con lo que  $B$  es cerrado para opuestos.

(2)  $\implies$  (3): Inmediato.

(3)  $\implies$  (1): Si  $B$  contiene al 1 y es cerrado para restas, entonces  $0 = 1 - 1 \in B$ , y para  $b \in B$ ,  $-b = 0 - b \in B$ . Además,  $a + b = a - (-b) \in B$ , luego  $B$  es cerrado para sumas, por tanto, es un subanillo de  $A$ .

### Example 2.2.3: Subanillo impropio

Todo anillo  $A$  es un subanillo de si mismo, al que llamamos impropio por oposición al resto de subanillos, que se dicen propios.

### Example 2.2.4

En la cadena de contenciones  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  cada uno es un subanillo de los posteriores.

### Example 2.2.5

Si  $A$  es un anillo, el subconjunto  $\{0\}$  es cerrado para sumas, productos y opuestos. Si  $A = \{0\}$  entonces  $\{0\}$  sería subanillo de  $A$ , pero este es el único caso en el que esto pasa pues en todos los demás casos  $1 \neq 0$ .

En efecto si  $1 = 0$  entonces para cualquier  $a \in A$ ,  $a = 1a = 0a = 0 \implies A = \{0\}$ .

### Example 2.2.6

Si  $A$  y  $B$  son anillos entonces  $A \times \{0\}$  es un anillo, pero no es un subanillo de  $A \times B$  porque no contiene a  $(1_A, 1_B)$ .

De igual manera,  $A \times \{1_B\}$  con las operaciones

$$(a, 1_B) + (b, 1_B) = (a + b, 1_B), \quad (a, 1_B) \cdot (b, 1_B) = (ab, 1_B)$$

es un anillo, pero no es subanillo de  $A \times B$  porque las operaciones no son las inducidas por las operaciones de  $A \times B$ .

### Proof

Veamos que  $A \times \{1_B\}$  es un anillo con las operaciones indicadas. Claramente es un grupo abeliano para la suma con  $-(a, 1_B) = (-a, 1_B)$ . También es un monoide para el producto con neutro  $(1_A, 1_B)$  ya que  $(1_A, 1_B)(a, 1_B) = (a, 1_B)$ . Finalmente la conmutatividad es fácil de comprobar gracias a que  $A$  es un anillo

$$\begin{aligned} (a, 1_B)[(b, 1_B) + (c, 1_B)] &= (a, 1_B)(b + c, 1_B) = (ab + ac, 1_B) \\ &= (ab, 1_B) + (ac, 1_B) = (a, 1_B)(b, 1_B) + (a, 1_B)(c, 1_B). \end{aligned}$$

### Example 2.2.7: Subanillo primo

Si  $A$  es un anillo entonces el conjunto:

$$\mathbb{Z}1 = \{n1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subanillo de  $A$  contenido en cualquier otro subanillo de  $A$ . Este se conoce como el subanillo primo de  $A$ .

*Remark.*  $\mathbb{Z}$  y los  $\mathbb{Z}_n$  son sus propios subanillos primos, por tanto, no tienen subanillos propios.

### Example 2.2.8

Dado un número entero  $m$ , los conjuntos:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

son subanillos de  $\mathbb{C}$ .

Observaciones:

- Si  $m > 0$ , ambos son subanillos de  $\mathbb{R}$
- Si  $m$  es un cuadrado perfecto, estos conjuntos coinciden con  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  respectivamente
- Cuando  $m$  no es cuadrado perfecto, la igualdad  $a + b\sqrt{m} = 0$  implica  $a = 0$  y  $b = 0$

Caso particular importante:

- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  con  $i = \sqrt{-1}$  es el anillo de los enteros de Gauss

### Example 2.2.9

Todo anillo  $A$  puede verse como un subanillo del anillo de polinomios  $A[X]$  identificando los elementos de  $A$  con los polinomios constantes (del tipo  $P = a_0$ ).

### Example 2.2.10: Diagonal

Sea  $A$  un anillo y  $X$  un conjunto. Entonces la diagonal:

$$B = \{f \in A^X : f(x) = f(y) \text{ para todo } x, y \in X\}$$

(es decir, el conjunto de las aplicaciones constantes de  $X$  en  $A$ ) es un subanillo de  $A^X$ .

### Proof

Claramente  $B$  contiene a la aplicación  $1 : A \rightarrow X$  dada por  $1(x) = 1_A, \forall x \in X$ . Es fácil notar que esta aplicación es el elemento neutro del producto en  $A^X$ . Sean  $f, g \in B$ , entonces  $h = f - g$  está en  $B$  ya que

$$\forall x, y \in X \quad h(x) = f(x) - g(x) = f(y) - g(y) = h(y)$$

luego  $B$  es cerrado para restas, de igual manera sea  $H = fg$ , entonces

$$\forall x, y \in X \quad H(x) = f(x)g(x) = f(y)g(y) = H(y)$$

lo que prueba que  $B$  es cerrado para productos. Por tanto, por 2.2.2  $B$  es un subanillo de  $A^X$ .

### Example 2.2.11

Sea  $A = M_n(B)$ , donde  $B$  es un anillo. Son subanillos:

- El conjunto de las matrices diagonales
- El conjunto de las matrices escalares:  $\{aI_n : a \in B\}$
- El conjunto de las matrices triangulares superiores

### Example 2.2.12

Sea  $A = B \times B$ , con  $B$  un anillo. Son subanillos:

- $A_1 = \{(b, b) : b \in B\}$  (la diagonal)
- $A_2 = B_1 \times B_2$ , donde  $B_1$  y  $B_2$  son subanillos de  $B$

### Example 2.2.13

Sea  $A$  un anillo cualquiera y  $B$  un subanillo de  $A$ . Para  $\alpha \in A$ , el conjunto:

$$A_1 = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n : n \geq 0, a_0, a_1, \dots, a_n \in B\}$$

es un subanillo de  $A$  llamado subanillo generado por  $B$  y  $\alpha$ .

## 2.3 Homomorfismos de anillos

### Definition 2.3.1: Homomorfismo de anillos

Sean  $A$  y  $B$  dos anillos. Un homomorfismo de anillos entre  $A$  y  $B$  es una aplicación  $f : A \rightarrow B$  que satisface:

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2.  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
3.  $f(1) = 1$

Un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo. Dos anillos  $A$  y  $B$  son isomorfos ( $A \cong B$ ) si existe un isomorfismo entre ellos.

*Remark.* En la definición anterior hemos usado el mismo símbolo para las operaciones en ambos anillos, pero es importante notar que:

- En  $f(x + y)$ , la suma se realiza en  $A$
- En  $f(x) + f(y)$ , la suma se realiza en  $B$
- Lo mismo aplica para el producto

### Definition 2.3.2: Tipos de homomorfismos

- Un endomorfismo es un homomorfismo de un anillo en sí mismo.
- Un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo.
- Un automorfismo es un isomorfismo de un anillo en sí mismo.

### Example 2.3.3

Si  $B = \{0\}$  entonces la aplicación  $f(a) = 0_B, \forall a \in A$  es un homomorfismo. Si  $B \neq \{0\}$  entonces  $f$  no es un homomorfismo ya que  $f(1) = 0_B \neq 1_B$ .

### Proposition 2.3.4: Propiedades básicas

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Entonces para todo  $a, b, a_1, \dots, a_n \in A$  se verifica:

1.  $f(0_A) = 0_B$
2.  $f(-a) = -f(a)$
3.  $f(a - b) = f(a) - f(b)$
4.  $f(a_1 + \dots + a_n) = f(a_1) + \dots + f(a_n)$
5.  $f(na) = nf(a)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$
6. Si  $a$  es invertible en  $A$ , entonces  $f(a)$  es invertible en  $B$  y  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
7.  $f(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$

### Proof

En la mayoría de apartados usaremos los anteriores.

1.  $f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A)$ , luego por cancelación en  $B$ ,  $f(0_A) = 0_B$ .
2.  $f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0_A) = 0_B$ , luego  $f(-a) = -f(a)$ .
3.  $f(a - b) = f(a + (-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b)$ .
4. Por inducción, el caso  $n = 2$  es inmediato. Si lo suponemos cierto para  $n$  entonces
 
$$f(a_1 + \cdots + a_{n+1}) = f(a_1 + \cdots + a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + \cdots + f(a_n) + f(a_{n+1}).$$
5. Por inducción, el caso  $n = 1$  es inmediato. Si lo suponemos cierto para  $n$  entonces
 
$$f((n+1)a) = f(na + a) = f(na) + f(a) = nf(a) + f(a) = (n+1)f(a).$$
6. Si  $a$  es invertible  $aa^{-1} = 1_A$ , luego  $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = 1_B$ , por tanto  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .
7. Por inducción, el caso  $n = 1$  es inmediato. Si lo suponemos cierto para  $n$  entonces
 
$$f(a_1 \cdots a_{n+1}) = f(a_1 \cdots a_n) f(a_{n+1}) = f(a_1) \cdots f(a_n) f(a_{n+1}).$$

### Definition 2.3.5: Núcleo e imagen

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Definimos:

- El núcleo de  $f$ :  $\ker f = \{a \in A : f(a) = 0_B\}$
- La imagen de  $f$ :  $\text{Im } f = \{f(a) \in B : a \in A\}$

Resulta interesante ahora estudiar algunas propiedades del núcleo y la imagen, en concreto, su relación con los ideales (ver 2.4.1).

### Proposition 2.3.6: Propiedades del núcleo e imagen

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Entonces:

1.  $\ker f$  es un ideal de  $A$
2.  $\text{Im } f$  es un subanillo de  $B$
3.  $f$  es inyectivo si y solo si  $\ker f = \{0_A\}$
4.  $f$  es sobreyectivo si y solo si  $\text{Im } f = B$

### Proof

1. Para ver que  $\ker f$  es un ideal:
  - $0_A \in \ker f$  pues  $f(0_A) = 0_B$ , luego  $\ker f$  es no vacío.
  - Si  $x, y \in \ker f$ , entonces  $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_B + 0_B = 0_B$ , luego  $x+y \in \ker f$ .
  - Si  $x \in \ker f$  y  $a \in A$ , entonces  $f(ax) = f(a)f(x) = f(a)0_B = 0_B$ , luego  $ax \in \ker f$ .
2. Basta notar lo siguiente:

- $1_B = f(1_A) \in \text{Im } f$ .
  - Si  $a, b \in \text{Im } f$ , entonces  $f(x) = a, f(y) = b$  para ciertos  $x, y \in A$ , luego  $a - b = f(x) - f(y) = f(x - y) \in \text{Im } f$ .
  - Si  $a, b \in \text{Im } f$ , entonces  $f(x) = a, f(y) = b$  para ciertos  $x, y \in A$ , luego  $ab = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{Im } f$ .
3. Si  $f$  es inyectivo y  $x \in \ker f$ , entonces  $f(x) = 0_B = f(0_A)$ , luego  $x = 0_A$ . Recíprocamente, si  $\ker f = \{0_A\}$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f(a - b) = 0_B$ , luego  $a - b \in \ker f = \{0_A\}$ , por tanto  $a = b$ .
4. Es inmediato.

### 2.3.1 Ejemplos de homomorfismos

#### Example 2.3.7: Homomorfismo inclusión

Si  $B$  es un subanillo de  $A$ , la aplicación inclusión  $i : B \hookrightarrow A$  dada por  $i(b) = b$  es un homomorfismo inyectivo ya que  $\ker i = \{0\}$ .

#### Example 2.3.8: Homomorfismo proyección

Si  $I$  es un ideal de  $A$ , la proyección canónica  $\eta : A \rightarrow A/I$  dada por  $\eta(a) = a + I$  es un homomorfismo suprayectivo con  $\ker \eta = I$ .

*Remark.* Usamos indiscriminadamente  $\eta$  o  $p$  para denominar a esta proyección canónica.

#### Example 2.3.9: Homomorfismo de sustitución

Sea  $A$  un anillo y  $b \in A$ . La aplicación  $\varphi_b : A[X] \rightarrow A$  dada por:

$$\varphi_b(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0 + a_1b + \cdots + a_nb^n$$

es un homomorfismo suprayectivo llamado homomorfismo de sustitución en  $b$ . Para ver que es suprayectivo notemos que dado  $a \in A$  el polinomio  $a = aX^0 \in A[X]$ , luego  $\eta(aX^0) = a$ .

#### Example 2.3.10: Homomorfismo único $\mathbb{Z} \rightarrow A$

Para cualquier anillo  $A$ , existe un único homomorfismo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$  dado por  $f(n) = n1_A$ .

#### Example 2.3.11: Conjugación en $\mathbb{C}$

La conjugación compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(a + bi) = a - bi$  es un automorfismo de  $\mathbb{C}$ . Claramente es inyectivo ( $f(z) = 0 \iff z = 0 \implies \ker f = \{0\}$ ) y también sobreyectivo.

### 2.3.2 Propiedades de los homomorfismos

#### Proposition 2.3.12: Composición de homomorfismos

Si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  son homomorfismos de anillos, entonces la composición  $g \circ f : A \rightarrow C$  es un homomorfismo de anillos.

#### Proof

Claramente  $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$ . Para la suma

$$g \circ f(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

y para el producto

$$g \circ f(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = g \circ f(x)g \circ f(y).$$

#### Proposition 2.3.13: Propiedades de isomorfismos

1. La composición de isomorfismos es un isomorfismo.
2. Si  $f : A \rightarrow B$  es un isomorfismo, entonces  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es un isomorfismo.
3. La relación «ser isomorfo» es una relación de equivalencia en la clase de todos los anillos.

#### Proof

1. La composición de homomorfismos es homomorfismo y la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva.
2. Claramente  $f^{-1}(1) = 1$ . Para la suma

$$f(f^{-1}(x + y)) = x + y = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$$

luego por la inyectividad de  $f$  debe ser  $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ . Para el producto hacemos el mismo truco

$$f(f^{-1}(xy)) = xy = f(f^{-1}(x))f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)f^{-1}(y))$$

luego por la inyectividad de  $f$  tenemos  $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$ .

3. Resumidamente

- Reflexividad: basta considerar la identidad  $\text{id}$  que es isomorfismo.
- Simetría: si  $A \cong B$  entonces existe  $f : A \rightarrow B$  isomorfismo, luego  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es isomorfismo y, por tanto,  $B \cong A$ .
- Transitividad: se sigue de que la composición de isomorfismos es isomorfismo.

**Proposition 2.3.14: Preservación de subestructuras**

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos.

1. Si  $A_1$  es un subanillo de  $A$ , entonces  $f(A_1)$  es un subanillo de  $B$
2. Si  $B_1$  es un subanillo de  $B$ , entonces  $f^{-1}(B_1)$  es un subanillo de  $A$
3. Si  $I$  es un ideal de  $B$ , entonces  $f^{-1}(I)$  es un ideal de  $A$
4. Si  $f$  es sobreyectivo e  $I$  es un ideal de  $A$ , entonces  $f(I)$  es un ideal de  $B$ .

