



Universidad Autónoma de Nuevo León

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TAREA 1

Ecuaciones de movimiento

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

February 21, 2021

Contents

1	Introduction	1
2	Problema	1
3	Solución	1

Descripción

En este documento nuestro equipo presenta la tarea 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos el problema de una partícula moviéndose en un medio resistente y encontramos sus ecuaciones de movimiento.

1 Introduction

Encontrar las ecuaciones de para la velocidad respecto al tiempo y el movimiento respecto al tiempo de una partícula que se mueve en un medio resistente en una trayectoria parabólica con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x(t=0) &= 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) &= V_0 \cos\theta \\ \dot{y}(t=0) &= V_0 \sin\theta\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento que describen la trayectoria del sistema son:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg\end{aligned}$$

Hallar: $X(t), \dot{X}(t), Y(t), \dot{Y}(t)$

2 Problema

3 Solución

Observamos un sistema desacoplado de dos ecuaciones diferenciales.

Empezaremos con la ecuación diferencial: $m\ddot{x} = -km\dot{x}$

Por comodidad usaremos momentaneamente la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x \\ \ddot{x} &= \frac{dV_x}{dt}\end{aligned}$$

Empezamos realizando una sustitución y simplificamos

$$\begin{aligned}
m \frac{dV_x}{dt} &= -km\dot{x} \\
\frac{dV_x}{dt} &= -k\dot{x} \\
\frac{dV_x}{V_x} &= -kdt
\end{aligned}$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\int \frac{dV_x}{V_x} &= \int -kdt \\
\ln(V_x) &= -kt + C_1
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión

$$\begin{aligned}
e^{\ln(V_x)} &= e^{-kt+C_1} \\
V_x &= e^{-kt} e^{C_1} \\
V_x &= C_1^* e^{-kt} \\
V_x(t) &= C_1^* e^{-kt}
\end{aligned}$$

Evalúamos la condición inicial:

- $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0 \cos \theta$

$$\begin{aligned}
V_0 \cos \theta &= C_1^* e^{-k(0)} \\
\Rightarrow C_1^* &= V_0 \cos \theta
\end{aligned}$$

Sustituyendo $C_1^* = V_0 \cos \theta$ en $V_x(t)$

$$\therefore V_x(t) = V_0 \cos \theta e^{-kt}$$

Para el desplazamiento vertical se procede de la siguiente forma:

Como $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}$ y $\dot{y} = V_y$:

$$\begin{aligned}
m \frac{dV_y}{dt} &= -kmV_y - mg \\
-\frac{dV_y}{dt} &= kV_y + g \\
\int \frac{dV_y}{kV_y + g} &= - \int dt
\end{aligned}$$

Se resuelve la integral de la izquierda. Sea $u = kV_y + g$, $du = k dV_y$:

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{k} \ln(|u|) = \frac{1}{k} \ln(|kV_y + g|)$$

Asumiendo $kV_y + g \geq 0$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) &= -t + C_1 \\ \frac{1}{k} \ln(kV_y + g) &= -kt + C_1 & (C_1 = kC_1) \\ kV_y + g &= e^{-kt} e^{C_1} \\ kV_y + g &= C_1 e^{-kt} & (C_1 = e^{C_1})\end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial $V_y(t=0) = V_0 \sin \theta$:

$$\begin{aligned}k(V_0 \sin \theta) + g &= C_1 e^{-k(0)} \\ \Rightarrow C_1 &= kV_0 \sin \theta + g\end{aligned}$$

Sustituyendo $C_1 = kV_0 \sin \theta + g$ en la ecuación original:

$$\begin{aligned}\Rightarrow kV_y + g &= (kV_0 \sin \theta + g) e^{-kt} \\ V_y &= \frac{(kV_0 \sin \theta + g) e^{-kt} - g}{k} \\ V_y &= (V_0 \sin \theta) e^{-kt} + \frac{g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}\end{aligned}$$

$$\therefore V_y(t) = \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

Ahora, como $V_y = \frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \\ \int dy &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k} \int e^{-kt} dt - \frac{g}{k} \int dt \\ y &= - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + C_2\end{aligned}$$

Evalutando la condición inicial $y(t=0) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-k(0)} - \frac{g}{k} (0) + C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}$ en la ecuación original:

$$\Rightarrow y(t) = - \left(\frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2}$$

$$\therefore y(t) = \frac{kV_0 \sin \theta + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$