



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PROYECTO 1

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

22 de marzo de 2021

Índice

1. Problema 1	1
2. Problema 2	2
3. Problema 3	5
4. Problema 4	5

Resumen

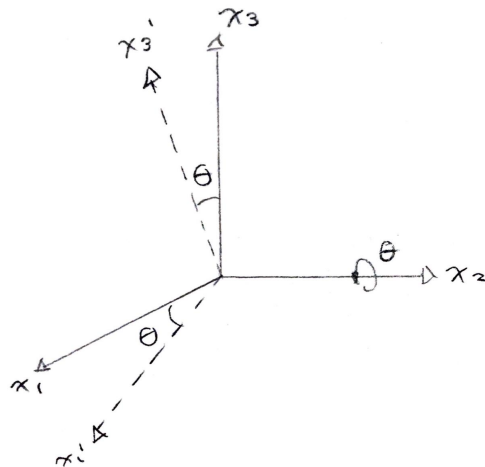
En este documento nuestro equipo presenta el Proyecto 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos la solución a los cuatro problemas propuestos en el mismo.

1. Problema 1

Encontrar la matriz de transformación que produce un giro de 120 grados a un sistema de coordenadas rectangular en torno a un eje fijo (expresar sobre que eje se hace el giro). Los ejes coordenados son perpendiculares entre sí.

Rotación de $\theta = 120^\circ$ alrededor del eje x_2 .

Utilizando cosenos directores para representar la matriz de transformación:



$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos(\theta)$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos(0) = 1$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos(\theta)$$

Entonces la matriz de transformación queda:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & 0 & -\sin(120^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(120^\circ) & 0 & \cos(120^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \lambda = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Problema 2

a. $(AB)^T = B^T A^T$

Consideremos dos matrices cuadradas nxn, A y B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Utilizemos la siguiente notación:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$B = (b_{ij})_{n \times n}$$

Primero realicemos la multiplicación de matrices (AB) :

$$\begin{aligned} AB &= (a_{ij})_{n \times n} (b_{ij})_{n \times n} \\ &= (c_{ij})_{n \times n} \end{aligned}$$

La matriz resultante de dicho producto es la matriz $(c_{ij})_{n \times n}$, donde el término c_{ij} viene dado por la siguiente expresión:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ahora, vamos a buscar la transpuesta de la matriz AB :

$$\text{Si } (AB)^T = (c_{ij}^T)_{n \times n}$$

Por definición de matriz transpuesta, el término ij -ésimo c_{ij}^T , de la matriz $(AB)^T$ es aquel tal que:

$$c_{ij}^T = c_{ji}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} c_{ij}^T &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \end{aligned}$$

Prestemos atención en los siguientes b_{ki} y a_{jk} .

El elemento b_{ki} , es el mismo que el elemento tal que $b_{ki} = b_{ik}^T$.

El elemento a_{jk} , es el mismo que el elemento tal que $a_{jk} = a_{kj}^T$.

Por tanto, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} c_{ij}^T &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T \end{aligned}$$

Por definición de multiplicación de matrices el elemento $c_{ij}^T = \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T$ es el ij -ésimo de la multiplicación de matrices $(b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$.

Anteriormente también se mostró que c_{ij}^T es el ij -ésimo de la multiplicación de la matriz $(AB)^T$.

$\therefore (AB)^T$ y $(b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$ son matrices iguales término a término

$$\Rightarrow (AB)^T = (b_{ij})_{n \times n}^T (a_{ij})_{n \times n}^T$$

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

P.D: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración.

Una manera de probar la veracidad de esta igualdad es reducir la expresión a una igualdad de identidades, así demostramos que la proposición de la que partimos es verdadera.

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por AB :

$$\Rightarrow (AB)^{-1} (AB) = B^{-1}A^{-1} (AB)$$

Por definición de matriz inversa tenemos que: $(AB)^{-1} (AB) = I$

$$\Rightarrow I = B^{-1}A^{-1} (AB)$$

Por asociatividad de matrices:

$$\begin{aligned} (B)^{-1} (A)^{-1} (AB) &= B^{-1}A^{-1} (AB) \\ &= B^{-1}A^{-1}AB \\ &= B^{-1} (A^{-1}A) B \end{aligned}$$

Por definición de matriz inversa: $A^{-1}A = I$

$$\Rightarrow I = B^{-1}IB$$

Como $IB = B$

$$\Rightarrow I = B^{-1}B$$

Por definición de matriz inversa: $B^{-1}B = I$

$$\Rightarrow I = I$$

Al reducir la expresión inicial a una igualdad de matrices identidad hemos demostrado la veracidad de la proposición inicial.

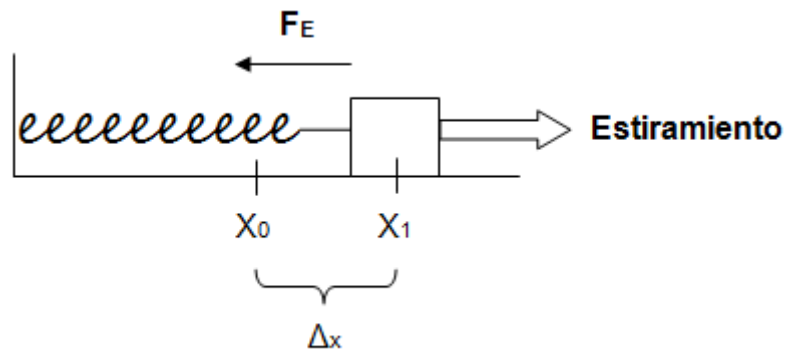
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \blacksquare$$