**Proof**

1. Como  $A_1$  es subanillo contiene al uno, luego  $f(A_1)$  también, que es cerrado para restas y productos es inmediato.
2. Como  $B_1$  es subanillo contiene al uno, luego  $f^{-1}(B_1)$  también. Sean  $x, y \in f^{-1}(B_1)$ , es cerrado para restas ya que

$$f(x - y) = f(x) - f(y) \in B_1 \implies x - y \in f^{-1}(B_1)$$

al ser  $B_1$  cerrado para restas. Para el producto se razona igual.

3. Si  $I$  es un ideal contiene al 0, luego  $f^{-1}(I)$  es no vacío. Si  $x, y \in f^{-1}(I)$  entonces  $f(x), f(y) \in I$ , por tanto,  $f(x + y) = f(x) + f(y) \in I$  y finalmente  $x + y \in f^{-1}(I)$ . De igual manera, sea  $a \in A$ , entonces

$$f(ax) = f(a)f(x) \in I \implies ax \in f^{-1}(I)$$

ya que  $f(a) \in B$  e  $I$  es un ideal.

4. Claramente  $f(I)$  es no vacío ya que  $0 \in I \implies f(0) \in f(I)$ . Si  $x, y \in f(I)$ , entonces,  $x = f(a), y = f(b)$  y

$$x + y = f(a) + f(b) = f(a + b) \in f(I)$$

ya que  $a + b \in I$  al ser ideal. Para el producto necesitaremos la sobreyectividad, dado  $z \in B$  entonces existe  $c \in A$  tal que  $z = f(c)$ , luego

$$zx = f(c)f(a) = f(ca) \in f(I)$$

porque  $ca \in I$  al ser ideal.

*Remark.* La imagen de un ideal por un homomorfismo no necesariamente es un ideal si el homomorfismo no es suprayectivo.

**Example 2.3.15: Contraejemplo**

Sea  $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  la inclusión. El conjunto  $2\mathbb{Z}$  es un ideal de  $\mathbb{Z}$ , pero  $i(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$  no es un ideal de  $\mathbb{Q}$ , pues por ejemplo  $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$  y  $2 \in 2\mathbb{Z}$ , pero  $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \notin 2\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Q}$ .



**Theorem 2.3.16: Homomorfismos en productos**

Sean  $A, B, C$  anillos. Existe una biyección natural  $\Phi$  tal que

$$\text{Hom}(A, B \times C) \cong \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(A, C)$$

dada por  $f \mapsto (\pi_B \circ f, \pi_C \circ f)$ , donde  $\pi_B$  y  $\pi_C$  son las proyecciones canónicas.

**Example 2.3.17: Aplicación**

Para determinar todos los homomorfismos  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ , basta determinar los homomorfismos  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3$  por separado.

**Proof**

Si  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  es un homomorfismo entonces

$$f(1) = [1]_2, f(n) = nf(1) = n[1]_2 = [n]_2$$

luego solo existe un homomorfismo de ese tipo.

Similarmente, si  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3$  es un homomorfismo entonces

$$f(1) = [1]_3, f(n) = nf(1) = n[1]_3 = [n]_3$$

por tanto este homomorfismo también está totalmente determinado.

Finalmente deducimos que el único homomorfismo de  $\mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  es

$$g(n) = ([n]_2, [n]_3).$$

## 2.4 Ideales y anillos cociente

Supongamos que queremos construir un anillo cociente  $A/I$  que herede la estructura algebraica de  $A$ . Para ello, necesitamos definir una relación de equivalencia compatible con las operaciones del anillo. Si consideramos  $(A, +)$  como grupo abeliano bajo la suma, para formar el grupo cociente  $(A/I, +)$  necesitamos que  $I$  sea un subgrupo normal de  $(A, +)$ . Como  $A$  es abeliano, todo subgrupo es normal, por lo que basta con que  $I$  sea un subgrupo de  $(A, +)$ , es decir:

- $0 \in I$
- Si  $a, b \in I$ , entonces  $a + b \in I$
- Si  $a \in I$ , entonces  $-a \in I$

Esto nos permite definir el grupo cociente  $(A/I, +)$  con la operación:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

que está bien definida gracias a que  $I$  es subgrupo.

Sin embargo, para que  $A/I$  herede la estructura de anillo, necesitamos definir también una multiplicación. La definición natural sería:

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

Sin embargo, debemos verificar que esta operación está bien definida. Supongamos que tomamos diferentes representantes de las clases:

$$a + I = a' + I, \quad b + I = b' + I$$

esto significa que

$$a - a' \in I \quad \text{y} \quad b - b' \in I.$$

Para que el producto esté bien definido, debemos tener:

$$ab + I = a'b' + I$$

es decir

$$ab - a'b' \in I.$$

Finalmente observemos que:

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'$$

Como  $b - b' \in I$  y  $a - a' \in I$ , para garantizar que  $ab - a'b' \in I$ , necesitamos que:

1. Si  $x \in I$  y  $a \in A$ , entonces  $ax \in I$
2. Si  $x \in I$  y  $a \in A$ , entonces  $xa \in I$

En un anillo conmutativo, estas dos condiciones son equivalentes. Esto nos lleva a la siguiente definición.

### Definition 2.4.1: Ideal

Un subconjunto  $I$  de un anillo  $A$  es un ideal si:

1.  $I \neq \emptyset$
2. Para todo  $x, y \in I$ , se verifica que  $x + y \in I$
3. Para todo  $x \in I$  y  $a \in A$ , se verifica que  $ax \in I$

Si  $I$  es un ideal de  $A$  escribiremos  $I \leq A$ .

*Remark.*

- La condición  $I \neq \emptyset$  puede sustituirse por  $0 \in I$ , ya que si  $a \in I$  entonces  $0 = a + (-1)a \in I$ .
- Si  $I$  es un ideal de  $A$ , entonces para todo  $a_1, \dots, a_n \in A$  y  $x_1, \dots, x_n \in I$  se tiene que  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in I$ .
- Todo ideal es un grupo respecto de la suma.

#### Example 2.4.2: Ideales triviales

- El ideal cero:  $\{0\}$
- El ideal impropio:  $A$

Todo aquel ideal que no sea impropio, es decir, que verifique  $I \leq A, I \neq A$  se llama ideal propio. En ocasiones nos interesará trabajar solo con ideales que sean propios, por lo que resulta muy útil caracterizar aquellos que no lo son.

#### Lemma 2.4.3: Caracterización de ideales impropios

Sea  $A$  un anillo. Para un ideal  $I \leq A$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $I = A$ , es decir,  $I$  es un ideal impropio.
2.  $1 \in I$
3.  $I$  contiene una unidad de  $A$  (i.e.,  $I \cap A^* \neq \emptyset$ )

#### Proof

- (1)  $\implies$  (2): si  $I = A$ , entonces  $1 \in I$
- (2)  $\implies$  (3):  $1$  es una unidad
- (3)  $\implies$  (1): si  $u \in I \cap A^*$ , entonces  $1 = uu^{-1} \in I$ , luego  $I = A$

### 2.4.1 Ejemplos de ideales

#### Example 2.4.4: Ideales principales

Sea  $A$  un anillo y  $b \in A$ . El conjunto:

$$(b) = bA = \{ba : a \in A\}$$

es un ideal de  $A$  llamado ideal principal generado por  $b$ .

Observaciones:

- $(1) = A$
- $(0) = \{0\}$
- $(b)$  es el menor ideal de  $A$  que contiene a  $b$

#### Example 2.4.5: Ideal generado por un conjunto

Sea  $T \subseteq A$ . El ideal generado por  $T$  es:

$$(T) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i : n \geq 0, a_i \in A, t_i \in T \right\}$$

Este es el menor ideal de  $A$  que contiene a  $T$ .

*Remark.* Frecuentemente, cuando el conjunto sea finito escribiremos

$$(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

#### Example 2.4.6: Ideales en anillos producto

Si  $A$  y  $B$  son anillos, entonces  $A \times \{0\} = \{(a, 0) : a \in A\}$  es un ideal de  $A \times B$ .

##### Proof

Claramente es no vacío. Si  $x, y \in A \times \{0\}$  entonces

$$x = (a, 0), y = (b, 0) \implies x + y = (a + b, 0) \in A \times \{0\}.$$

Si  $(a', b') \in A \times B$  entonces

$$(a', b')x = (a', b')(a, 0) = (aa', 0) \in A \times \{0\}.$$

#### Example 2.4.7: Ideales en anillos de polinomios

Sea  $A[X]$  el anillo de polinomios.

- $I = \{a_1X + \dots + a_nX^n : a_i \in A\}$  (polinomios sin coeficiente independiente) es un ideal
- Si  $I$  es ideal de  $A$ , entonces  $J = \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n : a_0 \in I\}$  es un ideal de  $A[X]$
- $I[X] = \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n : a_i \in I\}$  es un ideal de  $A[X]$

##### Proof

- Que  $I$  es no vacío es inmediato. Si  $P, Q \in I$  entonces son de la forma

$$P = a_1X + \dots + a_nX^n, Q = b_1X + \dots + b_mX^m$$

donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $m \geq n$ , luego definiendo  $c_k = a_k + b_k$  (tomando  $a_k = 0$  si  $k > n$ ) tenemos

$$P + Q = c_1X + \dots + c_mX^m \in I.$$

De igual manera, el producto de polinomios sin término independiente es un polinomio sin término independiente. Sea  $d_0, d_1 = 0, d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

$$PQ = a_1 b_1 X^2 + \dots + a_n b_m X^{n+m} = d_2 X^2 + \dots + d_{n+m} X^{n+m} \in I.$$

- Como  $I$  es no vacío existe  $y \in I$ , luego el polinomio  $y = yX^0 \in J$  y  $J$  es no vacío. Dados  $P, Q \in J$  su suma es el polinomio con coeficientes obtenidos sumando los de

$P$  y  $Q$ , como ambos coeficientes independiente están en  $I$ , que es un ideal, su suma también está en  $I$ , luego  $P + Q \in J$ . Para el producto, notemos que el coeficiente independiente de  $PQ$  es el producto de dos elementos de  $I$ , luego está en  $I$  y por tanto  $PQ \in J$ .

- Como  $I$  es no vacío existe  $y \in I$ , luego el polinomio  $y = yX^0 \in I[X]$  e  $I[X]$  es no vacío. Dados  $P, Q \in I[X]$  su suma es el polinomio con coeficientes obtenidos sumando los de  $P$  y  $Q$ , como estos coeficientes están en  $I$ , que es un ideal, su suma también está en  $I$ , luego  $P + Q \in I[X]$ . Para el producto, notemos que los coeficientes de  $PQ$  son combinaciones de elementos obtenidos como producto de dos elementos de  $I$ , luego los coeficientes de  $PQ$  están en  $I$  y por tanto  $PQ \in I[X]$ .

#### Proposition 2.4.8: Intersección de ideales

La intersección de cualquier familia de ideales de  $A$  es un ideal de  $A$ .

##### Proof

Si  $I_\alpha$  es una familia de ideales indexada por  $X$  y  $J = \bigcap_{\alpha \in X} I_\alpha$  entonces

$$0 \in I_\alpha \forall \alpha \in X \implies 0 \in J \implies J \neq \emptyset$$

Además,

$$x, y \in J \implies x, y \in I_\alpha \forall \alpha \in X \implies x + y \in I_\alpha \forall \alpha \in X \implies x + y \in J$$

y para cualquier  $a \in A$

$$x \in J \implies x \in I_\alpha \forall \alpha \in X \implies ax \in I_\alpha \forall \alpha \in X \implies ax \in J.$$

#### Proposition 2.4.9: Ideales de $\mathbb{Z}$

Todos los ideales de  $\mathbb{Z}$  son principales. Es decir, para todo ideal  $I \subset \mathbb{Z}$ , existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $I = (n)$ .

##### Proof

Sea  $I$  un ideal de  $\mathbb{Z}$ . Si  $I = 0$  entonces  $I = (0)$  con lo que  $I$  es principal. Supongamos que  $I \neq 0$  y sea  $n \in I \setminus 0$ . Entonces  $-n \in I$ , con lo que  $I$  tiene un elemento positivo, o sea  $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ . Como  $\mathbb{N}$  está bien ordenado,  $I \cap \mathbb{N}$  tiene un mínimo que denotamos como  $a$ . Como  $a \in I$  se tiene que  $(a) \subseteq I$ .

Para ver que se da la igualdad tomamos  $b \in I$  y sean  $q$  y  $r$  el cociente y el resto de la división entera de  $b$  entre  $a$ . Entonces  $b = qa + r$  y  $0 \leq r < a$ . Pero  $r = b - qa \in I$ , por que  $I$  es un ideal de  $\mathbb{Z}$  que contiene a  $a$  y  $b$  y  $q \in \mathbb{Z}$ . Como  $r$  es estrictamente menor que  $a$  y  $a$  es mínimo en  $I \cap \mathbb{N}$ , necesariamente  $r \notin \mathbb{N}$ , es decir  $r$  no es positivo. Luego  $r = 0$ , con lo que  $b = qa \in (a)$ .

## 2.4.2 Anillos cociente

### Definition 2.4.10: Congruencia módulo un ideal

Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$ . Decimos que  $a, b \in A$  son congruentes módulo  $I$ , y escribimos  $a \equiv b \pmod{I}$ , si  $b - a \in I$ .

### Lemma 2.4.11: Propiedades de la congruencia

Sea  $I$  ideal de  $A$ . Para todo  $a, b, c, d \in A$ :

1.  $a \equiv a \pmod{I}$  (reflexiva).
2. Si  $a \equiv b \pmod{I}$ , entonces  $b \equiv a \pmod{I}$  (simétrica).
3. Si  $a \equiv b \pmod{I}$  y  $b \equiv c \pmod{I}$ , entonces  $a \equiv c \pmod{I}$  (transitiva).
4.  $a \equiv b \pmod{(0)}$  si y solo si  $a = b$ .

### Proof

1. Como  $0 \in I$ , dado  $x \in I$  debe ser  $0x = 0 \in I$ , luego  $a - a = 0 \in I \implies a \equiv a \pmod{I}$ .
2. Si  $a \equiv b \pmod{I}$ , entonces
 
$$b - a \in I \implies (-1)(b - a) = a - b \in I \implies b \equiv a \pmod{I}.$$
3. Si  $a \equiv b \pmod{I}$  y  $b \equiv c \pmod{I}$ , entonces
 
$$b - a \in I, c - b \in I \implies c - a \in I \implies a \equiv c \pmod{I}.$$
4.  $a \equiv b \pmod{(0)} \iff b - a = 0 \iff a = b$ .

Del Lema 2.4.11 se deduce que la relación «ser congruente módulo  $I$ » es una relación de equivalencia en  $A$  y, por tanto, las clases de equivalencia por esta relación definen una partición de  $A$ .

