Universidad Autonoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TAREA 2

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

25 de febrero de 2021

Índice

Resumen

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 2 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema del oscilador armónico y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1. Problema del oscilador armónico

Encontrar las ecuaciones de movimiento y velocidad respecto al tiempo de un oscilador armónico simple.

Por segunda ley de Newton:

$$F = ma$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

Donde tenemos la siguiente igualdad $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, entonces:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2. Solución

Solución.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Observación: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Identificamos la ecuación característica: $m^2 + \omega_0^2 = 0$
Ahora buscamos despejar para m:

$$m^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$m^2 = -\omega_0^2$$

$$\Rightarrow m = 0 \pm \omega_0 i$$

Observación: Hemos obtenido raíces complejas conjugadas.

Identificamos $a = 0$ y $b = \omega_0$, la solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = C_1 e^{at} Cos(bt) + C_2 e^{at} Sen(bt)$$

Sustituyendo a y b:

$$x(t) = C_1 e^{(0)t} Cos((\omega_0)t) + C_2 e^{(0)t} Sen((\omega_0)t)$$

$$x(t) = C_1(1) Cos(\omega_0 t) + C_2(1) Sen(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 Cos(\omega_0 t) + C_2 Sen(\omega_0 t)$$

3. Suplemento: Otras formas de expresar la solución general de la ED

3.1. Forma 1

Considere la identidad: $Cos(\alpha - \beta) = Cos(\alpha)Cos(\beta) + Sen(\alpha)Sen(\beta)$

Ahora retomamos la solución general $x(t) = C_1 Cos(\omega_0 t) + C_2 Sen(\omega_0 t)$ y proponemos los siguientes igualdades: $C_1 = Acos(\phi)$, $C_2 = ASen(\phi)$

$$x(t) = C_1 Cos(\omega_0 t) + C_2 Sen(\omega_0 t)$$

$$x(t) = ACos(\phi)Cos(\omega_0 t) + ASen(\phi)Sen(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A\left(Cos(\phi)Cos(\omega_0 t) + Sen(\phi)Sen(\omega_0 t)\right)$$

$$x(t) = A\left(Cos(\omega_0 t)Cos(\phi) + Sen(\omega_0 t)Sen(\phi)\right)$$

Observamos la misma forma de la identidad trigonométrica planteada el inicio, entonces:

$$x(t) = ACos(\omega_0 t - \phi)$$

3.2. Forma 2

Se suponen las condiciones iniciales $x(t = 0) = A$, $\dot{x}(t = 0) = 0$.
Aplicando la condición $x(t = 0) = A$:

$$A = C_1 Cos(0) + C_2 Sen(0)$$

$$\Rightarrow C_1 = A$$

Sustituyendo $C_1 = A$ en $x(t)$:

$$x(t) = ACos(\omega_0 t) + C_2 Sen(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega_0 Sen(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 Cos(\omega_0 t)$$

Aplicando la condición inicial $\dot{x}(t = 0) = 0$:

$$0 = -A\omega_0 Sen(0) + C_2 \omega_0 Cos(0)$$

$$0 = C_2 \omega_0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

Sustituyendo $C_2 = 0$ en $x(t)$:

$$x(t) = ACos(\omega_0 t)$$

Se agrega una constante de desfase ϕ a la función $x(t)$ como desplazamiento dentro del ángulo del coseno. Esto con el fin de que la función sea compatible con cualquier sistema oscilatorio con un desfase inicial respecto al punto de equilibrio.

$$\therefore x(t) = ACos(\omega_0 t - \phi)$$

Notemos que dadas las condiciones iniciales, en este caso particular $\phi = 0$.
Si se hace uso de la identidad $Sen(x + \frac{\pi}{2}) = Cos(x)$ se puede reescribir $x(t)$ como:

$$x(t) = ASen((\omega_0 t - \phi) + \frac{\pi}{2})$$

$$x(t) = ASen(\omega_0 t - (\phi - \frac{\pi}{2}))$$

$$\therefore x(t) = ASen(\omega_0 t - \delta)$$

donde $\delta = \phi - \frac{\pi}{2}$

4. Ecuaciones de movimiento

Por lo tanto la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple es:

- $x(t) = C_1 Cos(\omega_0 t) + C_2 Sen(\omega_0 t)$

Que puede reescribirse como:

- $x(t) = ACos(\omega_0 t - \phi)$
- $x(t) = ASen(\omega_0 t - \delta)$