Universidad Autonoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Proyecto 1

Autores:

Jesús Eduardo Loera Casas 1898887

Cesar Efrén Valladares Rocha 1841555

Vrani Chavez Islas 1990044

24 de marzo de 2021

Índice

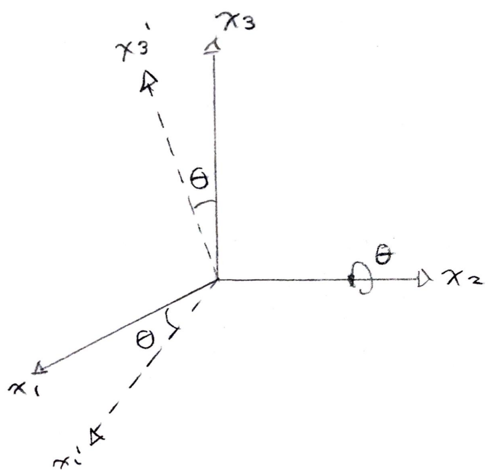
Resumen

En este documento nuestro equipo presenta el Proyecto 1 del curso de mecánica teórica, donde planteamos la solución a los cuatro problemas problemas propuestos en el mismo.

1. Problema 1

Encontrar la matriz de transformación que produce un giro de 120 grados a un sistema de coordenadas rectangular en torno a un eje fijo (expresar sobre que eje se hace el giro). Los ejes coordenados son perpendiculares entre sí.

Rotación de $\theta = 120°$ alrededor del eje x_2.
Utilizando cosenos directores para representar la matriz de transformación:



$$\lambda_{11} = \cos(x_1', x_1) = \cos(\theta)$$

$$\lambda_{12} = \cos(x_1', x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x_1', x_3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$

$$\lambda_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x_2', x_2) = \cos(0) = 1$$

$$\lambda_{23} = \cos(x_2', x_3) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{31} = \cos(x_3', x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\lambda_{32} = \cos(x_3', x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_{33} = \cos(x_3', x_3) = \cos(\theta)$$

Entonces la matriz de transformación queda:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(120°) & 0 & -\text{sen}(120°) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(120°) & 0 & \cos(120°) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \lambda = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Problema 2

a. $(AB)^T = B^T A^T$

Consideremos dos matrices cuadradas nxn, A y B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Utilizemos la siguiente notación:

$$A = (a_{ij})_{nxn}$$

$$B = (b_{ij})_{nxn}$$

Primero realicemos la multiplicacion de matrices (AB):

$$AB = (a_{ij})_{nxn}(b_{ij})_{nxn}$$
$$= (c_{ij})_{nxn}$$

La matriz resultante de dicho producto es la matriz $(c_{ij})_{nxn}$, donde el término c_{ij} viene dado por la siguiente expresión:

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Ahora, vamos a buscar la transpuesta de la matriz AB:

Si $(AB)^T = \left(c_{ij}^T\right)_{nxn}$

Por defición de matriz transpuesta, el término ij-ésimo c_{ij}^T, de la matriz $(AB)^T$ es aquel tal que:

$$c_{ij}^T = c_{ji}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$c_{ij}^T = c_{ji}$$
$$= \Sigma_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$
$$= \Sigma_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

Prestemos atención en los siguientes b_{ki} y a_{jk}.

El elemento b_{ki}, es el mismo que el elemento tal que $b_{ki} = b_{ik}^T$.

El elemento a_{jk}, es el mismo que el elemento tal que $a_{jk} = a_{kj}^T$.

Por tanto, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$c_{ij}^T = \Sigma_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$
$$= \Sigma_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T$$

Por defición de multiplicacion de matrices el elemento $c_{ij}^T = \Sigma_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T$ es el ij-ésimo de la multiplicación de matrices $(b_{ij})_{nxn}^T (a_{ij})_{nxn}^T$.

Anteriormente tambíen se mostró que c_{ij}^T es el ij-ésimo de la multiplicación de la matriz $(AB)^T$.

$\therefore (AB)^T$ y $(b_{ij})_{nxn}^T (a_{ij})_{nxn}^T$ son matrices iguales término a término

$$\Rightarrow (AB)^T = (b_{ij})_{nxn}^T (a_{ij})_{nxn}^T$$

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

P.D: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostracion.

Una manera de probar la veracidad de esta igualdad es reducir la expresión a una igualdad de identidades, así demostramos que la proposición de la que partimos es verdadera.