La clase de equivalencia que contiene a un elemento  $a \in A$  es

$$a + I = \{a + x : x \in I\}$$

(en particular  $0 + I = I$ ), de modo que

$$a + I = b + I \iff a \equiv b \pmod{I}$$

(en particular  $a + I = 0 + I \iff a \in I$ ).

El conjunto de las clases de equivalencia se denota

$$A/I = \frac{A}{I} = \{a + I : a \in A\}.$$

En ocasiones se escriben las clases de equivalencia como

$$\bar{a} = a + I, \bar{b} = b + I, \bar{0} = 0 + I = I.$$

**Definition 2.4.12: Anillo cociente**

Sea  $I$  un ideal de  $A$ . El conjunto de clases de equivalencia:

$$A/I = \{a + I : a \in A\}$$

con las operaciones:

$$\begin{aligned}(a + I) + (b + I) &= (a + b) + I \\ (a + I) \cdot (b + I) &= (ab) + I\end{aligned}$$

es un anillo llamado anillo cociente de  $A$  módulo  $I$ .

**Proposition 2.4.13: Buena definición del cociente**

Las operaciones en  $A/I$  están bien definidas y dotan a  $A/I$  de estructura de anillo con:

- Elemento cero:  $0 + I$
- Elemento uno:  $1 + I$

**Proof**

Sean  $a + I = a' + I$  y  $b + I = b' + I$ . Entonces  $a - a', b - b' \in I$ . Luego

- La suma está bien definida, para ello veamos que  $(a + b) + I = (a' + b') + I$ , o equivalentemente,  $(a + b) - (a' + b') \in I$ , en efecto

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in I$$

ya que  $a - a', b - b' \in I$ .

- El producto está bien definido, para ello veamos que  $(ab) + I = (a'b') + I$ , es decir,  $(ab) - (a'b') \in I$

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I$$

de nuevo porque  $a - a', b - b' \in I$ .

Por tanto las operaciones están bien definidas. La comprobación del cero y el uno son inmediatas.

**Definition 2.4.14: Proyección canónica**

La aplicación  $\eta : A \rightarrow A/I$  dada por  $\eta(a) = a + I$  es un homomorfismo sobreyectivo llamado proyección canónica.

**Proof**

Que la proyección es sobreyectiva es inmediato, dado  $a + I \in A/I$  es inmediato que  $\eta(a) = a + I$ . Comprobar que es un homomorfismo es trivial por la manera en que hemos definido las operaciones en  $A/I$ .

**Example 2.4.15: Anillos  $\mathbb{Z}_n$** 

Para  $n > 0$ ,  $\mathbb{Z}_n$  es el anillo cociente  $\mathbb{Z}/(n)$ . Tiene exactamente  $n$  elementos:  $0 + (n), 1 + (n), \dots, n-1 + (n)$ .

**Example 2.4.16: Cocientes triviales**

- $A/\{0\} \cong A$
- $A/A \cong \{0\}$

**Example 2.4.17: Cociente por ideales en polinomios**

Sea  $I = \{a_1X + \dots + a_nX^n\} \leq A[X]$ . Entonces:

$$A[X]/I \cong A$$

mediante el isomorfismo que envía  $P(X) + I$  al término constante de  $P$ .

**Proof**

Sea  $P(X) \in A[X]$ ,  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  entonces  $P(X) + I \in A[X]/I$  es de la forma  $P(X) + I = a_0 + I$  ya que

$$P(X) - a_0 = a_1X + \dots + a_nX^n \in I.$$

luego el isomorfismo es  $\phi(a_0 + I) = a_0$ . Claramente es un homomorfismo sobreyectivo, para ver que es inyectivo supongamos

$$\phi(a_0 + I) = \phi(b_0 + I) \implies a_0 = b_0 \implies a_0 - b_0 = 0 \in I \implies a_0 + I = b_0 + I.$$

**Example 2.4.18: Cociente en productos**

Sean  $A, B$  anillos,  $I = A \times \{0\}$ . Entonces:

$$(A \times B)/I \cong B$$

**2.4.3 Teorema de correspondencia**

Recordemos algunas definiciones y caracterizaciones útiles.

**Definition 2.4.19: Núcleo de un homomorfismo**

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. El núcleo de  $f$  es:

$$\ker f = \{a \in A : f(a) = 0\}$$

**Proposition 2.4.20: Inyectividad y núcleo**

Un homomorfismo  $f : A \rightarrow B$  es inyectivo si y solo si  $\ker f = \{0\}$ .



**Proof**

- Si  $f$  es inyectivo y  $a \in \ker f$ , entonces  $f(a) = 0 = f(0)$ , luego  $a = 0$
- Si  $\ker f = \{0\}$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f(a - b) = 0$ , luego  $a - b \in \ker f = \{0\}$ , por tanto  $a = b$

El siguiente resultado describe los ideales de un anillo cociente. Consideremos la proyección canónica  $\eta : A \rightarrow A/I$ . La imagen de un subconjunto  $J \subset A$  es

$$\eta(J) = \{a + I : a \in J\}$$

si  $J$  contiene a  $I$  denotaremos a este conjunto  $\eta(J) = J/I$ .

**Theorem 2.4.21: Teorema de correspondencia**

Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$ . Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de ideales de  $A$  que contienen a  $I$

$$\mathcal{A} = \{J \leq A : I \subseteq J\}.$$

Sea  $\mathcal{K}$  el conjunto de todos los ideales de  $A/I$

$$\mathcal{K} = \{K \leq A/I\}.$$

Entonces las asignaciones

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{K}, \quad \Phi(J) = J/I \\ \Psi : \mathcal{K} &\rightarrow \mathcal{A}, \quad \Psi(K) = \eta^{-1}(K)\end{aligned}$$

definen aplicaciones biyectivas, una inversa de la otra, que conservan la inclusión en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{K}$ .

**Proof**

En primer lugar, veamos que son aplicaciones, para ello necesitamos que se cumpla

- Si  $J$  es un ideal que contiene a  $I$  entonces  $\eta(J) = J/I$  es un ideal.
  - Como  $J$  es un ideal  $0 \in J$ , luego  $0 + I = \eta(0) \in \eta(J) = J/I \neq \emptyset$ .
  - Sean  $x + I, y + I \in J/I$  (es decir,  $x, y \in J$  tales que  $\eta(x) = x + I, \eta(y) = y + I$ ). Es claro que

$$\eta(x + y) = (x + y) + I = (x + I) + (y + I) \in J/I$$

como necesitamos.

- Sea  $x + I \in J/I, a + I \in A/I$  entonces

$$(a + I)(x + I) = ax + I = \eta(ax) \in J/I$$

ya que  $ax \in J$  al ser  $J$  ideal.

- Si  $K$  es un ideal de  $A/I$  entonces  $\eta^{-1}(K)$  es un ideal que contiene a  $I$ .
  - Como  $K$  es un ideal  $0 + I \in K$ , y al ser  $0 + I = \eta(0) \implies 0 \in \eta^{-1}(K) \neq \emptyset$ .
  - Sean  $x, y \in \eta^{-1}(K)$ , entonces  $x + I, y + I \in K \implies (x + y) + I \in K$ . Finalmente

$$\eta(x + y) = (x + y) + I \in K \implies (x + y) \in \eta^{-1}(K)$$

como necesitamos.

- Sean  $x \in \eta^{-1}(K)$ ,  $a \in A$  entonces

$$\eta(ax) = ax + I = (a + I)(x + I) \in K$$

ya que  $a + I \in A/I$  y  $K$  es un ideal, pero entonces  $ax \in \eta^{-1}(K)$  como queríamos ver.

- Sea  $x \in I$ , entonces

$$\eta(x) = 0 + I \in K \implies x \in \eta^{-1}(K).$$

Veamos ahora que una es inversa de la otra, lo cual implica directamente que son biyectivas.

- Dado  $J \in \mathcal{A}$

$$\Psi(\Phi(J)) = \eta^{-1}(\eta(J)) \supseteq J$$

por las propiedades de conjuntos. Para la otra inclusión, si  $x \in \eta^{-1}(\eta(J))$  entonces  $\eta(x) \in \eta(J)$ , luego existe  $y \in J$  tal que

$$x + I = \eta(y) = y + I \implies x - y \in I \subseteq J \implies x = (x - y) + y \in J$$

usando que  $J$  es ideal.

- Sea ahora  $K \in \mathcal{K}$ , entonces

$$\Phi(\Psi(K)) = \eta(\eta^{-1}(K)) \subseteq K$$

por conjuntos. Por otro lado, si  $x + I \in K$  entonces, al ser  $\eta$  sobreyectiva existe  $y \in \eta^{-1}(K)$  tal que  $\eta(y) = x + I \in K$ . Por tanto  $x + I \in \eta(\eta^{-1}(K))$

Finalmente veamos que respetan las inclusiones.

- Si  $J, J' \in \mathcal{A}$ ,  $J \subseteq J'$  entonces dado

$$x + I \in \Phi(J) = \eta(J) \implies x + I = \eta(j), j \in J \subseteq J' \implies x + I \in \eta(J') = \Phi(J').$$

- De igual manera, si  $K, K' \in \mathcal{K}$ ,  $K \subseteq K'$  entonces

$$x \in \Psi(K) = \eta^{-1}(K) \implies \eta(x) \in K \subseteq K' \implies x \in \eta^{-1}(K') = \Psi(K').$$

*Remark.* En 2.3.14 ya habíamos probado casi todo lo que necesitábamos para ver que  $\Phi, \Psi$  son aplicaciones.

*Remark.* Recordemos que

$$\eta(\eta^{-1}(K)) = K$$

es una de las caracterizaciones vista en Conjuntos y Números para que una aplicación  $\eta$  sea sobreyectiva.

#### Example 2.4.22: Aplicación del teorema de correspondencia

En  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$ , los ideales son de la forma  $d\mathbb{Z}_n = (d)/(n)$  donde  $d \mid n$ . Además,  $d\mathbb{Z}_n \subseteq d'\mathbb{Z}_n$  si y solo si  $d' \mid d$ .

## 2.5 Operaciones con ideales

### Definition 2.5.1: Suma de ideales

Si  $I$  y  $J$  son ideales de  $A$ , su suma es:

$$I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\} = (I \cup J)$$

### Definition 2.5.2: Producto de ideales

Si  $I$  y  $J$  son ideales de  $A$ , su producto es:

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J, n \geq 0 \right\} = \left( \{xy : x \in I, y \in J\} \right)$$

*Remark.* Más generalmente, para ideales  $I_1, \dots, I_n$ :

- $I_1 + \dots + I_n = \{x_1 + \dots + x_n : x_i \in I_i\}$
- $I_1 \dots I_n$  está generado por productos  $x_1 \dots x_n$  con  $x_i \in I_i$

### Proposition 2.5.3: Propiedades de las operaciones

Para ideales  $I, J, K$  de  $A$ :

1.  $IJ \subseteq I \cap J$
2.  $I(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$
3.  $I(JK) = (IJ)K$
4.  $I(J + K) = IJ + IK$
5.  $IA = I$

### Proof

1. Sea  $x \in IJ$ , entonces  $x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  con cada  $x_i \in I, y_i \in J$ . Por tanto  $x_i y_i \in I$  al ser  $I$  un ideal, de hecho  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \in I$  al ser suma de elementos de  $I$ . Para  $J$  ocurre igual ya que los  $y_i \in J$ , luego  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \in J$  y finalmente  $x \in I \cap J$ .
2. Sea  $x \in I(J \cap K)$ , entonces  $x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  con cada  $x_i \in I, y_i \in J \cap K$ . En concreto  $x \in IJ$  ya que cada  $y_i \in J$ , de igual manera  $x \in IK$ , por tanto  $x \in IJ \cap IK$ .
3. Sea  $x \in I(JK)$ , entonces  $x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  con cada  $x_i \in I, y_i \in JK$ , en concreto cada  $y_i = \sum_{k=1}^m a_k b_k$  con  $a_k \in J, b_k \in K$ . Entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \left( x_i \left[ \sum_{k=1}^m a_k b_k \right] \right) = \sum_{k=1}^m \left( a_k b_k \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] \right) = \sum_{k=1}^m \left( b_k \left[ \sum_{i=1}^n x_i a_k \right] \right)$$

sea  $c_k = \sum_{i=1}^n x_i a_k$ , entonces cada  $c_k \in IJ$  ya que  $x_i \in J, a_k \in J$ , por tanto

$$x = \sum_{k=1}^m (b_k c_k) \in (IJ)K$$

ya que cada  $c_k \in IJ, b_k \in K$ . Esto prueba que  $I(JK) \subseteq (IJ)K$ .

El otro contenido es inmediato ya que  $IJ = JI$ , luego  $(IJ)K = K(IJ) \subseteq (KI)J = J(KI) \subseteq (JK)I = I(JK)$  usando lo anterior.

4. Sea  $x \in I(J + K)$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i (a_i + b_i)$$

con  $a_i \in J, b_i \in K$  ya que cada  $y_i \in J + K$ . Finalmente

$$x = \sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{i=1}^n x_i b_i \in IJ + IK$$

ya que  $\sum_{i=1}^n x_i a_i \in IJ, \sum_{i=1}^n x_i b_i \in IK$ .

Para la otra inclusión, si  $x \in IJ + IK$  entonces  $x = a + b$  con  $a \in IJ, b \in IK$ , luego

$$a = \sum_{i=1}^n x_i a_i, b = \sum_{k=1}^m y_k b_k; \quad x_i, y_k \in I, a_i \in J, b_k \in K$$

pero notemos que  $a_i = a_i + 0 \in J + K$  ya que  $0 \in K$ , de igual manera  $b_k = 0 + b_k \in J + K$ , luego definiendo

$$c_l = \begin{cases} x_l, & 1 \leq l \leq n \\ y_{n-l+1}, & n < l \leq n+m \end{cases}$$

$$d_l = \begin{cases} a_l, & 1 \leq l \leq n \\ b_{n-l+1}, & n < l \leq n+m \end{cases}$$

tenemos que  $c_l \in I, d_l \in J + K$  y

$$x = \sum_{l=1}^{n+m} c_l d_l$$

luego  $x \in I(J + K)$ .

5. Por 1. tenemos que  $IA \subseteq I \cap A = I$ . Por otro lado, si  $x \in I$  entonces definiendo  $x_1 = x, a_1 = 1_A$  tenemos

$$x = x 1_A = \sum_{i=1}^1 x_i a_i \implies x \in IA.$$

#### Example 2.5.4: Operaciones en $\mathbb{Z}$

Sean  $(n)$  y  $(m)$  ideales de  $\mathbb{Z}$ . Entonces:

$$(n)(m) = (nm)$$

$$(n) \cap (m) = (\text{mcm}(n, m))$$

$$(n) + (m) = (\text{mcd}(n, m))$$

### Example 2.5.5: Ideal no principal

En  $\mathbb{Z}[X]$ , el ideal  $(2) + (X)$  (polinomios con término constante par) no es principal.

