Universidad Autonoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tarea 1

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

February 21, 2021

Contents

Descripción

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una particula moviendose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1 Problema

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = y(t=0)$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0 Cos\theta$$
$$\dot{y}(t=0) = V_0 Sen\theta$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

Hallar: $x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t)$

2 Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

Empezaremos con la ecuación diferencial: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\dot{x} = V_x$$
$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$m\frac{dV_x}{dt} = -km\dot{x}$$
$$\frac{dV_x}{dt} = -k\dot{x}$$
$$\frac{dV_x}{V_x} = -kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = \int -kdt$$
$$ln(V_x) = -kt + C_1$$

Simplificando la expresión

$$e^{ln(V_x)} = e^{-kt+C_1}$$
$$V_x = e^{-kt}e^{C_1}$$
$$V_x = C_1^* e^{-kt}$$
$$V_x(t) = C_1^* e^{-kt}$$

Evaluamos la condición inicial:

- $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 cos\theta$

$$V_0 cos\theta = C_1^* e^{-k(0)}$$
$$\rightarrow C_1^* = V_0 cos\theta$$

Sustituyendo $C_1^* = V_0 cos\theta$ en $V_x(t)$

$$V_x(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$$
$$\therefore \dot{x}(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$$

Como $\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = V_0 cos\theta e^{-kt}$$
$$dx = V_0 cos\theta e^{-kt} dt$$

Integrando de ambos lados de la ecuación:

$$\int dx = \int V_0 cos\theta e^{-kt} dt$$
$$x(t) = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right) + C_2$$

Evaluamos la condición inicial:

- $x(0) = 0$

$$0 = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-k(0)}}{-k}\right) + C_2$$
$$\rightarrow C_2 = \frac{V_0 cos\theta}{k}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{V_0 cos\theta}{k}$ en $x(t)$

$$x(t) = V_0 cos\theta \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{V_0 cos\theta}{k}$$
$$\therefore x(t) = \frac{V_0 cos\theta}{k} \left(1 - e^{-kt} \right)$$

Para el desplazamiento vertical se procede de la siguiente forma:
Como $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ y $\dot{V_y}$:

$$m\frac{dV_y}{dt} = -kmV_y - mg$$
$$-\frac{dV_y}{dt} = kV_y + g$$
$$\int \frac{dV_y}{kV_y + g} = -\int dt$$

Resolviendo la integral de la izquierda: Sea $u = kV_y + g$, $du = kdV_y$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k} \ln(|u|) = \frac{1}{k} \ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo $kV_y + g \geq 0$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -t + C_1$$
$$\frac{1}{k} \ln(kV_y + g) = -kt + C_1 \qquad (C_1 = kC_1)$$
$$kV_y + g = e^{-kt} e^{C_1}$$
$$kV_y + g = C_1 e^{-kt} \qquad (C_1 = e^{C_1})$$