



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TAREA 1

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

21 de febrero de 2021

Índice

| | |
|-----------------------------|---|
| 1. Problema | 1 |
| 2. Solución | 1 |
| 3. Ecuaciones de movimiento | 4 |

Resumen

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una partícula moviéndose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1. Problema

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = y(t=0)$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 \cos \theta$$

$$\dot{y}(t=0) = V_0 \sin \theta$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

Hallar: $x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)$

2. Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

Empezaremos con la ecuación diferencial: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\dot{x} = V_x$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$m \frac{dV_x}{dt} = -km\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -k\dot{x}$$

$$\frac{dV_x}{V_x} = -kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = \int -kdt$$

$$\ln(V_x) = -kt + C_1$$

Simplificando la expresión

$$e^{\ln(V_x)} = e^{-kt+C_1}$$

$$V_x = e^{-kt} e^{C_1}$$

$$V_x = C_1^* e^{-kt}$$

$$V_x(t) = C_1^* e^{-kt}$$

Evaluamos la condición inicial:

$$\blacksquare \dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 \cos \theta$$

$$V_0 \cos \theta = C_1^* e^{-k(0)}$$

$$\Rightarrow C_1^* = V_0 \cos \theta$$

Sustituyendo $C_1^* = V_0 \cos \theta$ en $V_x(t)$

$$V_x(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

$$\therefore \dot{x}(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

Como $\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

$$dx = V_0 \cos \theta e^{-kt} dt$$

Integrando de ambos lados de la ecuación:

$$\int dx = \int V_0 \cos \theta e^{-kt} dt$$

$$x(t) = V_0 \cos \theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + C_2$$

Evaluamos la condición inicial:

■ $x(0) = 0$

$$0 = V_0 \cos \theta \left(\frac{e^{-k(0)}}{-k} \right) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{V_0 \cos \theta}{k}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{V_0 \cos \theta}{k}$ en $x(t)$

$$x(t) = V_0 \cos \theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{V_0 \cos \theta}{k}$$

$$\therefore x(t) = \frac{V_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$$

Para el eje vertical se procede de manera similar:

Como $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ y $\dot{y} = V_y$:

$$m \frac{dV_y}{dt} = -kmV_y - mg$$

$$-\frac{dV_y}{dt} = kV_y + g$$

$$\int \frac{dV_y}{kV_y + g} = - \int dt$$

Se resuelve la integral de la izquierda. Sea $u = kV_y + g$, $du = k dV_y$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k} \ln(|u|) = \frac{1}{k} \ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo $kV_y + g \geq 0$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -t + C_1$$

$$\frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -kt + C_1 \quad (C_1 = kC_1)$$

$$kV_y + g = e^{-kt} e^{C_1}$$

$$kV_y + g = C_1 e^{-kt} \quad (C_1 = e^{C_1})$$

Aplicando la condición inicial $V_y(t=0) = V_0 \sin \theta$:

$$k(V_0 \sin \theta) + g = C_1 e^{-k(0)}$$

$$\Rightarrow C_1 = kV_0 \sin \theta + g$$

Sustituyendo $C_1 = kV_0 \sin \theta + g$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Rightarrow kV_y + g &= (kV_0 \sin \theta + g)e^{-kt} \\ V_y &= \frac{(kV_0 \sin \theta + g)e^{-kt} - g}{k} \\ V_y &= (V_0 \sin \theta)e^{-kt} + \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}\end{aligned}$$

$$\therefore \dot{y}(t) = \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

Ahora, como $V_y = \frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ \int dy &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \int e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int dt \\ y &= - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + C_2\end{aligned}$$

Evalutando la condición inicial $y(t=0) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-k(0)} - \frac{g}{k}(0) + C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y(t) &= - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \\ \therefore y(t) &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t\end{aligned}$$

3. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones para el desplazamiento y la velocidad respecto al tiempo son las siguientes:

- $x(t) = \frac{V_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$
- $y(t) = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$
- $\dot{x}(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$
- $\dot{y}(t) = \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$