#### Proof

Supongamos que  $(2) + (X) = (a)$  para algún  $a \in \mathbb{Z}[X]$ . Entonces:

- $2 = aP$  para algún  $P \in \mathbb{Z}[X]$ , pero entonces  $P$  ha de ser un polinomio solo con término independiente y  $a$  también.
- Como  $a \in (2) + (X)$ ,  $a$  debe ser par.
- Si suponemos  $X \in (a)$  debe ser  $X = aP$  para algún  $P \in \mathbb{Z}[X]$ , pero  $aP$  tiene coeficiente par en la  $X$  porque  $a$  es par, luego  $X \notin (a) = (2) + (X)$  lo cual es contradictorio.

### Example 2.5.6

Sea  $A$  un anillo y sean  $a, b \in A$ , entonces  $(a, b) = (a) + (b)$

#### Proof

En efecto si  $x \in (a, b)$  entonces

$$x = ax_1 + bx_2 \implies x \in (a) + (b).$$

De igual manera, si  $x \in (a) + (b)$  entonces

$$x = a_1 + b_1$$

con  $a_1 \in (a) \implies a_1 = ax_1, b_1 \in (b) \implies b_1 = bx_2$ , por tanto

$$x = ax_1 + bx_2 \in (a, b).$$

## 2.6 Teoremas de isomorfía y Teorema chino de los restos

### Theorem 2.6.1: Primer teorema de isomorfía

Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Entonces existe un único isomorfismo de anillos  $\bar{f} : A/\ker f \rightarrow \text{Im } f$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ A/\ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f \end{array}$$

es decir,  $i \circ \bar{f} \circ p = f$ , donde  $i$  es la inclusión y  $p$  es la proyección. En particular

$$\frac{A}{\ker f} \cong \text{Im } f.$$

### Proof

Sean  $K = \ker f$  e  $I = \text{Im } f$ . La aplicación  $\bar{f} : A/K \rightarrow I$  dada por  $\bar{f}(x + K) = f(x)$  está bien definida (no depende de representantes) pues si  $x + K = y + K$  entonces  $x - y \in K$  y por lo tanto  $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$ ; es decir,  $f(x) = f(y)$ . Además es elemental ver que es un homomorfismo de anillos y que es suprayectiva.

Para ver que es inyectiva usamos la Proposición 2.3.6: si  $x + K$  está en el núcleo de  $\bar{f}$  entonces  $0 = \bar{f}(x + K) = f(x)$ , de modo que  $x \in K$  y así  $x + K = 0 + K$ . Es decir  $\ker \bar{f} = 0$  y por lo tanto  $\bar{f}$  es inyectiva. En conclusión,  $\bar{f}$  es un isomorfismo, y hace conmutativo el diagrama porque, para cada  $x \in A$ , se tiene

$$i(\bar{f}(p(x))) = i(\bar{f}(x + K)) = i(f(x)_{\text{Im}}) = f(x).$$

En cuanto a la unicidad, supongamos que otro homomorfismo  $\bar{f}' : A/K \rightarrow I$  verifica  $i \circ \bar{f}' \circ p = f$ ; entonces para cada  $x \in K$  se tiene

$$i(\bar{f}'(p(x))) = i(\bar{f}'(x + K)) = f(x) = i(\bar{f}(p(x))) = i(\bar{f}(x + K)).$$

Por la inyectividad de  $i$  debe ser entonces

$$\bar{f}'(p(x)) = \bar{f}(p(x))$$

como  $p$  es sobreyectiva, dado  $y + K \in A/\ker f$  existe  $x_0 \in A$  tal que  $y + K = p(x_0)$ , por tanto para cualquier  $y + K$

$$\bar{f}'(y + K) = \bar{f}'(p(x_0)) = \bar{f}(p(x_0)) = \bar{f}(y + K)$$

y finalmente  $\bar{f}' = \bar{f}$ .

### Theorem 2.6.2: Segundo teorema de isomorfía

Sea  $A$  un anillo y sean  $I$  y  $J$  dos ideales tales que  $I \subseteq J$ . Entonces  $J/I$  es un ideal de  $A/I$  y existe un isomorfismo de anillos

$$\frac{A/I}{J/I} \cong \frac{A}{J}.$$

### Proof

Por el Teorema de la Correspondencia 2.4.21,  $J/I$  es un ideal de  $A/I$ . Sea  $f : A/I \rightarrow A/J$  la aplicación definida por  $f(a + I) = a + J$ . Es elemental ver que  $f$  está bien definida, sean  $a + I = b + I \in A/I$ , entonces  $a - b \in I \subset J$ , luego

$$a - b \in J \implies a + J = b + J \implies f(a + I) = f(b + I).$$

Que es un homomorfismo suprayectivo de anillos se deja como ejercicio. Veamos que  $\ker f = J/I$

$$f(a + I) = a + J = 0 + J \iff a \in J \implies a + I \in \eta(J) = J/I$$

si por el contrario  $a + I \in J/I$  entonces

$$a + I = \eta(j) = j + I \implies f(a + I) = f(j + I) = j + J = 0 + J \implies a + I \in \ker f.$$

Entonces el isomorfismo buscado se obtiene aplicando el Primer teorema de isomorfía a  $f$ .

### Theorem 2.6.3: Tercer teorema de isomorfía

Sea  $A$  un anillo con un subanillo  $B$  y un ideal  $I$ . Entonces:

1.  $B \cap I$  es un ideal de  $B$ .
2.  $B + I$  es un subanillo de  $A$  que contiene a  $I$  como ideal.
3. Se tiene un isomorfismo de anillos  $\frac{B}{B \cap I} \cong \frac{B + I}{I}$ .

### Proof

Los dos primeros apartados se dejan como ejercicio. En cuanto al último, sea  $f : B \rightarrow A/I$  la composición de la inclusión  $j : B \rightarrow A$  con la proyección  $\eta : A \rightarrow A/I$

$$f(b) = \eta(j(b)) = b + I.$$

Es claro que  $\ker f = B \cap I$ , puesto que dado  $b \in B$

$$f(b) = b + I = 0 + I \iff b \in I \iff b \in B \cap I$$

y que  $\text{Im } f = (B + I)/I$ , ya que dado  $b + I \in \text{Im } f$  existe un cierto  $b_0 \in B$  tal que

$$b + I = f(b_0) = b_0 + I \iff b - b_0 \in I \iff b - b_0 = i \in I \implies b = b_0 + i \in B + I.$$

Por tanto, el resultado se sigue del Primer Teorema de Isomorfía.

#### Example 2.6.4: Aplicaciones del Primer Teorema de Isomorfía

1. Si  $A$  y  $B$  son anillos, el homomorfismo  $A \times B \rightarrow A$  de proyección en la primera componente es suprayectivo y tiene núcleo  $I = 0 \times B$ , por lo que  $\frac{A \times B}{0 \times B} \simeq A$ . En realidad ya habíamos visto esto en 2.4.18.
2. Sea  $n$  un entero positivo. Hemos visto que todo ideal de  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$  es de la forma  $(\bar{d}) = (d)/(n)$ , para cierto divisor positivo  $d$  de  $n$ . El Segundo Teorema de Isomorfía nos permite identificar el cociente  $\mathbb{Z}_n/(\bar{d})$ , pues

$$\frac{\mathbb{Z}_n}{(\bar{d})} = \frac{\mathbb{Z}/(n)}{(d)/(n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(d)} = \mathbb{Z}_d.$$

3. Si  $A$  es un anillo, el homomorfismo  $f : A[X] \rightarrow A$  de sustitución en 0 (dado por  $a_0 + a_1X + \cdots \mapsto a_0$ ) es suprayectivo y tiene por núcleo el ideal  $(X)$  generado por  $X$  (consistente en los polinomios con coeficiente independiente nulo), de modo que  $A[X]/(X) \simeq A$ , como ya habíamos observado en el Ejemplo 2.4.17.
4. Sean  $A$  un anillo e  $I$  un ideal de  $A$ . Para cada  $a \in A$ , sea  $\bar{a} = a + I$ . La aplicación  $f : A[X] \rightarrow (A/I)[X]$  dada por  $f(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \cdots + \bar{a}_nX^n$  es un homomorfismo suprayectivo de anillos cuyo núcleo es  $I[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n : a_i \in I\}$  (estas afirmaciones quedan como ejercicio para el lector). Del Primer Teorema de Isomorfía se deduce entonces que

$$\frac{A[X]}{I[X]} \simeq (A/I)[X].$$

#### Definition 2.6.5: Característica

Sea  $A$  un anillo, y recordemos que si  $n \in \mathbb{Z}^+$  escribimos  $n1 = 1 + \cdots + 1$  ( $n$  veces). Si existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $n1 = 0$ , definimos la característica de  $A$  como el menor  $n \in \mathbb{Z}^+$  que verifica tal igualdad. Si no existe un tal  $n$ , decimos que la característica de  $A$  es 0.

#### Proposition 2.6.6: Caracterización de la característica

Sea  $A$  un anillo y sea  $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$  el único homomorfismo de anillos (dado por  $f(n) = n1$ ). Para un número natural  $n$  las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $n$  es la característica de  $A$ .
2.  $n\mathbb{Z}$  es el núcleo de  $f$ .
3. El subanillo primo de  $A$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$  (recuérdese que  $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_1 = 0$ ).
4.  $A$  contiene un subanillo isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

#### Proof

La equivalencia entre (1) y (2) se deja como ejercicio para el lector, y es obvio que (3) implica (4).

(2) implica (3). Se obtiene aplicando el Primer Teorema de Isomorfía y observando que  $\text{Im } f$  es el subanillo primo de  $A$ .

(4) implica (2). Si  $B$  es un subanillo de  $A$  y  $g : \mathbb{Z}_n \rightarrow B$  es un isomorfismo, considerando la proyección  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  y la inclusión  $u : B \hookrightarrow A$  se obtiene un homomorfismo de anillos  $u \circ g \circ \pi : \mathbb{Z} \rightarrow A$  que debe coincidir con  $f$  por su unicidad (Ejemplo 1.12.(3)). Como  $u \circ g$



es inyectiva, es elemental ver que  $\ker f = n\mathbb{Z}$ .

### Theorem 2.6.7: Teorema Chino de los Restos

Sea  $A$  un anillo y sean  $I_1, \dots, I_n$  ideales de  $A$  tales que  $I_i + I_j = A$  para todo  $i \neq j$ . Entonces  $I_1 \cap \dots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$ . Además

$$\frac{A}{I_1 \cap \dots \cap I_n} \cong \frac{A}{I_1} \times \dots \times \frac{A}{I_n}.$$

### Proof

Razonamos por inducción sobre  $n$ , empezando con el caso  $n = 2$ . La hipótesis  $I_1 + I_2 = A$  nos dice que existen  $x_1 \in I_1$  y  $x_2 \in I_2$  tales que  $x_1 + x_2 = 1$ , y entonces para cada  $a \in I_1 \cap I_2$  se tiene  $a = ax_1 + ax_2 \in I_1 I_2$ , de modo que  $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1 I_2$ , y la otra inclusión es clara. Claramente la aplicación  $f : A \rightarrow A/I_1 \times A/I_2$  dada por  $f(a) = (a + I_1, a + I_2)$  es un homomorfismo de anillos con núcleo  $I_1 \cap I_2$ , y es suprayectiva pues, dado un elemento arbitrario  $(a_1 + I_1, a_2 + I_2)$  de  $A/I_1 \times A/I_2$ , el elemento  $a = a_1 x_2 + a_2 x_1$  verifica  $f(a) = (a_1 + I_1, a_2 + I_2)$ . Ahora el resultado se obtiene aplicando el Primer Teorema de Isomorfía. En el caso general ( $n > 2$ ) basta ver que las hipótesis implican que  $(I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) + I_n = A$ , pues entonces la hipótesis de inducción nos da

$$I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} \cap I_n = (I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) I_n = I_1 \cdots I_{n-1} I_n$$

y

$$\frac{A}{I_1 \cap \dots \cap I_n} = \frac{A}{(\cap_{i=1}^{n-1} I_i) \cap I_n} \simeq \frac{A/(\cap_{i=1}^{n-1} I_i)}{I_n} \times \frac{A}{I_n} \simeq \frac{A}{I_1} \times \dots \times \frac{A}{I_{n-1}} \times \frac{A}{I_n}.$$

Para ver que  $(I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) + I_n = A$  notemos que, para cada  $i \leq n-1$ , existen  $a_i \in I_i$  y  $b_i \in I_n$  tales que  $1 = a_i + b_i$ , y multiplicando todas esas expresiones se obtiene

$$1 = \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_i) = a_1 \cdots a_{n-1} + b,$$

donde  $b$  engloba a todos los sumandos que se obtendrían desarrollando los productos (excepto  $a_1 \cdots a_{n-1}$ ) y está en  $I_n$  porque en cada sumando hay al menos un factor del ideal  $I_n$ . Como además  $a_1 \cdots a_{n-1} \in I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}$ , deducimos que  $1 \in (I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) + I_n$  y así  $(I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) + I_n = A$ , como queríamos ver.

## Chapter 3

# Divisibilidad en dominios

### 3.1 Cuerpos y dominios

#### Definition 3.1.1

Un elemento  $a$  de un anillo  $A$  se dice regular si la relación  $ab = ac$  con  $b, c \in A$  implica que  $b = c$ ; es decir, si  $a$  es cancelable respecto del producto. Claramente, el  $0$  nunca es regular (obsérvese la importancia de la hipótesis  $1 \neq 0$  en este caso.)

Un cuerpo es un anillo en el que todos los elementos no nulos son invertibles, y un dominio (o dominio de integridad) es un anillo en el que todos los elementos no nulos son regulares.

Un subanillo de un anillo  $A$  que sea un cuerpo se llama un subcuerpo de  $A$ , y un homomorfismo de anillos entre dos cuerpos se llama homomorfismo de cuerpos.

*Remark.* Si  $A$  es un dominio y  $0 \neq a, b \in A$ , luego  $a$  y  $b$  son regulares. Supongamos que  $ab = 0$ , entonces

$$ab = 0 = a0 \implies b = 0$$

ya que  $a$  es cancelable, pero esto es una contradicción, luego no puede cumplirse  $ab = 0$  si  $a, b \neq 0$ .

En otras palabras

$$a, b \neq 0 \implies ab \neq 0$$

el contrarrecíproco de esta afirmación es

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ ó } b = 0$$

#### Proposition 3.1.2

Todo cuerpo es un dominio.

#### Proof

Si  $A$  es un cuerpo y  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ , entonces  $a$  es invertible. Si  $ab = ac$ , multiplicando por  $a^{-1}$  obtenemos  $b = c$ , luego  $a$  es regular. Como esto vale para todo  $a \neq 0$ ,  $A$  es un dominio.

