Tarea 1: Vectores

Jesus E. Loera

February 21, 2021

Contents

Abstract

En ésta tarea demostraremos algunas de las propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^n$

Introduction

Este es un resumen con los apuntes más importantes de la tercera sesión del curso de mecánica teórica

1 Transpuesta de una Matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Definimos su matriz transpuesta como:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Es posible generar la transposición de una matriz de la siguiente manera:

Dada una matriz A:

$$A = (a_{ij})_{mxn} \in M_{mxn} \tag{3}$$

Entonces su transpuesta es:

$$A^T = (b_{ij})_{nxm} \in M_{nxm} \mid b_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

2 Matrices simétricas

Una matriz cuadrada A es simétrica si:

$$A^T = A$$

3 Matrices antisimétricas

Una matriz cuadrada A es antisimétrica si:

$$A^T = -A$$

4 Definición del producto punto con multiplicación matricial

Recordemos la anterior definicón que teníamos para el producto punto:

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(X, Y) \longmapsto X \bullet Y = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ..., x_ny_n)$$

Dados X, Y vectores renglones en $\mathbb{R}^n$ o matrices de M_{1xn}

$$X \bullet Y = XY^T = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Obs: Notemos que con ambas formas de el producto obtenemos un escalar y una matriz 1X1

5 Otra forma de reescribir una matriz

Consideremos la matriz de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{6}$$

Realizando las respectivas operaciones podremos comprobar que:

$$A = a\, i^T i + b\, i^T j + c\, i^T k + d\, j^T i + e\, j^T j + f\, j^T k + g\, k^T i + h\, k^T j + i\, k^T k \tag{7}$$

Tal que:

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$
$$j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$
$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

6 Determinante de una matriz

Tengamos una matriz $A = (a_{ij})_{2X2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{11}$$

Su determinante, denotado por $det(A)$ o $\mid A \mid$, lo calculamos de la siguiente manera:

$$\mid A \mid = det(A) = A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{12}$$

Ahora, en el caso de una matriz $A = (a_{ij})_{3X3}$, por ejemplo, la de la ecuación (6):

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Podemos calcular su determinante de la siguiente manera:

$$\mid A \mid = det(A) = A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{13}$$

7 Producto cruz de vectores

Consideremos dos vectores $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos su producto cruz como:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(X, Y) \longmapsto X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$