Universidad Autonoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Tarea 3

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

2 de marzo de 2021

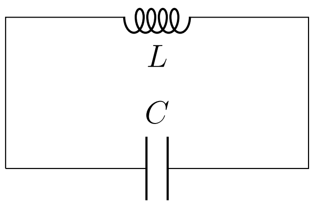
Índice

Resumen

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 3 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de un oscilador y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1. Problema del oscilador armónico

Encontrar las ecuaciones de movimiento y velocidad respecto al tiempo del siguiente oscilador armónico:



Por la ley de Kirchhoff:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt = 0$$

Donde $I(t) = \dot{q}$

2. Solución

Solución.

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

Observación: $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Observación: Tenemos condiciones iniciales en $t = 0$ por tanto podemos usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

Primeramente aplicamos la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación:

$$\mathscr{L}\left\{L\ddot{q} + \frac{1}{C}q\right\} = \mathscr{L}\left\{0\right\}$$

Como $\mathscr{L}\left\{0\right\} = 0$

$$\mathscr{L}\left\{L\ddot{q}\right\} + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{C}q\right\} = 0$$

$$L\,\mathscr{L}\left\{\ddot{q}\right\} + \frac{1}{C}\,\mathscr{L}\left\{q\right\} = 0$$

Sea $\mathscr{L}\{q(t)\} = Q(s)$ y recordando que $q(0) = q_o$ y $I(0) = \dot{q}(0) = 0$

- En $L\,\mathscr{L}\left\{\ddot{q}\right\}$:

$$\begin{aligned} L\,\mathscr{L}\left\{\ddot{q}\right\} &= L\left(s^2Q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)\right) \\ &= L\left(s^2Q(s) - sq_o - 0\right) \\ &= Ls^2Q(s) - Lsq_o \end{aligned}$$

- En $\frac{1}{C}\,\mathscr{L}\left\{q\right\}$:

$$\frac{1}{C}\,\mathscr{L}\left\{q\right\} = \frac{1}{C}Q(s)$$

Sustituyemos las anteriores igualdades en la ecuación diferencial:

$$Ls^2Q(s) - Lsq_o + \frac{1}{C}Q(s) = 0$$

Ahora despejamos para $Q(s)$:

$$Ls^2Q(s) - Lq_os + \frac{1}{C}Q(s) = 0$$

$$Ls^2Q(s) + \frac{1}{C}Q(s) = Lq_os$$

$$Q(s)\left(Ls^2+\frac{1}{C}\right)=Lq_os$$

$$Q(s)\left(\frac{CLs^2+1}{C}\right)=Lq_os$$

$$Q(s)=\frac{CLq_os}{CLs^2+1}$$

$$Q(s)=\frac{CLq_os}{CL\left(s^2+\frac{1}{CL}\right)}$$

$$Q(s)=\frac{q_os}{s^2+\frac{1}{CL}}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{q_os}{s^2+\frac{1}{CL}}\right\}$$

$$=q_o\,\mathscr{L}^{1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{CL}}\right\}$$

Como $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}=Cos(kt)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{CL}}\right\}=Cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

Tambien sabemos que $\mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\}=q(t)$
Hacemos las sustituciones de las transformadas inversas de Laplace:

$$\therefore q(t)=q_oCos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

Ahora para determinar $\dot{q}(t)$ derivamos a $q(t)$:

$$q(t)=q_oCos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

$$\therefore \dot{q}(t)=-\sqrt{\frac{1}{CL}}q_oSen\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$$

3. Ecuaciones de movimiento

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento del oscilador son:

- $q(t) = q_o Cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$
- $\dot{q}(t) = -\sqrt{\frac{1}{CL}}q_o Sen\left(\sqrt{\frac{1}{CL}}t\right)$