### Proposition 3.1.3

Sea  $A$  un anillo.

1. Las condiciones siguientes son equivalentes:
  - (a)  $A$  es un cuerpo.
  - (b) Los únicos ideales de  $A$  son  $0$  y  $A$ .
  - (c) Todo homomorfismo de anillos  $A \rightarrow B$  con  $B \neq 0$  es inyectivo.
2. Un elemento  $a \in A$  es regular si y solo si la relación  $ab = 0$  con  $b \in A$  implica  $b = 0$  (por este motivo, los elementos no regulares se suelen llamar divisores de cero).
3.  $A$  es un dominio si y solo si, para cualesquiera  $a, b \in A$  no nulos, se tiene  $ab \neq 0$ .
4. Todo subanillo de un dominio es un dominio.
5. La característica de un dominio es cero o un número primo.

### Proof

1. Demostramos las equivalencias.
  - (a)  $\Rightarrow$  (b) Si  $A$  es cuerpo e  $I$  es un ideal no nulo de  $A$ , entonces  $I$  tiene un elemento  $a \neq 0$ . Como  $A$  es cuerpo,  $a$  es invertible, luego  $I = A$ .
  - (b)  $\Rightarrow$  (c) Si  $f : A \rightarrow B$  es un homomorfismo con  $B \neq 0$ , entonces  $\ker f$  es un ideal pero  $\ker f \neq A$ , pues  $f(1) = 1 \neq 0$ . Entonces, por (b),  $\ker f = 0$ , luego  $f$  es inyectivo.
  - (c)  $\Rightarrow$  (a) Haremos el contrarrecíproco. Si  $A$  no es cuerpo, existe  $a \neq 0$  no invertible. Entonces (a) es un ideal propio no nulo, y el homomorfismo canónico

$$\pi : A \rightarrow A/(a), \quad \pi(x) = x + (a)$$

no es inyectivo ya que

$$a \in \ker \pi \neq 0.$$

2. Si  $a$  es regular y  $ab = 0$ , entonces  $ab = 0 = a0$ , luego  $b = 0$ . Recíprocamente, si  $a$  no es regular, existen  $b \neq c$  con  $ab = ac$ , luego  $a(b - c) = 0$  con  $b - c \neq 0$ .
3. Es consecuencia inmediata de (2).
4. Si  $B$  es subanillo de un dominio  $A$  y  $x, y \in B$  son no nulos, entonces  $xy \neq 0$  en  $A$ , luego también en  $B$  ya que su cero es el mismo que el de  $A$ .
5. Sea  $D$  un dominio y consideremos el homomorfismo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow D$  dado por  $f(n) = n \cdot 1$ . Como  $\ker f$  es un ideal de  $\mathbb{Z}$ , existe  $n \geq 0$  tal que  $\ker f = (n)$ . Si  $n = ab$  con  $0 < a, b < n$ , entonces  $f(a)f(b) = f(ab) = 0$ , luego  $f(a) = 0$  o  $f(b) = 0$ , contradicción. Así que  $n$  es primo o  $n = 0$ .

### Example 3.1.4: Dominios y cuerpos

1. Los anillos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son cuerpos y  $\mathbb{Z}$  es un dominio que no es un cuerpo (aunque es subanillo de un cuerpo).
2. Para  $n \geq 2$ , el anillo  $\mathbb{Z}_n$  es un dominio si y solo si es un cuerpo, si y sólo si  $n$  es primo.

#### Proof

Si  $n$  es primo y  $\bar{a} \neq 0$  en  $\mathbb{Z}_n$ , entonces  $\text{mcd}(a, n) = 1$ , luego existen  $x, y$  con  $ax + ny = 1$ , así que  $\bar{a}\bar{x} = \bar{1}$ . Recíprocamente, si  $n$  no es primo, existen  $a, b$  con  $1 < a, b < n$  y  $n = ab$ , luego  $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$  con  $\bar{a}, \bar{b} \neq 0$ .

3. Si  $m$  es un entero que no es el cuadrado de un número entero entonces  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  es un dominio (subanillo de  $\mathbb{C}$ ) que no es un cuerpo (el 2 no tiene inverso). Sin embargo,  $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$  sí que es un cuerpo; de hecho, si  $a + b\sqrt{m} \neq 0$ , entonces  $q = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - b^2m$  es un número racional no nulo y  $(a + b\sqrt{m})^{-1} = \frac{a}{q} - \frac{b}{q}\sqrt{m}$ .
4. Un producto de anillos diferentes de 0 nunca es un dominio, pues  $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$ .
5. Los anillos de polinomios no son cuerpos, pues la indeterminada genera un ideal propio y no nulo. Por otra parte,  $A[X]$  es un dominio si y solo si lo es  $A$ .

#### Proof

Si  $A$  es dominio y  $P, Q \in A[X]$  son no nulos, sean  $a_n X^n$  y  $b_m X^m$  sus términos de mayor grado. Entonces el coeficiente de  $X^{n+m}$  en  $PQ$  es  $a_n b_m \neq 0$ , luego  $PQ \neq 0$ . El recíproco es claro pues  $A$  es subanillo de  $A[X]$ .

## 3.2 Ideales primos y maximales

### Definition 3.2.1: Ideal primo

Un ideal propio  $P \leq A$ ,  $P \neq A$  es primo si para todo  $a, b \in A$ :

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ o } b \in P$$

### Definition 3.2.2: Ideal maximal

Un ideal propio  $M \leq A$ ,  $M \neq A$  es maximal si no existe ningún ideal  $I$  tal que  $M \subsetneq I \subsetneq A$ .

### Proposition 3.2.3: Caracterizaciones de ideales maximales y primos

Sean  $A$  un anillo e  $I$  un ideal propio de  $A$ . Entonces:

1.  $I$  es maximal si y solo si  $A/I$  es un cuerpo.
2.  $I$  es primo si y solo si  $A/I$  es un dominio.
3. Si  $I$  es maximal entonces es primo.
4.  $A$  es un cuerpo si y solo si el ideal  $0$  es maximal.
5.  $A$  es un dominio si y solo si el ideal  $0$  es primo.

### Proof

1. Por el teorema de correspondencia, los ideales de  $A/I$  corresponden a los ideales de  $A$  que contienen a  $I$ .

Así, si  $I$  es maximal entonces el único ideal distinto de  $I$  que contiene a  $I$  es  $A$ . Pero entonces, dado un ideal  $J/I \leq A/I$  este ha de corresponder a  $A/I$  o a  $I/I = 0$ , luego los únicos ideales de  $A/I$  son  $0$  y  $A/I$ , lo cual es una de las caracterizaciones para que un anillo sea un cuerpo.

De igual manera, si  $A/I$  es un cuerpo, entonces los únicos ideales son  $0$  y  $A/I$ , pero entonces los únicos ideales que contienen a  $I$  son  $I, A$ , es decir,  $I$  es maximal.

2. Si  $I$  es primo y tomamos  $(a + I)(b + I) = ab + I = 0 + I$  entonces

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ ó } b \in I \Rightarrow a + I = 0 + I \text{ ó } b + I = 0 + I$$

luego  $A/I$  es dominio.

Por el contrario, si  $A/I$  es dominio entonces dados  $a, b$  tales que  $ab \in I$

$$0 + I = ab + I = (a + I)(b + I) \iff a + I = 0 + I \text{ ó } b + I = 0 + I \iff a \in I \text{ ó } b \in I$$

es decir, si  $ab \in I$  entonces  $a \in I$  o  $b \in I$ .

3. Se sigue de (1) y (2) ya que

$$I \text{ maximal} \iff A/I \text{ cuerpo} \implies A/I \text{ dominio} \iff I \text{ primo.}$$

4. Es inmediato aplicando (1) ya que  $A \cong A/(0)$ .

5. Es inmediato aplicando (2) ya que  $A \cong A/(0)$

*Remark. La parte 3. de la proposición anterior se puede probar directamente.*

**Proof**

Supongamos que  $I$  es maximal pero no primo. Entonces existen  $a, b \in A$  tales que  $ab \in I$  pero  $a, b \notin I$ . Consideremos entonces el siguiente ideal

$$I + (a) = \{x + ay : x \in I, y \in A\}.$$

Claramente  $I \subseteq I + (a) \subseteq A$ , y claramente  $I \neq I + (a)$  ya que  $a = 0 + a1 \in I + (a)$ ,  $a \notin I$ . Pero también tenemos  $I + (a) \neq A$  ya que si no fuera así entonces existirían  $x_0 \in I, y_0 \in A$  tales que

$$x_0 + ay_0 = 1 \implies bx_0 + aby_0 = b \implies b \in I$$

ya que  $bx_0, aby_0 \in I$ , lo cual es contradictorio.

Luego  $I + (a)$  es un ideal propio que contiene a  $I$ , pero eso contradice la maximalidad de  $I$ , por tanto  $I$  debe ser primo.

**Example 3.2.4: Ejemplos en  $\mathbb{Z}$**

- Los ideales primos de  $\mathbb{Z}$  son  $(0)$  y  $(p)$  con  $p$  primo.
- Los ideales maximales de  $\mathbb{Z}$  son  $(p)$  con  $p$  primo.

**Proof**

Como sabemos que los ideales de  $\mathbb{Z}$  son de la forma  $(n)$  basta hacer unas cuantas cuentas. Sea  $(n)$  un ideal primo de  $\mathbb{Z}$ . Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $ab \in (n)$  entonces  $a \in (n)$  o  $b \in (n)$ . Notemos entonces que

$$x \in (n) \implies x = ny \implies n|x$$

por tanto la condición para que un ideal sea primo es que

$$n|ab \implies n|a \text{ ó } n|b$$

pero esto solo se cumple para  $n = 0$  o  $n$  primo, como queríamos ver.

Notemos que si  $(n) \subseteq (m)$  entonces

$$n \in (n) \subseteq (m) \implies n = my \implies m|n$$

y de igual manera, si  $m|n \implies n = my \implies (n) \subseteq (m)$ . Sea  $(n)$  un ideal maximal, entonces no existe  $m \neq \pm 1, \pm n$  tal que  $(n) \subsetneq (m) \subsetneq \mathbb{Z}$ , es decir, no existe ningún número distinto de  $\pm 1, \pm n$  que divida a  $n$ , luego  $n$  es primo como queríamos ver.

*Remark. El ejemplo anterior también se puede completar considerando los anillos cociente apropiados. Queda como ejercicio para el lector.*

**Proposition 3.2.5**

Todo ideal propio de un anillo está contenido en un ideal maximal.

**Proof**

Sea  $I$  un ideal propio de  $A$  y sea  $\Omega$  el conjunto de los ideales propios de  $A$  que contienen a  $I$ . Obsérvese que la unión de una cadena  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$  de elementos de  $\Omega$  es un ideal, que además es propio, pues si no lo fuera, contendría a  $1$  y por tanto algún  $I_n$  contendría a  $1$  en contra de que todos los  $I_n$  son ideales propios. Aplicando el Lema de Zorn deducimos que  $\Omega$  tiene un elemento maximal que obviamente es un ideal maximal de  $A$ .

*Remark.* El uso del Lema de Zorn en la demostración anterior implica que este resultado depende del Axioma de Elección. En anillos noetherianos (como  $\mathbb{Z}$  o  $K[X]$  con  $K$  cuerpo) se puede demostrar sin el Axioma de Elección.

### 3.3 Divisibilidad

#### Definition 3.3.1: Divisibilidad

Sea  $A$  un anillo y sean  $a, b \in A$ . Si existe  $c \in A$  tal que  $b = ac$  entonces se dice que  $a$  divide a  $b$  en  $A$ , o que  $a$  es un divisor de  $b$  en  $A$ , o que  $b$  es un múltiplo de  $a$  en  $A$ . Para indicar que  $a$  divide a  $b$  en  $A$  escribiremos  $a \mid b$  en  $A$ . Si el anillo  $A$  esta claro por el contexto escribiremos simplemente  $a \mid b$ .

Obsérvese que la noción de divisibilidad depende del anillo. Por ejemplo, si  $a$  es un entero diferente de 0, entonces  $a$  divide a todos los números enteros en  $\mathbb{Q}$ , pero no necesariamente en  $\mathbb{Z}$ .

#### Lemma 3.3.2

Si  $A$  es un anillo y  $a, b, c \in A$  entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. (Reflexiva)  $a \mid a$ .
2. (Transitiva) Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \mid c$ .
3.  $a \mid 0$  y  $1 \mid a$ .
4.  $0 \mid a$  si y solo si  $a = 0$ .
5.  $a \mid 1$  si y solo si  $a$  es una unidad; en este caso  $a \mid x$  para todo  $x \in A$  (es decir, las unidades dividen a cualquier elemento).
6. Si  $a \mid b$  y  $a \mid c$  entonces  $a \mid rb + sc$  para cualesquiera  $r, s \in A$  (y en particular  $a \mid b + c$ ,  $a \mid b - c$  y  $a \mid rb$  para cualquier  $r \in A$ ). Mas generalmente, si  $a$  divide a ciertos elementos, entonces divide a cualquier combinación lineal suya con coeficientes en  $A$ .
7. Si  $c$  no es divisor de cero y  $ac \mid bc$ , entonces  $a \mid b$ .

#### Proof

1.  $a = a \cdot 1$ , luego  $a \mid a$ .
2. Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$ , existen  $x, y \in A$  tales que  $b = ax$  y  $c = by$ . Entonces  $c = a(xy)$ , luego  $a \mid c$ .
3.  $0 = a \cdot 0$ , luego  $a \mid 0$ . También  $a = 1 \cdot a$ , luego  $1 \mid a$ .
4. Si  $0 \mid a$ , existe  $x \in A$  tal que  $a = 0 \cdot x = 0$ . Recíprocamente, si  $a = 0$ , entonces  $0 \mid a$  por (3).
5. Si  $a \mid 1$ , existe  $u \in A$  tal que  $1 = au$ . Entonces  $u = a^{-1}$  y  $a$  es unidad. Recíprocamente, si  $a$  es unidad, entonces  $1 = aa^{-1}$ , luego  $a \mid 1$ . Además, para cualquier  $x \in A$ ,  $x = a(a^{-1}x)$ , luego  $a \mid x$ .
6. Si  $a \mid b$  y  $a \mid c$ , existen  $x, y \in A$  tales que  $b = ax$  y  $c = ay$ . Entonces  $rb + sc = a(rx + sy)$ , luego  $a \mid rb + sc$ .
7. Si  $ac \mid bc$ , existe  $d \in A$  tal que  $bc = acd$ . Como  $c$  no es divisor de cero, podemos cancelar:  $b = ad$ , luego  $a \mid b$ .



**Definition 3.3.3: Elementos asociados**

Dos elementos  $a$  y  $b$  de un anillo  $A$  se dice que son asociados en  $A$  si se dividen mutuamente en  $A$ ; es decir, si  $a \mid b$  y  $b \mid a$  en  $A$ . Cuando este claro por el contexto en que anillo estamos trabajando, diremos simplemente que  $a$  y  $b$  son asociados.

