



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PROYECTO 1

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

18 de marzo de 2021

Índice

1. Problema 1	1
2. Problema 2	1
3. Problema 3	3
4. Problema 4	3

Resumen

En este documento nuestro equipo presenta el Proyecto 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos la solución a los cuatro problemas propuestos en el mismo.

1. Problema 1

Encontrar la matriz de transformación que produce un giro de 120 grados a un sistema de coordenadas rectangular en torno a un eje fijo (expresar sobre que eje se hace el giro). Los ejes coordenados son perpendiculares entre sí.

2. Problema 2

a. $(AB)^T = B^T A^T$

Consideremos dos matrices cuadradas $n \times n$, A y B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Utilizemos la siguiente notación:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$B = (b_{ij})_{n \times n}$$

Primero realicemos la multiplicación de matrices (AB) :

$$\begin{aligned}
AB &= (a_{ij})_{n \times n} (b_{ij})_{n \times n} \\
&= (c_{ij})_{n \times n}
\end{aligned}$$

La matriz resultante de dicho producto es la matriz $(c_{ij})_{n \times n}$, donde el término c_{ij} viene dado por la siguiente expresión:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ahora, vamos a buscar la transpuesta de la matriz AB:

$$\text{Si } (AB)^T = (c_{ij}^T)_{n \times n}$$

Por definición de matriz transpuesta, el término ij -ésimo c_{ij}^T , de la matriz $(AB)^T$ es aquel tal que:

$$c_{ij}^T = c_{ji}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
c_{ij}^T &= c_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk}
\end{aligned}$$

Prestemos atención en los siguientes b_{ki} y a_{jk} .

El elemento b_{ki} , es el mismo que el elemento tal que $b_{ki} = b_{ik}^T$.

El elemento a_{jk} , es el mismo que el elemento tal que $a_{jk} = a_{kj}^T$.

Por tanto, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned}
c_{ij}^T &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T
\end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de matrices el elemento $c_{ij}^T = \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T$ es el ij -ésimo de la multiplicación de matrices $(b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$.

Anteriormente también se mostró que c_{ij}^T es el ij -ésimo de la multiplicación de la matriz $(AB)^T$.

$\therefore (AB)^T$ y $(b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$ son matrices iguales término a término

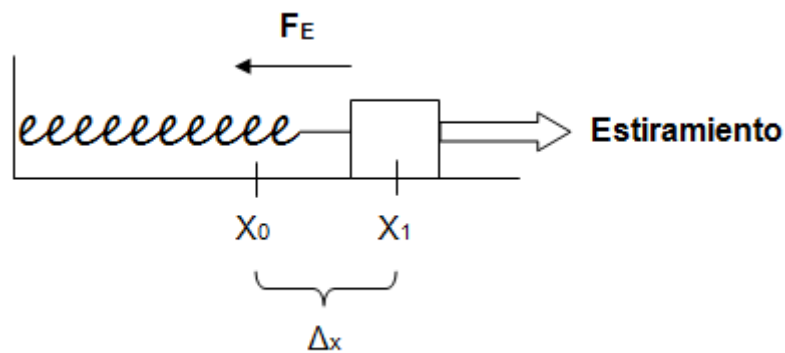
$$\Rightarrow (AB)^T = (b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$$

3. Problema 3

4. Problema 4

Un oscilador armónico se compone de una masa de 100 gramos sujeta a un muelle de constante recuperadora de 104 dinas/cm. Se desplaza la masa una distancia de 3 cm, soltándose desde el reposo. Calcule:

- Frecuencia propia ν_o
- Periodo τ_o
- Energía total
- Velocidad máxima



Por la segunda ley de Newton :

$$F = ma$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, sustituyendo:

- Frecuencia propia ν_o

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

Despejemos la variable ω_o

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordando la igualdad $\omega_o = 2\pi\nu_o$, de donde despejamos la frecuencia propia ν_o

$$\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

Sustituyendo $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en la ecuación anterior.

