Universidad Autonoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tarea 1

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

February 21, 2021

Contents

Descripción

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una particula moviendose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

---

1 Problema

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = y(t=0)$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 Cos\theta$$

$$\dot{y}(t=0) = V_0 Sen\theta$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

Hallar: $x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)$

2 Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

Empezaremos con la ecuación diferencial: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\dot{x} = V_x$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$m\frac{dV_x}{dt} = -km\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -k\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{V_x} = -kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = \int -kdt$$

$$ln(V_x) = -kt + C_1$$

Simplificando la expresión

$$e^{ln(V_x)} = e^{-kt+C_1}$$

$$V_x = e^{-kt}e^{C_1}$$

$$V_x = C_1^* e^{-kt}$$

$$V_x(t) = C_1^* e^{-kt}$$

Evaluamos la condición inicial:

- $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 cos\theta$

$$V_0 cos\theta = C_1^* e^{-k(0)}$$

$$\to C_1^* = V_0 cos\theta$$

Sustituyendo $C_1^* = V_0 cos\theta$ en $V_x(t)$

$$V_x(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$$

$$\therefore \dot{x}(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$$

Como $\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = V_0 cos\theta e^{-kt}$$

$$dx = V_0 cos\theta e^{-kt} dt$$

Integrando de ambos lados de la ecuación:

$$\int dx = \int V_0 cos\theta e^{-kt} dt$$

$$x(t) = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right) + C_2$$

Evaluamos la condición inicial:

- $x(0) = 0$

$$0 = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-k(0)}}{-k} \right) + C_2$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{V_0 cos\theta}{k}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{V_0 cos\theta}{k}$ en $x(t)$

$$x(t) = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{V_0 cos\theta}{k}$$

$$\therefore x(t) = \frac{V_0 cos\theta}{k} \left(1 - e^{-kt}\right)$$

Para el desplazamiento vertical se procede de la siguiente forma:

Como $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ y $\dot{y} = V_y$:

$$m\frac{dV_y}{dt} = -kmV_y - mg$$

$$-\frac{dV_y}{dt} = kV_y + g$$

$$\int \frac{dV_y}{kV_y + g} = -\int dt$$

Se resuelve la integral de la izquierda. Sea $u = kV_y + g$, $du = kdV_y$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k} \ln(|u|) = \frac{1}{k} \ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo $kV_y + g \geq 0$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -t + C_1$$

$$\frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -kt + C_1 \qquad (C_1 = kC_1)$$

$$kV_y + g = e^{-kt} e^{C_1}$$

$$kV_y + g = C_1 e^{-kt} \qquad (C_1 = e^{C_1})$$

Aplicando la condición incial $V_y(t = 0) = V_0 \sin\theta$:

$$k(V_0 \sin\theta) + g = C_1 e^{-k(0)}$$

$$\Rightarrow C_1 = kV_0 \sin\theta + g$$

Sustituyendo $C_1 = kV_0 \sin\theta + g$ en la ecuación original:

$$\Rightarrow kV_y + g = (kV_0 \sin\theta + g)e^{-kt}$$

$$V_y = \frac{(kV_0 \sin\theta + g)e^{-kt} - g}{k}$$

$$V_y = (V_0 \sin\theta)e^{-kt} + \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$\therefore \dot{y}(t) = \left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

Ahora, como $V_y = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$\int dy = \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k} \int e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int dt$$

$$y = -\left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}t + C_2$$

Evaluando la condición inicial $y(t = 0) = 0$:

$$0 = -\left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}\right) e^{-k(0)} - \frac{g}{k}(0) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}$ en la ecuación original:

$$\Rightarrow y(t) = -\left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}t + \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}$$

$$\therefore y(t) = \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$$

3 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones para el desplazamiento y la velocidad respecto al tiempo son las siguientes:

- $x(t) = \frac{V_0 cos\theta}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$
- $y(t) = \frac{kV_0 \sin\theta + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t$
- $\dot{x}(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$
- $\dot{y}(t) = \left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$