Por ejemplo, una unidad es lo mismo que un elemento asociado a 1. Es elemental ver que «ser asociados» es una relacion de equivalencia en  $A$ , y que dos elementos son asociados si y solo si tienen los mismos divisores, si y solo si tienen los mismos múltiplos. Por lo tanto, al estudiar cuestiones de divisibilidad, un elemento tendrá las mismas propiedades que sus asociados.

**Lemma 3.3.4: Asociados en dominios**

Si  $D$  es un dominio entonces  $a, b \in D$  son asociados en  $D$  si y solo si existe una unidad  $u$  de  $D$  tal que  $b = au$ .

**Proof**

Si  $b = au$  con  $u$  unidad entonces  $a = bu^{-1}$  con lo que  $a \mid b$  y  $b \mid a$ , es decir  $a$  y  $b$  son asociados.

Recíprocamente, supongamos que  $a$  y  $b$  son asociados. Entonces  $b = au$  y  $a = bv$  para ciertos  $u, v \in D$ . Claramente si  $a$  o  $b$  es 0 entonces el otro tambien es 0, con lo que en este caso  $a = b1$ . Por otro lado, si  $a$  y  $b$  son ambos distintos de 0 tambien lo son  $u$  y  $v$  con lo que  $uv \neq 0$  por ser  $D$  un dominio. Como ademas  $auv = bv = a = a1$  y  $a$  es cancelable por ser distinto de 0 y  $D$  un dominio, deducimos que  $uv = 1$  con lo que  $u$  es una unidad de  $D$ .

Sabemos que cualquier elemento  $a$  de un anillo  $A$  es divisible por sus asociados y por las unidades de  $A$ , y que si  $a$  divide a uno de los elementos  $b$  o  $c$  entonces divide a su producto  $bc$ . A continuacion estudiamos los elementos que verifican los recíprocos de estas propiedades.

A menudo consideraremos elementos  $a$  de un anillo  $A$  que no son cero ni unidades, lo que sintetizaremos en la forma  $0 \neq a \in A \setminus A^*$ .

**Definition 3.3.5: Elementos irreducibles y primos**

Diremos que un elemento  $a$  del anillo  $A$  es irreducible si  $0 \neq a \in A \setminus A^*$  y la relacion  $a = bc$  en  $A$  implica que  $b \in A^*$  o  $c \in A^*$  (y por lo tanto que uno de los dos es asociado de  $a$ ).

Diremos que  $a$  es primo si  $0 \neq a \in A \setminus A^*$  y la relacion  $a \mid bc$  en  $A$  implica que  $a \mid b$  o  $a \mid c$ . Ambas nociones dependen del anillo ambiente, y si este no esta claro por el contexto hablaremos de irreducibles y primos en  $A$ .

**Proposition 3.3.6**

En un dominio  $A$  todo elemento primo es irreducible.

**Proof**

Sea  $p$  un elemento primo de  $A$  y supongamos que  $p = ab$ , con  $a, b \in A$ . Entonces  $p \mid ab$  y como  $p$  es primo,  $p \mid a$  o  $p \mid b$ . Supongamos que  $p \mid a$ . Entonces existe  $u \in A$  tal que  $a = pu$ . Sustituyendo en  $p = ab$  obtenemos  $p = pub$ , luego  $p(1 - ub) = 0$ . Como  $p \neq 0$  y  $A$  es dominio,  $1 - ub = 0$ , es decir,  $ub = 1$ , luego  $b$  es unidad. Esto demuestra que  $p$  es irreducible.

El recíproco no se verifica en general, como muestra el siguiente ejemplo.

### Example 3.3.7: Irreducible no implica primo: Parte 1

Veamos primero el contraejemplo y luego una justificación de cómo se llega al resultado. En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  consideremos la factorización:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Veamos que 2 es irreducible pero no primo:

- 2 es irreducible. Supongamos que  $2 = \alpha\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Considerando la norma  $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ , tenemos:

$$N(2) = 4 = N(\alpha)N(\beta).$$

Las únicas factorizaciones de 4 en enteros positivos son  $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$ . No existe ningún elemento en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  con norma 2 (pues  $a^2 + 5b^2 = 2$  no tiene soluciones enteras). Por tanto, una de las normas debe ser 1 y la otra 4. Si  $N(\alpha) = 1$ , entonces  $\alpha$  es unidad; si  $N(\beta) = 1$ , entonces  $\beta$  es unidad. Luego 2 es irreducible.

- 2 no es primo. Observemos que:

$$2 \mid 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

pero  $2 \nmid (1 + \sqrt{-5})$  y  $2 \nmid (1 - \sqrt{-5})$ , pues si  $2 \mid (1 + \sqrt{-5})$ , existiría  $\gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  tal que  $1 + \sqrt{-5} = 2\gamma$ , lo cual es imposible (comparando partes enteras e irracionales). Por tanto, 2 no es primo.

### Example 3.3.8: Irreducible no implica primo: Parte 2

En el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  hay elementos irreducibles que no son primos. Comencemos observando que el cuadrado del modulo de un elemento  $a + b\sqrt{-5}$  de  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}$  es

$$N(a + b\sqrt{-5}) = |a + b\sqrt{-5}|^2 = a^2 + 5b^2.$$

notemos además que  $N(xy) = N(x)N(y)$ .

Claramente, si  $x \mid y$  en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ , entonces  $N(x)$  divide a  $N(y)$  en  $\mathbb{Z}$ . En particular, si  $x = a + b\sqrt{-5}$  y  $N(x) = 1$  entonces

$$N(x) = a^2 + 5b^2 = 1 \implies a = \pm 1, b = 0 \implies x = \pm 1.$$

De aquí deducimos que si un cierto elemento  $u$  cumple  $uv = 1$  entonces

$$N(u)N(1) = 1 \implies N(u) = 1$$

por tanto las unidades en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  son

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : |x|^2 = 1\} = \{1, -1\}.$$

Por otro lado los cuadrados en  $\mathbb{Z}_5$  son  $0 + (5)$  y  $\pm 1 + (5)$ , y por lo tanto la congruencia

$$a^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$$

no tiene solución. Esto implica que en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  no hay elementos cuyo modulo al cuadrado valga 2, 3 o 12.

Sea ahora  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  con  $N(x) = 4$ . Si un cierto elemento  $y$  divide a  $x$ , entonces

$$y \mid x \implies N(y) \mid N(x) = 4$$

pero al estar en  $\mathbb{Z}$ ,  $N(y)$  debe valer 1, 2 o 4.

- Si  $N(y) = 1$  entonces  $y$  es una unidad.
- $N(y) = 2$  es imposible porque ya hemos visto que no hay elementos con norma 2.
- Si  $N(y) = 4$  entonces  $y$  es asociado de  $x$ . En efecto como sabemos que

$$y \mid x \implies x = ay \implies N(x) = 4 = N(a)N(y) = 4N(a)$$

es decir,  $N(a) = 1$ , luego  $a$  es una unidad y por tanto  $y = xa^{-1} \implies x \mid y$ .

Con esto hemos probado que 2 es irreducible.

De igual modo se puede ver que los elementos con modulo 6 o 9 son irreducibles, en particular lo son todos los factores de la igualdad

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Pero ninguno de ellos es primo. En concreto, de la igualdad se deduce que

$$2 \mid (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

y es claro que  $2 \nmid (1 + \sqrt{-5})$  y  $2 \nmid (1 - \sqrt{-5})$ .

### 3.3.1 Divisibilidad en términos de ideales principales. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Todas las nociones de divisibilidad que hemos presentado pueden enunciarse en terminos de los ideales principales generados por los elementos involucrados.

#### Proposition 3.3.9

Si  $D$  es un dominio y  $a, b \in D$  entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.  $a = 0$  si y solo si  $(a) = 0$ .
2.  $a \in D^*$  si y solo si  $(a) = D$ .
3.  $a \mid b$  si y solo si  $(b) \subseteq (a)$  (o si  $b \in (a)$ ).
4.  $a$  y  $b$  son asociados si y solo si  $(a) = (b)$ .
5.  $a$  es primo si y solo si  $(a)$  es un ideal primo no nulo de  $D$ .
6.  $a$  es irreducible si y solo si  $(a)$  es maximal entre los ideales principales propios no nulos de  $D$ ; es decir,  $a \neq 0$  y  $(a) \subseteq (b) \subset D$  implica  $(a) = (b)$ .

#### Proof

1. Si  $a = 0$  entonces  $(a) = \{0\} = 0$ . Recíprocamente, si  $(a) = 0$  entonces  $a \in \{0\} \implies a = 0$ .
2. Si  $a$  es unidad, existe  $a^{-1} \in D$  tal que  $aa^{-1} = 1$ , luego  $1 \in (a)$  y  $(a) = D$ . Recíprocamente, si  $(a) = D$ , entonces  $1 \in (a)$ , luego existe  $b \in D$  tal que  $ab = 1$ , por lo que  $a$  es unidad.
3. Si  $a \mid b$ , existe  $c \in D$  tal que  $b = ac$ , luego  $b \in (a)$  y  $(b) \subseteq (a)$ . Recíprocamente, si  $(b) \subseteq (a)$ , entonces  $b \in (b) \subseteq (a)$ , luego existe  $c \in D$  tal que  $b = ac$ , es decir,  $a \mid b$ .
4. Si  $a$  y  $b$  son asociados, entonces  $a \mid b$  y  $b \mid a$ , luego  $(b) \subseteq (a)$  y  $(a) \subseteq (b)$ , es decir,  $(a) = (b)$ . Recíprocamente, si  $(a) = (b)$ , entonces por (3)  $a \mid b$  y  $b \mid a$ .
5. Si  $a$  es primo, entonces  $a \neq 0$  y si  $bc \in (a)$ , entonces  $a \mid bc$ , luego  $a \mid b$  o  $a \mid c$ , es decir,  $b \in (a)$  o  $c \in (a)$ . Recíprocamente, si  $(a)$  es primo no nulo, entonces  $a \neq 0$  y si  $a \mid bc$ , entonces  $bc \in (a)$ , luego  $b \in (a)$  o  $c \in (a)$ , es decir,  $a \mid b$  o  $a \mid c$ .
6. Si  $a$  es irreducible y  $(a) \subseteq (b) \subset D$ , entonces  $a \in (b)$ , luego existe  $c \in D$  tal que  $a = bc$ . Como  $a$  es irreducible,  $b$  es unidad o  $c$  es unidad. Si  $b$  es unidad, entonces  $(b) = D$ , contradicción. Luego  $c$  es unidad y  $a$  y  $b$  son asociados, por lo que  $(a) = (b)$ . Recíprocamente, si  $a = bc$ , entonces  $(a) \subseteq (b)$ . Si  $b$  no es unidad, entonces  $(b) \subset D$ , luego por hipótesis  $(a) = (b)$ , por lo que  $a$  y  $b$  son asociados y  $c$  es unidad.

*Remark. Pregunta para el lector: ¿en algún momento hemos usado que  $D$  es un dominio?*

*Respuesta del autor: Yo diría que no, pero como no estoy seguro rezo porque siempre que tenga que usar esta proposición esté trabajando con un dominio...*

**Definition 3.3.10**

Sea  $A$  un anillo y sean  $S$  un subconjunto de  $A$  y  $a \in A$ .

1.  $a$  es un máximo común divisor de  $S$  en  $A$  si  $a$  es divisor de cada elemento de  $S$ , y múltiplo de cada elemento de  $A$  que sea divisor de todos los elementos de  $S$ .
2.  $a$  es un mínimo común múltiplo de  $S$  en  $A$  si  $a$  es múltiplo de cada elemento de  $S$ , y divisor de cada elemento de  $A$  que sea múltiplo de todos los elementos de  $S$ .

Obsérvese que no hablamos del máximo común divisor ni del mínimo común múltiplo, sino que en ambos casos usamos el artículo indeterminado un. En la siguiente proposición se precisa por qué tenemos que usar el artículo indeterminado y hasta qué punto el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo son únicos. Sin embargo, en ocasiones abusaremos del lenguaje diciendo el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo, entendiendo que son conceptos que son únicos salvo asociados. También abusaremos del lenguaje escribiendo  $d = \text{mcd}(S)$  o  $m = \text{mcm}(S)$  queriendo decir en tal caso que  $d$  es un máximo común divisor de  $S$  en  $A$  y que  $m$  es un mínimo común múltiplo de  $S$  en  $A$ , respectivamente.

**Proposition 3.3.11**

Sea  $A$  un anillo y sean  $S$  un subconjunto de  $A$  y  $a, b \in A$ . Entonces

1.  $a$  es un máximo común divisor de  $S$  en  $A$  si y solo si  $(a)$  es el menor ideal principal de  $A$  que contiene a  $S$ . En particular si  $(S) = (a)$  entonces  $a$  es el máximo común divisor de  $S$ .
2.  $a$  es un mínimo común múltiplo de  $S$  en  $A$  si y solo si  $(a)$  es el mayor ideal principal contenido en  $\bigcap_{s \in S} (s)$ . En particular, si  $(a) = \bigcap_{s \in S} (s)$  entonces  $a$  es mínimo común múltiplo de  $S$ .
3. Sea  $a$  un máximo común divisor de  $S$ . Entonces  $b$  también es máximo común divisor de  $S$  si y solo si  $a$  y  $b$  son asociados en  $A$ .
4. Sea  $a$  es un mínimo común múltiplo de  $S$ . Entonces  $b$  también es mínimo común múltiplo de  $S$  si y solo si  $a$  y  $b$  son asociados en  $A$ .
5. Si  $a$  es un divisor común de los elementos de  $S$  y  $a \in (S)$  entonces  $a = \text{mcd}(S)$ .

Obsérvese que la condición  $a \in (S)$  significa que existen elementos  $s_1, \dots, s_n \in S$  y  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que

$$a = a_1 s_1 + \dots + a_n s_n.$$

En el caso en que  $a = \text{mcd}(S)$  se dice que esta expresión es una identidad de Bezout para  $S$ .

6. Se verifica  $1 = \text{mcd}(S)$  si y solo si los únicos divisores comunes de los elementos de  $S$  son las unidades de  $A$ .
7. Si  $1 \in (S)$  (o sea,  $1$  es combinación lineal de elementos de  $S$ ) entonces  $1 = \text{mcd}(S)$ .

**Proof**

1. Usando la definición de máximo común divisor tenemos que si  $a = \text{mcd}(S)$ , entonces  $a|s$  para todo  $s \in S$ . Entonces, por el apartado (3) de 3.3.9,  $(s) \subseteq (a)$  para todo  $s \in S$ . Además, dado un ideal principal  $(b)$  tal que  $S \subseteq (b)$  se verifica

$$s \in S \subseteq (b) \implies s = bc$$

para cualquier elemento  $s \in S$ . Pero entonces  $b|s$ , por lo que  $a$  debe ser múltiplo de  $b$ , es decir  $a = bc$ , pero entonces  $(a) \subseteq (b)$  como queríamos ver.

