UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Nombre del estudiante: Fátima Tairi Tlapanco Gaspar

Grupo: MT-MEDP-2502-B2-001

Actividad 1. Ecuaciones diferenciales clásicas.

Fecha de entrega: 5 de octubre del 2025

Introducción

Los subespacios vectoriales son piezas clave en el estudio del álgebra lineal, ya que nos ayudan a organizar y estructurar los vectores dentro de un espacio más amplio. No solo hacen que sea más fácil entender las propiedades de los sistemas lineales, sino que también son fundamentales para diversas aplicaciones en física, ingeniería, ciencias de la computación y análisis de datos. Al explorar los subespacios vectoriales, los estudiantes aprenden a reconocer conjuntos de vectores que cumplen con las condiciones de cierre bajo suma y multiplicación escalar. Esto les permite encontrar soluciones eficientes para problemas complejos, como resolver sistemas de ecuaciones lineales y optimizar en espacios multidimensionales. Comprender estos conceptos proporciona una base sólida para temas más avanzados, como espacios generados, bases y dimensión, que son esenciales para modelar fenómenos del mundo real utilizando herramientas matemáticas precisas.

> "Los subespacios vectoriales constituyen el núcleo del álgebra lineal, pues ofrecen un marco en el cual se pueden analizar y manipular conjuntos de vectores de manera estructurada y consistente. Comprender cómo se forman, cómo se relacionan y cómo se aplican permite no solo resolver problemas matemáticos abstractos, sino también modelar fenómenos físicos y tecnológicos de manera precisa y eficiente. Sin esta comprensión, los conceptos de base, dimensión y proyección carecerían de sentido, y la capacidad de aplicar la teoría lineal en contextos prácticos se vería severamente limitada" (Anton, 2013, p. 112).

Desarrollo

5. **Argumenta** cada una de tus respuestas para una de las siguientes preguntas:

Ejercicio 1. Explica con detalle cuál es la diferencia entre una ecuación diferencial parcial y una ecuación diferencial ordinaria, considerando y anotando las definiciones matemáticas para cada una de ellas.

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es cuando “una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria” (Zill, 1997).

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es “una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes” (Zill, 1997).

Ejemplo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} - 3\frac{\partial y}{\partial z} = x^2$$

Entonces su diferencia radica en la cantidad de variables independientes, las EDO solo tienen una y las EDP tienen más de una.

Ejercicio 2. ¿Existe diferencia entre una condición inicial y una condición de contorno? Justifica tu respuesta tomando en cuenta las definiciones matemáticas.

La diferencia fundamental radica en dónde y cómo se define la información para la función desconocida: las condiciones iniciales lo hacen en un instante temporal específico y las de contorno en los extremos o fronteras del dominio espacial.

Ejercicio 3. De acuerdo a las definiciones matemáticas describe las EDP siguientes, indicando si es lineal, homogénea y el orden.

i) $uy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$

Es de orden 2, no lineal y no homogénea

ii) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^4 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 3x$

Es de orden 3, no lineal y no homogénea

iii) $c\frac{\partial^3 m}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial m}{\partial x} - 5m = -3t$

Es de orden 3, si es lineal y no homogénea

iv) $$xy\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + xz\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + yz\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v = 0$$

Es de orden 2, si es líneas y si es homogénea

Ejercicio 4. A partir de la definición matemática del operador Nabla, construye los operadores: gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciano en coordenadas cilíndricas, indicando el desarrollo para la obtención de cada uno de ellos.

