UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Nombre del estudiante: Alessandro Romo Gutiérrez

Matrícula: ES1921019456

Grupo: MT-MEDP-2502-B2-001

Actividad 1. Ecuaciones diferenciales clásicas

Docente: Luis Fernando Orozco Cortés

Fecha de entrega: 30 de septiembre de 2025

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los subespacios vectoriales constituyen uno de los conceptos fundamentales en el álgebra lineal, ya que permiten estudiar la estructura interna de los espacios vectoriales (Boyce et al., 2012). Su importancia radica en que proporcionan un marco para comprender las transformaciones lineales, las soluciones de sistemas de ecuaciones homogéneas y la descomposición de espacios en componentes más simples. En aplicaciones prácticas, los subespacios aparecen en áreas como la computación gráfica, donde representan planos y rectas; en física, donde modelan espacios de soluciones para ecuaciones diferenciales; y en machine learning, donde forman la base para técnicas de reducción de dimensionalidad como el análisis de componentes principales. La capacidad de trabajar con subespacios facilita la resolución de problemas complejos al descomponerlos en partes manejables que preservan las propiedades algebraicas del espacio original.

Los subespacios vectoriales son los bloques constructivos fundamentales del álgebra lineal moderna. Su estudio no solo revela la estructura interna de los espacios vectoriales, sino que también proporciona las herramientas necesarias para analizar transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones. Como señala Axler (2015) en su obra *Linear Algebra Done Right*: 'La noción de subespacio es crucial porque permite descomponer espacios vectoriales en partes más pequeñas y manejables, facilitando así el análisis de propiedades geométricas y algebraicas. Además, los subespacios invariantes juegan un papel esencial en la comprensión de operadores lineales, particularmente en la teoría espectral y en la forma canónica de Jordan.' Esta perspectiva destaca cómo los subespacios no son meras abstracciones matemáticas, sino herramientas poderosas que conectan la teoría pura con aplicaciones prácticas en física, ingeniería y ciencia de datos(Axler, S., 2015, p. 23)

Ejercicio 1

Definición matemática de EDO: Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que relaciona una función desconocida de una variable independiente con sus derivadas. Matemáticamente se expresa como:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

donde $y = y(x)$ es la función desconocida y x es la variable independiente.

Definición matemática de EDP: Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que relaciona una función desconocida de múltiples variables independientes con sus derivadas parciales. Matemáticamente:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

donde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ es la función desconocida.

Diferencia fundamental: La diferencia principal radica en el número de variables independientes. Las EDOs involucran una sola variable independiente y derivadas ordinarias, mientras que las EDPs involucran múltiples variables independientes y derivadas parciales. Esta diferencia implica que los métodos de solución, las condiciones iniciales/frontera y el comportamiento de las soluciones son sustancialmente distintos.

Ejercicio 2

Condición inicial: Matemáticamente, para una EDO de orden n, las condiciones iniciales especifican el valor de la función y sus derivadas en un único punto:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

Se utilizan principalmente en problemas de valor inicial donde la variable independiente representa tiempo.

Condición de contorno: Para EDPs o EDOs en intervalos finitos, las condiciones de contorno especifican valores en los límites del dominio:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

o combinaciones de valores y derivadas en múltiples puntos.

Justificación de la diferencia: Existe una diferencia fundamental: las condiciones iniciales se especifican en un solo punto del dominio y son típicas de problemas evolutivos, mientras que las condiciones de contorno se especifican en múltiples puntos (usualmente los extremos del dominio) y caracterizan problemas estacionarios. Matemáticamente, los problemas con condiciones iniciales suelen tener solución única, mientras que los problemas con condiciones de contorno pueden tener solución única, múltiples soluciones o ninguna.

Ejercicio 3

i) $uy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$

- **Orden:** 2 (derivada de mayor orden es segunda)
- **Linealidad:** No lineal (término $uy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ es no lineal)
- **Homogeneidad:** No homogénea (término independiente = 1)

ii) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 3x$

- **Orden:** 3 (derivada de mayor orden es tercera)
- **Linealidad:** No lineal (término $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4$ es no lineal)
- **Homogeneidad:** No homogénea (término independiente = $3x$)

iii) $c\frac{\partial^3 m}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} - 5m = -3t$

- **Orden:** 3 (derivada de mayor orden es tercera)
- **Linealidad:** Lineal (todos los términos son lineales en m y sus derivadas)
- **Homogeneidad:** No homogénea (término independiente = $-3t$)

iv) $xy\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + xx\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + yz\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v = 0$

- **Orden:** 2 (derivada de mayor orden es segunda)
- **Linealidad:** Lineal (todos los términos son lineales en v y sus derivadas)
- **Homogeneidad:** Homogénea (término independiente = 0)

Ejercicio 4

Definición del operador Nabla en coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Transformación a coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos\phi$$

$$y = \rho \sin\phi$$

$$z = z$$

Gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergencia en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 5: Ecuación de onda y ecuaciones de Maxwell

Ecuación de onda: Matemáticamente, la ecuación de onda unidimensional es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(x,t)$ representa el desplazamiento y c es la velocidad de propagación.

Interpretación física: La ecuación de onda describe la propagación de perturbaciones en medios elásticos. Físicamente, representa cómo una perturbación inicial se transmite a través de un medio con velocidad constante

c. Aplica a fenómenos como ondas sonoras, ondas en cuerdas y ondas electromagnéticas.

Ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Ley de Gauss para magnetismo)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Ampère-Maxwell)}$$

Las ecuaciones de Maxwell unifican la electricidad y el magnetismo, demostrando que los campos eléctricos y magnéticos son manifestaciones del mismo fenómeno electromagnético. Predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz, estableciendo así la naturaleza electromagnética de la luz.

Ambos conjuntos de ecuaciones representan pilares fundamentales de la física matemática. La ecuación de onda captura la esencia de la propagación de energía a través de medios, mientras que las ecuaciones de Maxwell revelan la estructura fundamental del electromagnetismo y allanaron el camino para la relatividad especial.

CONCLUSIONES

Esta actividad ha permitido integrar conceptos fundamentales del álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales, demostrando su interconexión en el análisis matemático. El estudio de subespacios vectoriales revela su importancia como estructura base para comprender espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales. El análisis comparativo entre EDOs y EDPs, junto con la clasificación de ecuaciones según orden, linealidad y homogeneidad, consolida el marco teórico necesario para abordar problemas aplicados. La derivación de operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas y el estudio de ecuaciones clásicas como la de onda y Maxwell refuerzan la conexión entre matemáticas puras y sus aplicaciones en física e ingeniería, destacando el valor unificador del pensamiento matemático estructurado.

REFERENCIAS

[1] Axler, S. (2015). *Linear algebra done right* (3ra ed.). Springer.

[2] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary differential equations and boundary value problems* (10ma ed.). Wiley.