$$\nu_o = \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{2\pi}$$

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{(100g)}}$$

$$\nu_o = 1,6 \frac{1}{s}$$

\therefore La frecuencia propia es $\nu_o = 1,6 \frac{1}{s}$

b. Periodo τ_o

Anteriormente llegamos a la ecuación

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que $\nu_o = \frac{1}{\tau_o}$, vamos a realizar esta sustitución en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_o} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m}} \end{aligned}$$

Despejamos para el periodo τ_o :

$$\begin{aligned} \tau_o &= \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{(100g)}{(10^4 \text{ dinas/cm})}}$$

$$\nu_o = 0,62s$$

∴ El periodo es $\tau_o = 0,63$ s

c. Energía total

Como la energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética, primero buscaremos expresiones para la velocidad y la posición.

Recordemos la ecuación diferencial del sistema

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Observación: $m\ddot{x} + kx = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Y de la redacción del problema identificamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_o = 3cm$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Observación: Tenemos condiciones iniciales en $t = 0$ por tanto podemos usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x} + kx\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Recordemos que $\mathcal{L}\{0\} = 0$

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x}\} + \mathcal{L}\{kx\} = 0$$

$$m \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + k \mathcal{L}\{x\} = 0$$

Sea $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ y recordando que $x(0) = x_o = 3cm$ y $\dot{x}(0) = 0$

■ En $m \mathcal{L}\{\ddot{x}\}$:

$$m \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = m (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0))$$

$$= m (s^2 X(s) - sx_o - 0)$$

$$= ms^2 X(s) - msx_o$$

■ En $k \mathcal{L}\{x\}$:

$$k \mathcal{L}\{x\} = kX(s)$$

Sustituyemos las anteriores igualdades en la ecuación diferencial:

$$ms^2X(s) - msx_o + kX(s) = 0$$

Ahora despejamos para $X(s)$:

$$ms^2X(s) - msx_o + kX(s) = 0$$

$$ms^2X(s) + kX(s) = msx_o$$

$$X(s)(ms^2 + k) = msx_o$$

$$X(s) = \frac{msx_o}{ms^2 + k}$$

$$X(s) = \frac{msx_o}{m\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)}$$

$$X(s) = \frac{x_os}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x_os}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} \\ &= x_o \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\}\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\} = \cos(kt)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Tambien sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

Hacemos las sustituciones de las transformadas inversas de Laplace:

$$\therefore x(t) = x_o \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Ahora para determinar $\dot{x}(t)$ derivamos a $q(t)$:

$$x(t) = x_o \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} x_o \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Recordando que $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$T = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_o^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Recordando que $V = \frac{1}{2} k x^2$

$$T = \frac{1}{2} k x_o \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

Y como la energía mecánica está dada por $E = T + V$

$$E = T + V$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_o^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{1}{2} k x_o^2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

En ese sistema solo actúan fuerzas conservativas, por tanto la energía se conserva. Evaluemos la energía en el tiempo $t = 0$:

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2} (100g) \frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{m} (3cm)^2 \sin^2 \left(\sqrt{\frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{(100g)}} (0s) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (10^4 \text{ dinas/cm}) (3cm)^2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{(100g)}} (0s) \right) \\ &= \frac{1}{2} (10^4 \text{ dinas/cm}) (3cm)^2 \\ &= 45000 \text{ ergios} \end{aligned}$$

\therefore La energía total del sistema es de 45000 ergios

d. Velocidad máxima

Retomemos la ecuación de la velocidad que encontramos:

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)$$

Expresemos el módulo de la velocidad:

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \right)^2}$$

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)$$

Esta expresión alcanza su máximo cuando: $\text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = 1$

$$\|\dot{x}(t)\|_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_o$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\|\dot{x}(t)\|_{max} &= \sqrt{\frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{(100g)}}(3\text{cm}) \\ &= 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}\end{aligned}$$

\therefore La velocidad máxima es de $30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Por lo tanto:

- a. **La frecuencia propia es** $\nu_o = 1,6 \frac{1}{\text{s}}$
- b. **El periodo es** $\tau_o = 0,63 \text{ s}$
- c. **La energía total del sistema es de 45000 ergios**
- d. **La velocidad máxima es de** $30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$