Por el contrario, supongamos que  $(a)$  es el menor ideal principal de  $A$  que contiene a  $S$ . En concreto  $S \subseteq (a)$ , por tanto dado  $s \in S$

$$s \in (a) \implies s = ac \implies a|s$$

luego  $a$  divide a todos los elementos de  $S$ . Supongamos que  $b$  es otro elemento que también divide a todos, en tal caso

$$b|s \implies (s) \subseteq (b) \implies S \subseteq (b)$$

pero entonces por hipótesis  $(a) \subseteq (b)$ , por tanto  $a = bc$ , es decir,  $a$  es múltiplo de  $b$ , luego  $a = \text{mcd}(S)$ .

2. La demostración es similar a (1), omitimos algunos pequeños detalles.

Si  $a$  es un mcm entonces dado  $s \in S$  tenemos  $a = sx_s$ , luego  $(a) \subseteq (s)$ , por tanto

$$(a) \subseteq \bigcap_{s \in S} (s).$$

Si  $(b)$  es otro ideal tal que  $(b) \subseteq \bigcap_{s \in S} (s)$  entonces  $(b) \subseteq (s)$ , luego  $b = sy_s$  para cada  $s$  y por la definición de mcm debe ser  $a|b$ , lo cual implica

$$(b) \subseteq (a)$$

luego  $(a)$  es el máximo ideal contenido en la intersección.

Por el contrario, si  $(a)$  es el máximo ideal contenido en  $\bigcap_{s \in S} (s)$  entonces  $a \in (a) \subseteq (s) \implies a = sx_s$  para cada  $s$ . Supongamos que  $b = sy_s$  también para todo  $s \in S$ , en tal caso

$$(b) \subseteq \bigcap_{s \in S} (s) \implies (b) \subseteq (a) \implies a|b.$$

3. Claramente si  $b$  también es máximo común divisor entonces  $a = bc$ ,  $b = ad$ , luego  $b|a$ ,  $a|b$ , es decir,  $a$  y  $b$  son asociados. Si por el contrario  $a|b$ ,  $b|a$  entonces dado  $s \in S$ ,  $b|a|s \implies b|s$ , y si  $c$  es otro elemento que divide a cada  $s$  tenemos entonces  $a = cx$ , pero como  $a|b \implies b = ay = cxy$  es decir,  $b$  es también un mcd.
4. Si  $b$  también es mínimo común múltiplo entonces  $a|b$ ,  $b|a$ , luego  $a$  y  $b$  son asociados. Si por el contrario  $a|b$ ,  $b|a$  entonces  $b = ac$ , y dado  $s \in S$ ,  $a = sx_s \implies b = scx_s$ , y si  $c$  es otro elemento que es múltiplo de cada  $s$  tenemos entonces  $b|a|c$ , es decir,  $b$  es también un mcm.
5. Supongamos que  $a$  satisface la condición dada y sea  $b$  un elemento de  $A$  que divide a todos los elementos de  $S$ . Entonces divide a  $a_1s_1 + \dots + a_ks_k = a$ . Esto demuestra que  $a = \text{mcd}(S)$ .
6. Si  $1 = \text{mcd}(S)$  y  $d$  es un divisor común de los elementos de  $S$ , entonces  $d | 1$ , luego  $d$  es unidad. Recíprocamente, si los únicos divisores comunes son unidades, entonces  $1$  es un máximo común divisor.
7. Es consecuencia inmediata de (5).

### Example 3.3.12

Los recíprocos de las propiedades (5) y (7) no se verifican. Por ejemplo, los únicos divisores comunes de  $2$  y  $X$  en  $\mathbb{Z}[X]$  son  $1$  y  $-1$ , es decir las unidades de  $\mathbb{Z}[X]$ . Por tanto,  $1 = \text{mcd}(2, X)$ . Sin embargo,  $1 \notin (2, X)$ .

Si  $1 = \text{mcd}(S)$  decimos que los elementos de  $S$  son coprimos en  $A$ . Si para cada par de elementos distintos  $a, b \in S$  se verifica  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , decimos que los elementos de  $S$  son coprimos dos a dos.

### 3.4 Dominios de factorización única

#### Definition 3.4.1: Factorización en irreducibles

Sea  $D$  un dominio. Una factorización en producto de irreducibles de un elemento  $a$  de  $D$  es una expresión del tipo

$$a = up_1 \cdots p_n$$

donde  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ,  $u$  es una unidad de  $D$  y  $p_1, \dots, p_n$  son irreducibles de  $D$ . Obsérvese que se admite la posibilidad de que sea  $n = 0$ , en cuyo caso la factorización se reduce a  $a = u$  ya que, por convenio, el producto vacío es 1.

#### Definition 3.4.2: Dominio de factorización

Diremos que  $D$  es un dominio de factorización o DF si todo elemento no nulo de  $D$  admite una factorización en producto de irreducibles.

Dos factorizaciones de  $a \in D$  en producto de irreducibles se dice que son equivalentes si solo se diferencian en el orden y en asociados. Dicho con más rigor, las factorizaciones

$$a = up_1 \cdots p_n = vq_1 \cdots q_m$$

(con  $u, v \in D^*$  y el resto de factores irreducibles) son equivalentes si  $n = m$  y existe una permutación  $\sigma$  de  $N_n$  (una biyección de  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  en sí mismo) tal que  $p_i$  y  $q_{\sigma(i)}$  son asociados para cada  $i = 1, \dots, n$ .

#### Definition 3.4.3: Dominio de factorización única

Diremos que  $D$  es un dominio de factorización única o DFU (UFD, en inglés) si es un dominio de factorización en el que, para cada  $0 \neq a \in D$ , todas las factorizaciones de  $a$  son equivalentes.

#### Example 3.4.4

El Teorema Fundamental de la Aritmética simplemente nos dice que el anillo de los números enteros  $\mathbb{Z}$  es un DFU.



### Example 3.4.5

Sea  $m$  un entero positivo. Vamos a ver que  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  es un dominio de factorización. Si  $m$  es un cuadrado en  $\mathbb{Z}$  entonces  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \mathbb{Z}$  que es un dominio de factorización. Por tanto, a partir de ahora suponemos que  $m$  no es un cuadrado en  $\mathbb{Z}$  y siempre que utilicemos una expresión  $a + b\sqrt{m}$  suponemos implícitamente que  $a$  y  $b$  son enteros. Vamos a utilizar la conjugación en  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  que es la siguiente aplicación (si  $m$  es negativo, esta aplicación es la conjugación compleja, si  $m$  es positivo entonces es una aplicación diferente, que también llamaremos conjugación).

$$(\cdot) : \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{m}], \quad a + b\sqrt{m} \mapsto \overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}$$

Es fácil comprobar que esta aplicación es un homomorfismo de anillos. Además, la siguiente aplicación

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{m} \mapsto a^2 - b^2m = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m})$$

satisface  $N(xy) = N(x)N(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  ya que

$$N(xy) = (xy)\overline{(xy)} = x\bar{y}y\bar{x} = N(x)N(y)$$

usando que la conjugación es un homomorfismo.

Sea  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ . Si  $x$  es invertible en  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  entonces  $1 = N(1) = N(xx^{-1}) = N(x)N(x^{-1})$  con lo que  $N(x)$  es invertible en  $\mathbb{Z}$ , es decir  $N(x) = \pm 1$ . Recíprocamente, si  $N(x) = \pm 1$ , entonces  $x\bar{x} = \pm 1$ , con lo que  $x$  es invertible en  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ . Esto demuestra que las unidades son los elementos de norma 1

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]^* = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}] : |N(x)| = 1\}.$$

Vamos a demostrar que si  $x \neq 0$  entonces tiene una factorización en  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$  por inducción en  $|N(x)|$ . Obsérvese que  $N(x) \neq 0$  pues si  $a^2 - b^2m = 0$  entonces  $m$  es un cuadrado en  $\mathbb{Z}$  en contra de la hipótesis. Por tanto, el menor valor posible para  $|N(x)|$  es 1 y en el caso en que  $|N(x)| = 1$  entonces  $x$  es una unidad con lo que efectivamente tiene una factorización. Asumamos pues la hipótesis de inducción y supongamos que  $|N(x)| > 1$ . Entonces  $x$  no es unidad. Si  $x$  es irreducible por supuesto que tiene una factorización con lo que podemos suponer que  $x$  no es irreducible. Por tanto  $x = ab$  con  $a$  y  $b$  no unidades. Por tanto  $|N(a)|$  y  $|N(b)|$  son divisores propios de  $|N(x)|$  y por hipótesis de inducción  $a$  y  $b$  son productos de irreducibles. Luego  $x$  también es producto de irreducibles.

En el siguiente lema vemos que en un DFU los elementos irreducibles coinciden con los primos.

### Lemma 3.4.6

Si  $D$  es un DFU, entonces todo elemento irreducible de  $D$  es primo.

### Proof

Sea  $p \in D$  irreducible, y sean  $a, b \in D$  tales que  $p \mid ab$ . Se trata de ver que  $p \mid a$  o  $p \mid b$ . Esto está claro si  $a = 0$  o  $b = 0$  con lo que suponemos que ambos son diferentes de 0. Por hipótesis  $pt = ab$  para algún  $t \in D$ . Si  $t = wp_1 \cdots p_n$ ,  $a = vq_1 \cdots q_m$  y  $b = ur_1 \cdots r_k$  son factorizaciones en irreducibles (con  $w, v, u \in D^*$ ), entonces se tiene

$$pt = tp = wp_1 \cdots p_n p = (vu)q_1 \cdots q_m r_1 \cdots r_k,$$

y por la unicidad de la factorización  $p$  es asociado de algún  $q_i$  (y entonces  $p \mid a$ ) o de algún

$r_i$  (y entonces  $p \mid b$ ).

Según hemos visto en 3.4.5  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  es un DF. Sin embargo, en el Ejemplo 3.3.7 hemos visto que tiene elementos irreducibles no primos, y por tanto no es DFU.

Introducimos ahora una definición muy similar a la de factorización en irreducibles.

#### Definition 3.4.7: Factorización en primos

Sea  $D$  un dominio. Una factorización en producto de primos de un elemento  $a$  de  $D$  es una expresión del tipo

$$a = up_1 \cdots p_n$$

donde  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ,  $u$  es una unidad de  $D$  y  $p_1, \dots, p_n$  son primos de  $D$ . Obsérvese que se admite la posibilidad de que sea  $n = 0$ , en cuyo caso la factorización se reduce a  $a = u$  ya que, por convenio, el producto vacío es 1.

#### Proposition 3.4.8

Para un dominio  $D$ , las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $D$  es un dominio de factorización única.
2.  $D$  es un dominio de factorización en el que todo elemento irreducible es primo.
3. Todo elemento no nulo de  $D$  es producto de primos.

#### Proof

(1)  $\Rightarrow$  (2): Por ser un DFU,  $D$  es en concreto un DF. Además, por el Lema 3.4.6 todo elemento irreducible es primo, como queríamos ver.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sea  $0 \neq a \in D$ , como  $D$  es DF  $a$  admite una factorización en producto de irreducibles

$$a = up_1 \cdots p_n$$

y por hipótesis todos los elementos irreducibles son primos, luego los  $p_i$  son primos y por tanto  $a$  es producto de primos (salvo la unidad  $u$ ).

(3)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $0 \neq a \in D$ , por hipótesis sabemos que  $a$  es producto de primos, luego

$$a = up_1 \cdots p_k.$$

Como todo primo es irreducible esta es también una factorización en producto de irreducibles, luego  $D$  es un dominio de factorización. Supongamos que existe otra factorización

$$a = u'q_1 \cdots q_l.$$

Entonces deducimos que

$$p_1 \cdots p_k = (u'u^{-1})q_1 \cdots q_l$$

con  $w = u'u^{-1}$  una unidad. Razonamos por inducción sobre  $k$ . Si  $k = 0$  entonces necesariamente  $l = 0$ . Supongamos que  $k > 0$  y que la propiedad se verifica para factorizaciones con menos de  $k$  primos. Como  $p_k$  es primo y divide a  $q_1 \cdots q_l$  se tiene que  $p_k$  divide a algún  $q_i$  y podemos suponer que  $p_k$  divide a  $q_l$ . Como  $q_l$  es irreducible necesariamente  $p_k$  y  $q_l$  son asociados. Escribiendo  $q_l = vp_k$  y cancelando  $p_k$  obtenemos  $p_1 \cdots p_{k-1} = (wv)q_1 \cdots q_{l-1}$ . Por la hipótesis de inducción estas dos factorizaciones son equivalentes con lo que  $k = l$  y después de reordenar los  $q_i$  podemos suponer que  $p_i$  es asociado de  $q_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

# Appendix A

## Teoría de conjuntos

### A.1 Conjuntos y clases

Introducimos de manera informal en esta sección la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel (denotada NBG). Para más información consultar [?]. Las nociones primitivas en esta teoría son las de clase, pertenencia e igualdad. Intuitivamente consideramos que una clase es una colección  $A$  de objetos tal que dado un objeto cualquiera  $x$  podemos determinar si este pertenece a la clase ( $x \in A$ ) o no ( $x \notin A$ ).

Los axiomas de la teoría se formulan en terminos de estas nociones primitivas y del cálculo de predicados lógicos de primer orden (es decir, las afirmaciones construidas usando conectores de tipo *y*, *o*, *negación*, *implica*, y cuantificadores  $\forall, \exists$ ). Por ejemplo, se asume que la igualdad tiene las siguientes propiedades para cualesquiera clases  $A, B, C$ :

$$A = A, \quad A = B \implies B = A, \quad (A = B) \wedge (B = C) \implies A = C, \quad (A = B) \wedge (x \in A) \implies x \in B.$$

Por otro lado, el **axioma de extensionalidad** afirma que dos clases con los mismos elementos son iguales:

$$(x \in A \iff x \in B) \implies A = B.$$

Una clase  $A$  es un conjunto si y solo si existe una clase  $B$  tal que  $A \in B$ . Por tanto, un conjunto es un tipo particular de clase. Una clase que no es un conjunto se llama una clase propia. Informalmente un conjunto es una clase «pequeña», mientras que una clase propia es «grande». El **axioma de formación** de clases asegura que para cualquier enunciado  $P(y)$  de primer orden involucrando a la variable  $y$  existe una clase  $A$  tal que

$$x \in A \iff (x \text{ es un conjunto} \wedge x \text{ es verdadero})$$

en tal caso denotamos a la clase  $A$  como  $\{x : P(x)\}$ , llamada clase de todos los  $x$  tal que se cumple  $P(x)$ . En ocasiones podemos describir una clase listando sus elementos:  $\{a, b, c\}$ .

