UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA GENERAL

Nombre del estudiante: Alessandro Romo Gutiérrez

Matrícula: ES1921019456

Grupo: MT-MTGE-2502-B2-001

Actividad 1. Utilidad de la topología

Docente: Cristhian Ernesto Hidber Cruz

Fecha de entrega: 30 de septiembre de 2025

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La topología constituye una de las ramas fundamentales de las matemáticas modernas, emergiendo como una generalización poderosa de conceptos geométricos y analíticos. Su desarrollo histórico, que se remonta a los trabajos de Euler con el problema de los puentes de Königsberg y que se consolidó en el siglo XX, representa un cambio paradigmático en la manera de entender las propiedades espaciales. Esta disciplina trasciende de las nociones métricas tradicionales para enfocarse en propiedades más esenciales que permanecen invariantes bajo deformaciones continuas. La presente investigación busca explorar los fundamentos de la topología, sus conceptos básicos en both espacios métricos y topológicos, y las aplicaciones que hacen de esta área matemática una herramienta indispensable en múltiples campos del conocimiento científico y tecnológico.

Ejercicio 1

La topología es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los objetos que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas. A diferencia de la geometría, que se enfoca en medidas y ángulos, la topología se interesa por conceptos más fundamentales como la conexión, la compacidad y la continuidad.

El objeto de estudio principal de la topología son los espacios topológicos, que consisten en un conjunto X y una colección de subconjuntos de X llamados abiertos, que satisfacen ciertas propiedades. Estos espacios permiten definir rigurosamente conceptos como límites, continuidad y convergencia.

Entre las aplicaciones más importantes de la topología se encuentran:

- En análisis matemático: estudio de convergencia y continuidad
- En física: teoría de campos, relatividad general y mecánica cuántica
- En geometría diferencial: estudio de variedades
- En ciencia de datos: análisis topológico de datos (TDA)
- En ingeniería: teoría de circuitos y robótica

La topología tiene varias subramas como la topología general, algebraica, diferencial y geométrica, cada una con sus métodos y aplicaciones específicas.

Ejercicio 2

Referencia principal: Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.

a. **Bola abierta**: Dado un espacio métrico (X, d), un punto $x_0 \in X$ y $r > 0$, la bola abierta es $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.

b. **Bola cerrada**: $B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$.

c. **Conjunto abierto**: Un conjunto $A \subset X$ es abierto si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

d. **Conjunto cerrado**: Un conjunto $C \subset X$ es cerrado si su complemento $X \setminus C$ es abierto.

e. **Punto interior**: x es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

f. **Punto de adherencia**: x es punto de adherencia de A si para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

g. **Punto de acumulación**: x es punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Ejercicio 3

Referencia principal: Munkres, J. R. (2018). *Topology* (2nd ed.). Pearson Education.

a. **Topología en un conjunto X**: Una colección τ de subconjuntos de X que satisface:

   a) $\emptyset, X \in \tau$

   b) La unión de cualquier familia de elementos de τ pertenece a τ

c) La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ

b. **Espacio topológico**: Par (X, τ) donde τ es una topología en X.

c. **Conjunto abierto**: Los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos.

d. **Conjunto cerrado**: Un conjunto $C \subset X$ es cerrado si $X \setminus C$ es abierto.

e. **Punto interior**: x es punto interior de A si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset A$.

f. **Punto de adherencia**: x es punto de adherencia de A si para todo abierto U con $x \in U$, se tiene $U \cap A \neq \emptyset$.

g. **Punto de acumulación**: x es punto de acumulación de A si para todo abierto U con $x \in U$, se tiene $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

h. **Vecindad de un punto**: V es vecindad de x si existe U abierto tal que $x \in U \subset V$. Vecindad abierta es un abierto que contiene a x.

i. **Topología inducida**: Dado (X, τ) y $Y \subset X$, la topología inducida en Y es $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$.

Ejercicio 4

Conceptos elegidos: Conjunto abierto (c) y Punto interior (e)

Conjunto abierto:

Semejanzas:

- En ambos contextos, los conjuntos abiertos forman la base para definir otros conceptos topológicos
- En espacios métricos, la colección de todos los conjuntos abiertos forma una topología

Diferencias:

- En espacios métricos, los abiertos se definen usando bolas abiertas y la métrica
- En espacios topológicos, los abiertos son elementos primitivos definidos axiomáticamente
- Todo espacio métrico induce una topología, pero no toda topología es metrizable

Punto interior:

Semejanzas:

- En ambos casos, un punto es interior si está çompletamente rodeado"por el conjunto
- El interior de un conjunto se define como el conjunto de todos sus puntos interiores

Diferencias:

- En espacios métricos, el rodeo"se mide con bolas de radio positivo
- En espacios topológicos, el rodeo"se establece mediante conjuntos abiertos de la topología
- La noción métrica depende de la distancia, mientras que la topológica es más general

CONCLUSIONES

El estudio comparativo entre espacios métricos y espacios topológicos revela la elegante estructura matemática que subyace a la topología. Los espacios métricos, con su noción intuitiva de distancia, proporcionan un marco concreto para entender conceptos topológicos fundamentales, mientras que los espacios topológicos generalizan estas ideas a un nivel abstracto que captura las propiedades esenciales de "proximidadz çontinuidad"sin depender de una métrica específica.

La investigación demuestra que la topología no es solo una abstracción matemática, sino un lenguaje poderoso que unifica conceptos aparentemente dispersos en diferentes áreas de las matemáticas y las ciencias. La capacidad de la topología para identificar propiedades invariantes bajo transformaciones continuas la convierte en una herramienta invaluable en campos tan diversos como la física teórica, la ciencia de datos y la ingeniería.

La relación entre espacios métricos y topológicos ilustra un principio fundamental en el desarrollo matemático: la búsqueda de generalización que preserve las propiedades esenciales mientras amplía el ámbito de aplicación. Esta dualidad entre lo concreto y lo abstracto, entre la intuición geométrica y la potencia axiomática, constituye el verdadero valor de la topología como disciplina matemática y como herramienta para comprender la estructura del espacio y la continuidad en sus múltiples manifestaciones.

REFERENCIAS

[1] Munkres, J. R. (2018). *Topology* (2nd ed.). Pearson Education.

[2] Willard, S. (2004). *General Topology*. Dover Publications.

[3] Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit & Comp.

[4] Kelley, J. L. (1975). *General Topology*. Springer-Verlag.

[5] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.