Universidad Autonoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tarea 1

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

February 21, 2021

Contents

Descripción

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una particula moviendose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

---

1 Introduction

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = y(t=0)$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0 Cos\theta$$
$$\dot{y}(t=0) = V_0 Sen\theta$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

Hallar: $X(t), \dot{X}(t), Y(t), \dot{Y}(t)$

2 Problema

3 Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

Empezaremos con la ecuación diferencial: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\dot{x} = V_x$$
$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$m\frac{dV_x}{dt} = -km\dot{x}$$
$$\frac{dV_x}{dt} = -k\dot{x}$$
$$\frac{dV_x}{V_x} = -kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\int \frac{dV_x}{V_x} = \int -kdt$$
$$ln(V_x) = -kt + C_1$$

Simplificando la expresión

$$e^{ln(V_x)} = e^{-kt+C_1}$$
$$V_x = e^{-kt}e^{C_1}$$
$$V_x = C_1^* e^{-kt}$$
$$V_x(t) = C_1^* e^{-kt}$$

Evaluamos la condición inicial:

- $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 cos\theta$

$$V_0 cos\theta = C_1^* e^{-k(0)}$$
$$\implies C_1^* = V_0 cos\theta$$

Sustituyendo $C_1^* = V_0 cos\theta$ en $V_x(t)$

$$\therefore V_x(t) = V_0 cos\theta e^{-kt}$$

Para el desplazamiento vertical se procede de la siguiente forma:

Como $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ y $\dot{y} = V_y$:

$$m\frac{dV_y}{dt} = -kmV_y - mg$$
$$-\frac{dV_y}{dt} = kV_y + g$$
$$\int \frac{dV_y}{kV_y + g} = -\int dt$$

Se resuelve la integral de la izquierda. Sea $u = kV_y + g$, $du = kdV_y$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{k}\ln(|u|) = \frac{1}{k}\ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo $kV_y + g \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{k}\ln(kV_y + g) &= -t + C_1 \\
\frac{1}{k}\ln(kV_y + g) &= -kt + C_1 && (C_1 = kC_1) \\
kV_y + g &= e^{-kt}e^{C_1} \\
kV_y + g &= C_1 e^{-kt} && (C_1 = e^{C_1})
\end{aligned}$$

Aplicando la condición incial $V_y(t=0) = V_0 \sin\theta$:

$$\begin{aligned}
k(V_0 \sin\theta) + g &= C_1 e^{-k(0)} \\
\Rightarrow C_1 &= kV_0 \sin\theta + g
\end{aligned}$$

Sustituyendo $C_1 = kV_0 \sin\theta + g$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow kV_y + g &= (kV_0 \sin\theta + g)e^{-kt} \\
V_y &= \frac{(kV_0 \sin\theta + g)e^{-kt} - g}{k} \\
V_y &= (V_0 \sin\theta)e^{-kt} + \frac{g}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k}
\end{aligned}$$

$$\therefore V_y(t) = \left(\frac{kV_0 \sin\theta + g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$