#### Example A.1.1: Construcción de una clase propia

Consideremos la clase  $M = \{X : X \text{ es un conjunto y } X \notin X\}$ . La afirmación  $X \notin X$  tiene sentido como predicado, de hecho muchos conjuntos la satisfacen (por ejemplo, el conjunto de todos los libros no es un libro). Veamos que  $M$  es una clase propia. En efecto, si  $M$  fuera un conjunto, entonces tendríamos que  $M \in M$  o  $M \notin M$ . Pero por la definición de  $M$ ,  $M \in M$  implica  $M \notin M$  y  $M \notin M$  implica  $M \in M$ . Así, en ambos casos, la suposición de que  $M$  es un conjunto lleva a una contradicción:  $M \in M$  y  $M \notin M$ .

Una clase  $A$  es una subclase de una clase  $B$ ,  $A \subset B$  si

$$\forall x \in A, x \in A \implies x \in B$$

por el axioma de extensionalidad y las propiedades de la igualdad tenemos

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Una subclase  $A$  de un conjunto  $B$  es un conjunto en sí misma, y en tal caso decimos que es un subconjunto.

El conjunto vacío  $\emptyset$  es el conjunto sin elementos, es decir,  $\forall x, x \notin \emptyset$ . Como la afirmación  $x \in \emptyset$  es siempre falsa tenemos de manera trivial que  $\emptyset \subset B$  para cualquier clase  $B$ . Se dice entonces que  $A$  es una subclase propia de  $B$  si  $A \subset B$  pero  $A \neq \emptyset, A \neq B$ .

El **axioma de partes** establece que para cualquier conjunto  $A$  la clase  $\mathcal{P}(A)$  de todos sus subconjuntos es ella misma un conjunto, que usualmente llamamos las partes de  $A$ .

## A.2 Uniones, intersecciones, complementos

Una familia de conjuntos indexada por una clase (no vacía)  $I$  es una colección de conjuntos  $\{A_i : i \in I\}$ . Dada una familia su unión e intersección son las clases:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &= \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}\end{aligned}$$

Si  $I$  es un conjunto entonces las construcciones anteriores son conjuntos.

Si  $A$  y  $B$  son clases su diferencia es la subclase de  $B$

$$B \setminus A = \{x : x \in B, x \notin A\}.$$

## A.3 Aplicaciones

Dadas dos clases  $A, B$  la definición de aplicación es idéntica a la ya conocida para conjuntos. Se dan por conocidos los conceptos ya conocidos de dominio, rango, restricciones, etc. Dos aplicaciones son iguales si tienen el mismo dominio, rango y asignan el mismo valor a cada elemento de su dominio común.

Dada una clase  $A$  la aplicación identidad en  $A$  (denotada  $1_A : A \rightarrow A$ ) es la aplicación dada por  $a \mapsto a$ . Si  $S \subseteq A$ , la aplicación  $1_A|_S : S \rightarrow A$  se llama la aplicación inclusión de  $S$  en  $A$ .

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  aplicaciones. La composición de  $f$  y  $g$  es la aplicación  $A \rightarrow C$  dada por

$$a \mapsto g(f(a)), \quad a \in A.$$

La aplicación compuesta se denota  $g \circ f$  o simplemente  $gf$ . Si  $h : C \rightarrow D$  es una tercera aplicación, es fácil verificar que  $h(gf) = (hg)f$ . Si  $f : A \rightarrow B$ , entonces  $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f : A \rightarrow B$ .

Un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & \swarrow g & \\ C & & \end{array}$$

se dice que es conmutativo si  $gf = h$ . De manera similar, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

es conmutativo si  $kh = gf$ . Frecuentemente se trabaja con diagramas más complicados compuestos por varios triángulos y cuadrados como los anteriores. Tal diagrama se dice conmutativo si todo triángulo y cuadrado en él es conmutativo.

Las nociones de inyectividad y sobreyectividad son las usuales. Una aplicación  $f : A \rightarrow B$  se dice inyectiva si

$$\forall a, a' \in A, \quad a \neq a' \implies f(a) \neq f(a').$$

Una aplicación  $f$  es sobreyectiva si  $f(A) = B$ ; es decir,

$$\forall b \in B, \quad b = f(a) \text{ para algún } a \in A.$$

Una aplicación  $f$  se dice biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Se sigue inmediatamente de estas definiciones que, para cualquier clase  $A$ , la aplicación identidad  $1_A : A \rightarrow A$  es biyectiva.

Enunciamos ahora el siguiente teorema que permite caracterizar las nociones anteriores en aplicación de inversas por la derecha e izquierda.

### Theorem A.3.1

Sea  $f : A \rightarrow B$  una aplicación, con  $A \neq \emptyset$ .

1.  $f$  es inyectiva si y solo si existe una aplicación  $g : B \rightarrow A$  tal que  $gf = 1_A$ .
2. Si  $A$  es un conjunto, entonces  $f$  es sobreyectiva si y solo si existe una aplicación  $h : B \rightarrow A$  tal que  $fh = 1_B$ .

La aplicación  $g$  del teorema anterior se llama una inversa por la izquierda de  $f$ , y  $h$  se llama una inversa por la derecha de  $f$ . Si una aplicación  $f : A \rightarrow B$  tiene inversas por ambos lados entonces

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h$$

y la aplicación  $g = h$  se llama la inversa de  $f$ . Este argumento también muestra que la inversa de una aplicación (si existe) es única. Por el Teorema A.3.1, si  $A$  es un conjunto y  $f : A \rightarrow B$  una aplicación, entonces

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ tiene inversa por ambos lados}$$

La única inversa de una biyección  $f$  se denota  $f^{-1}$ ; claramente  $f$  es una inversa de  $f^{-1}$ , por lo que  $f^{-1}$  también es una biyección.

*Remark.* La caracterización de biyectividad como existencia de una inversa es válida incluso cuando  $A$  es una clase propia

## A.4 Relaciones

El **axioma de formación de pares** establece que para dos conjuntos (elementos)  $a, b$ , existe un conjunto  $P = \{a, b\}$  tal que  $x \in P$  si y solo si  $x = a$  o  $x = b$ ; si  $a = b$ , entonces  $P$  es el conjunto unitario  $\{a\}$ . El par ordenado  $(a, b)$  se define como el conjunto  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ; su primera componente es  $a$  y su segunda componente es  $b$ . Es fácil verificar que  $(a, b) = (a', b')$  si y solo si  $a = a'$  y  $b = b'$ . El producto cartesiano de las clases  $A$  y  $B$  es la clase

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Nótese que  $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times B$ .

Una subclase  $R$  de  $A \times B$  se llama una relación en  $A \times B$ . Por ejemplo, si  $f : A \rightarrow B$  es una aplicación, el grafo de  $f$  es la relación  $R = \{(a, f(a)) : a \in A\}$ . Como  $f$  es una aplicación,  $R$  tiene la propiedad especial:

cada elemento de  $A$  es la primera componente de uno y solo un par ordenado en  $R$ . (\*)

Recíprocamente, cualquier relación  $R$  en  $A \times B$  que satisfaga (\*) determina una única aplicación  $f : A \rightarrow B$  cuyo grafo es  $R$  (definiendo  $f(a) = b$ , donde  $(a, b)$  es el único par ordenado en  $R$

con primera componente  $a$ ). Por esta razón es habitual identificar una aplicación con su grafo, es decir, definir una aplicación como una relación que satisface  $(*)$ .

Otra ventaja de este enfoque es que permite definir funciones con dominio vacío. Dado que  $\emptyset \times B = \emptyset$  es el único subconjunto de  $\emptyset \times B$  y satisface trivialmente  $(*)$ , existe una única aplicación  $\emptyset \rightarrow B$ . También es claro por  $(*)$  que solo puede haber una aplicación con rango vacío si el dominio también es vacío.

## A.5 Productos

*En esta sección solo tratamos con conjuntos. No hay clases propias involucradas.*

Consideremos el producto cartesiano de dos conjuntos  $A_1 \times A_2$ . Un elemento de  $A_1 \times A_2$  es un par  $(a_1, a_2)$  con  $a_i \in A_i, i = 1, 2$ . Así, el par  $(a_1, a_2)$  determina una aplicación  $f : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$  mediante:  $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ . Recíprocamente, toda aplicación  $f : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$  con la propiedad de que  $f(1) \in A_1$  y  $f(2) \in A_2$  determina un elemento  $(a_1, a_2) = (f(1), f(2))$  de  $A_1 \times A_2$ . Por lo tanto, no es difícil ver que hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las aplicaciones de este tipo y el conjunto  $A_1 \times A_2$ . Este hecho nos lleva a generalizar la noción de producto cartesiano como sigue.

### Definition A.5.1: Producto

Sea  $\{A_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos indexada por un conjunto (no vacío)  $I$ . El producto (cartesiano) de los conjuntos  $A_i$  es el conjunto de todas las aplicaciones  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  tales que  $f(i) \in A_i$  para todo  $i \in I$ . Se denota  $\prod_{i \in I} A_i$ .

Si  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , el producto  $\prod_{i \in I} A_i$  a menudo se denota por  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  y se identifica con el conjunto de todas las  $n$ -tuplas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , donde  $a_i \in A_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , como en el caso mencionado anteriormente donde  $I = \{1, 2\}$ . Una notación similar es a menudo conveniente cuando  $I$  es infinito. A veces denotaremos la aplicación  $f \in \prod_{i \in I} A_i$  por  $(a_i)_{i \in I}$  o simplemente  $(a_i)$ , donde  $f(i) = a_i \in A_i$  para cada  $i \in I$ .

Si algún  $A_i = \emptyset$ , entonces  $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$ , ya que no puede haber una aplicación  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$  tal que  $f(i) \in A_i$ . Si  $\{A_i : i \in I\}$  y  $\{B_i : i \in I\}$  son familias de conjuntos tales que  $B_i \subset A_i$  para cada  $i \in I$ , entonces toda aplicación  $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$  puede considerarse como una aplicación  $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ . Por lo tanto, consideramos  $\prod_{i \in I} B_i$  como un subconjunto de  $\prod_{i \in I} A_i$ .

### A.5.1 Caracterización del producto

Sea  $\prod_{i \in I} A_i$  un producto cartesiano. Para cada  $k \in I$ , definamos una aplicación  $\pi_k : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_k$  mediante  $f \mapsto f(k)$ , o en la otra notación,  $(a_i) \mapsto a_k$ .  $\pi_k$  se llama la proyección canónica del producto sobre su  $k$ -ésima componente. Se deja como ejercicio probar que si cada  $A_i$  es no vacío, entonces cada  $\pi_k$  es sobreyectiva.

El producto  $\prod_{i \in I} A_i$  y sus proyecciones son precisamente lo que necesitamos para el siguiente teorema

### Theorem A.5.2: Propiedad universal del producto

Sea  $\{A_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos indexada por  $I$ . Entonces existe un conjunto  $D$ , junto con una familia de aplicaciones  $\{\pi_i : D \rightarrow A_i : i \in I\}$ , con la siguiente propiedad: para cualquier conjunto  $C$  y familia de aplicaciones  $\{\varphi_i : C \rightarrow A_i : i \in I\}$ , existe una única aplicación  $\varphi : C \rightarrow D$  tal que  $\pi_i \varphi = \varphi_i$  para todo  $i \in I$ . Además,  $D$  está determinado de manera única salvo biyección.

La última frase significa que si  $D'$  es un conjunto y  $\{\pi'_i : D' \rightarrow A_i : i \in I\}$  una familia de aplicaciones que tienen la misma propiedad que  $D$  y  $\{\pi_i\}$ , entonces existe una biyección  $D \rightarrow D'$ .

### Proof

(Existencia) Sea  $D = \prod_{i \in I} A_i$  y sean las aplicaciones  $\pi_i$  las proyecciones sobre las  $i$ -ésimas componentes. Dado  $C$  y las aplicaciones  $\varphi_i$ , definamos  $\varphi : C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  por  $c \mapsto f_c$ , donde  $f_c(i) = \varphi_i(c) \in A_i$ . Se sigue inmediatamente que  $\pi_i \varphi = \varphi_i$  para todo  $i \in I$ . Para mostrar que  $\varphi$  es única, supongamos que  $\varphi' : C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  es otra aplicación tal que

$\pi_i \varphi' = \varphi_i$  para todo  $i \in I$  y demosremos que  $\varphi = \varphi'$ . Para ello, debemos mostrar que para cada  $c \in C$ ,  $\varphi(c)$  y  $\varphi'(c)$  son el mismo elemento de  $\prod_{i \in I} A_i$ , es decir,  $\varphi(c)$  y  $\varphi'(c)$  coinciden como funciones en  $I$ :  $(\varphi(c))(i) = (\varphi'(c))(i)$  para todo  $i \in I$ . Pero por hipótesis y la definición de  $\pi_i$ , tenemos para todo  $i \in I$ :

$$(\varphi'(c))(i) = \pi_i \varphi'(c) = \varphi_i(c) = f_c(i) = (\varphi(c))(i).$$

(Unicidad) Supongamos que  $D'$  (con aplicaciones  $\pi'_i : D' \rightarrow A_i$ ) tiene la misma propiedad que  $D = \prod_{i \in I} A_i$ . Si aplicamos esta propiedad (para  $D$ ) a la familia de aplicaciones  $\{\pi'_i : D' \rightarrow A_i\}$  y también la aplicamos (para  $D'$ ) a la familia  $\{\pi_i : D \rightarrow A_i\}$ , obtenemos (únicas) aplicaciones  $\varphi : D' \rightarrow D$  y  $\psi : D \rightarrow D'$  tales que los siguientes diagramas son conmutativos para cada  $i \in I$ :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & D' \\ & \searrow \pi_i & \downarrow \pi'_i \\ & & A_i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \pi'_i \downarrow & \swarrow \pi_i & \\ A_i & & \end{array}$$

Combinando estos, obtenemos para cada  $i \in I$  un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi\psi} & D \\ \varphi_i \downarrow & \swarrow \pi_i & \\ A_i & & \end{array}$$

Así,  $\varphi\psi : D \rightarrow D$  es una aplicación tal que  $\pi_i(\varphi\psi) = \pi_i$  para todo  $i \in I$ . Pero por la demostración anterior, hay una única aplicación con esta propiedad. Como la aplicación  $1_D : D \rightarrow D$  también satisface  $\pi_i 1_D = \pi_i$  para todo  $i \in I$ , debemos tener  $\varphi\psi = 1_D$  por unicidad. Un argumento similar muestra que  $\psi\varphi = 1_{D'}$ . Por lo tanto,  $\varphi$  es una biyección por (13), y  $D = \prod_{i \in I} A_i$  está determinado de manera única salvo biyección.

Nótese que el enunciado del Teorema A.5.2 no menciona elementos; involucra solo conjuntos y aplicaciones. Establece que el producto  $\prod_{i \in I} A_i$  se caracteriza por una cierta propiedad universal que cumplen todas las aplicaciones. Esta propiedad se resume en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array}$$