3. Problema 3

4. Problema 4

Un oscilador armónico se compone de una masa de 100 gramos sujeta a un muelle de constante recuperadora de 104 dinas/cm. Se desplaza la masa una distancia de 3 cm, soltándose desde el reposo. Calcule:

- Frecuencia propia ν_o
- Periodo τ_o
- Energía total
- Velocidad máxima



Por la segunda ley de Newton :

$$F = ma$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, sustituyendo:

a. Frecuencia propia ν_o

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

Despejemos la variable ω_o

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordando la igualdad $\omega_o = 2\pi\nu_o$, de donde despejamos la frecuencia propia ν_o

$$\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

Sustituyendo $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en la ecuación anterior.

$$\nu_o = \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{2\pi}$$

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(10^4 \text{ dinas/cm})}{(100g)}}$$

$$\nu_o = 1,6 \frac{1}{s}$$

\therefore La frecuencia propia es $\nu_o = 1,6 \frac{1}{s}$

b. Periodo τ_o

Anteriormente llegamos a la ecuación

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que $\nu_o = \frac{1}{\tau_o}$, vamos a realizar esta sustitución en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_o} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m}} \end{aligned}$$

Despejamos para el periodo τ_o :

$$\begin{aligned} \tau_o &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{(100g)}{(10^4 \text{ dinas/cm})}}$$

$$\nu_o = 0,62s$$

\therefore El periodo es $\tau_o = 0,63 \text{ s}$

c. Energía total

Como la energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética, primero buscaremos expresiones para la velocidad y la posición.

Recordemos la ecuación diferencial del sistema

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Observación: $m\ddot{x} + kx = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Y de la redacción del problema identificamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_o = 3cm$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Observación: Tenemos condiciones iniciales en $t = 0$ por tanto podemos usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x} + kx\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Recordemos que $\mathcal{L}\{0\} = 0$

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x}\} + \mathcal{L}\{kx\} = 0$$

$$m \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + k \mathcal{L}\{x\} = 0$$

Sea $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ y recordando que $x(0) = x_o = 3cm$ y $\dot{x}(0) = 0$

■ En $m \mathcal{L}\{\ddot{x}\}$:

$$\begin{aligned} m \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= m (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) \\ &= m (s^2 X(s) - sx_o - 0) \\ &= ms^2 X(s) - msx_o \end{aligned}$$

■ En $k \mathcal{L}\{x\}$:

$$k \mathcal{L}\{x\} = kX(s)$$

Sustituyemos las anteriores igualdades en la ecuación diferencial:

$$ms^2 X(s) - msx_o + kX(s) = 0$$

Ahora despejamos para $X(s)$:

$$ms^2 X(s) - msx_o + kX(s) = 0$$

$$ms^2 X(s) + kX(s) = msx_o$$

$$X(s) (ms^2 + k) = msx_o$$

$$X(s) = \frac{msx_o}{ms^2 + k}$$

$$X(s) = \frac{msx_o}{m(s^2 + \frac{k}{m})}$$

$$X(s) = \frac{x_o s}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x_0 s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} \\ &= x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\}\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\} = \cos(kt)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Tambien sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$

Hacemos las sustituciones de las transformadas inversas de Laplace:

$$\therefore x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Ahora para determinar $\dot{x}(t)$ derivamos a $q(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \therefore \dot{x}(t) &= -\sqrt{\frac{k}{m}}x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\end{aligned}$$

Recordando que $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$T = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Recordando que $V = \frac{1}{2}kx^2$

$$T = \frac{1}{2}kx_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Y como la energía mecánica está dada por $E = T + V$

$$\begin{aligned}E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_0^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\end{aligned}$$

En ese sistema solo actúan fuerzas conservativas, por tanto la energía se conserva. Evaluemos la energía en el tiempo $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 E(0) &= \frac{1}{2}(100g)\frac{(10^4 \text{dinas/cm})}{m}(3\text{cm})^2 \text{Sen}^2 \left(\sqrt{\frac{(10^4 \text{dinas/cm})}{(100g)}}(0\text{s}) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(10^4 \text{dinas/cm})(3\text{cm})^2 \text{Cos}^2 \left(\sqrt{\frac{(10^4 \text{dinas/cm})}{(100g)}}(0\text{s}) \right) \\
 &= \frac{1}{2}(10^4 \text{dinas/cm})(3\text{cm})^2 \\
 &= 45000 \text{ergios}
 \end{aligned}$$

\therefore La energía total del sistema es de 45000 ergios

d. Velocidad máxima

Retomemos la ecuación de la velocidad que encontramos:

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)$$

Expresemos el módulo de la velocidad:

$$\begin{aligned}
 \|\dot{x}(t)\| &= \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \right)^2} \\
 \|\dot{x}(t)\| &= \sqrt{\frac{k}{m}}x_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)
 \end{aligned}$$

Esta expresión alcanza su máximo cuando: $\text{Sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = 1$

$$\|\dot{x}(t)\|_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_o$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 \|\dot{x}(t)\|_{\max} &= \sqrt{\frac{(10^4 \text{dinas/cm})}{(100g)}}(3\text{cm}) \\
 &= 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

\therefore La velocidad máxima es de $30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Por lo tanto:

- a. La frecuencia propia es $\nu_o = 1,6 \frac{1}{s}$
- b. El periodo es $\tau_o = 0,63 \text{ s}$
- c. La energía total del sistema es de 45000 ergios
- d. La velocidad máxima es de $30 \frac{cm}{s}$