



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

## TAREA 1

*Ecuaciones de movimiento*

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

February 21, 2021

# Contents

1	Problema	1
2	Solución	1
3	Ecuaciones de movimiento	4

---

## Descripción

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una partícula moviéndose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

---

## 1 Problema

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = y(t=0)$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 \cos \theta$$

$$\dot{y}(t=0) = V_0 \sin \theta$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

Hallar:  $x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)$

## 2 Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

**Empezaremos con la ecuación diferencial:**  $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\dot{x} = V_x$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$m \frac{dV_x}{dt} = -km\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -k\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{V_x} = -kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = \int -kdt$$

$$\ln(V_x) = -kt + C_1$$

Simplificando la expresión

$$e^{\ln(V_x)} = e^{-kt+C_1}$$

$$V_x = e^{-kt} e^{C_1}$$

$$V_x = C_1^* e^{-kt}$$

$$V_x(t) = C_1^* e^{-kt}$$

Evaluamos la condición inicial:

- $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 \cos \theta$

$$V_0 \cos \theta = C_1^* e^{-k(0)}$$

$$\Rightarrow C_1^* = V_0 \cos \theta$$

Sustituyendo  $C_1^* = V_0 \cos \theta$  en  $V_x(t)$

$$V_x(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

$$\therefore \dot{x}(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

Como  $\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}$ , entonces

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

$$dx = V_0 \cos \theta e^{-kt} dt$$

Integrando de ambos lados de la ecuación:

$$\int dx = \int V_0 \cos \theta e^{-kt} dt$$

$$x(t) = V_0 \cos \theta \left( \frac{e^{-kt}}{-k} \right) + C_2$$

Evaluamos la condición inicial:

- $x(0) = 0$

$$0 = V_0 \cos \theta \left( \frac{e^{-k(0)}}{-k} \right) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{V_0 \cos \theta}{k}$$

Sustituyendo  $C_2 = \frac{V_0 \cos \theta}{k}$  en  $x(t)$

$$x(t) = V_0 \cos \theta \left( \frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{V_0 \cos \theta}{k}$$

$$\therefore x(t) = \frac{V_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$$

**Para el eje vertical se procede de manera similar:**

Como  $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$  y  $\dot{y} = V_y$ :

$$m \frac{dV_y}{dt} = -kmV_y - mg$$

$$-\frac{dV_y}{dt} = kV_y + g$$

$$\int \frac{dV_y}{kV_y + g} = - \int dt$$

Se resuelve la integral de la izquierda. Sea  $u = kV_y + g$ ,  $du = k dV_y$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k} \ln(|u|) = \frac{1}{k} \ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo  $kV_y + g \geq 0$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -t + C_1$$

$$\frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -kt + C_1 \quad (C_1 = kC_1)$$

$$kV_y + g = e^{-kt} e^{C_1}$$

$$kV_y + g = C_1 e^{-kt} \quad (C_1 = e^{C_1})$$

Aplicando la condición inicial  $V_y(t=0) = V_0 \sin \theta$ :

$$k(V_0 \sin \theta) + g = C_1 e^{-k(0)}$$

$$\Rightarrow C_1 = kV_0 \sin \theta + g$$

Sustituyendo  $C_1 = kV_0 \sin \theta + g$  en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Rightarrow kV_y + g &= (kV_0 \sin \theta + g)e^{-kt} \\ V_y &= \frac{(kV_0 \sin \theta + g)e^{-kt} - g}{k} \\ V_y &= (V_0 \sin \theta)e^{-kt} + \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \dot{y}(t) = \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

Ahora, como  $V_y = \frac{dy}{dt}$ :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ \int dy &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \int e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int dt \\ y &= - \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}t + C_2\end{aligned}$$

Evalutando la condición inicial  $y(t=0) = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= - \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-k(0)} - \frac{g}{k}(0) + C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo  $C_2 = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}$  en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y(t) &= - \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}t + \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \\ \therefore y(t) &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t\end{aligned}$$

### 3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones para el desplazamiento y la velocidad respecto al tiempo son las siguientes:

- $x(t) = \frac{V_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$
- $y(t) = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$
- $\dot{x}(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$
- $\dot{y}(t) = \left( \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$