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por AB :

$$\Rightarrow (AB)^{-1}(AB) = B^{-1}A^{-1}(AB)$$

Por defición de matriz inversa tenemos que: $(AB)^{-1}(AB) = I$

$$\Rightarrow I = B^{-1}A^{-1}(AB)$$

Por asociatividad de matrices:

$$\begin{aligned}(B)^{-1}(A)^{-1}(AB) &= B^{-1}A^{-1}(AB)\\ &= B^{-1}A^{-1}AB\\ &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B\end{aligned}$$

Por defición de matriz inversa: $A^{-1}A = I$

$$\Rightarrow I = B^{-1}IB$$

Como $IB = B$

$$\Rightarrow I = B^{-1}B$$

Por defición de matriz inversa: $B^{-1}B = I$

$$\Rightarrow I = I$$

Al reducir la expresión inicial a una igualdad de matrices identidad hemos demostrado la veracidad de la proposición inicial.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\blacksquare$$

3. Problema 3

Considere un proyectil que se dispara verticalmente enu un campo gravitatorio constante. Suponiendo que las velocidades iniciales sean iguales, comparar los tiempos necesarios para que el proyectil alcance su alltura máxima:

a. Cuando la fuerza resistente sea nula.

b. Cuando la fuerza resistente es proporcional a la velocidad instantánea del proyectil.

Modelo matemático: Sea $y(t)$ la altura de un proyectil en cualquier instante t, por la Segunda Ley de Newton se tiene:

$$-mg - mkv = ma$$

$$-g - kv = a$$

$$-g - kv = \frac{dv}{dt}$$

Condiciones: $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$
Interrogante: t_1, tal que el proyectil alcance $y_{1,max}$ con $k = 0$; t_2, tal que el proyectil alcance $y_{2,max}$ con $k > 0$.

Solución:

$$-g - kv = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{g + kv} = -dt$$

$$\int \frac{dv}{g + kv} = -\int dt$$

$$\frac{\ln(g + kv)}{k} = -t + C_1^*$$

$$\ln(g + kv) = -kt + C_1$$

$$g + kv = e^{-kt + C_1}$$

$$g + kv = e^{C_1} e^{-kt}$$

$$kv = C_1 e^{-kt} - g$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0$:

$$kv_0 = C_1 - g$$

$$\Rightarrow C_1 = g + kv_0$$

$$kv = (g + kv_0)e^{-kt} - g$$

$$\therefore v(t) = \frac{g + kv_0}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

Para hallar el tiempo necesario para que el proyectil alcance $y_{1,max}$ (en un medio con $k > 0$), se busca un t_1 tal que $v(t_1) = 0$.

$$0 = (g + kv_0)e^{-kt_1} - g$$

$$e^{-kt_1} = \frac{g}{g + kv_0}$$

$$-kt_1 = \ln\left(\frac{g}{g + kv_0}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{g}{g + kv_0}\right)$$

En un medio sin resistencia al aire, es decir, con $k = 0$, se puede hallar el tiempo para que el proyectil alcance $y_{2,max}$ a partir de las ecuaciones básicas de cinemática.

$$0 = v_0 - gt_2$$

$$v_0 = gt_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{g}$$

4. Problema 4

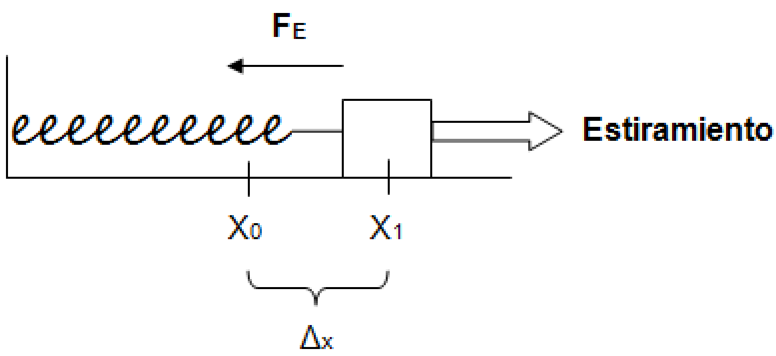
Un oscilador armónicose compone de una masa de 100 gramos sujeta a un muelle de constante recuperadora de 104 dinas/cm. Se desplaza la masa una distancia de 3 cm, soltándose desde el reposo. Calcule:

a. Frecuencia propia ν_o

b. Periodo τ_o

c. Energía total

d. Velocidad máxima



Por la segunda ley de Newton :

$$F = ma$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, sustituyendo:

a. Frecuencia propia ν_o

Recordemos la frecuencia angular $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

Despejemos la variable ω_o

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordando la igualdad $\omega_o = 2\pi\nu_o$, de donde despejamos la frecuencia propia ν_o

$$\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

Sustituyendo $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en la ecuación anterior.

$$\nu_o = \frac{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{2\pi}$$

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(10^4 dinas/cm)}{(100g)}}$$

$$\nu_o = 1{,}6\frac{1}{s}$$

$\therefore$ La frecuencia propia es $\nu_o = 1{,}6\frac{1}{s}$

b. Periodo τ_o
Anteriormente llegamos a la ecuación

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que $\nu_o = \frac{1}{\tau_o}$, vamos a realizar esta sustitución en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m}}$$

Despejamos para el periodo τ_o:

$$\tau_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$= \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\tau_o = 2\pi\sqrt{\frac{(100g)}{(10^4 dinas/cm)}}$$

$$\nu_o = 0{,}62s$$

$\therefore$ El periodo es $\tau_o = 0{,}63$ s
c. Energía total

Como la energía total es la suma de la energía potencial y la energía cinética, primero buscaremos expresiones para la velocidad y la posición.

