



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TAREA 3

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

18 de abril de 2021

Índice

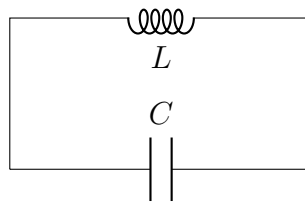
1. Problema del oscilador armónico	1
2. Solución	1
3. Ecuaciones de movimiento	4

Resumen

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 3 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de un oscilador y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1. Problema del oscilador armónico

Encontrar las ecuaciones de movimiento y velocidad respecto al tiempo del siguiente oscilador armónico:



Por la ley de Kirchhoff:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0$$

Donde $I(t) = \dot{q}$

2. Solución

Solución.

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

Observación: $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Observación: Tenemos condiciones iniciales en $t = 0$ por tanto podemos usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

Primeramente aplicamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L} \left\{ L\ddot{q} + \frac{1}{C}q \right\} = \mathcal{L} \{0\}$$

Como $\mathcal{L} \{0\} = 0$

$$\mathcal{L} \{L\ddot{q}\} + \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{C}q \right\} = 0$$

$$L \mathcal{L} \{\ddot{q}\} + \frac{1}{C} \mathcal{L} \{q\} = 0$$

Sea $\mathcal{L}\{q(t)\} = Q(s)$ y recordando que $q(0) = q_o$ y $I(0) = \dot{q}(0) = 0$

■ En $L \mathcal{L} \{\ddot{q}\}$:

$$\begin{aligned} L \mathcal{L} \{\ddot{q}\} &= L (s^2 Q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)) \\ &= L (s^2 Q(s) - sq_o - 0) \\ &= Ls^2 Q(s) - Lsq_o \end{aligned}$$

■ En $\frac{1}{C} \mathcal{L} \{q\}$:

$$\frac{1}{C} \mathcal{L} \{q\} = \frac{1}{C} Q(s)$$

Sustituyemos las anteriores igualdades en la ecuación diferencial:

$$Ls^2 Q(s) - Lsq_o + \frac{1}{C} Q(s) = 0$$

Ahora despejamos para $Q(s)$:

$$Ls^2 Q(s) - Lq_o s + \frac{1}{C} Q(s) = 0$$

$$Ls^2 Q(s) + \frac{1}{C} Q(s) = Lq_o s$$

$$Q(s) \left(Ls^2 + \frac{1}{C} \right) = Lq_0s$$

$$Q(s) \left(\frac{CLs^2 + 1}{C} \right) = Lq_0s$$

$$Q(s) = \frac{CLq_0s}{CLs^2 + 1}$$

$$Q(s) = \frac{CLq_0s}{CL \left(s^2 + \frac{1}{CL} \right)}$$

$$Q(s) = \frac{q_0s}{s^2 + \frac{1}{CL}}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{q_0s}{s^2 + \frac{1}{CL}} \right\} \\ &= q_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{CL}} \right\} \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + k^2} \right\} = \cos(kt)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2 + \frac{1}{CL}} \right\} = \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

Tambien sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = q(t)$

Hacemos las sustituciones de las transformadas inversas de Laplace:

$$\therefore q(t) = q_0 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

Ahora para determinar $\dot{q}(t)$ derivamos a $q(t)$:

$$q(t) = q_0 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

$$\therefore \dot{q}(t) = -\sqrt{\frac{1}{CL}}q_0 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

3. Ecuaciones de movimiento

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento del oscilador son:

- $q(t) = q_o \text{Cos} \left(\sqrt{\frac{1}{CL}} t \right)$
- $\dot{q}(t) = -\sqrt{\frac{1}{CL}} q_o \text{Sen} \left(\sqrt{\frac{1}{CL}} t \right)$