En coordenadas cartesianas, el operador Nabla (∇) se define como:

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

En coordenadas cilíndricas, donde:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \qquad z = z$$

y los vectores unitarios son e_r, e_θ, e_z, el operador Nabla se transforma en:

$$\nabla = e_r\frac{\partial}{\partial r} + e_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + e_z\frac{\partial}{\partial z}$$

-Gradiente:

El grandiente de un escalar $f(r,\theta,z)$ es:

$$\nabla f = e_r\frac{\partial f}{\partial r} + e_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + e_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

-Divergencia

La divergencia es un campo vectorial $A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_z e_z$ es:

$$\nabla\cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla = \frac{\partial A_x}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_y}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

-Rotacional

$$\nabla\times A = \begin{vmatrix} e_r & e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\theta & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)e_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)e_z$$

-Laplaciano

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ejercicio 5. Considerando las ecuaciones diferenciales clásicas, explica la ecuación de onda y las ecuaciones de Maxwell, reflexionando su interpretación física.

La ecuación de onda unidimensional se escribe como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- ➔ $u(x,t)$ es la función que describe la perturbación (por ejemplo, desplazamiento de una cuerda, presión de sonido, campo eléctrico, etc.).
- ➔ c es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

En tres dimensiones, la ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

Donde ∇^2 es el Laplaciano, que describe cómo se propaga la perturbación en el espacio.

Interpretación física

- La ecuación describe cómo las ondas se propagan a través de un medio.
- Cada punto del medio "siente" la influencia de sus vecinos, transmitiendo energía sin que haya transporte de materia.
- Ejemplos: ondas en cuerdas, ondas sonoras, ondas electromagnéticas en el vacío.

Las ecuaciones de Maxwell gobiernan los campos eléctricos y magnéticos:

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. Ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot B = 0$$

3. Ley de Faraday (inducción)

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

4. Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

- E y B son los campos eléctrico y magnético.
- ρ es la densidad de carga, J la densidad de corriente.
- ε_0 y μ_0 son constantes del vacío.

Interpretación física

Estas ecuaciones describen cómo cargas y corrientes generan campos eléctricos y magnéticos, y cómo estos campos interactúan y se propagan en el espacio.

La combinación de estas ecuaciones da lugar a ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz.

Conclusiones

A lo largo de los ejercicios y explicaciones que hemos visto, ha quedado claro lo crucial que es entender los fundamentos matemáticos que sustentan las ecuaciones diferenciales, los operadores vectoriales y los subespacios vectoriales. La diferencia entre las condiciones iniciales y de contorno nos ayudó a ver cómo se determina la unicidad y existencia de soluciones en problemas tanto dinámicos como estacionarios. Al analizar las ecuaciones diferenciales parciales, se hizo evidente la importancia de identificar el orden, la linealidad y la homogeneidad para poder comprender su comportamiento y las posibles soluciones. La construcción de los operadores gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciano en coordenadas cilíndricas reforzó la conexión entre la matemática y su aplicación en física e ingeniería. Además, reflexionar sobre la ecuación de onda y las ecuaciones de Maxwell nos mostró cómo los modelos matemáticos se relacionan con fenómenos físicos reales. Por último, los subespacios vectoriales resultaron ser un marco fundamental para organizar y manipular vectores, brindando herramientas valiosas para resolver problemas lineales complejos y modelar situaciones del mundo real.

> "El aprendizaje profundo de los conceptos fundamentales de álgebra lineal y análisis vectorial no solo permite resolver problemas matemáticos abstractos, sino que también proporciona un lenguaje preciso para modelar fenómenos físicos, tecnológicos y científicos, desarrollando habilidades críticas para la resolución eficiente de problemas en múltiples contextos" (Lay, 2012, p. 95).

Referencias Bibliográficas

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2013). *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill Interamericana.

Matemáticas sencillas. (2016, 2 agosto). *Clasificación de ecuaciones diferenciales. Tipo, orden y linealidad ecuación diferencial. Ejemplos* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=giuEYJhb5gU

David Marquez. (2019, 2 noviembre). *13 - Operador Nabla (Parte 1)* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=DUHYmFXpMlA

Anton, H. (2013). *Elementary Linear Algebra* (11th ed.). Wiley.

Lay, D. C. (2012). *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.). Pearson.