Recordemos la ecuación diferencial del sistema

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Observación: $m\ddot{x} + kx = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes.

Y de la redacción del problema identificamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_o = 3cm$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

Observación: Tenemos condiciones iniciales en $t = 0$ por tanto podemos usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial.

$$\mathscr{L}\{m\ddot{x} + kx\} = \mathscr{L}\{0\}$$

Recordemos que $\mathscr{L}\{0\} = 0$

$$\mathscr{L}\{m\ddot{x}\} + \mathscr{L}\{kx\} = 0$$
$$m\,\mathscr{L}\{\ddot{x}\} + k\,\mathscr{L}\{x\} = 0$$

Sea $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$ y recordando que $x(0) = x_o = 3cm$ y $= \dot{x}(0) = 0$

- En $m\,\mathscr{L}\left\{\ddot{x}\right\}$:

$$\begin{aligned} m\,\mathscr{L}\left\{\ddot{x}\right\} &= m\left(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right) \\ &= m\left(s^2X(s) - sx_o - 0\right) \\ &= ms^2X(s) - msx_o \end{aligned}$$

- En $k\,\mathscr{L}\left\{x\right\}$:

$$k\,\mathscr{L}\left\{x\right\} = kX(s)$$

Sustituyemos las anteriores igualdades en la ecuación diferencial:

$$ms^2X(s) - msx_o + kX(s) = 0$$

Ahora despejamos para $X(s)$:

$$\begin{aligned} ms^2X(s) - msx_o + kX(s) &= 0 \\ ms^2X(s) + kX(s) &= mx_os \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s)\left(ms^2 + k\right) &= mx_os \\ X(s) &= \frac{mx_os}{ms^2 + k} \\ X(s) &= \frac{mx_os}{m\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)} \\ X(s) &= \frac{x_os}{s^2 + \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{x_os}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} \\ &= x_o\,\mathscr{L}^{1}\left\{\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} \end{aligned}$$

Como $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = Cos(kt)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{k}{m}}\right\} = Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Tambien sabemos que $\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = x(t)$

Hacemos las sustituciones de las transformadas inversas de Laplace:

$$\therefore x(t) = x_o Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Ahora para determinar $\dot{x}(t)$ derivamos a $q(t)$:

$$x(t) = x_o Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\therefore \dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}x_o Sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Recordando que $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$T = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_o^2 Sen^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Recordando que $V = \frac{1}{2}kx^2$

$$T = \frac{1}{2}kx_o Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Y como la energía mecánica está dada por $E = T + V$

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_o^2 Sen^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{1}{2}kx_o^2 Cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

En ese sistema solo actúan fuerzas conservativas, por tanto la energía se conserva. Evaluemos la energía en el tiempo $t = 0$:

$$E(0) = \frac{1}{2}(100g)\frac{(10^4 dinas/cm)}{m}(3cm)^2 Sen^2\left(\sqrt{\frac{(10^4 dinas/cm)}{(100g)}}(0s)\right)$$

$$+\frac{1}{2}(10^4 dinas/cm)(3cm)^2 Cos^2\left(\sqrt{\frac{(10^4 dinas/cm)}{(100g)}}(0s)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(10^4 dinas/cm)(3cm)^2$$

$$= 45000 ergios$$

$\therefore$ La energía total del sistema es de 45000 ergios

d. Velocidad máxima

Retomemos la ecuación de la velocidad que encontramos:

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}x_o Sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Expresemos el módulo de la velocidad:

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}x_o Sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)^2}$$

$$\|\dot{x}(t)\| = \sqrt{\frac{k}{m}}x_o Sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Esta expresión alcanza su máximo cuando: $Sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = 1$

$$\|\dot{x}(t)\|_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_o$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\|\dot{x}(t)\|_{max} = \sqrt{\frac{(10^4 dinas/cm)}{(100g)}}(3cm)$$

$$= 30\frac{cm}{s}$$

$\therefore$ La velocidad máxima es de 30 $\frac{cm}{s}$

Por lo tanto:

a. **La frecuencia propia es** $\nu_o = 1{,}6\ \frac{1}{s}$

b. **El periodo es** $\tau_o = 0{,}63$ **s**

c. **La energía total del sistema es de 45000 ergios**

d. **La velocidad máxima es de 30** $\frac{cm}{s}$